پلتفرم اختصاصی
مهندسی کنترل

https://controlengineers.ir

https://t.me/controlengineers

https://www.instagram.com/controlengineers.ir

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

تمرینهای سری اول

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۶/ ۳۰

۱- برای بردارهای حقیقی $\mathbf{u}_{n\times 1}$ و $\mathbf{v}_{n\times 1}$ صحت تساوی زیر را نشان دهید.

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})^T(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2$$

۲- اگر ماتریس های A، B و $A+B$ غیر منفرد باشند، نشان دهید،

$$A(A+B)^{-1}B = B(A+B)^{-1}A = (A^{-1}+B^{-1})^{-1}$$

۳- نشان دهید اگر $P^{-1}AP = B$ باشد، آنگاه $P^{-1}A^nP = B^n$ است ($n \geq 1$).

۴- هر یک ماتریس های زیر را بصورت حاصل جمع یک ماتریس متقارن و شبه متقارن نمایش دهید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 7 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

۵- اگر بتوان ماتریس A را بصورت زیر تفکیک کرد، $|A|$ را بدون حل مستقیم بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 17 & 2 & 4 \\ 6 & 0 & 24 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_5 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

۶- ثابت کنید که برای ماتریس های $A_{n\times n}$، $B_{n\times m}$، $C_{m\times n}$ و $D_{m\times m}$ روابط زیر برقرار هستند،

الف) اگر $|A| \neq 0$ و $|D - CA^{-1}B| \neq 0$ باشند، آنگاه،

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}$$

ب) اگر $|D| \neq 0$ و $|A - BD^{-1}C| \neq 0$ باشند، آنگاه،

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1} & -(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} + D^{-1} \end{bmatrix}$$

۷- معادله ماتریسی زیر به معادله لیاپانوف معروف است،

$$A^TP + PA = -Q$$

در این معادله $A_{n\times n}$ ماتریس دلخواه، $Q_{n\times n}$ ماتریس متقارن و $P_{n\times n}$ یک ماتریس مجهول است.

الف) نشان دهید ماتریس مجهول $P_{n\times n}$ یک ماتریس متقارن است.

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

تمرینهای سری اول

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۶/ ۳۰

ب) اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ و $Q=I$ باشد، ماتریس مجهول P را بدست آورید.

ج) جواب بدست آمده را با استفاده از دستور $P=\text{lyap}(A,Q)$ در نرم افزار MATLAB مقایسه نمایید.

۸- معادلات دینامیکی سیستمی بصورت زیر می باشد،

$$\dddot{y}(t)+3\ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+y(t)=u(t)$$

الف) با فرض اینکه $x_1(t)=y(t)$ و $x_2(t)=\dot{y}(t)$ و $x_3(t)=\ddot{y}(t)$ باشد، فرم معادلات را بصورت $\dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t)+B\mathbf{u}(t)$ بنویسید.

ب) اگر $X(s)$ تبدیل لاپلاس $\mathbf{x}(t)$ باشد، $X(s)$ را بصورت پارامتری بدست آورید.

۹- ثابت کنید،

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ k & 1 & 1 & 1\\ k & k & 1 & 1\\ k & k & k & 1\end{vmatrix}=(1-k)^3$$

و

$$\begin{vmatrix}1+k_1 & k_1 & k_1 & k_1\\ k_2 & 1+k_2 & k_2 & k_2\\ k_3 & k_3 & 1+k_3 & k_3\\ k_4 & k_4 & k_4 & 1+k_4\end{vmatrix}=1+k_1+k_2+k_3+k_4$$

موفق باشید

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

تمرینهای سری دوم

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۷/۶

۱- ماتریس های زیر را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ -2 & -4 & 2\\ 4 & 5 & 2\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

با استفاده از روش گوس- جردن ماتریس C را چنان بیابید که $AC=B$ باشد.

۲- معکوس ماتریس های زیر را با استفاده از روش گوس- جردن بدست آورید. صحت پاسخ خود را با استفاده از دستور inv در نرم افزار MATLAB بررسی نمایید.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 9 & 12\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & -2 & -3\end{bmatrix} \quad , \quad C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

۳- دستگاه معادلات جبری خطی زیر را در نظر بگیرید،

الف) $\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3=-2\\ 4x_1+3x_2+5x_3=0\\ 2x_1-x_2+3x_3=2\end{cases}$

ب) $\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3=1\\ 4x_1+3x_2+5x_3=1\\ 6x_1+5x_2+7x_3=1\end{cases}$

هر یک از معادلات را یکبار با روش حذفی گوسی و یکبار با روش گوس- جردن بصورت دستی حل نمایید. در هر مرحله ماتریس های مقدماتی مربوطه را بیابید و متغیرهای آزاد را بیان نمایید.

۴- دستگاه معادلات جبری خطی زیر را در نظر بگیرید،

الف) $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3-4x_4=2\\ 2x_1+4x_2+3x_3+x_4=5\end{cases}$

ب) $\begin{cases}x_1-4x_2=2\\ x_1+8x_2=5\\ x_1+2x_2=-1\end{cases}$

الف) فرم سطری پلکانی و فرم سطری پلکانی کاهش یافته این دو دستگاه معادلات را بدست آورده و آنها را حل نمایید. بیان کنید کدام متغیرها آزاد هستند؟

ب) صحت جوابهای خود را با استفاده از تابع rref در نرم افزار MATLAB بررسی نموده و نتایج را ارائه دهید.

۵- ماتریس های مقدماتی لازم برای تبدیل ماتریس A به یک ماتریس بالا مثلثی را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

تمرینهای سری دوم

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۷/۶

۶- کدام یک از سیستمهای زیر سازگار یا ناسازگار هستند؟ در صورت سازگار بودن آیا جواب منحصر بفرد دارند؟

الف) $\begin{cases} x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 - x_3 = 2 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$ ج) $\begin{cases} x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$

۷- سیستم زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5\lambda + 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 4\lambda + 2 \\ x_1 - 2\lambda x_2 + 7x_3 = 10\lambda - 1 \end{cases}$$

الف) دستگاه معادلات را به فرم سطری پلکانی تبدیل نمایید.

ب) برای چه مقادیری از پارامتر λ دستگاه معادلات سازگار است؟

ج) پاسخ سیستم را بیابید.

۸- اگر بخواهیم برای ماتریس غیرمنفرد $A_{n\times n}$ و بردار $\mathbf{b}_{n\times 1}$ حاصل عبارت زیر را بدست آوریم، چه روندی را پیشنهاد می کنید که با کمترین محاسبات جبری بتوان آن را محاسبه کرد.

$$\mathbf{x} = (I + A^{-1} + A^{-2} + A^{-3})\mathbf{b}$$

۹- برای چه مقداری از a در روش حذفی گوسی سه تا عنصر محوری بدست نمی آید؟

$$A = \begin{bmatrix} a & 2 & 3 \\ a & a & 4 \\ a & a & a \end{bmatrix}$$

۱۰- مقدار a, b, c, d را چنان بیابید که دستگاه معادلات $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ یکبار جواب نداشته و یکبار بیشمار جواب داشته باشد.

$$[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 4 & 5 & b \\ 0 & 0 & d & c \end{array}\right]$$

موفق باشید

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

تمرینهای سری سوم

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۷/۲۰

۱- ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ 4 & 18 & 26\\ 3 & 16 & 30\end{bmatrix}$$

الف) سه ماتریس مقدماتی E_1، E_2 و E_3 را طوری بدست آورید که ماتریس A را به فرم بالا مثلثی $E_3E_2E_1A=U$ تبدیل نماید. سپس با استفاده از آن تجزیه $A=LU$ ماتریس را بدست آورید.

ب) با استفاده از این تجزیه دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b_1}$ و $A\mathbf{x}=\mathbf{b_2}$ را حل نمایید.

$$\mathbf{b_1}=\begin{bmatrix}6\\0\\-6\end{bmatrix},\qquad \mathbf{b_2}=\begin{bmatrix}6\\6\\12\end{bmatrix}$$

ج) اگر قرار باشد دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}_k$ را برای $k=1,\ldots,n$ مکرراً حل نماییم کدامیک از دو روش تجزیه LU و حذفی گوسی به لحاظ تعداد محاسبات بهتر است؟

۲- با استفاده از اطلاعات زیر و بدون محاسبه A یا A^{-1} یا A^{-2} یا A^2 حاصل عبارت $A^{-1}\mathbf{x}+A^{-2}\mathbf{y}$ را بدست آورید،

$$L=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix},\qquad U=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{y}=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

ماتریس های L و U حاصل تجزیه $A=LU$ می باشند.

۳- ماتریس های متقارن زیر را در نظر بگیرید،

الف) $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$ ب) $A=\begin{bmatrix}4 & 2 & -6\\ 2 & 10 & 9\\ -6 & 9 & 26\end{bmatrix}$ ج) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 4 & 5\\ 0 & 5 & 6\end{bmatrix}$ د) $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$

الف) برای هر یک از ماتریس ها یک صورت درجه دوم به فرم $V(\mathbf{x})=\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ بدست آورید.

ب) صورت های درجه دوم $V(\mathbf{x})=\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ را با معیار سیلوستر تعیین علامت کنید.

ج) برای ماتریس های مثبت معین تجزیه چالسکی را بدست آورید. نتیجه را با دستور chol(A) در نرم افزار MATLAB بررسی نمایید.

۴- برای چه مقادیری از k ماتریس های زیر مثبت معین خواهند بود؟

الف) $A=\begin{bmatrix}k & -4 & -4\\ -4 & k & -4\\ -4 & -4 & k\end{bmatrix}$ ب) $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & k\\ -1 & 2 & -1\\ k & -1 & 2\end{bmatrix}$ ج) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & k & 4\\ 3 & 4 & 5\end{bmatrix}$ د) $A=\begin{bmatrix}1 & k & 0\\ k & 1 & k\\ 0 & k & 1\end{bmatrix}$

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

تمرینهای سری سوم

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۷/۲۰

۵- ماتریس های زیر را در نظر بگیرید،

الف) $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&4&4\\1&4&8\end{bmatrix}$ ب) $A=\begin{bmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{bmatrix}$ ج) $A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\2&3&4\end{bmatrix}$

تجزیه LU یا PLU ماتریس های زیر را بدست آورید. سپس ماتریس ها را به فرم $A=LDU$ تجزیه نمایید بطوریکه L یک ماتریس پایین مثلثی با عناصر قطری واحد، D یک ماتریس قطری و U یک ماتریس بالا مثلثی با عناصر قطری واحد باشد. (برای این کار می توانید از تجزیه $A=LU$ کمک بگیرید.)

۶- تجزیه $A=LU$ یا $A=PLU$ ماتریس های زیر را با استفاده از روش الگوریتم ماتریس های بلوکی بدست آورید و نتیجه را با استفاده از دستور [L,U,P]=lu(A) در نرم افزار MATLAB بررسی نمایید.

الف) $A=\begin{bmatrix}1&2&4&17\\3&6&-12&3\\2&3&-3&2\\0&2&-2&6\end{bmatrix}$ ب) $A=\begin{bmatrix}0&5&5\\2&3&0\\6&9&8\end{bmatrix}$ ج) $A=\begin{bmatrix}-3&2&0&3\\6&-6&0&-12\\-3&6&-1&16\\12&-14&-2&-25\end{bmatrix}$

۷- ماتریس A و بردار $\mathbf{b}$ را در نظر بگیرید، فرض کنید ماتریس A را بصورت حاصلضرب سه ماتریس ساده تجزیه کردیم. به این روش تجزیه LDU گفته می شود،

$$A=LDU=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_1&0&0\\0&d_2&0\\0&0&d_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\quad,\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

الف) تحت چه شرایطی ماتریس A غیرمنفرد است؟

ب) با استفاده از تجزیه بالا دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ زیر را حل کنید.

۸- هر یک از دستگاه معادلات زیر را با استفاده از تجزیه چالسکی حل نمایید،

الف) $\begin{cases}x_1=1\\x_2+2x_3=-1\\2x_2+8x_3=0\end{cases}$ ب) $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=-2\\x_1+2x_2+2x_3=1\\x_1+2x_2+7x_3=-1\end{cases}$

موفق باشید

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

تمرینهای سری چهارم

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۷/۲۷

۱- به ازای چه مقداری از λ بردارهای زیر مستقل خطی هستند؟

الف) $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}-1\\ \lambda\\ -1\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}=\begin{bmatrix}\lambda\\ -1\\ -1\end{bmatrix},\quad \mathbf{w}=\begin{bmatrix}-1\\ -1,\\ \lambda\end{bmatrix}$

ب) $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}1-\lambda\\ 2+\lambda\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}=\begin{bmatrix}2+\lambda\\ 1-\lambda\end{bmatrix}$

۲- کدامیک از دسته بردارهای زیر فضای برداری $\Re^3$ را اسپن می کنند؟

الف) $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}4\\ 4\\ 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}=\begin{bmatrix}2\\ 0\\ -1\end{bmatrix},\quad \mathbf{w}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$

ب) $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -1\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}=\begin{bmatrix}3\\ -1\\ 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{w}=\begin{bmatrix}-3\\ 8\\ -5\end{bmatrix}$

ج) $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{w}=\begin{bmatrix}2\\ 2\\ 4\end{bmatrix},\quad \mathbf{z}=\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 0\end{bmatrix}$

د) $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -1\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$

۳- کدامیک از دسته بردارها و مجموعه های زیر برای فضای برداری مورد نظر تشکیل پایه می دهند؟

الف) $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ -2\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}-1\\ 4\\ -4\end{bmatrix}$ (برای فضای برداری $\Re^3$)

ب) $\mathbf{p}_1=x-3,\quad \mathbf{p}_2=x^2+2x,\quad \mathbf{p}_3=x^2+1$ (فضای برداری $P_2(\Re)$)

ج) $\mathbf{p}_1=x^4,\quad \mathbf{p}_2=2x^3,\quad \mathbf{p}_3=1-x^2,\quad \mathbf{p}_4=3x-1,\quad \mathbf{p}_5=2x$ (برای فضای برداری $P_4(\Re)$)

د) $\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\right\}$ (برای فضای برداری $M_{2\times2}(\Re)$)

۴- ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}-2&3&7&-4&0\\-2&3&-2&2&-3\\4&-6&-8&4&2\end{bmatrix}$$

الف) بررسی کنید آیا ستون های ماتریس A مستقل خطی هستند یا نه؟

ب) بدون حل مستقیم بررسی کنید دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ به ازای کدام یک از بردارهای زیر سازگار است؟

$$\mathbf{b}_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}_2=\begin{bmatrix}-3\\1\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}_3=\begin{bmatrix}-5\\1\\6\end{bmatrix}$$

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

تمرینهای سری چهارم

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۷/۲۷

۵- فضای ستون های ماتریس های زیر را بدست آورید.

الف) $A=\begin{bmatrix}1&2\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$ ب) $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\\0&0\end{bmatrix}$ ج) $A=\begin{bmatrix}1&0\\2&0\\0&0\end{bmatrix}$ د) $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&8\\2&4\\6&16\end{bmatrix}$

ه) $A=\begin{bmatrix}1&0\\4&3\\2&3\end{bmatrix}$ و) $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}$ ز) $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&0&4\end{bmatrix}$ ح) $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

۶- فضای پوچی ماتریس های زیر را بدست آورید.

الف) $A=\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}$ ب) $A=\begin{bmatrix}1&5&7\\0&0&9\end{bmatrix}$ ج) $A=\begin{bmatrix}1&2&2&4\\3&8&6&16\end{bmatrix}$ د) $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&8\\2&4\\6&16\end{bmatrix}$

ه) $A=\begin{bmatrix}1&3&3&2\\2&6&9&5\\-1&-3&3&0\end{bmatrix}$ و) $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&8\end{bmatrix}$ ز) $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&6\end{bmatrix}$ ح) $A=\begin{bmatrix}1&1&2&3\\2&2&8&10\\3&3&10&13\end{bmatrix}$

۷- بررسی کنید کدامیک از مجموعه های زیر تشکیل یک زیر فضا برای فضای برداری مربوطه را می دهند؟

الف) تمامی ماتریس های 2×2 بالا مثلثی به فرم $\begin{bmatrix}a&b\\0&d\end{bmatrix}$ (برای فضای برداری $\mathrm{M}_{2\times 2}(\Re)$)

ب) مجموعه $S=\{[x,y,z]\in\Re^3 \mid 2x-y+z=\mathbf{0}\}$ (برای فضای برداری $\Re^3$)

ج) مجموعه $S=\left\{\begin{bmatrix}x&y\\0&z\end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix}1&-\frac{4}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&y\\0&z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}=0\right\}$ (برای فضای برداری $\mathrm{M}_{2\times 2}(\Re)$)

۸- ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2&3&1&4\\2&4&5&5&4&9\\3&6&7&8&5&13\end{bmatrix}$$

الف) فضای ستون های ماتریس A را بدست آورید.

ب) آیا دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ به ازای تمام بردارهای $\mathbf{b}\in\Re^3$ سازگار است؟

موفق باشید

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

تمرینهای سری پنجم

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۸/۴

۱- رتبه، فضای گستره، پوچی و فضای پوچی ماتریس های زیر را بدست آورید.

الف) $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$

ب) $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\-1&0&1\\0&2&1\\3&8&1\end{bmatrix}$

ج) $A=\begin{bmatrix}1&3&3&2\\2&6&9&5\\-1&-3&3&0\end{bmatrix}$

د) $A=\begin{bmatrix}1&4&0&2\\2&8&1&5\\-1&-4&3&1\\0&-3&4&4\end{bmatrix}$

ه) $A=\begin{bmatrix}1&2&1&5\\2&-1&7&5\\-1&0&-3&-3\\3&1&8&10\end{bmatrix}$

۲- برای چه مقادیری از بردار $\mathbf{b}$ دستگاه معادلات زیر سازگار است؟

الف) $\begin{bmatrix}1&4&2\\2&8&4\\-1&-4&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix}1&4\\2&9\\-1&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$

۳- ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

الف) ماتریس A^T را بدست آورید. سپس رتبه، فضای گستره، پوچی و فضای پوچی ماتریس A^T را حساب کنید.

ب) نشان دهید $R(A)\perp N(A^T)$ و $R(A^T)\perp N(A)$ است.

۴- ثابت کنید برای ماتریس A داریم،

الف) $R(A)\perp N(A^T)$ یا $R(A)^\perp=N(A^T)$

ب) $R(A^T)\perp N(A)$ یا $R(A^T)^\perp=N(A)$

۵- a، b و c را چنان بیابید که رتبه ماتریس A یکبار 1، یکبار 2 و یکبار 3 گردد.

$$A=\begin{bmatrix}a&-3&c\\1&3&-1\\b&9&-3\end{bmatrix}$$

۶- نشان دهید هر یک از ماتریس های رتبه یک را می توان بصورت حاصلضرب دو بردار ستونی و سطری نمایش داد.

الف) $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\-3&-6&-9\\0&0&0\end{bmatrix}$

ب) $A=\begin{bmatrix}-6&3&9\\2&-1&-3\\4&-2&-6\end{bmatrix}$

ج) $A=\begin{bmatrix}3&12&-1&-6\\6&24&-2&-12\\-3&-12&1&6\end{bmatrix}$

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

تمرینهای سری پنجم

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۸/۴

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

۷- در فضای برداری $\Re^3$ نمایش هر یک از بردارهای $\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{x},\mathbf{z}$ را برحسب بردارهای پایه $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ بدست آورید.

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}2\\-1\\6\end{bmatrix},\quad \mathbf{w}=\begin{bmatrix}3\\4\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}-2\\4\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{z}=\begin{bmatrix}1\\5\\3\end{bmatrix}$$

و

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix},\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}$$

موفق باشید

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

تمرینهای سری ششم

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۱/۲۴

۱- ماتریس A و بردار $\mathbf{b}$ را در نظر بگیرید،

الف) $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$ ب) $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\\0&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}4\\4\\6\end{bmatrix}$ ج) $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\\-1&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}3\\2\\7\end{bmatrix}$

- سازگار یا ناسازگار بودن دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ را بررسی نمایید.
- بردار $\hat{\mathbf{b}}$ یعنی تصویر متعامد بردار $\mathbf{b}$ بر روی $R(A)$ را بدست آورید
- ارتباط بین بردار $\mathbf{b}$ و $\hat{\mathbf{b}}$ را در قالب یک ماتریس بیان نمایید.
- یک معکوس چپ برای ماتریس A بیابید.

۲- پاسخ حداقل مربعات دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ را برای هر یک از سیستم های ناسازگار زیر بدست آورید. سپس صحت پاسخ های خود را با استفاده از دستور pinv در نرم افزار MATLAB بررسی نمایید.

الف) $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&2\\1&-2\\8&4\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\5\end{bmatrix}$ ب) $A=\begin{bmatrix}1&0&4\\2&2&10\\1&-2&2\\1&-2&-2\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}3\\7\\6\\1\end{bmatrix}$

۳- مجموعه نقاط زیر را در نظر بگیرید،

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	2	7	9	12	13	14	14	13	10	8	4

الف) با بکارگیری روش حداقل مربعات خطا یک منحنی مناسب برای نقاط زیر برازش نمایید. یک بار منحنی مرتبه اول $y=mx+n$ را در نظر بگیرید و بار دیگر منحنی مرتبه دوم $y=\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0$ را استفاده کنید.

ب) با محاسبه خطا تعیین کنید کدام منحنی تخمین بهتری برای برازش این نقاط است؟

ج) با استفاده از نرم افزارMATLAB منحنی های بدست آمده را به همراه نقاط داده شده رسم نمایید.

۴- مجموعه نقاط زیر را در نظر بگیرید،

t	0	1	2	3	4	$1/2$
$f(t)$	0	1	0	1	4	7

الف) با بکارگیری روش حداقل مربعات خطا ضرایب منحنی $f(t)=ae^t+bt+ct^2+d\sin t$ را جهت برازش این نقاط تعیین نمایید.

ب) خطای برازش را بدست آورید.

ج) با استفاده از نرم افزارMATLAB نقاط و منحنی بدست آمده را رسم نمایید.

بنام خداوند بخشنده و مهربان

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

جبر خطی کاربردی

تمرینهای سری ششم

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۱/۲۴

۵- منحنی $f(t)=\dfrac{1}{1+25t^2}$ را در نظر بگیرید،

الف) $f(t)$ را در بازه $t=[-1 \quad 1]$ با استفاده از نرم افزار MATLAB رسم نمایید. برای این منظور می توانید از دستورات زیر استفاده نمایید.

```
t = linspace(- 1,1,100);
f = 1./(1 +25*t.^2);
plot(t, f)
hold on
```

ب) حال می خواهیم $f(t)$ را توسط یک چند جمله ای به فرم $g(t)=\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\cdots+\alpha_n t^n$ تقریب بزنیم. برای این منظور روش های زیر را در نظر می گیریم،

روش اول:

۱- پنج نقطه روی $f(t)$ انتخاب کنید و یک منحنی مرتبه چهار به فرم $g(t)=\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\alpha_3 t^3+\alpha_4 t^4$ تقریب بزنید.

t	-1	-0.5	0	0.5	1
$f(t)$	0.0385	0.1379	1	0.1379	0.0385

برای نمایش این پنج نقطه بر روی منحنی $f(t)$ می توان دستورات زیر را استفاده کرد،

```
t = linspace(- 1,1,5);
f = 1./(1 +25*t.^2);
plot(t, f,'ro')
```

سپس منحنی $g(t)$ حاصل را بدست آورده، رسم نمایید و خطای تقریب را محاسبه کنید.

۲- برای افزایش دقت تخمین این بار پانزده نقطه روی $f(t)$ انتخاب نمایید و یک منحنی $g(t)$ مرتبه چهارده تقریب بزنید. این بار هم منحنی $g(t)$ حاصل را بدست آورده، رسم کنید و خطای تقریب را محاسبه نمایید.

روش دوم:

۱- پنجاه و یک نقطه روی $f(t)$ انتخاب کرده و یک منحنی مرتبه چهار به فرم $g(t)=\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\alpha_3 t^3+\alpha_4 t^4$ تقریب می زنیم، منحنی $g(t)$ حاصل را بدست آورده و خطای تقریب را محاسبه می کنیم.

۲- برای افزایش دقت تعداد نقاط را افزایش نمی دهیم، بلکه $g(t)$ را یک منحنی مرتبه چهارده در نظر می گیریم. منحنی $g(t)$ را بدست آورده و خطای تقریب را محاسبه کنید.

از مقایسه روش اول و دوم چه نتیجه ای می گیرید؟ چه تفاوتی با هم دارند؟

موفق باشید

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

تمرینهای سری هفتم

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۸/۱۸

۱- برای ماتریس A تجزیه QR را با استفاده از فرایند گرام- اشمیت بدست آورید.

الف) $A=\begin{bmatrix}2&1&3\\-1&0&7\\0&-1&-1\end{bmatrix}$ ب) $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&0&-3\\0&-2&3\end{bmatrix}$ ج) $A=\begin{bmatrix}0&-2&1\\1&3&1\\0&0&1\\1&1&5\end{bmatrix}$ د) $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\2&0&4\end{bmatrix}$

نتایج را با استفاده از دستورqr در نرم افزار MATLAB بررسی نمایید. با استفاده از دستور chol تجزیه چالسکی ماتریس A^TA را بدست آورید و نتیجه را با تجزیه qr مقایسه کنید.

۲- ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}2&1&-1&1\\1&0&1&2\\3&1&2&5\end{bmatrix}$$

الف) پایه های فضای گستره ماتریس A را بدست آورید.

ب) با استفاده از روش گرام- اشمیت پایه های یکامتعامد $R(A)$ را بدست آورید.

۳- اگر فرایند گرام- اشمیت را به یک دسته بردار یکا متعامد اعمال نماییم، نتیجه نهایی چه خواهد شد؟ با انتخاب سه بردار یکا متعامد پاسخ خود را بررسی نمایید.

۴- اگر فرایند گرام- اشمیت را به یک دسته بردار وابسته خطی اعمال نماییم، نتیجه نهایی چه خواهد شد؟ با انتخاب سه بردار وابسته خطی پاسخ خود را بررسی نمایید.

۵- دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

الف) $\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&4\end{bmatrix}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$ ب) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3&-6&26\\4&-8&-7\\0&4&4\\0&-3&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix}1&-2\\-1&4\\1&1\end{bmatrix}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}5\\0\\4\end{bmatrix}$

- سازگار یا ناسازگار بودن دستگاه معادلات را بررسی نمایید.
- جواب حداقل مربعات خطا را با استفاده از تجزیه QR و تجزیه چالسکی بدست آورید.

۶- پایه های یکامتعامد زیرفضای اسپن شده توسط بردارهای زیر را بدست آورید.

$$\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix},\quad \mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix},\quad \mathbf{u}_3=\begin{bmatrix}3\\1\\-1\\-3\end{bmatrix}$$

موفق باشید

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

تمرینهای سری هشتم

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق - گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۹/۲

۱- معادله مشخصه، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس های زیر را بدست آورید و با استفاده از دستور eig در نرم افزار MATLAB نتایج محاسبات خود را مقایسه نمایید.

الف) $A=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-4&4\\0&-1&0\end{bmatrix}$

ب) $A=\begin{bmatrix}2&10&-2\\10&5&8\\-2&8&11\end{bmatrix}$

ج) $A=\begin{bmatrix}0&1&\frac{1}{2}\\0&1&0\\2&-2&0\end{bmatrix}$

د) $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-2&-4&-3\end{bmatrix}$

ه) $A=\begin{bmatrix}1&0&0&-3\\0&1&-3&0\\-0.5&-3&1&0.5\\-3&0&0&1\end{bmatrix}$

و) $A=\begin{bmatrix}4&2&1\\0&6&1\\0&-4&2\end{bmatrix}$

۲- موارد زیر را ثابت کنید،

الف) برای ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ دترمینان بصورت $|A|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$ است، که در آن λ_i ها مقادیر ویژه ماتریس $A_{n\times n}$ می باشد و از آنجا نتیجه بگیرید که یک ماتریس $A_{n\times n}$ غیرمنفرد است اگر و فقط اگر تمامی مقادیر ویژه آن مخالف صفر باشند.

ب) اگر λ یک مقدار ویژه برای ماتریس A و بردار $\mathbf{v}$ بردار ویژه متناظر با آن باشد، در اینصورت λ^k نیز یک مقدار ویژه برای ماتریس A^k با بردار ویژه متناظر $\mathbf{v}$ خواهد بود. (k مقدار صحیح مثبت می باشد).

ج) اگر مقدار ویژه ماتریس غیرمنفرد A برابر λ_i و مقدار ویژه ماتریس A^{-1} برابر μ_i باشد، آنگاه می توان گفت،

$$\mu_i=\lambda_i^{-1} \quad , \quad i=1,2,\ldots,n$$

د) برای یک ماتریس حقیقی متقارن مقادیر ویژه همواره اعدادی حقیقی و بردارهای ویژه متعامد هستند. این موضوع را برای ماتریس متقارن زیر بررسی نمایید.

$$A=\begin{bmatrix}8&2&-5\\2&11&-2\\-5&-2&8\end{bmatrix}$$

ه) تمامی مقادیر ویژه یک ماتریس مثبت معین اعداد مثبت هستند.

۳- اگر سری ماتریسی تابع e^{At} به شکل زیر باشد،

$$e^{At}=I+At+\frac{A^2t^2}{2!}+\frac{A^3t^3}{3!}+\cdots$$

مقدار $\frac{d}{dt}\left[e^{At}\right]$ و $\int_0^t e^{A\tau}d\tau$ را بدست آورید.

بنام خداوند بخشنده و مهربان

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق - گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

جبر خطی کاربردی

تمرینهای سری هشتم

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۹/۲

۴- ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 1 & -3\end{bmatrix}$$

الف) با استفاده از قضیه کیلی- هامیلتون معکوس ماتریس A و توابع ماتریسی $P(A)=A^5+2A^3+4A+8I$ و فرم بسته $\sin(A)$ را بدست آورید و نشان دهید $\sin^2(A)+\cos^2(A)=I$ است.

ب) فرم بسته توابع ماتریسی e^{At} و $\sin(At)$ را بدست آورید.

موفق باشید

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق - گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

تمرینهای سری نهم

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۹/۹

۱- ماتریس همبسته (companion form) زیر را در نظر بگیرید،

$$A_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

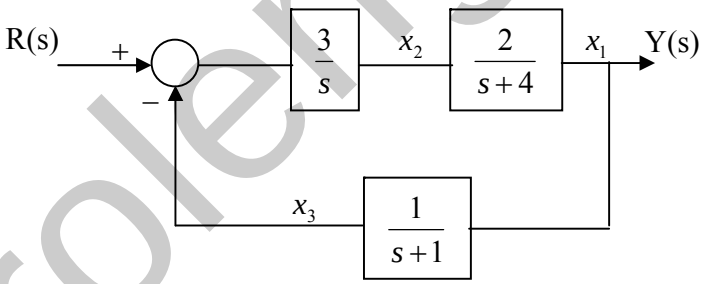
می دانیم معادله مشخصه ماتریس بصورت زیر است،

$$|\lambda I - A_C| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

حال اگر λ_i یک مقدار ویژه برای ماتریس A_C باشد، نشان دهید بردار ویژه متناظر با آن به شکل زیر بدست می آید،

$$\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \vdots \\ \lambda_i^{n-1} \end{bmatrix}$$

۲- با توجه به متغیرهای حالت x_1, x_2, x_3، یک تحقق فضای حالت برای سیستم زیر بدست آورید.



۳- با انتخاب متغیرهای فاز مدل فضای حالت سیستمی را که با معادلات دیفرانسیل زیر توصیف شده است بدست آورید،

الف) $\dddot{y}(t) + 2\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 3y(t) = u(t)$

ب) $\dddot{y}(t) - \ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) = 3u(t)$

۴- تابع تبدیل سیستمی با معادلات حالت و خروجی زیر را بیابید.

الف) $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) \end{cases}$

ب) $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) \end{cases}$

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق-گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

تمرینهای سری نهم

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۹/۹

۵- ماتریس انتقال حالت سیستم های زیر را با استفاده از روش سری ها بدست آورید.

الف) $\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&1\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$

ب) $\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$

۶- سیستم های زیر را در نظر بگیرید،

الف) $\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-4&4\\0&-1&0\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$

ب) $\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}-2&-2&0\\0&0&1\\0&-3&-4\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$

- ماتریس انتقال حالت را با استفاده از روشهای کیلی- همیلتون و تبدیل لاپلاس بدست آورید.
- پاسخ سیستم ها را بر حسب شرایط اولیه $x_1(0)$، $x_1(0)$ و $x_1(0)$ محاسبه کنید.

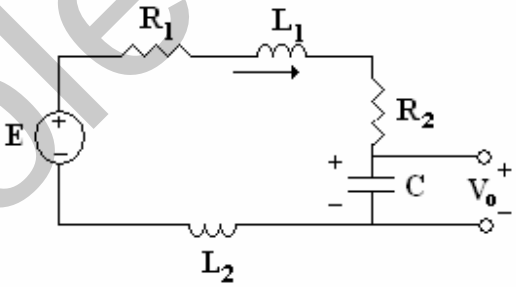
۷- کدامیک از ماتریس های زیر می تواند یک ماتریس انتقال حالت باشد؟

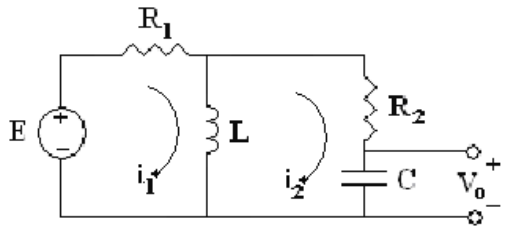
الف) $\begin{bmatrix}-e^{-t}&0\\0&1-e^{-t}\end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix}e^{-2t}&te^{-2t}&t^2e^{-2t}/2\\0&e^{-2t}&te^{-2t}\\0&0&e^{-2t}\end{bmatrix}$

ج) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}e^{2t}+1&e^{2t}-1\\e^{2t}-1&e^{2t}+1\end{bmatrix}$

۸- اگر متغیرهای حالت را بصورت $x_1(t)$ جریان سلف و $x_2(t)$ ولتاژ دو سر خازن در نظر بگیریم، معادلات حالت هر یک از سیستم های زیر را بدست آورید.





دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق - گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

تمرینهای سری نهم

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۹/۹

۹- نشان دهید که یک تحقق فضای حالت برای تابع تبدیل $\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_{n-1}s^{n-1}+b_{n-2}s^{n-2}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}$ بصورت زیر است،

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix}b_0&b_1&b_2&\cdots&b_{n-1}\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)\end{cases}$$

حال با استفاده از این تحقق یک نمایش فضای حالت برای توابع تبدیل زیر بدست آورید.

الف) $\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s^2+1}{s^3+6s^2+11s+5}$

ب) $\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s^2+3s+4}{s^4+s^2+2}$

موفق باشید

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق - گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

تمرینهای سری دهم

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۹/۲۳

۱- هر یک از دسته تحقق های فضای حالت زیر را بازسازی نمایید.

تحقق اول)
$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}-5 & -1\\ 3 & -1\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)\end{cases}$$

تحقق دوم)
$$\begin{cases}\dot{\mathbf{z}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -8 & -6\end{bmatrix}\mathbf{z}(t)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix}59 & 12\end{bmatrix}\mathbf{z}(t)\end{cases}$$

تحقق اول)
$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}r(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}\end{cases}$$

تحقق دوم)
$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{z}_1(t)\\ \dot{z}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1(t)\\ z_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}r(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1(t)\\ z_2(t)\end{bmatrix}\end{cases}$$

آیا می توان یک تبدیل همانندی بین این دو نمایش بدست آورد؟ در صورت امکان ماتریس تبدیل را بدست آورید.

۲- معادلات دینامیکی سیستمی بصورت زیر می باشد،

$$\dddot{y}(t)+3\ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+y(t)=u(t)$$

الف) با فرض اینکه $x_1(t)=y(t)$ و $x_2(t)=\dot{y}(t)$ و $x_3(t)=\ddot{y}(t)$ باشد، فرم معادلات را بصورت $\dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t)+B\mathbf{u}(t)$ بنویسید.

ب) ماتریس انتقال حالت را با برای ماتریس A بدست آورید. (با هر روش دلخواه)

ج) معادله مشخصه و مقادیر ویژه ماتریس A را محاسبه کنید.

د) اگر $y(0)=1$، $\dot{y}(0)=0$، $\ddot{y}(0)=0$ و $u(t)$ پله واحد باشد، $\mathbf{x}(t)$ و $y(t)$ را بیابید.

ه) اگر $z_1(t)=y(t)$ و $z_2(t)=\dot{y}(t)+y(t)$ و $z_3(t)=\ddot{y}(t)$ باشد، فرم معادلات را بصورت $\dot{\mathbf{z}}(t)=G\mathbf{z}(t)+H\mathbf{u}(t)$ بنویسید.

و) یک تبدیل همانندی $\mathbf{x}=T\mathbf{z}$ بین نمایش $\dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t)+B\mathbf{u}(t)$ و $\dot{\mathbf{z}}(t)=G\mathbf{z}(t)+H\mathbf{u}(t)$ بیابید.

۳- فرم قطری سازی شده (قطری کامل یا بلوکی) ماتریس های مربعی زیر را بدست آورید و ماتریس مُدال مربوطه را بیابید.

الف) $A=\begin{bmatrix}2 & 10 & -2\\ 10 & 5 & 8\\ -2 & 8 & 11\end{bmatrix}$

ب) $A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

ج) $A=\begin{bmatrix}-9 & -26 & -24\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

د) $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}$

ه) $A=\begin{bmatrix}2 & -2 & 3\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{bmatrix}$

و) $A=\begin{bmatrix}4 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$

ز) $A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 1\\ 0 & 6 & 1\\ 0 & -4 & 2\end{bmatrix}$

ح) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -3 & 0\\ -0.5 & -3 & 1 & 0.5\\ -3 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

ط) $A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & -4 & 8\end{bmatrix}$

ی) $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ نتایج را با استفاده از دستور jordan(A) در نرم افزار MATLAB بررسی کنید.

بنام خداوند بخشنده و مهربان

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق - گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

جبر خطی کاربردی

تمرینهای سری دهم

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۹/۲۳

۴- ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}3&1&0&0&0&0&0\\0&3&0&0&0&0&0\\0&0&3&0&0&0&0\\0&0&0&4&1&0&0\\0&0&0&0&4&0&0\\0&0&0&0&0&4&1\\0&0&0&0&0&0&4\end{bmatrix}$$

الف) این ماتریس چند مقدار ویژه دارد؟ آنها را بیابید.

ب) چند بردار ویژه مستقل خطی برای ماتریس A وجود دارد؟

ج) چند بردار ویژه تعمیم یافته برای ماتریس A وجود دارد؟

۵- ماتریس A را با شرایط زیر در نظر بگیرید،

$$\lambda_1=\lambda_2=2,\qquad \operatorname{rank}(A-2I)=4$$
$$\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=-2,\qquad \operatorname{rank}(A+2I)=3$$

فرم کانونیکال جردن ماتریس A را بدست آورید.

۶-برای ماتریس های زیر e^{At} را با روش قطری سازی بدست آورید.

الف) $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-2&2\\0&1&-3\end{bmatrix}$ ب) $A=\begin{bmatrix}0&-3&0\\3&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ ج) $A=\begin{bmatrix}4&-2&0\\1&2&0\\0&0&6\end{bmatrix}$

نتایج را با استفاده از دستور expm(A) در نرم افزار MATLAB بررسی نمایید.

۷- سیستم های نمایش داده شده با معادلات حالت زیر را در نظر بگیرید،

الف)
$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}7&4&-8\\4&-8&-1\\-4&-1&-8\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)\end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-2&-7&-9&-5\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)\end{cases}$$

ج)
$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\1&-1&0&0\\0&1&0&1\\0&0&-2&-2\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}1\\-3\\1\\0\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}1&0&1&1\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)\end{cases}$$

د)
$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}-1&1&-1\\0&1&-4\\0&1&-3\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}-1&0&0\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)\end{cases}$$

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

تمرینهای سری دهم

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق - گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۹/۲۳

ه)
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

و)
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 20 & 16 \\ 0 & -25 & -20 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

الف) معادله مشخصه و مقادیر ویژه ماتریس حالت آنها را بدست آورید.

ب) ماتریس تبدیلی بیابید که معادلات حالت را به فرم قطری (کامل یا بلوکی) تبدیل کند.

ج) فرم قطری سازی شده معادلات حالت را بدست آورید.

د) ماتریس انتقال حالت e^{At} را محاسبه کنید.

موفق باشید

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

تمرینهای سری یازدهم

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۹/۳۰

۱- مقادیر منفرد، رتبه ماتریس و تجزیه مقادیر منفرد (SVD) هر یک از ماتریس های زیر را بدست آورید. نتیجه را با دستور svd(A) در نرم افزار MATLAB بررسی کنید.

الف) $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ ب) $A=\begin{bmatrix}2 & 2 & -2\\ 4 & 1 & 2\\ -4 & 2 & 1\end{bmatrix}$ ج) $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & -2\end{bmatrix}$ د) $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}$

۲- اگر $\sigma_{\max}$ و $\sigma_{\min}$ به ترتیب بزرگترین و کوچکترین مقادیر منفرد ماتریس A باشند، ثابت کنید،

$$\sigma_{\min} \le \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le \sigma_{\max}$$

۳- ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 4\\ -4 & 0 & 3\\ 0 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

الف) تجزیه SVD ماتریس A را بیابید.

ب) اگر برای ماتریس A نگاشت $A\mathbf{x}=\mathbf{y}$ را در نظر بگیریم، رابطه ای بین مؤلفه های بردار $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$ بیابید که $\frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\|}=\sqrt{17}$ گردد.

د) آیا می توان بردار $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ بدست آورد که $\frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\|}=\sqrt{50}$ گردد؟ چرا؟

۴- ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}1+\varepsilon & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

الف) نشان دهید به ازای $\varepsilon=0$ ماتریس A یک ماتریس منفرد است.

ب) برای $\varepsilon=1$ مقدار A^{-1} و κ را بدست آورید و نشان دهید $\kappa=\|A\|\,\|A^{-1}\|$ است.

ج) با انتخاب $\varepsilon=0.0001$ نشان دهید که معادله $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ یک سیستم ill condition است. برای این منظور جواب معادله را برای بردار $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1.1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$ بررسی کنید.

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

تمرینهای سری یازدهم

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۹/۳۰

۵- پاسخ مستقیم دستگاه معادلات زیر را یکبار برای $k=15$ و یکبار برای $k=14.9$ بدست آورید. آیا سیستم ill condition است؟ عدد حالت ماتریس A را بدست آورید؟

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 21 & 19 & 16 \\ 39 & 48 & 53 \end{bmatrix}\mathbf{x}=\begin{bmatrix} k \\ 56 \\ 140 \end{bmatrix}$$

۶- با محاسبه عدد حالت، ماتریس های زیر را براساس درجه ill conditioning مرتب کنید.

$$A=\begin{bmatrix} 100 & 0 & -100 \\ 0 & 100 & -100 \\ -100 & -100 & 300 \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 8 & -1 \\ -9 & -71 & 11 \\ 1 & 17 & 18 \end{bmatrix} \quad , \quad C=\begin{bmatrix} 1 & 22 & -42 \\ 0 & 1 & -45 \\ -45 & -948 & 1 \end{bmatrix}$$

موفق باشید

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

تمرینهای سری دوازدهم

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۱۰/۷

۱- برای هر یک از ماتریس های زیر یک شبه معکوس بیابید. نتیجه را با دستور pinv(A) در نرم افزار MATLAB بررسی کنید.

الف) $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ ب) $A=\begin{bmatrix}2 & 2 & -2\\ 4 & 1 & 2\\ -4 & 2 & 1\end{bmatrix}$ ج) $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & -2\end{bmatrix}$

۲- ثابت کنید که اگر شبه معکوس بصورت $A^{\#}=V\Sigma^{\#}U^{T}$ معرفی گردد، $\mathbf{x}=A^{\#}\mathbf{b}$ جواب مسئله حداقل مربعات برای دستگاه معادلات ناسازگار $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ است.

۳- برای هر یک از دستگاه معادلات ناسازگار زیر جواب حداقل مربعات را بدست آورید،

الف) $\begin{cases}x_1-2x_2=5\\ -2x_1+4x_2=0\\ 3x_1-6x_2=4\end{cases}$ ب) $\begin{cases}x_1+x_2=15\\ 2x_1+2x_2=15\\ 2x_1+2x_2=-30\end{cases}$ ج) $\begin{cases}x_1=0\\ x_1=2\\ x_1+x_2+x_3=2\end{cases}$

۴- ثابت کنید،

الف) زمانیکه ماتریس A غیرمنفرد باشد، $A^{\#}=A^{-1}$ است.

ب) $(A^{\#})^{\#}=A$ و $(A^{\#})^{T}=(A^{T})^{\#}$

ج) $AA^{\#}A=A$ و $A^{\#}AA^{\#}=A^{\#}$

۵- در جدول زیر آمار جمعیت کشور چین هر ۱۰ سال آورده شده است.

سال (x)	۱۹۰۰	۱۹۱۰	۱۹۲۰	۱۹۳۰	۱۹۴۰	۱۹۵۰	۱۹۶۰	۱۹۷۰	۱۹۸۰
جمعیت (y) (میلیون)	۷۶/۰	۹۲/۰	۱۰۵/۷	۱۲۳/۲	۱۳۱/۷	۱۵۰/۷	۱۷۹/۳	۲۰۳/۲	۲۲۶/۵

الف) با محاسبه شبه معکوس یک مدل مرتبه دوم بصورت $y=ax^2+bx+c$ بر اساس روش حداقل مربعات برای افزایش جمعیت بدست آورید.

ب) بر اساس مدل بدست آمده در بخش (الف) میزان جمعیت را در سال ۱۹۹۰ تخمین بزنید.

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

تمرینهای سری دوازدهم

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۱۰/۷

۶- تصویر داده شده در فایل roteyl.bmp را در نظر بگیرید،

الف) تصویر را در نرم افزار MATLAB رسم نمایید. برای این منظور می توانید از دستورات زیر استفاده نمایید،

```
[A,map] =imread('roteyl.bmp');
B =im2double(A ,'indexed');
P = ind2gray(B ,map);
figure(1), imshow(P), title('main picture')
```

به این ترتیب تصویر مربوطه بصورت سیاه- سفید در ماتریس P ذخیره می گردد.

ب) با استفاده از دستور svd(P) در نرم افزار MATLAB مقادیر منفرد ماتریس P را بیابید. رتبه ماتریس P چند است؟

ج) با توجه به مقادیر منفرد بدست آمده یک تقریب رتبه پایین مناسب برای ماتریس P بدست آورید. خطای تقریب چند است؟ تصویر تقریب های بدست آمده را در نرم افزار MATLAB رسم نمایید و با هم مقایسه کنید.

موفق باشید

فصل اول

مروری بر بردارها و ماتریس ها

۱-۱ مقدمه

هدف از این بخش مروری بر قواعد و عملیات بردارها و ماتریس همراه با آشنایی اولیه با نرم افزار MATLAB است. همچنین برخی از روابط کاربردی سودمند در مورد ماتریس های بلوکی، معرفی چند ماتریس خاص و اصطلاحات بکار برده شده در این مجموعه آورده شده است. این فصل جنبه معرفی و مقدماتی داشته و در صورت آشنایی خوانندگان با مبانی اولیه بردارها، ماتریس ها و کاربرد نرم افزار MATLAB می توان مباحث را از فصل دوم آغاز نمود.

۱-۲ بردارها، ماتریس ها و قواعد عملیات آنها

یک **بردار**[۱] کمیتی است که هم دارای اندازه و هم دارای جهت باشد. کمیت های طول، سطح، حجم، جرم و اعداد حقیقی تنها دارای اندازه هستند. چنین کمیت هایی را **اسکالر**[۲] می نامند. در حالیکه کمیت هایی چون سرعت، نیرو و شتاب علاوه بر اندازه دارای جهت نیز هستند.

بردار را می توان بصورت یک لیست محدودی از اعداد، بصورت سطری یا ستونی نمایش داد،

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}_{1\times n} \quad , \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \tag{۱-۱}$$

هر یک از این اعداد اسکالر را **عناصر** یا **درایه** های آن بردار گویند، که می تواند اعداد حقیقی، مختلط یا گویا باشند. **بعد** یک بردار بستگی به تعداد عناصر آن دارد. بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ به ترتیب ابعاد $n\times 1$ و $1\times n$ دارند. گاهی برای سهولت $\mathbf{u}$ را بردار ستونی n تایی و $\mathbf{v}$ را بردار سطری n تایی می نامند.

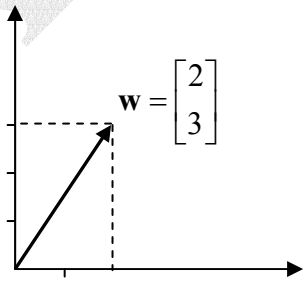
مثال۱-۱

بردار $\mathbf{v}$ با ابعاد 1×4 (یک سطر و چهار ستون) و بردار $\mathbf{u}$ ابعاد 3×1 (سه سطر و یک ستون) را در نظر بگیرید.

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1.1 & 2 & 0 & -7.8 \end{bmatrix}_{1\times 4} \quad , \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1+2j \\ -5.3 \\ 0 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

□

در تعابیر هندسی بردار را بوسیله یک پیکان نمایش می دهند، که طول این پیکان بیانگر اندازه بردار و جهت آن مشخص کننده جهت بردار می باشد.



شکل(۱-۱)- نمایش هندسی بردار

[۱] Vector
[۲] Scalar

حال اگر داده های مرتبط را با ابعاد $m \times n$ ذخیره نماییم **ماتریس**[۱] بدست می آید،

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \qquad (۲-۱)$$

مثال۱-۲

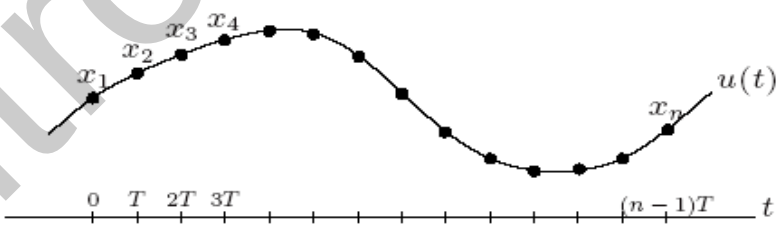
در زیر نمونه هایی از ماتریس های مربعی و غیر مربعی آورده شده است،

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -j & 5 & -9 \end{bmatrix}_{2\times 3} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1-5j & 0 & -2-j \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

□

عناصر یک بردار یا ماتریس می تواند اطلاعاتی مانند داده های آماری یک سیستم اجتماعی، پارامترهای توصیف کننده یک سیستم فیزیکی و یا داده های نمونه برداری شده یک سیگنال الکتریکی باشد. بطور نمونه در شکل(۱-۲) سیگنال $u(t)$ را پس از نمونه برداری با دوره تناوب T می توان بصورت یک بردار n تایی نمایش داد،

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(0) \\ u(T) \\ \vdots \\ u((n-1)T) \end{bmatrix}$$



شکل(۱-۲)- سیگنال نمونه برداری شده

[۱] Matrix

یکی از مهمترین جنبه های نرم افزار MATLAB کاربرد آن در محاسبات بردار، ماتریس، روشهای خاص محاسبات عددی و جبرخطی می باشد. برای ایجاد یک بردار سطری می توان بصورت زیر عمل کرد،

```
a = [1  2  3]
a =
   1    2    3
```

یک بردار ستونی نیز بطور مشابه با قرار دادن نقطه- ویرگول در بین درایه ها بدست می آید،

```
b = [1;2;3]
b =
        1
        2
        3
```

دستور length(a) تعداد عناصر یا همان طول بردار را مشخص می کند،

```
length(a)
ans =
        3
```

بطور مثال برای ایجاد یک ماتریس 3×3 بصورت زیر عمل می کنیم،

```
A = [1 2 3;4 5 6;7 8 10]
A =
      1    2    3
      4    5    6
      7    8   10
```

همانطور که مشخص است از علامت (;) برای جدا کردن سطرها استفاده می شود.

می توان از یک ماتریس فقط برخی از سطرها و ستون های آن را استخراج کرد،

```
B = A([1 3],[1 2])
B =
      1    2
      7    8
```

برای جابجا کردن سطرهای یک ماتریس می توان بصورت زیر عمل کرد،

```
C = A([3 2 1],:)
C =
     7     8    10
     4     5     6
     1     2     3
```

علامت (:) به معنی تمام ستون ها (یا سطرها) بکار می رود. بطور مثال دستور زیر ماتریس A را به یک بردار ستونی تبدیل می کند،

```
A(:)
ans =
     1
     4
     7
     2
     5
     8
     3
     6
    10
```

برای حذف برخی از سطرها (یا ستون ها) در یک ماتریس می توان بصورت زیر عمل کرد،

```
A(:, 2) = []
A =
     1     3
     4     6
     7    10
```

در واقع [ ] بیانگر بردار تهی می باشد، با این کار ستون دوم ماتریس A حذف شده است.

برای اضافه کردن سطر (یا ستون) به یک ماتریس می توان نوشت،

```
A = [A(:,1)[2; 5; 8] A(:,2)]
A =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8    10
```

به این ترتیب ماتریس A دوباره به حالت اول خود بر می گردد.

با استفاده از نرم افزار *MATLAB* به راحتی می توان عناصر ماتریس ها را بررسی و آنها را تحت شرایط خاصی انتخاب کرد. بطور مثال ماتریس A را در نظر بگیرید،

```
A = [-1 2 3;0 5 1]
A =
    -1     2     3
     0     5     1
```

دستور $A > ۱$ یک ماتریس با درایه های صفر و یک را تولید می کند، بطوریکه برای عناصری که شرط مذکور را برآورده می کنند عدد یک و برای آنهائیکه در شرط مذکور صدق نمی کنند عدد صفر منظور می شود،

```
A > 1
ans =
     0     1     1
     0     1     0
```

دستور زیر درایه هایی را که در شرط $A > ۱$ صدق می کند را نشان می دهد،

```
A(A > 1)
ans =
     2
     5
     3
```

از دستور rand(m,n) برای ایجاد یک ماتریس تصادفی می توان استفاده کرد. درایه های این ماتریس اعدادی در بازه $[0,1]$ هستند، که بطور یکنواخت توزیع شده اند،

```
rand(3,4)
ans =
    0.9501    0.4860    0.4565    0.4447
    0.2311    0.8913    0.0185    0.6154
    0.6068    0.7621    0.8214    0.7919
```

دستور randn(m,n) برای ایجاد یک ماتریس تصادفی است که عناصر آن بصورت نرمال با میانگین صفر و واریانس یک توزیع شده اند،

```
randn(3,4)
ans =
   -0.4326    0.2877    1.1892    0.1746
   -1.6656   -1.1465   -0.0376   -0.1867
    0.1253    1.1909    0.3273    0.7258
```

دستورهای ones(m,n) ، zeros(m,n) و eye(m,n) بسیار پرکاربرد هستند،

```
ones(2,5)
ans =
     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1
zeros(2,5)
ans =
     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0
eye(2,5)
ans =
     1     0     0     0     0
     0     1     0     0     0
```

۱-۲-۱- عملیات جمع و تفریق در بردارها و ماتریس ها

بردارها و ماتریس ها نیز همانند اعداد قابلیت جمع و تفریق شدن را دارند به شرطی که از نظر ابعاد یکسان باشد.

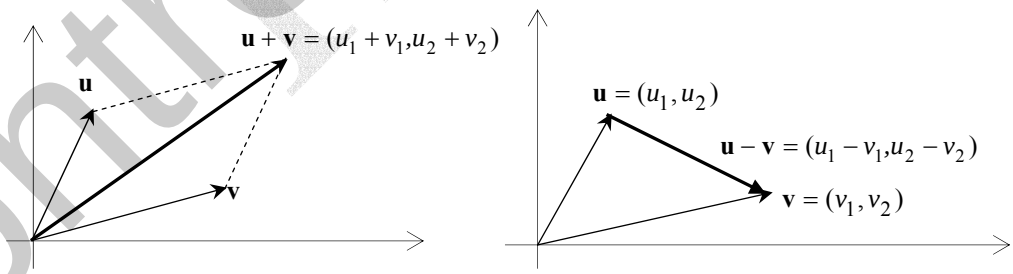
$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad \mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{bmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\\\vdots\\u_n+v_n\end{bmatrix},\quad \mathbf{u}-\mathbf{v}=\begin{bmatrix}u_1-v_1\\u_2-v_2\\\vdots\\u_n-v_n\end{bmatrix}\qquad (۳-۱)$$

برای ماتریس A و B داریم،

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}_{m\times n},\quad B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b_{m1}&b_{m2}&\cdots&b_{mn}\end{bmatrix}_{m\times n}$$

$$A\pm B=\begin{bmatrix}a_{11}\pm b_{11}&a_{12}\pm b_{12}&\cdots&a_{1n}\pm b_{1n}\\a_{21}\pm b_{21}&a_{22}\pm b_{22}&\cdots&a_{2n}\pm b_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}\pm b_{m1}&a_{m2}\pm b_{m2}&\cdots&a_{mn}\pm b_{mn}\end{bmatrix}_{m\times n}\qquad (۴-۱)$$

نمایش هندسی جمع و تفریق دو بردار در فضای دو بعدی بصورت زیر است،



شکل(۱-۳)- نمایش هندسی جمع و تفریق دو بردار

مثال۱-۳

به جمع و تفریق دو بردار و دو ماتریس و کدهای نرم افزار MATLAB آنها توجه نمایید،

$$\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix}1+j\\-5\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad \mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}2+j\\-5\\2\end{bmatrix},\quad \mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}j\\-5\\-2\end{bmatrix}$$

```
u1 = [1+j; -5; 0];
u2 = [1; 0; 2];
u1+u2
ans =
   2.0000 + 1.0000i
  -5.0000
   2.0000
u1-u2
ans =
   0 + 1.0000i
  -5.0000
  -2.0000
```

$$A=\begin{bmatrix}2&0\\-j&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}3-j&\sqrt{2}\\0&8\end{bmatrix}\rightarrow A+B=\begin{bmatrix}5-j&\sqrt{2}\\-j&9\end{bmatrix},A-B=\begin{bmatrix}-1+j&-\sqrt{2}\\-j&-7\end{bmatrix}$$

```
A=[2  0;-j  1];
B=[3-j  sqrt(2);0  8];
A+B
ans =
   5.0000 - 1.0000i   1.4142
         0 - 1.0000i   9.0000
A-B
ans =
  -1.0000 + 1.0000i  -1.4142
         0 - 1.0000i  -7.0000
```

وجود علامت (;) بعد از دستورات سبب می شود که نتایج نوشته نشوند.

□

۱-۲-۲- ضرب یک عدد اسکالر در بردار و ماتریس

حاصلضرب یک بردار یا ماتریس در یک عدد اسکالر، بردار یا ماتریسی است که هر درایه آن در عدد اسکالر مذکور ضرب شده است،

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad k\mathbf{u}=\begin{bmatrix} ku_1 \\ ku_2 \\ \vdots \\ ku_n \end{bmatrix} \tag{۱-۵}$$

به لحاظ هندسی ضرب یک عدد اسکالر در بردار می تواند سبب تغییر طول و جهت بردار گردد.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \rightarrow kA=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix} \tag{۱-۶}$$

مثال ۱-۴

برای بردار $\mathbf{u}$ تعریف شده، بردارهای $2\mathbf{u}$ و $(-3j)\mathbf{u}$ به شکل زیر بدست می آید،

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix} 3 \\ -1.2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad 2\mathbf{u}=\begin{bmatrix} 6 \\ -2.4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (-3j)\mathbf{u}=\begin{bmatrix} -9j \\ 3.6j \\ 0 \end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
u = [3; -1.2; 0];
2*u
ans =
    6.0000
   -2.4000
         0
(-3j)*u
ans =
         0 - 9.0000i
         0 + 3.6000i
         0
```

اگر ماتریس A را بصورت زیر در نظر بگیریم، در اینصورت ماتریس $2A$ بشکل زیر بدست می آید،

$$A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 3 & -1\\ 3 & 1 & 5 & 2\\ -1 & 0 & 7 & 6\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad 2A=\begin{bmatrix}4 & 8 & 6 & -2\\ 6 & 2 & 10 & 4\\ -2 & 0 & 14 & 12\end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A=[2  4  3  -1;3  1  5  2;-1  0  7  6];
2*A
ans =
     4     8     6    -2
     6     2    10     4
    -2     0    14    12
```

□

۱-۲-۳- ترکیب خطی بردارها

بنا به تعریف بردار $\mathbf{u}$ یک **ترکیب خطی**[۱] از بردارهای $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ می باشد، اگر اسکالرهای $c_1,c_2,\ldots,c_n$ وجود داشته باشد که بتوان $\mathbf{u}$ را بصورت زیر نمایش داد،

$$\mathbf{u}=c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\ldots+c_n\mathbf{v}_n \qquad (۱-۷)$$

مثال۱-۵

در هر یک از سه حالت زیر بررسی نمایید، که آیا می توان بردار $\mathbf{u}$ را بصورت ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ نوشت.

برای این منظور در هر سه حالت باید معادله $\mathbf{u}=c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2$ را نوشته و حل کرد.

1. $\mathbf{u}=(-12,20), \quad \mathbf{v}_1=(-1,2), \quad \mathbf{v}_2=(4,-6)$

معادله $\mathbf{u}=c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2$ بصورت زیر خواهد شد،

$$(-12,20)=c_1(-1,2)+c_2(4,-6)\rightarrow \begin{matrix}-c_1+4c_2=-12\\ 2c_1-6c_2=20\end{matrix}\rightarrow \quad c_1=4, \quad c_2=-2$$

بنابراین بردار $\mathbf{u}$ یک ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ می باشد و می توان آن را بصورت $\mathbf{u}=4\mathbf{v}_1-2\mathbf{v}_2$ نوشت.

2. $\mathbf{u}=(4,20), \quad \mathbf{v}_1=(2,10), \quad \mathbf{v}_2=(-3,-15)$

[۱] Linear Combination

معادلات به شکل می باشند،

$$(4,20)=c_1(2,10)+c_2(-3,-15)\rightarrow \quad \begin{matrix}2c_1-3c_2=4\\10c_1-15c_2=20\end{matrix}\rightarrow \begin{cases}c_1=2+\dfrac{3}{2}t\\c_2=t\end{cases} \quad t\in\Re$$

در این حالت نیز بردار $\mathbf{u}$ یک ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ می باشد، ولی برخلاف حالت قبل فقط یک جواب وجود ندارد و بینهایت ترکیب خطی مختلف می توان بدست آورد.

3. $\mathbf{u}=(1,-4),\quad \mathbf{v}_1=(2,10),\quad \mathbf{v}_2=(-3,-15)$

در این حالت معادلات به شکل زیر خواهند بود،

$$(1,-4)=c_1(2,10)+c_2(-3,-15)\rightarrow \quad \begin{matrix}2c_1-3c_2=1\\10c_1-15c_2=-4\end{matrix}$$

همانطور که از معادلات بالا مشاهده می شود، جوابی برای c_1 و c_2 وجود ندارد. بنابراین بردار $\mathbf{u}$ را نمی توان بصورت یک ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ نوشت.

□

مثال۱-۶

بردار $\mathbf{u}$ را در نظر بگیرید،

$$\mathbf{u}=[1,2,1]$$

برای کدامیک از دسته بردارهای زیر امکان نوشتن یک ترکیب خطی بصورت زیر وجود دارد؟

$$\mathbf{u}=c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3$$

الف) $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}$

طبق تعریف ترکیب خطی داریم،

$$\mathbf{u}=c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3 \quad\rightarrow\quad \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-c_1\\0\\c_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}c_2\\c_2\\-c_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\2c_3\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}-c_1+c_2=1\\c_2+2c_3=2\\c_1-c_2=1\end{cases}$$

با حل دستگاه معادلات بالا در می یابیم، که هیچ جوابی برای حل این دستگاه معادلات وجود ندارد. لذا بردار $\mathbf{u}$ را نمی توان بصورت یک ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1$، $\mathbf{v}_2$ و $\mathbf{v}_3$ نوشت.

ب) $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}0\\4\\1\end{bmatrix},\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$

طبق تعریف ترکیب خطی داریم،

$$\mathbf{u}=c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3 \quad\rightarrow\quad \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1\\c_1\\c_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\4c_2\\c_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}c_3\\-c_3\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}c_1+c_3=1\\c_1+4c_2-c_3=2\\c_1+c_2=1\end{cases}$$

با حل دستگاه معادلات بالا مقادیر زیر بدست می آید،

$$c_1=c_2=c_3=\frac{1}{2}$$

بنابراین بردار $\mathbf{u}$ یک ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1$، $\mathbf{v}_2$ و $\mathbf{v}_3$ می باشد و می توان آن را بصورت $\mathbf{u}=\frac{1}{2}\mathbf{v}_1+\frac{1}{2}\mathbf{v}_2+\frac{1}{2}\mathbf{v}_3$ نوشت.

ج) $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix},\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}1\\4\\2\end{bmatrix}$

طبق تعریف ترکیب خطی داریم،

$$\mathbf{u}=c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3 \quad\rightarrow\quad \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3c_1\\2c_1\\c_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}c_2\\2c_2\\c_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}c_3\\4c_3\\2c_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}3c_1+c_2+c_3=1\\2c_1+2c_2+4c_3=2\\c_1+c_2+2c_3=1\end{cases}\quad\rightarrow\quad \begin{matrix}c_1=0.5c_3\\c_2=1-2.5c_3\end{matrix}$$

در این حالت نیز بردار $\mathbf{u}$ یک ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1$، $\mathbf{v}_2$ و $\mathbf{v}_3$ می باشد، ولی فقط یک جواب وجود ندارد و بینهایت ترکیب خطی مختلف می توان بدست آورد.

□

۱-۲-۴- ضرب داخلی و نُرم بردارها

هر قاعده ای که به یک جفت بردار $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ یک کمیت اسکالر را اختصاص دهد یک **ضرب داخلی**[1] نامیده می شود و با نماد $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$ نشان داده می شود، به شرط اینکه چهار اصل زیر را برآورده سازد،

1. $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \overline{\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle}$ (خط تیره نشانگر مزدوج یک عدد مختلط است)
2. $\langle c\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \bar{c}\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u},\bar{c}\mathbf{v}\rangle$ (c یک عدد مختاط است)
3. $\langle \mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{w}+\mathbf{s}\rangle = \langle \mathbf{u},\mathbf{w}\rangle + \langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle + \langle \mathbf{u},\mathbf{s}\rangle + \langle \mathbf{v},\mathbf{s}\rangle$
4. $\forall \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \rightarrow \quad \langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle > 0$

با توجه به شرایط بالا ضرب داخلی یک جفت بردار مختلط $\mathbf{u}_{n\times 1}$ و $\mathbf{v}_{n\times 1}$ در یک فضای برداری V بصورت زیر بیان می شود،

$$\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \bar{u}_1 v_1 + \bar{u}_2 v_2 + \cdots + \bar{u}_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{u}_i v_i \qquad (۱-۸)$$

که حاصل آن یک عدد مختلط است و $\bar{u}_i$ها مزدوج های u_iها هستند. در اینصورت ضرب داخلی را بصورت زیر می توان بیان کرد،

$$\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \overline{\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle} = \overline{\mathbf{v}^*\mathbf{u}} = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^*\mathbf{v} \qquad (۱-۹)$$

که در آن $\mathbf{u}^*$ ترانهاده مزدوج $\mathbf{u}$ را نشان می دهد. بنابراین ضرب داخلی دو بردار $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ با عناصر حقیقی بصورت زیر داده می شود،

$$\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \qquad (۱-۱۰)$$

بدیهی است که در این حالت داریم،

$$\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v} \qquad (۱-۱۱)$$

مثال۱-۷

ضرب داخلی بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ و سپس $\mathbf{v}$ و $\mathbf{u}$ را بدست آورید.

$$\mathbf{u} = [2+j3, 3+j, 4], \qquad \mathbf{v} = [4-j6, 3, 3+j2]$$

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle &= \overline{(2+j3)}(4-j6) + \overline{(3+j)}(3) + \overline{(4)}(3+j2)\\ &= (2-j3)(4-j6) + (3-j)(3) + (4)(3+j2)\\ &= (-10-j24) + (9-j3) + (12+j8)\\ &= 11-j19\end{aligned}$$

[1] Inner Product

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle &= \overline{(4-j6)}(2+j3)+\overline{(3)}(3+j)+\overline{(3+j2)}(4)\\ &= (4+j6)(2+j3)+(3)(3+j)+(3-j2)(4)\\ &= (-10+j24)+(9+j3)+(12-j8)\\ &= 11+j19\end{aligned}$$

همانطور که پیداست $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \overline{\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle}$ می باشد.

□

در نرم افزار MATLAB برای ایجاد ترانهاده و ترانهاده مزدوج یک بردار یا ماتریس به ترتیب از کاراکترهای (**.'**) و (**'**) استفاده می شود،

```
a = [1  2  3]; b = [1;2;3];
(a + i * b').'
ans =
              1.0000  + 1.0000i
              2.0000  + 2.0000i
              3.0000  + 3.0000i
(a + i * b')'
ans =
              1.0000  - 1.0000i
              2.0000  - 2.0000i
              3.0000  - 3.0000 i
```

عملگر نقطه (**.**) نقش مهمی در نوشتن دستورات دارد و امکان انجام عملیات بر روی تک تک عناصر بردارها و ماتریس ها را ایجاد می نماید. بطور مثال عملگرهای *. و ^. و \. به ترتیب بیانگر انجام عملیات ضرب، توان رسانی و تقسیم از چپ روی تک تک عناصر هستند،

```
a.*a
ans =
          1  4  9
a.^2
ans =
         1  4  9
a.\b'
ans =
         1  1  1
```

به منظور انجام عملیات ضرب داخلی دو بردار بصورت زیر عمل می کنیم،

```
dotprod = a'*b

dotprod =

          14
```

عملگر نقطه (.) همانطور که برای بردارها گفته شد در مورد ماتریس ها نیز صدق می کند،

```
A = [1 2 3; 3 2 1];

A.*A

ans =

     1   4   9

     9   4   1
```

لازم به ذکر است دستوری بصورت $A*A$ چنین پیغام خطایی را در بر دارد،

```
A*A

¨??? Error using ==> *

Inner matrix dimensions must agree.
```

نکته۱: برای بردار $\mathbf{u}_{n\times 1}$ مقدار $\mathbf{u}^*\mathbf{u}$ یک عدد اسکالر نامنفی و $\mathbf{u}\mathbf{u}^*$ یک ماتریس $n\times n$ می باشد،

$$\mathbf{u}^*\mathbf{u} = \langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle = \bar{u}_1u_1 + \bar{u}_2u_2 + \cdots + \bar{u}_nu_n = |u_1|^2 + |u_2|^2 + \cdots + |u_n|^2$$

$$\mathbf{u}\mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} u_1\bar{u}_1 & u_1\bar{u}_2 & \cdots & u_1\bar{u}_n \\ u_2\bar{u}_1 & u_2\bar{u}_2 & \cdots & u_2\bar{u}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n\bar{u}_1 & u_n\bar{u}_2 & \cdots & u_n\bar{u}_n \end{bmatrix}$$

مفهوم یک **نُرم**[۱] تا اندازه ای شبیه به مفهوم قدر مطلق می باشد. یک نُرم تابعی است که برای هر بردار $\mathbf{u}$ داده شده یک عدد حقیقی تخصیص می دهد که با نماد $\|\mathbf{u}\|$ نشان داده می شود، بطوریکه شرایط زیر را بر آورده سازد،

1. $\|\mathbf{u}\| > 0, \quad \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$
2. $\|\mathbf{u}\| = 0, \quad if \quad \mathbf{u} = \mathbf{0}$
3. $\|k\mathbf{u}\| = |k|\|\mathbf{u}\|$ (در اینجا k یک اسکالر و $|k|$ قدرمطلق k است)
4. $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (نامساوی مثلثاتی[۲])
5. $|\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle| \le \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$ (نامساوی کوشی- شوارتز[۳])

[۱] Norm
[۲] Triangle Inequality
[۳] Cauchy - Schwarz Inequality

در حالت کلی $\mathbf{u}$ می تواند، بردار، ماتریس و یا سیگنال باشد. با توجه به شرایط بالا نُرم یک بردار را بصورت ریشه دوم نامنفی $\langle \mathbf{u},\mathbf{u} \rangle$ می توان تعریف کرد،

$$\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u},\mathbf{u} \rangle^{1/2} = \left(\mathbf{u}^*\mathbf{u}\right)^{1/2} = \sqrt{|u_1|^2 + |u_2|^2 + \cdots + |u_n|^2} \qquad (۱۲-۱)$$

مثال۱-۸

نُرم بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ را بدست آورید.

$$\mathbf{u} = [j2, -1, 3+j], \qquad \mathbf{v} = [4, -1, 2, 0]$$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{|j2|^2 + |-1|^2 + |3+j|^2} = \sqrt{4+1+10} = \sqrt{15}$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{|4|^2 + |-1|^2 + |2|^2 + |0|^2} = \sqrt{16+1+4+0} = \sqrt{21}$$

سپس برای هر یک از دسته بردارهای زیر حاصل $2\mathbf{u} - 5\mathbf{v}$، $\langle \mathbf{u},\mathbf{v} \rangle$، $\|\mathbf{u} - 2\mathbf{v}\|$ را بیابید.

الف) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$

$$2\mathbf{u} - 5\mathbf{v} = 2\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -14 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\langle \mathbf{u},\mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T\mathbf{v} = (3\times 0) + (-2\times 2) + (0\times(-4)) = -4$$

$$\|\mathbf{u} - 2\mathbf{v}\| = \left\| \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix} \right\|$$

$$= \sqrt{|3|^2 + |-6|^2 + |8|^2} = \sqrt{109}$$

در نرم افزار MATLAB از دستور norm(u) برای محاسبه نُرم بردارها استفاده می شود،

```
v = [0; 2; -4];
u = [3; -2; 0];
2*u-5*v
ans =
     6
   -14
    20
```

```
u'*v
ans =
     -4
norm(u - 2*v)
ans =
     10.4403
```

ب) $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}1+2j\\0\\6-3j\end{bmatrix},\mathbf{v}=\begin{bmatrix}3j\\3\\-1\end{bmatrix}$

$$2\mathbf{u}-5\mathbf{v}=2\begin{bmatrix}1+2j\\0\\6-3j\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}3j\\3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+4j\\0\\12-6j\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-15j\\-15\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-11j\\-15\\17-6j\end{bmatrix}$$

$$\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=\mathbf{u}^*\mathbf{v}=((1-2j)\times(3j))+(0\times3)+((6+3j)\times(-1))=0$$

$$\|\mathbf{u}-2\mathbf{v}\|=\left\|\begin{bmatrix}1+2j\\0\\6-3j\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}3j\\3\\-1\end{bmatrix}\right\|=\left\|\begin{bmatrix}1+2j\\0\\6-3j\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-6j\\-6\\2\end{bmatrix}\right\|=\left\|\begin{bmatrix}1-4j\\-6\\8-3j\end{bmatrix}\right\|$$

$$=\sqrt{|1-4j|^2+|-6|^2+|8-3j|^2}=\sqrt{126}$$

همچنین با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
u = [1 + 2i; 0; 6 - 3i];
v = [3i; 3; -1];
2*u - 5*v
ans =
      2.0000 -11.0000i
    -15.0000
     17.0000 - 6.0000i
u'*v
ans =
      0
norm(u - 2*v)
ans =
     11.2250
```

ج) $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix},\mathbf{v}=\begin{bmatrix}2-6j\\j\\-1\end{bmatrix}$

$$2\mathbf{u}-5\mathbf{v}=2\begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}2-6j\\j\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-2\\6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-10+30j\\-5j\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8+30j\\-2-5j\\11\end{bmatrix}$$

$$\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=\mathbf{u}^*\mathbf{v}=(1\times(2-6j))+((-1)\times j)+(3\times(-1))=-1-7j$$

$$\|\mathbf{u}-2\mathbf{v}\|=\left\|\begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}2-6j\\j\\-1\end{bmatrix}\right\|=\left\|\begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4+12j\\-2j\\2\end{bmatrix}\right\|=\left\|\begin{bmatrix}-3+12j\\-1-2j\\5\end{bmatrix}\right\|$$

$$=\sqrt{|-3+12j|^2+|-1-2j|^2+|5|^2}=\sqrt{183}$$

همچنین با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
u = [1; -1; 3];
v = [2-6i; i; -1];
2*u-5*v
ans =
      -8.0000  +30.0000i
      -2.0000  - 5.0000i
      11.0000
u'*v
ans =
      -1.0000  - 7.0000i
norm(u-2*v)
ans =
      13.5277
```

□

مثال۱-۹

نامساوی کوشی- شوارتز و نامساوی مثلثاتی را ثابت کنید.

$$|\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle|\le\|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\|\quad,\quad \mathbf{u},\mathbf{v}\in C^{n\times 1} \qquad (۱۳-۱)$$

با توجه به تعریف ضرب داخلی و نُرم بردارها می توان نوشت،

$$\begin{aligned}\|c\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 &= \langle c\mathbf{u}-\mathbf{v}, c\mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle = \langle c\mathbf{u}, c\mathbf{u}\rangle + \langle -\mathbf{v}, c\mathbf{u}\rangle + \langle c\mathbf{u}, -\mathbf{v}\rangle + \langle -\mathbf{v}, -\mathbf{v}\rangle \\ &= \bar{c}c\|\mathbf{u}\|^2 - c\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle - \bar{c}\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= \bar{c}(c\|\mathbf{u}\|^2 - \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle) - c\overline{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle} + \|\mathbf{v}\|^2 \ge 0\end{aligned}$$

می دانیم که تساوی بالا به ازای هر مقداری از c برقرار است، لذا با فرض اینکه $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ است، مقدار را $c = \dfrac{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|^2}$ در نظر می گیریم،

$$\begin{aligned}&\bar{c}(c\|\mathbf{u}\|^2 - \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle) - c\overline{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle} + \|\mathbf{v}\|^2 = \\ &= \frac{\overline{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle}}{\|\mathbf{u}\|^2}\left(\frac{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|^2}\|\mathbf{u}\|^2 - \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle\right) - \frac{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|^2}\overline{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle} + \|\mathbf{v}\|^2 \ge 0 \\ &= \frac{\overline{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle}}{\|\mathbf{u}\|^2}(\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle - \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle) - \frac{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|^2}\overline{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle} + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= -\frac{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|^2}\overline{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle} + \|\mathbf{v}\|^2 \ge 0\end{aligned}$$

بنابراین می توان نوشت،

$$|\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle|^2 \le \|\mathbf{u}\|^2\ \|\mathbf{v}\|^2 \quad \rightarrow \quad |\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle| \le \|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\|$$

با استفاده از نامساوی کوشی- شوارتز می توان نامساوی مثلثاتی زیر را نیز بدست آورد،

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \qquad (۱۴-۱)$$

برای این منظور بصورت زیر عمل می کنیم،

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle + \overline{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle} + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &\le \|\mathbf{u}\|^2 + 2|\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle| + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &\le \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 = (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2\end{aligned}$$

لذا با گرفتن ریشه دوم ازطرفین نامساوی مثلثاتی بدست می آید.

□

مثال ۱-۱۰

الف) می توان نشان داد که برای دو بردار $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\Re^n$ روابط زیر برقرار است،

$$\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=\frac{1}{4}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2-\frac{1}{4}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 \quad \text{و} \quad \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2+\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2=2\|\mathbf{u}\|^2+2\|\mathbf{v}\|^2$$

برای این منظور می توان نوشت،

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{u}\|^2-2\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+\|\mathbf{v}\|^2 \quad , \quad \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{u}\|^2+2\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+\|\mathbf{v}\|^2$$

با تفاضل این دو رابطه از یکدیگر داریم،

$$4\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2-\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2\rightarrow\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=\frac{1}{4}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2-\frac{1}{4}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2$$

با جمع طرفین این دو رابطه با یکدیگر داریم،

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2+\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2=2\|\mathbf{u}\|^2+2\|\mathbf{v}\|^2$$

ب) اگر $\|\mathbf{u}\|=7$ و $\|\mathbf{v}\|=3$ باشد، حداقل و حداکثر مقدار ممکن برای $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|$ و $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$ چه مقداری است؟

با توجه به نامساوی مثلثاتی و تعبیر هندسی آن داریم،

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|\le\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\| &\rightarrow \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|\le 10\\ \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|\ge\|\mathbf{u}\|-\|\mathbf{v}\| &\rightarrow \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|\ge 4\end{aligned} \quad \rightarrow \quad 4\le\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|\le 10$$

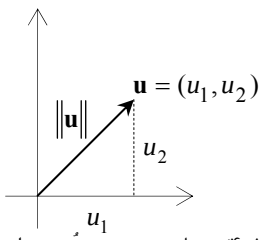
با توجه به نامساوی کوشی- شوارتز داریم،

$$|\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle|\le\|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\| \quad\rightarrow\quad |\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle|\le 21 \quad\rightarrow\quad -21\le\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle\le 21$$

□

اگر $\mathbf{u}$ یک بردار حقیقی باشد، کمیت $\|\mathbf{u}\|^2$ می تواند، بطور هندسی بصورت توان دوم فاصله مبدأ تا نقطه نشان داده شده با بردار $\mathbf{u}$ تعبیر گردد. بطور مثال در فضای دو بعدی داریم،

$$\|\mathbf{u}\|^2=u_1^2+u_2^2$$



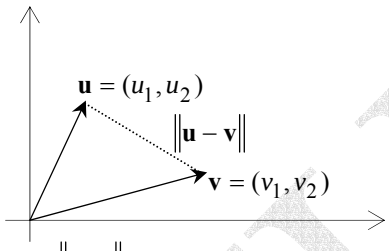
شکل(۱-۴)- نمایش هندسی نُرم بردار

برای دو بردار حقیقی $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ فاصله بین دو بردار بصورت زیر تعریف می گردد،

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = \langle \mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle^{1/2} = \sqrt{|u_1-v_1|^2+|u_2-v_2|^2+\cdots+|u_n-v_n|^2} \qquad (۱۵-۱)$$

بطور مثال در فضای دو بعدی داریم،

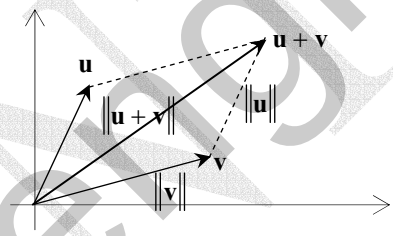
$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = \sqrt{|u_1-v_1|^2+|u_2-v_2|^2}$$



شکل(۱-۵)- نمایش هندسی $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$

تعبیر هندسی برای نامساوی مثلثاتی بصورت زیر می باشد،

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|$$



شکل(۱-۶)- نمایش هندسی $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|$

علاوه بر رابطه گفته شده تعاریف دیگری هم برای نُرم وجود دارد که در زیر آورده شده است،

۱- یک نُرم که به **نُرم** p [۱] یا **نُرم** L_p معروف است، بصورت کلی زیر تعریف می گردد،

$$\|\mathbf{u}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n}|u_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|u_1|^p+|u_2|^p+\cdots+|u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad , \quad 1 \le p < \infty \qquad (۱۶-۱)$$

۲- نُرم ممکن است بصورت مجموع اندازه های تمام مؤلفه های u_i تعریف شود، که به ازای $p=1$ در حالت قبل بدست می آید و به آن **نُرم یک** [۲] یا **نُرم** L_1 گفته می شود.

$$\|\mathbf{u}\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|u_i| = |u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n| \qquad (۱۷-۱)$$

---

[۱] p-Norm
[۲] 1-Norm

۳- نُرم ممکن است بصورت بزرگترین مقدار در بین تمام مؤلفه های u_i تعریف گردد، که به آن **نُرم ماکزیمم** یا **نُرم بینهایت**[۱] یا **نُرم** L_∞ نیز می گویند.

(۱۸-۱)

$$\|\mathbf{u}\|_\infty = \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}|u_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{p\to\infty}\left(|u_1|^p+|u_2|^p+\cdots+|u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{p\to\infty}\left(\max_{1\le i\le n}|u_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \max_{1\le i\le n}\{|u_i|\}$$

۴- در بین این تعاریف، نُرم $(\mathbf{u}^*\mathbf{u})^{1/2}$ که همان **نُرم دو**[۲] یا **نُرم** L_2 می باشد، از همه متداول تر است و بصورت زیر نیز نمایش داده می شود،

$$\|\mathbf{u}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n}|u_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(|u_1|^2+|u_2|^2+\cdots+|u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۱۹-۱)$$

که به آن **نُرم اقلیدسی**[۳] نیز گفته می شود.

مثال۱-۱۱

برای بردار $\mathbf{u}=[3,4\text{-}j2,1]$ مقدار نُرم L_1، نُرم L_2 و نُرم L_∞ را بدست آورید،

$$\|\mathbf{u}\|_1 = |3|+|4-j2|+|1| = 3+\sqrt{20}+1 = 4+2\sqrt{5}$$

$$\|\mathbf{u}\|_2 = \left(|3|^2+|4-j2|^2+|1|^2\right)^{1/2} = (9+20+1)^{1/2} = \sqrt{30}$$

$$\|\mathbf{u}\|_\infty = \max\{|3|,|4-j2|,|1|\} = \max\{3,\sqrt{20},1\} = \sqrt{20}$$

با بکارگیری از نرم افزار MATLAB نُرم های مختلف را می توان محاسبه نمود،

```
u=[3;4-2j;1];
norm(u,1)
ans =
    8.4721
norm(u,2)
ans =
    5.4772
norm(u,inf)
ans =
    4.4721
```

□

[۱] ∞-Norm
[۲] 2-Norm
[۳] Euclidean Norm

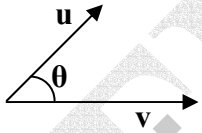
نکته۲: برخی از روابطی که بین نُرم های مختلف برقرار است بصورت زیر می باشد،

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}\|_\infty \le \|\mathbf{u}\|_2 \le \|\mathbf{u}\|_1 \\ &\|\mathbf{u}\|_\infty \le \|\mathbf{u}\|_2 \le \sqrt{n}\|\mathbf{u}\|_\infty \\ &\|\mathbf{u}\|_2 \le \|\mathbf{u}\|_1 \le \sqrt{n}\|\mathbf{u}\|_2 \end{aligned} \qquad (۲۰-۱)$$

به لحاظ هندسی ضرب داخلی دو بردار عددی است که به اندازه بردارها و زاویه بین آنها مربوط است و ضرب داخلی دو بردار $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ بصورت زیر تعریف می شود،

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \ \|\mathbf{v}\| \cos\theta \quad \rightarrow \quad \theta = \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \ \|\mathbf{v}\|} \right) \qquad (۲۱-۱)$$

که در آن θ زاویه بین دو بردار می باشد.



شکل(۱-۷)- نمایش هندسی زاویه بین دو بردار

اگر بردار $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ را بصورت زیر تعریف کنیم، زاویه بین این دو بردار بصورت زیر قابل محاسبه خواهد بود،

```
u = -2:2;
v = (1:5)'
angle = acos((u*v)/(norm(u)*norm(v)))
angle =
    1.1303
```

با توجه به تعریف دو بردار $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ را **متعامد**[۱] گویند، اگر ضرب داخلی دو بردار برابر صفر باشد،

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0 \qquad (۲۲-۱)$$

به عبارتی برای بردارهای حقیقی $\mathbf{u}^T\mathbf{v} = 0$ و برای بردارهای مختلط $\mathbf{u}^*\mathbf{v} = 0$ باشد. برای بردارهای متعامد $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ رابطه زیر برقرار است،

$$\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 \qquad (۲۳-۱)$$

که در واقع همان رابطه **فیثاغورث**[۲] می باشد. اگر علاوه بر متعامد بودن نُرم بردارها هم برابر یک باشد، به آن بردارها **یکامتعامد**[۳] گفته می شود.

---

[۱] Orthogonal
[۲] Pythagorean
[۳] Orthonormal

نکته۳: اگر مجموعه ای مانند S شامل بردارهایی باشد که تمامی آنها دو به دو متعامد باشند، به آن مجموعه یک مجموعه متعامد گفته می شود، حال اگر در یک مجموعه متعامد نُرم تمامی بردارها برابر یک باشد، به آن مجموعه **یکامتعامد** گفته می شود.

مثال۱-۱۲

بردارهای زیر را در نظر بگیرید،

$$S:\left\{\mathbf{v}_1=[2,0,-1],\quad \mathbf{v}_2=[0,-1,0],\quad \mathbf{v}_3=[2,0,4]\right\}$$

الف) متعامد و یکامتعامد بودن بردارهای $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ را بررسی کنید.

برای متعامد بودن ضرب داخلی دو به دوی این بردارها را محاسبه می کنیم،

$$\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\rangle=(2)(0)+(0)(-1)+(-1)(0)=0$$
$$\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_3\rangle=(2)(2)+(0)(0)+(-1)(4)=0$$
$$\langle \mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\rangle=(0)(2)+(-1)(0)+(0)(4)=0$$

بنابراین مجموعه S یک مجموعه متعامد می باشد. برای بررسی یکامتعامد بودن، نُرم بردارها را محاسبه می کنیم.

$$\|\mathbf{v}_1\|=\sqrt{(2)^2+(0)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$$
$$\|\mathbf{v}_2\|=\sqrt{(0)^2+(-1)^2+(0)^2}=1$$
$$\|\mathbf{v}_3\|=\sqrt{(2)^2+(0)^2+(4)^2}=2\sqrt{5}$$

از آنجائیکه نُرم تمامی بردارها برابر یک نمی باشد، پس مجموعه S یک مجموعه یکامتعامد نیست.

ب) بردارهای $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ را به بردارهای یکامتعامد تبدیل کنید.

برای این منظور باید بردارها را به نحوی تبدیل کنیم که نرم آنها برابر یک گردد. اگر هر یک از بردارها را به نُرم خودش تقسیم کنیم چنین هدفی بدست می آید،

$$\mathbf{u}_1=\frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,-1)=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$$
$$\mathbf{u}_2=\frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|}\mathbf{v}_2=\frac{1}{1}(0,-1,0)=(0,-1,0)$$
$$\mathbf{u}_3=\frac{1}{\|\mathbf{v}_3\|}\mathbf{v}_3=\frac{1}{2\sqrt{5}}(2,0,4)=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

حال می توان براحتی نشان داد که بردارهای جدید $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ یکامتعامد هستند،

$$\langle \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\rangle=\langle \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_3\rangle=\langle \mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\rangle=0$$
$$\|\mathbf{u}_1\|=\|\mathbf{u}_2\|=\|\mathbf{u}_3\|=1$$

□

۱-۲-۵- ضرب داخلی و نُرم توابع پیوسته

فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع پیوسته و حقیقی در بازه $[a,b]$ باشند. ضرب داخلی این دو تابع پیوسته و حقیقی بصورت زیر تعریف می شود،

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx \qquad (۲۴-۱)$$

می توان نشان داد که این تعریف تمامی چهار شرط ذکر شده برای ضرب داخلی یک بردار را داراست،

1. $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)f(x)dx = \langle g,f\rangle$
2. $\langle f+g,h\rangle = \int_a^b (f(x)+g(x))h(x)dx$
$$= \int_a^b f(x)h(x)dx + \int_a^b g(x)h(x)dx = \langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle$$
3. $\langle cf,g\rangle = \int_a^b cf(x)g(x)dx = c\int_a^b f(x)g(x)dx = c\langle g,f\rangle$
4. $\langle f,f\rangle = \int_a^b f(x)f(x)dx = \int_a^b f^2(v)dx \rightarrow \begin{cases} f\neq 0 \rightarrow \langle f,f\rangle > 0 \\ f=0 \rightarrow \langle f,f\rangle = 0 \end{cases}$

مثال۱-۱۳

ضرب داخلی دو تابع پیوسته زیر را در بازه $[0,\pi/2]$ محاسبه نمایید.

$$f(x) = \sin x - \cos x \quad , \quad g(x) = \sin x + \cos x$$

با توجه به تعریف بالا داریم،

$$\langle f,g\rangle = \int_0^{\pi/2} f(x)g(x)dx = \int_0^{\pi/2} (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)dx$$
$$= \int_0^{\pi/2} (\sin^2 x - \cos^2 x)dx = 0$$

لذا می توان گفت که دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ متعامد هستند.

□

نکته ۱: برای یک تابع یا سیگنال پیوسته اسکالر مانند $f(t)$ که در بازه $(0,\infty)$ تعریف شده باشد، نُرم های زیر در حوزه زمان قابل بیان هستند،

$$L_1: \quad \|f\|_1 = \int_0^\infty |f(t)|dt$$
$$L_2: \quad \|f\|_2 = \left(\int_0^\infty f(t)^2 dt\right)^{1/2} \qquad (۲۵-۱)$$
$$L_\infty: \quad \|f\|_\infty = \sup_{t\geq 0}|f(t)|$$

عبارت sup در اینجا به معنای **سوپریمُم**[1] می باشد، یعنی اگر S یک زیرمجموعه از اعداد حقیقی باشد، $a=\sup(S)$ است، در صورتیکه a کوچکترین مقداری باشد، بطوریکه برای تمامی $x\in S$ داشته باشیم، $a\geq x$.

مثال ۱-۱۴

برای هر یک از تابع اسکالر پیوسته زیر مقدار نُرم های L_1، L_2 و L_∞ را بدست آورید،

1. $f(t)=e^{-at}, \quad a>0$

$$\|f\|_1=\int_0^\infty |f(t)|dt=\int_0^\infty |e^{-at}|dt=\frac{1}{a} \qquad \|f\|_\infty=\sup_{t\geq 0}|f(t)|=\sup_{t\geq 0}|e^{-at}|=1$$

$$\|f\|_2=\left(\int_0^\infty f(t)^2\,dt\right)^{1/2}=\left(\int_0^\infty e^{-2at}dt\right)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{2a}}$$

2. $f(t)=t-0.5, \quad 0<t<1$

$$\|f\|_1=\int_0^\infty |f(t)|dt=\int_0^1 |t-0.5|dt=\int_0^{0.5}(-t+0.5)dt+\int_{0.5}^1(t-0.5)dt=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$

$$\|f\|_\infty=\sup_{t\geq 0}|f(t)|=\sup_{0\leq t\leq 1}|t-0.5|=0.5$$

$$\|f\|_2=\left(\int_0^\infty f(t)^2\,dt\right)^{1/2}=\left(\int_0^1(t-0.5)^2\,dt\right)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{12}}$$

□

نکته ۲: برای توابع اسکالر پیوسته و حقیقی نامساوی کوشی- شوارتز بصورت زیر قابل بیان است،

$$|\langle f,g\rangle|=\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\leq\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{1/2} \qquad (۲۶-۱)$$

۱-۲-۶- ضرب ماتریس ها

ضرب یک ماتریس در ماتریس دیگر هنگامی امکان پذیر است که تعداد ستونهای ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد. در غیر اینصورت عمل ضرب تعریف نشده است. بنا به تعریف حاصلضرب یک ماتریس $A_{n\times m}$ با درایه های a_{ij} در یک ماتریس $B_{m\times r}$ با درایه های b_{jk} ماتریسی مانند $C_{n\times r}$ است که درایه های آن بصورت زیر محاسبه می شوند،

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^m a_{ij}b_{jk} \qquad (۲۷-۱)$$

[1] Supremum

مثال۱-۱۵

ماتریس های $A_{3\times4}$ و $B_{4\times2}$ را در نظر بگیرید، حاصلضرب آنها بصورت زیر خواهد بود،

$$A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 3 & -1\\ 3 & 1 & 5 & 2\\ -1 & 0 & 7 & 6\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\\ 0 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}(2\times1)+(4\times2)+(3\times0)+(-1\times3) & (2\times4)+(4\times3)+(3\times-2)+(-1\times1)\\ (3\times1)+(1\times2)+(5\times0)+(2\times3) & (3\times4)+(1\times3)+(5\times-2)+(2\times1)\\ (-1\times1)+(0\times2)+(7\times0)+(6\times3) & (-1\times4)+(0\times3)+(7\times-2)+(6\times1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7 & 13\\ 11 & 7\\ 17 & -12\end{bmatrix}$$

همانطور که پیداست حاصلضرب BA امکان پذیر نمی باشد.

با بکارگیری از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A=[2  4  3  -1;3  1  5  2;-1  0  7  6];
B=[1  4;2  3;0  -2;3  1];
A*B
ans =
     7    13
    11     7
    17   -12
B*A
??? Error using ==> *
Inner matrix dimensions must agree.
```

□

نکته۱: بدیهی است که در حالت کلی ضرب ماتریسی جابجایی پذیر نمی باشد، $AB \neq BA$ ، از این رو ترتیب حائز اهمیت است. لیکن اگر $AB = BA$ باشد ماتریس های A و B را جابجایی پذیر گویند. بطور مثال در ماتریسهای زیر اگر $a_{12} = a_{21} = b_{12} = b_{21} = 0$ باشد، آنگاه A و B جابجایی پذیر خواهد بود.

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22} \end{bmatrix}$$

نکته۲: برای ماتریس های $A_{n\times m}$، $B_{m\times r}$ و $C_{r\times p}$ قانون شرکت پذیری صادق است،

$$(AB)C=A(BC)$$

از اینرو داریم،

$$ABCD=(AB)(CD)=A(BCD)=(ABC)D$$
$$A^{m+n}=A^m A^n \quad , \quad m,n=1,2,3,\cdots$$

نکته۳: برای ماتریس های $A_{n\times m}$، $B_{n\times m}$، $C_{m\times r}$ و $D_{m\times r}$ قانون توزیع پذیری زیر صادق خواهد بود،

$$(A+B)(C+D)=AC+AD+BC+BD$$

۱-۲-۷- مشتق و انتگرال یک ماتریس

مشتق یک ماتریس $A(t)_{n\times m}$ ماتریسی است که هر درایه ijام آن برابر مشتق درایه $a_{ij}(t)$ام ماتریس $A(t)_{n\times m}$ باشد. بدیهی است، این در صورتی امکان پذیر است که درایه $a_{ij}(t)$ام نسبت به t مشتقپذیر باشد.

$$\frac{d}{dt}A(t)=\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}a_{11}(t) & \frac{d}{dt}a_{12}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{1m}(t) \\ \frac{d}{dt}a_{21}(t) & \frac{d}{dt}a_{22}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{2m}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d}{dt}a_{n1}(t) & \frac{d}{dt}a_{n2}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{nm}(t) \end{bmatrix} \qquad (۲۸-۱)$$

به طریق مشابه، انتگرال یک ماتریس $A(t)_{n\times m}$ نسبت به t با ماتریسی تعریف می شود که هر درایه ijام آن برابر انتگرال درایه $a_{ij}(t)$ام ماتریس $A(t)_{n\times m}$ باشد.

$$\int A(t)dt=\begin{bmatrix} \int a_{11}(t)dt & \int a_{12}(t)dt & \cdots & \int a_{1m}(t)dt \\ \int a_{21}(t)dt & \int a_{22}(t)dt & \cdots & \int a_{2m}(t)dt \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int a_{n1}(t)dt & \int a_{n2}(t)dt & \cdots & \int a_{nm}(t)dt \end{bmatrix} \qquad (۲۹-۱)$$

نکته۱: اگر عناصر ماتریس های A و B توابعی از t باشند، آنگاه روابط زیر برقرار است،

$$\frac{d}{dt}(A+B)=\frac{d}{dt}A+\frac{d}{dt}B$$

$$\frac{d}{dt}(AB)=\frac{dA}{dt}B+A\frac{dB}{dt}$$

نکته۲: اگر $k(t)$ یک اسکالر و تابعی از t باشد، آنگاه می توان گفت،

$$\frac{d}{dt}(Ak(t))=\frac{dA}{dt}k(t)+A\frac{dk(t)}{dt}$$

$$\int_a^b \frac{dA}{dt}Bdt=AB\Big|_a^b-\int_a^b A\frac{dB}{dt}dt$$

مثال۱-۱۶

ماتریس $A(t)$ را در نظر بگیرید، مشتق و انتگرال این ماتریس بصورت زیر بدست می آید،

$$A(t)=\begin{bmatrix}1+t & e^{-t}\\ -2 & t^2\end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}A(t)=\begin{bmatrix}1 & -e^{-t}\\ 0 & 2t\end{bmatrix}\quad,\quad \int A(t)dt=\begin{bmatrix}t+\frac{1}{2}t^2 & -e^{-t}\\ -2t & \frac{1}{3}t^3\end{bmatrix}$$

□

۱-۲-۸- اثر ماتریس مربعی

اثر[۱] یک ماتریس مربعی مانند $A_{n\times n}$ بصورت زیر تعریف می شود،

$$\text{trace}(A)=\text{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii} \qquad (۳۰-۱)$$

به عبارتی مجموع عناصر روی قطر اصلی خواهد بود.

نکته۱: برای ماتریس های $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ داریم،

$$\text{tr}(\alpha A)=\alpha\text{tr}(A)\quad,\quad \text{tr}(A+B)=\text{tr}(A)+\text{tr}(B)$$

برای ماتریس های $A_{n\times m}$ و $B_{m\times n}$ بدون توجه به اینکه $AB=BA$ و یا $AB\neq BA$ باشد داریم،

$$\text{tr}(AB)=\text{tr}(BA)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}b_{ji}$$

اگر $m=1$ باشد داریم،

$$\text{tr}(AB)=BA$$

[۱] Trace

مثال ۱-۱۷

به موارد زیر توجه نماید،

$$A=\begin{bmatrix}2&3&5\\1&4&2\\2&1&5\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad trace(A)=2+4+5=11$$

در نرم افزار MATLAB از دستور trace(A) برای محاسبه اثر ماتریس استفاده می شود،

```
A=[2 3 5;1 4 2;2 1 5];
trace(A)
ans =
    11
```

$$\left.\begin{array}{l}A=\begin{bmatrix}1&0&5\\2&-4&7\end{bmatrix}\\ B=\begin{bmatrix}1&2\\-8&6\\3&-4\end{bmatrix}\end{array}\right\}\rightarrow\quad\left\{\begin{array}{l}AB=\begin{bmatrix}16&-18\\55&-48\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad trace(AB)=16-48=-32\\ BA=\begin{bmatrix}5&-8&19\\4&-24&2\\-5&16&-13\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad trace(BA)=5-24-13=-32\end{array}\right.$$

مشخص است که $tr(AB)=tr(BA)$ می باشد. با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A=[1 0 5;2 -4 7];
B=[1 2;-8 6;3 -4];
trace(A*B)
ans =
   -32
trace(B*A)
ans =
   -32
```

□

۱-۲-۹- دترمینان ماتریس ها

برای هر ماتریس مربعی مانند $A_{n\times n}$ عددی را به عنوان **دترمینان**[۱] می توان نسبت داد که بصورت زیر تعریف می گردد،

$$\det(A)=|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij})\qquad(۳۱-۱)$$

[۱] Determinant

A_{ij} یک ماتریس مربعی $(n-1)\times(n-1)$ است که از حذف سطر iام و ستون j ام در ماتریس $A_{n\times n}$ بدست می آید.

با توجه به تعریف بالا دترمینان ماتریس های 2×2، 3×3 و 4×4 بصورت زیر قابل بیان هستند،

- برای یک ماتریس 2×2 داریم،

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (۳۲-۱)$$

مثال ۱-۱۸

دترمینان ماتریس $A_{2\times 2}$ زیر را بدست آورید،

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad |A| = 1\times 4 - 2\times 3 = -2$$

با استفاده از دستور det(A) نرم افزار MATLAB می توان دترمینان ماتریس را محاسبه نمود،

```
A =[1 2;3 4];
det(A)
ans =
    -2
```

□

- برای یک ماتریس 3×3 داریم،

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (۳۳-۱)$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

مثال ۱-۱۹

دترمینان ماتریس $A_{3\times 3}$ زیر را بدست آورید،

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad |A| = 2(20-2) - 3(5-4) + 5(1-8) = 36 - 3 - 35 = -2$$

□

- برای یک ماتریس 4×4 داریم،

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \end{aligned} \qquad (۳۴-۱)$$

به این رابطه **بسط لاپلاس**[۱] گویند.

مثال ۱-۲۰

دترمینان ماتریس $A_{4\times 4}$ زیر را بدست آورید،

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 8 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=(5\times 40)-(-7\times 0)+(-4\times(-16))+(-16\times 0)-(-7\times(-40))+(-3\times 0)=-16$$

□

۱-۲-۱۰- خواص دترمینان

دترمینان یک ماتریس مربعی $n\times n$ دارای خواص زیر است،

۱- اگر جای دو سطر (یا دو ستون) دترمینان با یکدیگر تعویض شوند، تنها علامت دترمینان تغییر خواهد کرد.

[۱] Laplace's Expansion

مثال ۱-۲۱

ماتریس A را در نظر بگیرید، با تعویض سطر دوم و سوم آن ماتریس B بدست خواهد آمد، که دترمینان آن منفی دترمینان ماتریس A است.

$$A=\begin{bmatrix}2&3&5\\1&4&2\\2&1&5\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad |A|=-2$$

تعویض سطر دوم و سوم: $r_2 \leftrightarrow r_3$

$$B=\begin{bmatrix}2&3&5\\2&1&5\\1&4&2\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad |B|=2(2-20)-3(4-5)+5(8-1)=-36+3+35=2$$

در نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[2  3  5;1  4  2;2  1  5];
det(A)
ans =
    -2
B = A([1 3 2],:)
B =
     2     3     5
     2     1     5
     1     4     2
det(B)
ans =
     2
```

□

۲- اگر یک سطر(یا یک ستون) دترمینان را با یک سطر(یا یک ستون) دیگر جمع کنیم مقدار دترمینان تغییر نمی کند.

مثال ۱-۲۲

ماتریس A را در نظر بگیرید، سطر دوم را با سطر اول جمع می کنیم تا ماتریس B بدست آید، که دترمینان آن همان دترمینان ماتریس A است.

$$A=\begin{bmatrix}2&3&5\\1&4&2\\2&1&5\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad |A|=-2$$

سطر دوم را با سطر اول جمع می کنیم و در جایگزین سطر دوم می کنیم: $r_1+r_2\rightarrow r_2$

$$B=\begin{bmatrix}2&3&5\\3&7&7\\2&1&5\end{bmatrix}\rightarrow\quad |B|=2(35-7)-3(15-14)+5(3-14)=56-3-55=-2$$

در نرم افزار MATLAB داریم،

```
A=[2 3 5;1 4 2;2 1 5];
det(A)
ans =
    -2
B=[A(1,:);A(1,:)+A(2,:);A(3,:)]
B =
     2     3     5
     3     7     7
     2     1     5
det(B)
ans =
    -2
```

□

۳- اگر یک ماتریس دو سطر(یا دو ستون) یکسان داشته باشد، آنگاه دترمینان آن صفر است.

مثال ۱-۲۳

دترمینان ماتریس زیر را محاسبه کنید،

$$A=\begin{bmatrix}1&6&1\\-5&0&-5\\3&2&3\end{bmatrix}\rightarrow\quad |A|=1(0+10)-6(-15+15)+1(-10-0)=10-10=0$$

□

۴- دترمینان حاصلضرب دو ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ برابر حاصلضرب دترمینان های آنها است،

$$|AB|=|A||B|=|BA|$$

۵- اگر در یک ماتریس یک سطر (یا یک ستون) در یک عدد اسکالر k ضرب شود، آنگاه دترمینان آن ماتریس در k ضرب می شود.

۶- اگر تمامی درایه های یک ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ در عدد اسکالر k ضرب شوند، آنگاه دترمینان آن ماتریس در k^n ضرب خواهد شد،

$$|kA| = k^n |A|$$

مثال۱-۲۴

صحت تساوی زیر را نشان دهید،

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

برای این منظور با توجه به خاصیت دوم مطرح شده برای دترمینان ها، از ترکیب سطرهای ماتریس A استفاده می نماییم،

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} -ar_2 + r_3 \to r_3 \\ -ar_1 + r_2 \to r_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-ab & c^2-ac \end{vmatrix}$$

$$-br_2 + r_3 \to r_3 \quad \Rightarrow \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & c^2-ac-bc+ba \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & (c-b)(c-a) \end{vmatrix}$$

$$|A| = (b-a)(c-b)(c-a)$$

□

۱-۲-۱۱- ماتریس های منفرد، غیر منفرد و ماتریس معکوس

یک ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ را ماتریس **غیرمنفرد**[۱] یا **ناویژه** گویند، اگر یک ماتریسی مانند $B_{n\times n}$ چنان وجود داشته باشد، که $AB = BA = I$ باشد، آن ماتریس را با نماد A^{-1} نشان داده و به آن **معکوس**[۲] ماتریس A می گویند. اگر A^{-1} وجود نداشته باشد، ماتریس A را **منفرد**[۳] یا **ویژه** گویند.

نکته۱: ماتریس معکوس A^{-1} زمانی وجود دارد که $|A|$ غیر صفر باشد.

نکته۲: اگر ماتریس های مربعی $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ غیرمنفرد باشند، آنگاه حاصلضرب AB نیز یک ماتریس غیرمنفرد است و $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ می باشد.

نکته۳: اگر k یک عدد اسکالر غیر صفر و ماتریس $A_{n\times n}$ غیرمنفرد باشد، آنگاه داریم،

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1} \quad , \quad (A^{-1})^{-1} = A$$

نکته۴: دترمینان ماتریس معکوس A^{-1} همان معکوس دترمینان A است،

$$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|} \quad \rightarrow \quad \left|AA^{-1}\right| = |A|\left|A^{-1}\right| = 1$$

نکته۵: اگر ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ غیرمنفرد باشد، می توان یک جواب منحصربفرد برای حل آن بصورت زیر بدست آورد،

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

با توجه به تعاریف بالا معکوس ماتریس های 2×2 و 3×3 بصورت زیر قابل بیان هستند.

- برای یک ماتریس غیرمنفرد 2×2 داریم،

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \quad A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} (-1)^{1+1}a_{22} & (-1)^{1+2}a_{12} \\ (-1)^{2+1}a_{21} & (-1)^{2+2}a_{11} \end{bmatrix} \quad (۳۵-۱)$$

در رابطه فوق $adj(A)$ **ماتریس الحاقی**[۴] است، که هر عنصر ترانهاده آن از دترمینان ماتریس متناظر با حذف سطر iام و ستون j ام بدست آمده است.

---

[۱] Nonsingular
[۲] Inverse
[۳] Singular
[۴] Adjoint

مثال ۱-۲۵

معکوس ماتریس $A_{2\times 2}$ زیر را بدست آورید،

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{bmatrix}$$

دستور inv(A) در نرم افزار MATLAB برای محاسبه معکوس ماتریس بکار می رود،

```
A =[1 2;3 4];
inv(A)
ans =
   -2.0000    1.0000
    1.5000   -0.5000
```

□

- برای یک ماتریس غیرمنفرد 3×3 داریم،

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} \rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\end{bmatrix} \quad (۱-۳۶)$$

مثال ۱-۲۶

معکوس ماتریس $A_{3\times 3}$ زیر را بدست آورید،

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 3\\ -2 & 3 & 0\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad |A|=1(0-9)-1(0+6)+2(9-0)=3$$

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix}0 & 3\\ 3 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}3 & 3\\ -2 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}3 & 0\\ -2 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-9 & 6 & 3\\ -6 & 4 & 3\\ 9 & -5 & -3\end{bmatrix}$$

□

بدست آوردن ماتریس الحاقی نیز یکی دیگر از مواردی است که کاربرد زیادی در جبر خطی دارد، برای این منظور می توان تابع adj را بصورت زیر تعریف کرد،

```
function B = adj(A).
[m,n] = size(A);
if m ~= n
   error('Matrix must be square')
end
if det(A) == 0
   warning('Matrix is singular')
end
B = [];
for k = 1:n
   for l = 1:n
      B = [B;cofact(A,k,l)];
   end
end
B = reshape(B,n,n);
```

تابع cofact استفاده شده در برنامه بالا به شرح زیر می باشد،

```
function ckl = cofact(A,k,l)
% Cofactor ckl of the a_kl entry of the matrix A.
[m,n] = size(A);
if m ~= n
   error('Matrix must be square')
   15
end
B = A([1:k-1,k+1:n],[1:l-1,l+1:n]);
ckl = (-1)^(k+l)*det(B);
```

اجرای برنامه بصورت زیر می باشد،

```
A =[8 1 6;3 5 7;4 9 2];
adj(A)
ans =
        -53     52    -23
         22     -8    -38
          7    -68     37
```

همچنین برای ماتریس های پارامتری هم قابل استفاده می باشد،

$$A=\begin{bmatrix} 8-\lambda & 3 & 4 \\ 1 & 5-\lambda & 9 \\ 6 & 7 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

```
λ = sym(' λy);
A = [8 - l 1 6; 3 5 - l 7;4 9 2 - l];
det(A)
ans =
- 360 + 24 * l + 15 * l^2 - l^3
adj(A)
ans =
[ - 53 - 7 * λ + λ^2,          52 + λ,      - 23 + 6 * λ]
[       22 + 3 * λ, - 8 - 10 * λ + λ^2,      - 38 + 7 * λ]
[        7 + 4 * λ,      - 68 + 9 * λ,  37 - 13 * λ + λ^2]
```

مثال۱-۲۷

ثابت کنید برای ماتریس غیرمنفرد A داریم،

$$A(\mathrm{adj}(A))=(\mathrm{adj}(A))A=(\det(A))I$$

رابطه بالا به شکل زیر قابل اثبات است،

$$\begin{cases} AA^{-1}=I \rightarrow A(\dfrac{\mathrm{adj}(A)}{\det(A)})=I \xrightarrow{\det(A)\neq 0} A(\mathrm{adj}(A))=(\det(A))I \\ A^{-1}A=I \rightarrow (\dfrac{\mathrm{adj}(A)}{\det(A)})A=I \xrightarrow{\det(A)\neq 0} (\mathrm{adj}(A))A=(\det(A))I \end{cases}$$

□

مثال۱-۲۸

با محاسبه دترمینان و ماتریس الحاقی معکوس ماتریس A را محاسبه نمایید، سپس با استفاده از آن پاسخ دستگاه معادلات زیر را بیابید.

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

برای ماتریس A صحت رابطه زیر را بررسی نمایید،

$$\det(A)=\frac{1}{3!}(\mathrm{tr}(A)^3-3\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(A^2)+2\mathrm{tr}(A^3))$$

ابتدا مقدار دترمینان و ماتریس الحاقی را بدست می آوریم،

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -5\end{vmatrix}=1(5-2)-3(-10+1)-1(4-1)=27$$

$$\mathrm{adj}(A)=\begin{bmatrix}3 & 13 & 2\\ 9 & -6 & -3\\ 3 & -5 & -7\end{bmatrix}$$

حال با استفاده از تعریف ماتریس معکوس را محاسبه نموده و دستگاه معادلات را حل می نماییم،

$$A^{-1}=\frac{\mathrm{adj}(A)}{\det(A)}=\frac{1}{27}\begin{bmatrix}3 & 13 & 2\\ 9 & -6 & -3\\ 3 & -5 & -7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{9} & \frac{13}{27} & \frac{2}{27}\\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{9} & \frac{-1}{9}\\ \frac{1}{9} & \frac{-5}{27} & \frac{-7}{27}\end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}\quad\rightarrow\quad\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}=\begin{bmatrix}\frac{1}{9} & \frac{13}{27} & \frac{2}{27}\\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{9} & \frac{-1}{9}\\ \frac{1}{9} & \frac{-5}{27} & \frac{-7}{27}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 3\\ 5\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad\mathbf{x}=\begin{bmatrix}\frac{52}{27}\\ \frac{-8}{9}\\ \frac{-47}{27}\end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A = [1  3  -1; 2  -1  1; -1  2  -5];
b = [1; 3; 5];
x = inv(A) * b
x =
   1.9259
  -0.8889
  -1.7407
```

حال برای ماتریس A صحت رابطه زیر را بررسی می نماییم،

$$\det(A)=\frac{1}{3!}(\mathrm{tr}(A)^3-3\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(A^2)+2\mathrm{tr}(A^3))$$

$$\det(A)=27,\qquad \mathrm{tr}(A)=-5,\qquad \mathrm{tr}(A^2)=45,\qquad \mathrm{tr}(A^3)=-194$$

$$\frac{1}{3!}(\mathrm{tr}(A)^3-3\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(A^2)+2\mathrm{tr}(A^3))$$

$$=\frac{1}{6}((-5)^3-3(-5)(45)+2(-194))=\frac{1}{6}(-125+675-388)=27=\det(A)$$

□

۱-۲-۱۲- نُرم ماتریس ها

نُرم یک ماتریس حداکثر بزرگنمایی یا بهره آن را تحت چنین تبدیلی نشان می دهد،

$$\mathbf{x} \longrightarrow \boxed{A} \longrightarrow A\mathbf{x}$$

تابع $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ را می توان بصورت نگاشتی در نظر گرفت که یک بردار nبعدی $\mathbf{x}$ را بر روی یک بردار mبعدی $\mathbf{y}$ می نگارد. لذا نسبت $\|A\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ را می توان به عنوان بهره یا بزرگنمایی اپراتور f در جهت بردار $\mathbf{x}$ تعریف کرد،

$$gain(\mathbf{x}) = \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \qquad (۳۷-۱)$$

بدیهی است که این بهره می تواند مقداری بزرگ، کوچک حتی صفر باشد. حال می توان نُرم یک ماتریس را بصورت بزرگترین بهره قابل دسترسی از بین تمامی بردارهای $\mathbf{x}$ دانست که در اختیار داریم،

$$\|A\| = \max_{\mathbf{x}\neq 0} gain(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \qquad (۳۸-۱)$$

لذا اگر $\|A\| << 1$ باشد، در اینصورت برای تمامی $\mathbf{x} \neq 0$ خواهیم داشت، $\|A\mathbf{x}\| << \|\mathbf{x}\|$ یعنی تابع f بردار $\mathbf{x}$ را شدیداً تضعیف می نماید و اگر $\|A\|$ مقدار بزرگی داشته باشد $gain(\mathbf{x})$ هم مقدار بزرگی خواهد بود.

مثال۱-۲۹

به مثال های زیر توجه نمایید،

1. $A = 0 \rightarrow A\mathbf{x} = 0 \quad \rightarrow \quad \|A\| = \max_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \max_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{0}{\|\mathbf{x}\|} = 0$

2. $A = I \rightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{x} \quad \rightarrow \quad \|A\| = \max_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \max_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = 1$

3. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow A\mathbf{x} = [x_2, -x_3, x_1] \rightarrow \|A\mathbf{x}\| = \sqrt{x_2^2 + x_3^2 + x_1^2} \rightarrow \|A\| = 1$

4. $$A=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}_{m\times 1}, \|x\|=|x| \quad \rightarrow \quad A\mathbf{x}=\begin{bmatrix} a_1 x \\ a_2 x \\ \vdots \\ a_m x \end{bmatrix}$$

$$\|A\mathbf{x}\|=|x|\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_m^2} \quad \rightarrow \quad \|A\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_m^2}$$

5. $$A=\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad A\mathbf{x}=[\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n]$$

$$\|A\|=\max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\sqrt{\alpha_1^2 x_1^2+\alpha_2^2 x_2^2+\cdots+\alpha_n^2 x_n^2}}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}}=\max\{|\alpha_1|,|\alpha_2|,\ldots,|\alpha_n|\}$$

برای اثبات، فرض کنید داریم،

$$\alpha_1^2 \geq \alpha_2^2 \geq \cdots \geq \alpha_n^2 \quad \Rightarrow \quad |\alpha_1|=\max_i\{|\alpha_i|\}$$

از آنجاییکه $\mathbf{x}\neq 0$ است، می توان نوشت،

$$\alpha_1^2 x_1^2+\alpha_2^2 x_2^2+\cdots+\alpha_n^2 x_n^2 \leq \alpha_1^2(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)$$

$$\sqrt{\alpha_1^2 x_1^2+\alpha_2^2 x_2^2+\cdots+\alpha_n^2 x_n^2} \leq |\alpha_1|\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$$

$$\frac{\sqrt{\alpha_1^2 x_1^2+\alpha_2^2 x_2^2+\cdots+\alpha_n^2 x_n^2}}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}} \leq |\alpha_1|$$

بنابراین داریم،

$$\max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}}\left\{\frac{\sqrt{\alpha_1^2 x_1^2+\alpha_2^2 x_2^2+\cdots+\alpha_n^2 x_n^2}}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}}\right\}=|\alpha_1| \rightarrow \|A\|=\max\{|\alpha_1|,|\alpha_2|,\ldots,|\alpha_n|\}$$

□

برای نُرم ماتریس تعاریف مختلفی وجود دارد که به برخی از آنها اشاره می کنیم.

۱- برای یک ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ یک نُرم که به نُرم p معروف است، بصورت زیر تعریف شود،

$$\|A\|_p = \max_{\|\mathbf{x}\|_p=1} \frac{\|A\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p} = \max_{\|\mathbf{x}\|_p=1} \|A\mathbf{x}\|_p \quad , \quad p \geq 1 \qquad (۳۹-۱)$$

۲- در تعریف قبل به ازای $p=1$ داریم،

$$\|A\|_1 = \max_{\|\mathbf{x}\|_1=1} \|A\mathbf{x}\|_1 = \max_j \left(\sum_i^n |a_{ij}|\right) \qquad (۴۰-۱)$$

که در واقع همان بزرگترین مقدار مجموع قدر مطلق های عناصر ستون های ماتریس است.

۳- برای $p=2$ نُرم به شکل زیر تعریف می گردد،

$$\|A\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|A\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}} \qquad (۴۱-۱)$$

در اینجا $\lambda_{\max}$ بزرگترین مقدار عددی است، که سبب می شود ماتریس $A^T A - \lambda I$ منفرد گردد.

می توان نشان داد که،

$$\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\min\limits_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|A\mathbf{x}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}}} \qquad (۴۲-۱)$$

در آن، $\lambda_{\min}$ کوچکترین مقدار عددی است، که به ازای آن ماتریس $A^T A - \lambda I$ منفرد می گردد.

۴- برای حالتیکه $p=\infty$ باشد نُرم به شکل زیر تعریف می گردد،

$$\|A\|_\infty = \max_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1} \|A\mathbf{x}\|_\infty = \max_i \left(\sum_j^n |a_{ij}|\right) \qquad (۴۳-۱)$$

که در واقع همان بزرگترین مقدار مجموع قدر مطلق عناصر سطر های ماتریس است.

۵- یک تعریف دیگری از نُرم ماتریس $A_{m\times n}$ که به **نُرم فروبنیوس**[۱] معروف است، بدین صورت تعریف می گردد،

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{1/2} \qquad (۴۴-۱)$$

همچنین می توان نوشت،

$$\|A\|_F = \sqrt{trace(A^T A)} \qquad (۴۵-۱)$$

[۱] Frobenius Norm

تمامی تعریف های داده شده برای نُرم یک ماتریس $A_{n\times n}$ دارای خواص زیر است،

1. $\|A\| = \|A^*\|, \quad \|A\| = \|A^T\|$
2. $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$
3. $\|AB\| \le \|A\| \ \|B\|$
4. $\|A\mathbf{x}\| \le \|A\| \ \|\mathbf{x}\|$
5. $\|kA\| = |k| \ \|A\|$
6. $\|A\| \ge 0 \quad , \quad \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = \mathbf{0}$

مثال۱-۳۰

برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ داریم،

$$\|A\|_1 = \max_j\left(|a_{1j}| + |a_{2j}|\right) = \max\left(|a_{11}| + |a_{21}|, |a_{12}| + |a_{22}|\right) = \max(|-6| + |-2|, |4| + |0|) = 8$$
$$\|A\|_\infty = \max_i\left(|a_{i1}| + |a_{i2}|\right) = \max\left(|a_{11}| + |a_{12}|, |a_{21}| + |a_{22}|\right) = \max\left(|-6| + |4|, |-2| + |0|\right) = 10$$
$$\|A\|_F = \left(|a_{11}|^2 + |a_{21}|^2 + |a_{12}|^2 + |a_{22}|^2\right)^{1/2} = \sqrt{|-6|^2 + |-2|^2 + |4|^2 + |0|^2} = \sqrt{56}$$

$$\|B\|_1 = \max_j\left(|b_{1j}| + |b_{2j}|\right) = \max\left(|b_{11}| + |b_{21}|, |b_{12}| + |b_{22}|\right) = \max(|2| + |-3|, |1| + |5|) = 6$$
$$\|B\|_\infty = \max_i\left(|b_{i1}| + |b_{i2}|\right) = \max\left(|b_{11}| + |b_{12}|, |b_{21}| + |b_{22}|\right) = \max\left(|2| + |1|, |-3| + |5|\right) = 8$$
$$\|B\|_F = \left(|b_{11}|^2 + |b_{21}|^2 + |b_{12}|^2 + |b_{22}|^2\right)^{1/2} = \sqrt{|2|^2 + |-3|^2 + |1|^2 + |5|^2} = \sqrt{39}$$

برای محاسبه $\|A\|_2$ و $\|A^{-1}\|_2$ ابتدا از رابطه $A^*A - \lambda I$ مقدار $\lambda_{\max}$ و $\lambda_{\min}$ را محاسبه می کنیم،

$$A^T A - \lambda I = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40-\lambda & -24 \\ -24 & 16-\lambda \end{bmatrix}$$
$$\left|A^T A - \lambda I\right| = (40-\lambda)(16-\lambda) - 576 = 0 \rightarrow \lambda = \{28 + 6\sqrt{5}, 28 - 6\sqrt{5}\}$$
$$\|A\|_2 = \sqrt{28 + 6\sqrt{5}} \quad , \quad \|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sqrt{28 - 6\sqrt{5}}}$$

$$B^T B-\lambda I=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -3 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13-\lambda & -13\\ -13 & 26-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\left|B^T B-\lambda I\right|=(13-\lambda)(26-\lambda)-169=0\rightarrow\lambda=\{19.5+6.5\sqrt{5},19.5-6.5\sqrt{5}\}$$

$$\|B\|_2=\sqrt{19.5+6.5\sqrt{5}}\quad,\quad\|B^{-1}\|_2=\frac{1}{\sqrt{19.5-6.5\sqrt{5}}}$$

با استفاده از دستور norm(A,p) در نرم افزار MATLAB می توان نُرم p ماتریس را بدست آورد،

```
A = [-6 4;-2 0];
norm(A,1)
ans =
     8
norm(A,inf)
ans =
    10
norm(A,'fro')
ans =
    7.4833
norm(A,2)
ans =
    7.4049
```

□

۱-۲-۱۳- روابط کاربردی از ماتریس های بلوکی و دترمینان ها

به ماتریس هایی که درایه های آنها خود ماتریس هستند، **ماتریس های بلوکی** گویند. در این مبحث چند رابطه کاربردی در رابطه با این ماتریس ها و دترمینان آنها ارائه شده است.

نکته۱: برای ماتریس های $A_{n\times n}$، $B_{n\times m}$، $C_{m\times n}$ و $D_{m\times m}$ روابط زیر برقرار هستند،

الف) اگر $|A|\neq 0$ و $|D|\neq 0$ باشند، داریم،

$$\begin{vmatrix}A & B\\ 0 & D\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A & 0\\ C & D\end{vmatrix}=|A||D| \qquad (۴۶-۱)$$

اثبات: از آنجائیکه ماتریس $A_{n\times n}$ غیرمنفرد است، داریم،

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & A^{-1}B \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & I_m \end{vmatrix}\begin{vmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D \end{vmatrix}\begin{vmatrix} I_n & A^{-1}B \\ 0 & I_m \end{vmatrix} = |A||I_m||I_n||D||I_n||I_m| = |A||D|$$

بطور مشابه از آنجائیکه ماتریس $D_{m\times m}$ غیرمنفرد است، قسمت دوم نیز قابل اثبات می باشد.

ب) اگر $|A| = 0$ یا $|D| = 0$ یا $|A| = |D| = 0$ باشند، داریم،

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ C & D \end{vmatrix} = 0 \qquad (۴۷-۱)$$

ج) اگر $|A| \neq 0$ باشد، آنگاه،

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D - CA^{-1}B| \qquad (۴۸-۱)$$

اثبات: اگر $|A| \neq 0$ باشد می توان نوشت،

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ C & I_m \end{vmatrix}\begin{vmatrix} I_n & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{vmatrix}$$

$$= |A||I_m||I_n||D - CA^{-1}B| = |A||D - CA^{-1}B|$$

د) اگر $|D| \neq 0$ باشد، آنگاه،

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |D||A - BD^{-1}C| \qquad (۴۹-۱)$$

اثبات: اگر $|D| \neq 0$ باشد می توان نوشت،

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & B \\ 0 & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ D^{-1}C & I_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & B \\ 0 & D \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ D^{-1}C & I_m \end{vmatrix} = |I_n||D||A - BD^{-1}C||I_m| = |D||A - BD^{-1}C|$$

ه) اگر $|A| \neq 0$ و $|D| \neq 0$ باشند، داریم،

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix} \qquad (۵۰-۱)$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix} \qquad (۵۱-۱)$$

اثبات: برای رابطه اول می توان نوشت،

$$\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -D^{-1}C + D^{-1}C & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ CA^{-1} - CA^{-1} & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

بطور مشابه برای رابطه دوم داریم،

$$\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & A^{-1}B - A^{-1}B \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & -BD^{-1} + BD^{-1} \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

نکته۲: برای ماتریس های $A_{n\times m}$ و $B_{m\times n}$ با فرض اینکه I_n و I_m به ترتیب ماتریس های واحد $n\times n$ و $m\times m$ باشند، روابط زیر برقرار است،

الف)

$$|I_n + AB| = |I_m + BA| \qquad (۵۲-۱)$$

اثبات: ماتریس زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{bmatrix} I_n & -A \\ B & I_m \end{bmatrix}$$

با توجه به روابط قبل می توان نوشت،

$$\begin{vmatrix} I_n & -A \\ B & I_m \end{vmatrix} = |I_n||I_m + BA| = |I_m + BA|$$

$$\begin{vmatrix} I_n & -A \\ B & I_m \end{vmatrix} = |I_m||I_n + AB| = |I_n + AB|$$

از این رو داریم،

$$|I_n + AB| = |I_m + BA|$$

ب) اگر $m = 1$ باشد و ماتریس های $A_{n\times 1}$ و $B_{1\times n}$ باشند،

$$|I_n + AB| = 1 + BA \qquad (۵۳\text{-}۱)$$

ج) اگر $|I_n + AB| \neq 0$ باشد، آنگاه،

$$(I_n + AB)^{-1} = I_n - A(I_m + BA)^{-1}B \qquad (۵۴\text{-}۱)$$

اثبات: ابتدا طرفین معادله را در $(I_n + AB)$ ضرب می کنیم،

$$(I_n + AB)(I_n + AB)^{-1} = (I_n + AB)I_n - (I_n + AB)A(I_m + BA)^{-1}B$$

به این ترتیب داریم،

$$\begin{aligned} I_n &= I_n + AB - (A + ABA)(I_m + BA)^{-1}B \\ &= I_n + AB - A(I_m + BA)(I_m + BA)^{-1}B \\ &= I_n + AB - AB \\ &= I_n \end{aligned}$$

رابطه مذکور حالت خاصی از **لم معکوس سازی ماتریس**[۱] است که در ادامه بیان شده است.

نکته۳: برای ماتریس های $A_{n\times n}$، $B_{n\times m}$، $C_{m\times n}$ و $D_{m\times m}$ با فرض اینکه معکوس های نشان داده شده وجود دارند، **لم معکوس سازی ماتریس** بصورت زیر برقرار است،

$$(A + BDC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(D^{-1} + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \qquad (۵۵\text{-}۱)$$

اثبات: ابتدا طرفین معادله را در $(A + BDC)$ ضرب می کنیم،

$$(A + BDC)(A + BDC)^{-1} = (A + BDC)[A^{-1} - A^{-1}B(D^{-1} + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}]$$

در اینصورت داریم،

$$\begin{aligned} I &= (A + BDC)A^{-1} - (A + BDC)A^{-1}B(D^{-1} + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \\ &= I + BDCA^{-1} - (B + BDCA^{-1}B)(D^{-1} + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \\ &= I + BDCA^{-1} - BD(D^{-1} + CA^{-1}B)(D^{-1} + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \\ &= I + BDCA^{-1} - BDCA^{-1} = I \end{aligned}$$

[۱] Matrix Inversion Lemma

مثال۱-۳۱

اگر بتوان ماتریس A را بصورت زیر تفکیک کرد، $|A|$ را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}0 & -2 & -3 & -4 & -5\\ -1 & -1 & -3 & -4 & -5\\ 4 & 8 & 13 & 16 & 20\\ 2 & 4 & 6 & 9 & 10\\ 8 & 16 & 24 & 32 & 41\end{bmatrix}=I_5+\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 4\\ 2\\ 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{bmatrix}$$

برای محاسبه $|A|$ از رابطه زیر استفاده می نماییم،

$$|I_n+AB|=1+BA \quad , \quad A_{n\times 1}, B_{1\times n}$$

لذا داریم،

$$|A|=|I_5+GH|=1+HG=1+\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 4\\ 2\\ 8\end{bmatrix}=58$$

در نرم افزار MATLAB داریم،

```
A=[0 -2 -3 -4 -5;-1 -1 -3 -4 -5;4 8 13 16 20;2 4 6 9 10;8 16 24 32 41];
det(A)
ans =
    58
```

□

۱-۲-۱۴- ماتریس مختلط و ماتریس مختلط مزدوج

ماتریس **مختلط**[۱] ماتریسی است که همه یا برخی از عناصر آن اعداد مختلط باشند.

مثال ۱-۳۲

ماتریس A در زیر نمونه ای از یک ماتریس مختلط است،

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\ -1+j & -1 & -2+3j\\ -1+4j & 3-3j & -2\end{bmatrix}$$

[۱] Complex

در نرم افزار MATLAB برای نوشتن اعداد مختلط می توان از نماد i و j استفاده نمود و بین این نماد و اعداد نباید علامت ضرب قرار داد،

```
A=[0  1  3;-1+j  -1  -2+3j;-1+4j  3-3j  -2]
A =
        0              1.0000              3.0000
  -1.0000 + 1.0000i  -1.0000            -2.0000 + 3.0000i
  -1.0000 + 4.0000i   3.0000 - 3.0000i  -2.0000
```

□

مزدوج[1] ماتریس مختلط A ماتریس است که هر یک از درایه های آن مزدوج مختلط درایه های متناظر در ماتریس مختلط A باشد. مزدوج ماتریس مختلط A را با $\overline{A}=[\overline{a}_{ij}]$ نشان می دهند، که در آن $\overline{a}_{ij}$ مزدوج مختلط a_{ij} است.

مثال ۱-۳۳

مزدوج ماتریس مختلط A بصورت زیر بیان می گردد،

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1+j & -1 & -2+3j \\ -1+4j & 3-3j & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \overline{A}=[\overline{a}_{ij}]=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1-j & -1 & -2-3j \\ -1-4j & 3+3j & -2 \end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A=[0 1 3;-1+j -1 -2+3j;-1+4j 3-3j -2];
(A.')'
ans =
        0              1.0000              3.0000
  -1.0000 - 1.0000i  -1.0000            -2.0000 - 3.0000i
  -1.0000 - 4.0000i   3.0000 + 3.0000i  -2.0000
```

□

[1] Conjugated

۱-۲-۱۵- ماتریس ترانهاده و ماتریس ترانهاده مزدوج

اگر جای سطرها و ستون های یک ماتریس $A_{n\times m}$ با یکدیگر عوض شوند، یک ماتریس $m\times n$ حاصل می شود که آن را ماتریس **ترانهاده**[۱] $A_{n\times m}$ می نامند و با نماد A^T نشان می دهند.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (۵۶-۱)$$

نکته۱: بدیهی است که $(A^T)^T=A$ می باشد.

نکته۲: در صورتیکه $A+B$ و AB قابل تعریف باشند،

$$(A+B)^T=A^T+B^T \quad , \quad (AB)^T=B^TA^T$$

نکته۳: برای یک ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ همواره $|A^T|=|A|$ و $\mathrm{tr}(A^T)=\mathrm{tr}(A)$ می باشد.

نکته۴: برای ماتریس غیرمنفرد $A_{n\times n}$ همواره $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$ است.

ماتریس **ترانهاده مزدوج**[۲]، همان مزدوج ترانهاده یک ماتریس است. برای یک ماتریس $A=[a_{ij}]$ ، ترانهاده مزدوج با نماد $\overline{A}^T$ یا A^* نشان داده می شود.

مثال ۱-۳۴

ترانهاده مزدوج ماتریس مختلط A بصورت زیر بدست می آید،

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1+j & -1 & -2+3j \\ -1+4j & 3-3j & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \overline{A}^T=A^*=[\overline{a}_{ji}]=\begin{bmatrix} 0 & -1-j & -1-4j \\ 1 & -1 & 3+3j \\ 3 & -2-3j & -2 \end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A=[0 1 3;-1+j -1 -2+3j;-1+4j 3-3j -2];
A'
ans =
        0            -1.0000 - 1.0000i  -1.0000 - 4.0000i
   1.0000            -1.0000             3.0000 + 3.0000i
   3.0000            -2.0000 - 3.0000i  -2.0000
```

[۱] Transposed
[۲] Conjugate Transposed

```
  A.'

ans =

         0            -1.0000 + 1.0000i  -1.0000 + 4.0000i

    1.0000            -1.0000             3.0000 - 3.0000i

    3.0000            -2.0000 + 3.0000i  -2.0000
```

□

نکته۱: بدیهی است که مزدوج A^T همان ترانهاده $\overline{A}$ است و $(A^*)^* = A$ می باشد.

نکته۲: همچنین در صورتیکه $A+B$ و AB قابل تعریف باشند، آنگاه،

$$(A+B)^* = A^* + B^* \quad , \quad (AB)^* = B^* A^*$$

نکته۳: اگر c یک عدد مختلط باشد، آنگاه، $(cA)^* = \overline{c}A^*$ است.

نکته۴: در صورتیکه A یک ماتریس حقیقی باشد، آنگاه $A^T = A^*$ می باشد.

نکته۵: برای یک ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ همواره $|A^*| = |\overline{A}|$ می باشد.

نکته۶: برای ماتریس غیرمنفرد $A_{n\times n}$ همواره $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ است.

۱-۲-۱۶- ماتریس متقارن و ماتریس شبه متقارن

ماتریس متقارن[۱] ماتریسی است که ترانهاده اش با خودش برابر باشد. به عبارتی برای هر ماتریس متقارن A داریم،

$$A = A^T \quad , \quad a_{ij} = a_{ji} \qquad (۵۷-۱)$$

اگر ماتریس A با منفی ترانهاده اش برابر باشد، آن را **ماتریس شبه متقارن**[۲] نامند،

$$A = -A^T \quad , \quad a_{ij} = -a_{ji} \qquad (۵۸-۱)$$

نکته۱: بدیهی است که برای هر ماتریس مربعی A، حاصل $A+A^T$ یک ماتریس متقارن و $A-A^T$ یک ماتریس شبه متقارن است، به مثال زیر توجه نمایید،

مثال ۱-۳۵

برای ماتریس مربعی A بصورت زیر داریم،

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \quad A + A^T = \begin{bmatrix} 8 & -3 & 8 \\ -3 & 0 & 8 \\ 8 & 8 & 14 \end{bmatrix} \quad , \quad A - A^T = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 3 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

□

[۱] Symmetric
[۲] Skew-Symmetric

مثال۱- ۳۶

هر یک ماتریس های زیر را بصورت حاصل جمع یک ماتریس متقارن و شبه متقارن نمایش دهید.
ماتریس را می توان بصورت زیر تفکیک کرد، که در آن P ماتریس متقارن و Q ماتریس شبه متقارن است.

$$A = P + Q \quad , \quad P = \frac{1}{2}(A + A^T), \quad Q = \frac{1}{2}(A - A^T)$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Q = \frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad P = \frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 8 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$Q = \frac{1}{2}(B - B^T) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad P = \frac{1}{2}(B + B^T) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 11 & 0 \\ 11 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

□

نکته۲: برای ماتریس $A_{m\times n}$، ماتریس $B = A^T A$ یک ماتریس متقارن خواهد بود.

$$B^T = (A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A = B$$

مثال ۱-۳۷

برای ماتریس A داریم،

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \\ 9 & 5 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 2 & 20 & -2 \\ 9 & -2 & 106 \end{bmatrix}$$

□

نکته۳: معکوس یک ماتریس متقارن، در صورتیکه وجود داشته باشد، یک ماتریس متقارن است.

$$AA^{-1} = I \rightarrow (A^{-1})^T A^T = I^T \underset{I=I^T}{\overset{A=A^T}{\rightarrow}} (A^{-1})^T A = I = A^{-1}A \rightarrow (A^{-1})^T = A^{-1}$$

۱-۲-۱۷- ماتریس هرمیتی و ماتریس شبه هرمیتی

اگر یک ماتریس مختلط A رابطه زیر را برآورده سازد آن را یک **ماتریس هرمیتی**[۱] گویند، که در آن $\overline{a}_{ji}$ مزدوج مختلط a_{ij} است.

$$A^* = A \quad , \quad a_{ij} = \overline{a}_{ji} \tag{۱-۵۹}$$

نکته۱: ماتریس هرمیتی باید مربعی بوده و درایه های قطر اصلی آن صفر یا حقیقی باشند.

مثال ۱-۳۸

دو نمونه از ماتریس های هرمیتی در زیر آورده شده است،

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1-2j & 0 \\ 1+2j & 0 & -j \\ 0 & j & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1+j & 2j \\ 1-j & 5 & -3 \\ -2j & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

□

نکته۲: هر ماتریس هرمیتی را می توان بصورت $A = C + jD$ نمایش داد، که در آن C و D ماتریس های حقیقی با خواص زیر باشند،

$$C = C^T \quad , \quad D = -D^T$$

مثال ۱-۳۹

برای ماتریس A می توان نوشت،

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1-2j & 0 \\ 1+2j & 0 & -j \\ 0 & j & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \quad A = C + jD = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

□

نکته۳: معکوس یک ماتریس هرمیتی مانند ماتریس A باز هم هرمیتی است، به عبارتی $A^{-1} = (A^{-1})^*$ می باشد.

نکته۴: هر ماتریس مربعی را می توان بطور یکتا بصورت $A = G + jH$ بیان کرد، که در آن G و H ماتریس های هرمیتی هستند و با روابط زیر محاسبه می شوند،

$$G = \frac{1}{2}(A + A^*) \quad , \quad H = \frac{1}{2j}(A - A^*)$$

هرمیتی بودن ماتریس های G و H را می توان بصورت زیر نشان داد،

[۱] Hermitian

$$G^* = \frac{1}{2}(A^* + A) = G \quad , \quad H^* = -\frac{1}{2j}(A^* - A) = H$$

نکته۵: برای ماتریس های هرمیتی $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$، ماتریس های $A+B$، $A-B$ و $AB+BA$ نیز هرمیتی هستند.

$$\begin{matrix} A = A^* \\ B = B^* \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} 1.\ A \pm B = A^* \pm B^* = (A \pm B)^* \\ 2.\ AB + BA = A^*B^* + B^*A^* = (BA)^* + (AB)^* = (BA + AB)^* \end{cases}$$

نکته۶: دترمینان یک ماتریس هرمیتی همواره حقیقی است، زیرا $|A| = |A^*| = |\overline{A}|$ است.

اگر یک ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ رابطه زیر را برآورده سازد، آنگاه ماتریس A را یک **ماتریس شبه هرمیتی**[1] می نامند،

$$A^* = -A \quad , \quad a_{ij} = -\overline{a}_{ji} \qquad (۶۰-۱)$$

لازم به ذکر است که یک ماتریس شبه هرمیتی باید مربعی باشد و عناصر روی قطر اصلی آن موهومی یا صفر باشند.

مثال ۱-۴۰

ماتریس های زیر نمونه ای از ماتریس های شبه هرمیتی هستند،

$$A = \begin{bmatrix} j5 & -2+j3 & -4+j6 \\ 2+j3 & j4 & -2+j2 \\ 4+j6 & 2+j2 & j \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} j & 1+j & 2j \\ -1+j & 5j & 3 \\ 2j & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

□

نکته۱: هر ماتریس شبه هرمیتی مانند A را می توان بصورت $A = C + jD$ نمایش داد، که در آن C و D ماتریس های حقیقی با خواص زیر باشند،

$$C = -C^T \quad , \quad D = D^T$$

مثال ۱-۴۱

برای ماتریس A می توان نوشت،

$$A = \begin{bmatrix} j5 & -2+j3 & -4+j6 \\ 2+j3 & j4 & -2+j2 \\ 4+j6 & 2+j2 & j \end{bmatrix} \rightarrow A = C + jD = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

□

[1] Skew-Hermitian

۱-۲-۱۸- ماتریس یکین و ماتریس نرمال

ماتریس یکین[۱] ماتریس مختلطی است که در آن معکوس ماتریس برابر با مزدوج ترانهاده آن است. به عبارتی،

$$A^{-1} = A^{*} \qquad (۶۱-۱)$$

مثال ۱-۴۲

ماتریس های زیر نمونه ای از ماتریس های یکین هستند،

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{15}}(2+j) & \frac{1}{\sqrt{15}}(3+j) \\ \frac{1}{\sqrt{15}}(-3+j) & \frac{1}{\sqrt{15}}(2-j) \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -j\frac{1}{\sqrt{2}} & j\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & j \end{bmatrix}$$

□

نکته۱: با توجه به تعریف ماتریس یکین $AA^{*} = A^{*}A = I$ می باشد.

نکته۲: قدرمطلق دترمینان یک ماتریس یکین مانند A برابر واحد است، یعنی $|\det(A)| = 1$ است.

نکته۳: اگر ماتریس A یکین باشد، آنگاه معکوس آن A^{-1} نیز یکین خواهد بود.

$$(A^{-1})^{*}(A^{-1}) = (A^{*})^{*}(A^{-1}) = (A)(A^{-1}) = I$$

$$(A^{-1})(A^{-1})^{*} = (A^{-1})(A^{*})^{*} = (A^{-1})(A) = I$$

نکته۴: اگر ماتریس های $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ یکین باشند، آنگاه ماتریس AB نیز یکین خواهد بود.

$$(AB)(AB)^{*} = ABB^{*}A^{*} = AA^{*} = I$$

$$(AB)^{*}(AB) = B^{*}A^{*}AB = B^{*}B = I$$

نکته۵: در تبدیل های انجام شده توسط ماتریس های یکین نُرم بردار تغییر نمی یابد،

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

$$\|\mathbf{y}\|^{2} = \|A\mathbf{x}\|^{2} = (A\mathbf{x})^{*}(A\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{*}A^{*}A\mathbf{x} = \mathbf{x}^{*}\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^{2}$$

ماتریس مربعی را که با ترانهاده مزدوج خود جابجایی پذیر باشد، یک **ماتریس نرمال**[۲] گویند. بنابراین اگر ماتریس نرمال A مختلط باشد،

---

[۱] Unitary
[۲] Normal

$$AA^* = A^*A \qquad (۶۲-۱)$$

و اگر حقیقی باشد رابطه زیر بر قرار است.

$$AA^T = A^TA \qquad (۶۳-۱)$$

مثال ۱-۴۳

ماتریس زیر نمونه ای از یک ماتریس نرمال است،

$$A = \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & 3-j5 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & j \\ -j & 1 \end{bmatrix}$$

□

نکته۱: اگر A یک ماتریس نرمال و U یک ماتریس یکین باشد، آنگاه $U^{-1}AU$ نیز یک ماتریس نرمال است.

$$(U^{-1}AU)(U^{-1}AU)^* = U^{-1}AUU^*A^*(U^{-1})^* = U^{-1}AA^*(U^{-1})^* = U^*A^*AU$$
$$= U^*A^*(U^{-1})^*U^{-1}AU = (U^{-1}AU)^*(U^{-1}AU)$$

مثال۱-۴۴

ثابت کنید، یک ماتریس نرمال است اگر متقارن حقیقی یا هرمیتی یا شبه متقارن حقیقی یا شبه هرمیتی یا یکین و یا متعامد باشد.

با توجه به تعریف شرط نرمال بودن ماتریس $A_{n\times n}$ این است که، در ماتریس حقیقی $AA^T = A^TA$ و در ماتریس مختلط $AA^* = A^*A$ باشد.

۱- متقارن حقیقی $\leftarrow A^T = A$

$$\left.\begin{aligned} A^T = A \rightarrow AA^T = A^2 \\ A^T = A \rightarrow A^TA = A^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow AA^T = A^TA$$

۲- هرمیتی $\leftarrow A^* = A$

$$\left.\begin{aligned} A^* = A \rightarrow AA^* = A^2 \\ A^* = A \rightarrow A^*A = A^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow AA^* = A^*A$$

۳- شبه متقارن حقیقی $\leftarrow A^T = -A$

$$\left.\begin{aligned} A^T = -A \rightarrow AA^T = -A^2 \\ A^T = -A \rightarrow A^TA = -A^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow AA^T = A^TA$$

۴- شبه هرمیتی $\leftarrow A^* = -A$

$$\left.\begin{array}{l} A^* = -A \rightarrow AA^* = -A^2 \\ A^* = -A \rightarrow A^*A = -A^2 \end{array}\right\} \Rightarrow AA^* = A^*A$$

۵- یکین $\leftarrow A^{-1} = A^*$

$$\left.\begin{array}{l} A^* = A^{-1} \rightarrow AA^* = I \\ A^* = A^{-1} \rightarrow A^*A = I \end{array}\right\} \Rightarrow AA^* = A^*A$$

۶- متعامد $\leftarrow A^TA = AA^T = I$

$$AA^T = A^TA$$

□

مثال۱-۴۵

ثابت کنید، اگر A یک ماتریس شبه هرمیتی باشد، آنگاه U یک ماتریس یکین است.

$$U = (I - A)(I + A)^{-1} = (I + A)^{-1}(I - A)$$

طبق تعریف اگر ماتریس A شبه هرمیتی باشد، رابطه زیر برقرار است،

$$A^* = -A$$

با توجه به این نکته مسئله را حل می کنیم و نشان می دهیم که $U^{-1} = U^*$ است.

$$\begin{aligned} U^* &= \left[(I - A)(I + A)^{-1}\right]^* = \left[(I + A)^{-1}\right]^*(I - A)^* = \left[(I + A)^*\right]^{-1}(I - A)^* \\ &= \left[(I^* + A^*)\right]^{-1}(I^* - A^*) = (I - A)^{-1}(I + A) = \left[(I + A)^{-1}(I - A)\right]^{-1} = U^{-1} \end{aligned}$$

لذا U ماتریس یکین است.

□

۱-۲-۱۹- ماتریس قطری و ماتریس مثلثی

ماتریس قطری[۱] ماتریس مربعی است که تمام درایه های آن به جز عناصر روی قطر اصلی همگی صفر هستند. فرم کلی یک ماتریس قطری به شکل زیر می باشد،

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad , \quad a_{ij} = 0, \quad i \neq j \qquad (۶۴-۱)$$

[۱] Diagonal

نکته۱: دترمینان یک ماتریس قطری برابر با حاصلضرب کلیه عناصر روی قطر اصلی می باشد،

$$|A| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

لذا ماتریس قطری A غیرمنفرد است، اگر هیچ یک از عناصر روی قطر اصلی آن صفر نباشند.

نکته۲: فرم دیگر نمایش ماتریس قطری به شکل زیر است،

$$diag(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$$

مثال۱-۴۶

ماتریس های زیر نمونه هایی از ماتریس های قطری می باشند،

$$A = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

□

از تابع diag می توان برای ایجاد یک ماتریس قطری استفاده کرد،

```
d = [1 2 3];
D = diag(d)
D =
     1    0    0
     0    2    0
     0    0    3
```

برای استخراج عناصر قطر اصلی ماتریس D بصورت زیر عمل می کنیم،

```
d = diag(D)
d =
     1
     2
     3
```

ماتریس های مثلثی را می توان به دو صورت **بالا مثلثی**[۱] و **پایین مثلثی**[۲] بیان کرد، شکل کلی یک ماتریس بالا مثلثی و پایین مثلثی بصورت زیر می باشد،

[۱] Upper Triangular
[۲] Lower Triangular

$$U=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad , \quad U_{ij}=\begin{cases} a_{ij} & i\le j \\ 0 & i>j \end{cases} \tag{۶۵-۱}$$

$$L=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad , \quad L_{ij}=\begin{cases} a_{ij} & i\ge j \\ 0 & i<j \end{cases} \tag{۶۶-۱}$$

نکته۱: دترمینان یک ماتریس مثلثی برابر با حاصلضرب کلیه عناصر قطر اصلی می باشد،

$$|L|=|U|=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

لذا ماتریس مثلثی A غیرمنفرد است، اگر هیچ یک از عناصر روی قطر اصلی آن صفر نباشند.

مثال۱-۴۷

ماتریس های زیر نمونه ای از ماتریس بالا مثلثی و پایین مثلثی می باشد،

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ -1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

□

به عملکرد توابع triu و tril توجه نمایید،

```
A = rand(4)
A =
    0.9218    0.9355    0.0579    0.1389
    0.7382    0.9169    0.3529    0.2028
    0.1763    0.4103    0.8132    0.1987
    0.4057    0.8936    0.0099    0.6038
```

```
triu(A)
ans =
    0.9218    0.9355    0.0579    0.1389
         0    0.9169    0.3529    0.2028
         0         0    0.8132    0.1987
         0         0         0    0.6038

triu(A,1)
ans =
         0    0.9355    0.0579    0.1389
         0         0    0.3529    0.2028
         0         0         0    0.1987
         0         0         0         0


triu(A,2)
ans =
         0         0    0.0579    0.1389
         0         0         0    0.2028
         0         0         0         0
         0         0         0         0
tril(A)
ans =
    0.9218         0         0         0
    0.7382    0.9169         0         0
    0.1763    0.4103    0.8132         0
    0.4057    0.8936    0.0099    0.6038
tril(A,-1)
ans =
         0         0         0         0
    0.7382         0         0         0
    0.1763    0.4103         0         0
    0.4057    0.8936    0.0099         0
```

۱-۲-۲۰- ماتریس متعامد[1]

به ماتریس A **متعامد** گفته می شود، اگر حقیقی بوده و رابطه زیر را برآورده سازد،

$$A^T A = AA^T = I \qquad (۱-۶۷)$$

نکته۱: ستون های ماتریس متعامد بردارهای یکامتعامد هستند.

نکته۲: در یک ماتریس متعامد، بدیهی است که باید $|A| = \pm 1$ باشد و لذا ماتریس A غیر منفرد است.

نکته۳: در یک ماتریس متعامد معکوس ماتریس برابر با ترانهاده آن ماتریس است. $A^{-1} = A^T$

نکته۴: اگر A و B ماتریس های مربعی متعامد باشند، آنگاه A^{-1}، A^T و AB نیز ماتریس های متعامد هستند.

$$\begin{matrix} A^T A = AA^T = I \\ B^T B = BB^T = I \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} 1.\ (A^{-1})^T A^{-1} = (A^T)^{-1} A^{-1} = (AA^T)^{-1} = I = (A^T A)^{-1} \\ \qquad = A^{-1}(A^T)^{-1} = A^{-1}(A^{-1})^T \\ 2.\ (A^T)^T A^T = AA^T = I = A^T A = A^T (A^T)^T \\ 3.\ \begin{matrix} (AB)^T AB = B^T A^T AB = B^T B = I \\ AB(AB)^T = ABB^T A^T = AA^T = I \end{matrix} \end{cases}$$

نکته۵: از آنجائیکه ماتریس های متعامد تساوی $AA^* = A^* A = I$ را برآورده می سازند، از این رو یکین هستند.

نکته۶: برای یک ماتریس متعامد A روابط زیر برقرار هستند،

$$\|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\| \quad , \quad \mathbf{x} \in \Re^n$$

$$\|A\mathbf{x}\|^2 = (A\mathbf{x})^T (A\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2$$

$$\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad , \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Re^n$$

$$\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle = (A\mathbf{x})^T (A\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

مثال ۱-۴۸

نمونه هایی از ماتریس های متعامد عبارتند از،

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

[1] Orthogonal Matrix

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
B=[1/3 -2/3 2/3;2/3 -1/3 -2/3;2/3 2/3 1/3]

B =

    0.3333   -0.6667    0.6667

    0.6667   -0.3333   -0.6667

    0.6667    0.6667    0.3333

det(B)

ans =

     1
inv(B)

ans =

    0.3333    0.6667    0.6667

   -0.6667   -0.3333    0.6667

    0.6667   -0.6667    0.3333

B(:,1)'*B(:,2)

ans =

     0

B(:,1)'*B(:,3)

ans =

     0

B(:,2)'*B(:,3)

ans =

     0
```

□

۱-۲-۲۱- تعیین علامت ماتریس ها

ماتریس متقارن حقیقی $A_{n\times n}$ را **مثبت معین**[۱] گویند، اگر شرط زیر برقرار باشد،

$$\begin{cases} \mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0, & \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0, & \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases} \qquad (۶۸-۱)$$

[۱] Positive Definite

مثبت نیمه معین[۱] گویند، اگر شرط زیر برقرار باشد،

$$\begin{cases} \mathbf{x}^T A\mathbf{x} \geq 0, & \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0, & \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases} \qquad (۶۹-۱)$$

منفی معین[۲] گویند، اگر شرط زیر برقرار باشد،

$$\begin{cases} \mathbf{x}^T A\mathbf{x} < 0, & \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0, & \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases} \qquad (۷۰-۱)$$

منفی نیمه معین[۳] گویند، اگر شرط زیر برقرار باشد،

$$\begin{cases} \mathbf{x}^T A\mathbf{x} \leq 0, & \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0, & \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases} \qquad (۷۱-۱)$$

اگر $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ بتواند علامتهای مثبت، منفی و صفر را داشته باشد آن را **نامعین**[۴] گویند.

نکته۱: چند جمله ای های به فرم $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ را **صورت های درجه دوم**[۵] می نامند.

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \quad , \quad a_{ij} = a_{ji}$$

نکته۲: تمامی تعاریف بالا برای ماتریس هرمیتی $A_{n\times n}$ با صورت درجه دوم مختلط $\mathbf{x}^* A\mathbf{x}$ نیز صادق است.

مثال۱-۴۹

صورت درجه دوم زیر را در نظر بگیرید،

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 8x_3^2$$

می توان آن را بصورت $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ نمایش داد،

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

□

[۱] Positive Semi Definite
[۲] Negative Definite
[۳] Negative Semi Definite
[۴] Indefinite
[۵] Quadratic Form

نکته۱: یک صورت درجه دوم برای یک ماتریس شبه متقارن حقیقی برابر صفر است.

برای ماتریس حقیقی $A_{n\times n}$ ماتریس های B و C را بصورت زیر می توان تعریف کرد،

$$B=\frac{1}{2}(A+A^T) \quad , \quad C=\frac{1}{2}(A-A^T)$$

در اینصورت می توان نوشت،

$$A=B+C, \quad B^T=B, \quad C^T=-C$$

لذا با این کار ماتریس $A_{n\times n}$ را بصورت مجموع یک ماتریس متقارن حقیقی B و یک ماتریس شبه متقارن حقیقی C بیان کرده ایم. با توجه به اینکه $\mathbf{x}^TC\mathbf{x}$ یک کمیت اسکالر حقیقی است، داریم،

$$\mathbf{x}^TC\mathbf{x}=(\mathbf{x}^TC\mathbf{x})^T=\mathbf{x}^TC^T\mathbf{x}=-\mathbf{x}^TC\mathbf{x}$$

از این رو نتیجه می گیریم که $\mathbf{x}^TC\mathbf{x}=0$ می باشد. این بدان معنی است که یک صورت درجه دوم برای یک ماتریس شبه متقارن حقیقی برابر صفر است. لذا می توان نوشت،

$$\mathbf{x}^TA\mathbf{x}=\mathbf{x}^T(B+C)\mathbf{x}=\mathbf{x}^TB\mathbf{x}$$

بنابراین صورت درجه دوم حقیقی $\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ فقط برای بخش متقارن $\mathbf{x}^TB\mathbf{x}$ تعریف می شود.

یکی از روش های تعیین علامت ماتریس ها استفاده از **معیار سیلوستر** می باشد. در ادامه نحوه استفاده از این معیار بیان شده است.

شرط مثبت معین: یک شرط لازم و کافی برای مثبت معین بودن یک صورت درجه دوم $\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ (یا صورت هرمیتی $\mathbf{x}^*A\mathbf{x}$) که در آن ماتریس $A_{n\times n}$ یک ماتریس متقارن حقیقی(یا ماتریس هرمیتی) می باشد، آن است که $|A|>0$ بوده و کهادهای اصلی مقدم[۱] متوالی A مثبت باشند. منظور از کهادهای اصلی مقدم، دترمینان های ماتریس های $k\times k$ ($k=1,2,\ldots,n-1$) در گوشه سمت چپ بالای ماتریس $A_{n\times n}$ می باشد. به عبارتی باید داشته باشیم،

$$a_{11}>0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}>0, \quad \cdots \quad ,|A|>0 \qquad (۷۲-۱)$$

شرط منفی معین: یک شرط لازم و کافی برای منفی معین بودن یک صورت درجه دوم $\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ (یا صورت هرمیتی $\mathbf{x}^*A\mathbf{x}$) که در آن ماتریس $A_{n\times n}$ یک ماتریس متقارن حقیقی(یا ماتریس هرمیتی) می باشد، آن است که $|A|$ برای مقادیر زوج n مثبت و برای مقادیر فرد n منفی باشد و کهادهای اصلی متوالی مرتبه زوج مثبت و کهادهای اصلی متوالی مرتبه فرد منفی باشند. به عبارتی باید داشته باشیم،

[۱] Principal Minors

$$a_{11}<0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}<0,\quad \cdots \qquad (۷۳-۱)$$

برای مقادیر زوج n باید $|A|>0$ و برای مقادیر فرد n باید $|A|<0$ باشد. همچنین این شرط را می توان با لازم داشتن اینکه $\mathbf{x}^T(-A)\mathbf{x}$ مثبت معین باشد بدست آورد.

شرط مثبت نیمه معین: یک شرط لازم و کافی برای مثبت نیمه معین بودن یک صورت درجه دوم $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ (یا صورت هرمیتی $\mathbf{x}^* A\mathbf{x}$) که در آن ماتریس $A_{n\times n}$ یک ماتریس متقارن حقیقی(یا ماتریس هرمیتی) می باشد، آن است که ماتریس A منفرد باشد، ($|A|=0$) و تمامی کهادهای اصلی آن غیر منفی باشند.

$$a_{ii}\ge 0,\quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}\ge 0,\quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix}\ge 0,\quad \cdots \quad ,|A|=0 \qquad (۷۴-۱)$$

که در آن $i<j<k$ می باشد.

شرط منفی نیمه معین: یک شرط لازم و کافی برای مثبت نیمه معین بودن یک صورت درجه دوم $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ (یا صورت هرمیتی $\mathbf{x}^* A\mathbf{x}$) که در آن ماتریس $A_{n\times n}$ یک ماتریس متقارن حقیقی(یا ماتریس هرمیتی) می باشد، آن است که ماتریس A منفرد باشد، ($|A|=0$) و تمامی کهادهای اصلی مرتبه زوج آن غیر منفی و مرتبه فرد آن غیر مثبت باشند.

$$a_{ii}\le 0,\quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}\ge 0,\quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix}\le 0,\quad \cdots \quad ,|A|=0 \qquad (۷۵-۱)$$

که در آن $i<j<k$ می باشد.

نکته۳: در بررسی مثبت نیمه معین یا منفی نیمه معین بودن علامت تمامی کهادهای اصلی باید بررسی شوند نه فقط کهادهای اصلی مقدم متوالی.

مثال۱-۵۰

مثبت معین بودن ماتریس A را بررسی نمایید.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

با استفاده از معیار سیلوستر داریم،

$$2>0,\qquad \begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & 6\end{vmatrix}=8>0,\qquad \begin{vmatrix}2 & 2 & -1\\ 2 & 6 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=2>0$$

از آنجائیکه تمامی کهادهای اصلی متوالی مثبت هستند، لذا ماتریس A مثبت معین است.

□

مثال۱-۵۱

مثبت نیمه معین بودن ماتریس A را بررسی نمایید.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

با توجه به معیار سیلوستر، باید علامت تمامی کهادهای اصلی بررسی نماییم و دترمینان ماتریس نیز صفر باشد.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=0$$

همانطور که پیداست $|A|=0$ است، حال علامت کهادهای اصلی را بررسی می نماییم. برای یک ماتریس $A_{3\times3}$ شش کهاد اصلی بصورت زیر وجود دارد،

$$a_{11},\quad a_{22},\quad a_{33},\quad \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}$$

برای ماتریس داده شده داریم،

$$a_{11}=1>0,\qquad a_{22}=4>0,\qquad a_{33}=0$$

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=0,\qquad \begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-4<0$$

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1<0$$

مشخص است که دو تا از کهادهای اصلی منفی هستند، لذا ماتریس A مثبت نیمه معین نمی باشد.

□

مثال۱-۵۲

برای هر یک از ماتریس های متقارن زیر یک صورت درجه دوم به فرم $V(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ بدست آورید.

و آنها را با معیار سیلوستر تعیین علامت کنید.

الف) $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$

صورت درجه دوم به شکل زیر است

$$V(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T A\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$
$$=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$$

برای تعیین علامت ابتدا علامت کهادهای اصلی مقدم را بررسی نماییم،

$$2>0 \quad , \quad \begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=3>0 \quad , \quad \begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{vmatrix}=4>0$$

با توجه به معیار سیلوستر ماتریس A مثبت معین می باشد.

ب) $A=\begin{bmatrix}4&2&-6\\2&10&9\\-6&9&26\end{bmatrix}$

صورت درجه دوم به شکل زیر است

$$V(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T A\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&2&-6\\2&10&9\\-6&9&26\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$
$$=4x_1^2+10x_2^2+26x_3^2+4x_1x_2+18x_2x_3-12x_1x_3$$

برای تعیین علامت ابتدا علامت کهادهای اصلی مقدم را بررسی نماییم،

$$4>0 \quad , \quad \begin{vmatrix}4&2\\2&10\end{vmatrix}=36>0 \quad , \quad \begin{vmatrix}4&2&-6\\2&10&9\\-6&9&26\end{vmatrix}=36>0$$

با توجه به معیار سیلوستر ماتریس A مثبت معین می باشد.

ج) $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&4&5\\0&5&6\end{bmatrix}$

صورت درجه دوم به شکل زیر است

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_2 + 10x_2x_3$$

حال علامت کهادهای اصلی مقدم را بررسی نماییم،

$$1 > 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -25 < 0$$

با توجه به معیار سیلوستر ماتریس A مثبت معین نمی باشد.

□

مثال۱-۵۳

برای چه مقادیری از k ماتریس های زیر مثبت معین خواهند بود؟

الف) $A = \begin{bmatrix} k & -4 & -4 \\ -4 & k & -4 \\ -4 & -4 & k \end{bmatrix}$

از معیار سیلوستر برای جواب استفاده می کنیم و ابتدا علامت کهادهای اصلی مقدم را برای مثبت معین بودن ماتریس بررسی نماییم،

$$k > 0 \qquad (1)$$

$$\begin{vmatrix} k & -4 \\ -4 & k \end{vmatrix} = k^2 - 16 > 0 \rightarrow \quad k < -4, \ k > 4 \qquad (2)$$

$$\begin{vmatrix} k & -4 & -4 \\ -4 & k & -4 \\ -4 & -4 & k \end{vmatrix} = k^3 - 48k - 128 = (k-8)(k+4)^2 > 0 \rightarrow \quad k > 8 \qquad (3)$$

از مقایسه محدوده های (1)، (2) و (3) نتیجه می شود که برا ی مثبت معین بودن ماتریس A باید $k > 8$ باشد.

ب) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & k \\ -1 & 2 & -1 \\ k & -1 & 2 \end{bmatrix}$

از معیار سیلوستر برای جواب استفاده می کنیم و ابتدا علامت کهادهای اصلی مقدم را برای مثبت معین بودن ماتریس بررسی نماییم،

$$2 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & k \\ -1 & 2 & -1 \\ k & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2k^2 + 2k + 4 = -2(k-2)(k+1) > 0 \rightarrow \qquad -1 < k < 2$$

لذا نتیجه می شود که برا ی مثبت معین بودن ماتریس A باید $-1 < k < 2$ باشد.

□

مسائل

۱-۱- برای هر یک از دسته بردارهای زیر حاصل $2\mathbf{u}-5\mathbf{v}$، $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$، $\|\mathbf{u}-2\mathbf{v}\|$ و زاویه بین بردار $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ را بیابید.

الف) $\mathbf{u}=[1,1],\quad \mathbf{v}=[-5,0]$

ب) $\mathbf{u}=[1,2],\quad \mathbf{v}=[2,1]$

ج) $\mathbf{u}=[1,1,1],\quad \mathbf{v}=[-5,0,5]$

د) $\mathbf{u}=[1,2,3],\quad \mathbf{v}=[3,2,1]$

۱-۲- برای بردارهای زیر $\|\mathbf{u}\|_1$، $\|\mathbf{u}\|_2$ و $\|\mathbf{u}\|_\infty$ را محاسبه نمایید.

الف) $\mathbf{u}=[2,1,-4,-2]$

ب) $\mathbf{u}=[1+i,1-i,1,4i]$

ج) $\mathbf{u}=[-2,3,1,-1]$

د) $\mathbf{u}=[-i,1+i,0,2i]$

۱-۳- برای هر یک از دسته بردارهای زیر متعامد و یکامتعامد بودن بردارها را بررسی کنید.

$$S:\left\{\mathbf{v}_1=[2,-1,0],\ \mathbf{v}_2=[1,0,-1],\ \mathbf{v}_3=[3,7,-1]\right\}$$

$$K:\left\{\mathbf{v}_1=[1,1,1,1],\ \mathbf{v}_2=[1,1,1,0],\ \mathbf{v}_3=[1,1,0,0],\ \mathbf{v}_4=[1,0,0,0]\right\}$$

۱-۴- مقادیر a,b,c را چنان بیابید که ماتریس زیر یک ماتریس متعامد گردد.

الف) $A=\begin{bmatrix}0 & b & 1\\ a & 2 & 1\\ -1 & 1 & c\end{bmatrix}$

ب) $A=\begin{bmatrix}a+b & b-a\\ a-b & b+a\end{bmatrix}$

۱-۵- برای ماتریس های متعامد A و B ثابت کنید،

الف) A^{-1} متعامد است.

ب) $|A|=\pm 1$ است.

ج) AB متعامد است.

۱-۶- نشان دهید برای هر مقداری از a ماتریس A یک ماتریس متعامد است،

$$A=\frac{1}{1+2a^2}\begin{bmatrix}1 & -2a & 2a^2\\ 2a & 1-2a^2 & -2a\\ 2a^2 & 2a & 1\end{bmatrix}$$

۱-۷- نشان دهید برای اینکه ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ متعامد باشد، باید شرایط زیر بر قرار باشند،

الف) $a^2+b^2=c^2+d^2=1$

ب) $ac+bd=0$

۱-۸- اگر $A=\begin{bmatrix}2 & -5\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ باشد، ضرایب غیر صفر α، β و γ را چنان بیابید که رابطه زیر برقرار گردد،

$$\alpha I_2+\beta A+\gamma A^2=\mathbf{0}$$

۱-۹- اگر $A=\begin{bmatrix}6 & -4\\ 9 & -6\end{bmatrix}$ باشد،

الف) نشان دهید که A^2 ماتریس صفر است.

ب) کلیه ماتریس های 2×2 بصورت $B=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}$ را بیابید که در آن B^2 ماتریس صفر باشد.

۱-۱۰- نشان دهید برای یک ماتریس 3×3 بالا مثلثی رابطه زیر برقرار است،

$$\begin{vmatrix}a & b & c\\ 0 & e & f\\ 0 & 0 & i\end{vmatrix}=aei$$

۱-۱۱- به ازای چه مقداری از β ماتریس های زیر منفرد خواهند بود،

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & \beta & 1-\beta\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}12-\beta & 4\\ 8 & 8-\beta\end{bmatrix}$$

۱-۱۲- نشان دهید ماتریس A غیرمنفرد است،

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

اگر رابطه زیر بر قرار باشد،

$$aei+bfg+cdh-hfa-idb-gec\neq 0$$

۱-۱۳- ثابت کنید که برای ماتریس های $A_{n\times n}$، $B_{n\times m}$، $C_{m\times n}$ و $D_{m\times m}$ روابط زیر برقرار هستند،

الف) اگر $|A|\neq 0$ و $|D-CA^{-1}B|\neq 0$ باشند، آنگاه،

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1}+A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}$$

ب) اگر $|D|\neq 0$ و $|A-BD^{-1}C|\neq 0$ باشند، آنگاه،

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1} & -(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1}+D^{-1} \end{bmatrix}$$

۱-۱۴- با استفاده از لم معکوس سازی ماتریس رابطه (ب) را با توجه به رابطه (الف) بدست آورید. این معادلات صورتهای مختلف بیان فیلتر کالمن برای فرآیندهای اتفاقی می باشند، که رابطه دوم کاربرد بیشتری دارد.

الف)
$$\begin{cases} \hat{X}(n+1)=\Pi(n)[H^TR^{-1}z(n+1)+\Sigma^{-1}(n+1)FX(n)] \\ \Pi(n)=[H^TR^{-1}H+\Sigma^{-1}(n)]^{-1} \\ \Sigma(n+1)=F\Sigma(n)F^T+GQG^T \\ \Sigma(0|0)=\Psi \\ \hat{X}(0|0)=0 \end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases} \hat{X}(n+1)=F\hat{X}(n)+K(n+1)[z(n+1)+HF\hat{X}(n)] \\ K(n+1)=\Sigma(n+1)H^T[R+H\Sigma(n+1)H^T]^{-1} \\ \Sigma(n+1)=F\Sigma(n)F^T+GQG^T \\ \Sigma(0|0)=\Psi \\ \hat{X}(0|0)=0 \end{cases}$$

در اینجا X یک متغیر تصادفی و Z نیز خروجی سیستم اتفاقی می باشد.

۱-۱۵- برای ماتریس A مقدار A^{300} را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

راهنمایی: بررسی کنید که ماتریس A یک ماتریس خودتوان است، یعنی $A^2 = A$ می باشد.

۱-۱۶- برای ماتریس مربعی A اگر $I-A$ غیر منفرد باشد، نشان دهید که رابطه زیر بر قرار است،

$$A(I-A)^{-1}=(I-A)^{-1}A$$

۱-۱۷- اگر ماتریس های A، B و $A+B$ غیر منفرد باشند نشان دهید،

$$A(A+B)^{-1}B=B(A+B)^{-1}A=(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$$

۱-۱۸- اگر K یک ماتریس شبه متقارن با عناصر حقیقی باشد. نشان دهید،

الف) ماتریس $I-K$ غیرمنفرد است.

ب) اگر $A=(I+K)(I-K)^{-1}$ باشد، آنگاه $A^{-1}=A^T$ است.

۱-۱۹- برای ماتریس $A_{m\times n}$ نشان دهید که ماتریس های A^*A و AA^* هرمیتی هستند.

۱-۲۰- به ازای چه مقادیری از α و β ماتریس A یک ماتریس یکین می باشد.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 & \mathrm{i}\beta \\ \alpha & 0 & \mathrm{i}\beta & 0 \\ 0 & \mathrm{i}\beta & 0 & \alpha \\ \mathrm{i}\beta & 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

۱-۲۱- اگر برای ماتریس $B_{n\times n}$ داشته باشیم $B^3=\mathbf{0}$ و اگر $A=I_n-B$ باشد، نشان دهید،

الف) ماتریس A غیرمنفرد است و رابطه $A^{-1}=I_n+B+B^2$ برقرار است.

ب) پاسخ سیستم $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ بصورت زیر می باشد،

$$\mathbf{x}=\mathbf{b}+B\mathbf{b}+B^2\mathbf{b}$$

۱-۲۲- نشان دهید اگر $P^{-1}AP = B$ باشد، آنگاه $P^{-1}A^nP = B^n$ است ($n \geq 1$).

۱-۲۳- با توجه به لم معکوس سازی ماتریس ها صحت روابط زیر را بررسی کنید،

الف) $(A+BC)^{-1} = A^{-1} - \dfrac{A^{-1}BCA^{-1}}{(D^{-1}+CA^{-1}B)}$

ب) $(P^{-1}+H^TQH)^{-1} = P - PH^T(HPH^T+Q^{-1})^{-1}HP$، این رابطه مربوط به الگوریتم حداقل مربعات بازگشتی می باشد.

۱-۲۴- نشان دهید،

الف) برای یک ماتریس مختلط $A_{n\times n}$ و بردارهای مختلط $\mathbf{u}_{n\times 1}$ و $\mathbf{v}_{n\times 1}$ داریم،

$$\langle \mathbf{u}, A\mathbf{v}\rangle = \mathbf{u}^* A\mathbf{v} \quad , \quad \langle A^*\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \mathbf{u}^* A\mathbf{v}$$

صحت روابط فوق را برای بردارهای $\mathbf{u}_{3\times 1}$ و $\mathbf{v}_{3\times 1}$ و ماتریس $A_{3\times 3}$ تحقیق کنید.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -j2 \\ 1 \\ 3+j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -j \\ 0 \\ 2+j3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2+j & -2 \\ -j & j & 1-j3 \\ 0 & 1-j & 2 \end{bmatrix}$$

ب) برای یک ماتریس حقیقی $A_{n\times n}$ و بردارهای حقیقی $\mathbf{u}_{n\times 1}$ و $\mathbf{v}_{n\times 1}$ داریم،

$$\langle \mathbf{u}, A\mathbf{v}\rangle = \mathbf{u}^T A\mathbf{v} \quad , \quad \langle A^T\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \mathbf{u}^T A\mathbf{v}$$

۱-۲۵- ماتریس زیر را ماتریس وَندرموند (Vandermonde) گویند،

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

نشان دهید، $|A| = \prod_{1\leq j\leq i\leq n}(a_i - a_j)$ است.

۱-۲۶- تعیین نمایید کدامیک از ماتریس های زیر مثبت معین هستند،

الف) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

ب) $A = I - \mathbf{u}\mathbf{u}^T$، که در آن $\mathbf{u}$ بردار n تایی با نُرم $\|\mathbf{u}\| < 1$ می باشد.

ج) $A = \begin{bmatrix} I & B \\ B^T & I + B^T B \end{bmatrix}$، که $B_{m\times n}$ است.

۱-۲۷- صورت های درجه دوم زیر را تعیین علامت نمایید،

الف) $Q = -x_1^2 - 3x_2^2 - 11x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 - 2x_1x_3$

ب) $Q = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 6x_2x_3 - 2x_1x_3$

ج) $Q = 10x_1^2 + 4x_2^2 - 11x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 - 2x_1x_3$

د) $Q = 6x_1^2 + 41x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 12x_2x_3$

۱-۲۸- نشان دهید معکوس یک ماتریس مثبت معین، خود یک ماتریس مثبت معین است.

۱-۲۹- اگر برای ماتریس $A_{m\times n}$ داشته باشیم، $\|A\| < 1$، نشان دهید،

الف) ماتریس $I - A^T A$ مثبت معین است.

ب) ماتریس $\begin{bmatrix} I & A \\ A^T & I \end{bmatrix}$ مثبت معین است.

۱-۳۰- ماتریس مثبت نیمه معین زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & B \end{bmatrix}$$

نشان دهید $A = \mathbf{0}$ و B ماتریس مثبت نیمه معین است.

فصل دوم

دستگاه معادلات جبری خطی

۲-۱ مقدمه

در این فصل به معرفی دستگاه معادلات جبری خطی و روش های حل آنها پرداخته شده است. از جمله روش های مبتنی بر الگوریتم ها روش حذفی گوسی و روش گوس- جردن و از روش های مبتنی بر تجزیه ماتریس ها دو روش تجزیه LU و تجزیه چالسکی بررسی شده است. در بیان هر یک مثال های کاربرد همراه با کدنویسی های MATLAB آورده شده است. الگوریتم های نام برده به لحاظ حجم محاسبات با یکدیگر مقایسه و مزایای هر یک مطرح گردیده است.

۲-۲ معرفی دستگاه معادلات جبری خطی

صورت کلی یک دستگاه معادلات جبری خطی با m معادله و n مجهول به شکل زیر در نظر گرفته می شود،

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (۱-۲)$$

این دستگاه معادلات معرف یک سیستم $m \times n$ است، که در آن a_{ij}ها و b_iها مقادیر ثابت معین و x_jها مجهولاتی هستند که باید تعیین گردند. این دستگاه معادلات را می توان با صرفنظر کردن مجهولات و فقط با در نظر گرفتن ضرایب بصورت زیر نمایش داد،

$$[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \qquad (۲-۲)$$

این ماتریس را **ماتریس افزوده**[۱] سیستم می نامند، که هر سطر آن بیان کننده یکی از معادلات خطی می باشد. همچنین می توان معادلات را بشکل $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ نمایش داد، که در آن A یک ماتریس $m \times n$، $\mathbf{b}$ یک بردار $m \times 1$ و $\mathbf{x}$ یک بردار $n \times 1$ بصورت زیر است،

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

در رابطه با دستگاه معادلات خطی بالا پرسشی که مطرح می گردد آن است که آیا جوابی برای این مجموعه معادلات وجود دارد یا نه و در صورت وجود جواب منحصربفرد است یا خیر. در فرآیند حل این دستگاه معادلات امکان رخ داد حالت های زیر وجود دارد،

۱- حالتی که دستگاه **بدون جواب** یا **ناسازگار**[۲] است.

۲- حالتی که دستگاه **سازگار**[۳] است و جواب دارد که در اینصورت امکان دارد **فقط یک جواب منحصربفرد** داشته باشد یا اینکه **بیشمار جواب** داشته باشد.

---

[۱] Augmented Matrix
[۲] Inconsistent
[۳] Consistent

در یک دستگاه معادلات جبری خطی $m \times n$ که m تعداد معادلات و n تعداد مجهولات است، حالت های زیر را می توان در نظر گرفت،

۱- حالت $m = n$: در این حالت دستگاه را **همواره معین**[۱] گویند،

اگر $|A| \neq 0$ باشد، دستگاه معادلات سازگار است و یک جواب منحصربفرد دارد.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

اگر $|A| = 0$ و دستگاه سازگار باشد، بیشمار جواب دارد و برای بدست آوردن یک پاسخ معین از روش **حداقل نُرم**[۲] می توان استفاده نمود،

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5 \\ 6x_1 + 4x_2 = 10 \end{cases}$$

اگر $|A| = 0$ و دستگاه ناسازگار باشد، اصلاً جواب ندارد و برای بدست آوردن یک پاسخ تقریبی از روش **حداقل مربعات**[۳] استفاده می شود.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5 \\ 6x_1 + 4x_2 = 5 \end{cases}$$

۲- حالت $m < n$: در این حالت دستگاه را **فرومعین**[۴] گویند،

این گونه سیستم ها می تواند بیشمار جواب داشته باشد. در دستگاه های فرومعین که دارای بیشمار جواب هستند، برای بدست آوردن یک پاسخ معین از روش حداقل نُرم می توان استفاده کرد،

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

۳- برای $m > n$، در این صورت دستگاه را **فرامعین**[۵] می نامند،

چنین دستگاهی در صورت سازگار بودن می تواند یک جواب منحصربفرد داشته باشد.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 2 \\ -5x_1 + 2x_2 = -3 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

---

[۱] Everdetermined
[۲] Minimum Norm Solution
[۳] Least Square Solution
[۴] Underdetermined
[۵] Overdetermined

در صورت ناسازگار بودن، اصلاً جوابی ندارند، که در چنین مواردی برای بدست آوردن یک پاسخ تقریبی از روش حداقل مربعات استفاده می شود.

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 2 \\ 7x_1 + 2x_2 = 8 \\ x_1 + 6x_2 = 2 \end{cases}$$

بررسی وجود و عدم وجود جواب زمانیکه تعداد معادلات و مجهولات دستگاه کم باشند بسیار ساده است. لیکن در عمل ممکن است با تعداد معادلات و مجهولات بیشتری سر و کار داشته باشیم. برای دستگاه هایی با تعداد معادلات و مجهولات بیشتر باید از روشهای خاصی جهت بدست آوردن پاسخ استفاده کرد. نرم افزار *MATLAB* ابزارهای زیادی برای حل دستگاه معادلات خطی دارد. یک روش برای حل دستگاه معادلات $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ که در آن $A_{m\times n}$ و $\mathbf{b}_{m\times 1}$ می باشد، استفاده از عملگر تقسیم چپ (\ ) است.

در حالت $m = n$ نرم افزار *MATLAB* جواب دقیق دستگاه معادلات را پس از گرد کردن اعداد محاسبه می کند.

```
A = [1  2  3;4  5  6;7  8  10]
A =
     1   2   3
     4   5   6
     7   8   10
b = ones(3,1);
x = A \ b
x =
    -1.0000
     1.0000
     0.0000
```

صحت پاسخ را می توان با محاسبه بردار باقیمانده $\mathbf{r}$ بصورت زیر بررسی کرد،

```
r = b - A*x
r =
   1.0e-015 *
            0.1110
            0.6661
            0.2220
```

به لحاظ تئوری، باقیمانده $\mathbf{r}$ برابر صفر است و نتیجه حاصل تأثیر گرد کردن اعداد می باشد.

همچنین در حالت $m = n$ می توان از ماتریس معکوس inv(A) برای حل دستگاه معادلات استفاده نمود، لیکن به دلیل حجم بالای محاسبات و حساسیت برخی از سیستم ها نسبت که خطاهای کوچک محاسباتی و گرد کردن اعداد این روش توصیه نمی شود،

```
A =[1 2 3;4 5 6;7 8 10];
b = ones(3,1);
x = inv(A)* b
x =
   -1.0000
    1.0000
    0.0000
```

برای مشاهده تفاوت این دو روش از نظر حجم محاسباتی به ویژه در دستگاه معادلات با ابعاد بالا دستوری بصورت زیر در نظر می گیریم،

```
A = rand(1000,1000);
b = rand(1000,1);
tic;
x = A \ b;
toc
elapsed_time =
    9.8900
tic;
x = inv(A)* b;
toc
elapsed_time =
   18.2180
```

دستورهای tic و toc باعث می شوند که زمان لازم برای محاسبه عبارت بین آن دو دستور برحسب ثانیه ثبت و در خروجی نشان داده شود. مشخص است که با افزایش ابعاد دستگاه معادلات حجم محاسبات در استفاده از دستورinv(A) بسیار افزایش خواهد داشت.

۲-۲-۱- محاسبه عدد حالت ماتریس ها

ایراد دیگری که در استفاده از ماتریس معکوس وجود دارد، حساسیت برخی از دستگاه های معادلات نسبت به خطاهای کوچک محاسباتی و گرد کردن اعداد می باشد. برای بررسی این موضوع به مثال بعدی توجه نمایید،

مثال۲-۱

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 23.297x_1+33.074x_2=13.520 \\ 52.684x_1+74.752x_2=30.616 \end{cases}$$

پاسخ سیستم را می توان بصورت زیر بدست آورد،

```
A =[23.297 33.074;52.684 74.752];
b =[13.520;30.616];
det(A)
ans =
   -0.9733
x = inv(A)* b
x =
    2.0000
   -1.0000
```

حال اگر این دستگاه معادلات مربوط به انجام یک سری آزمایشات مختلف بوده و در اندازه گیری های مختلف جواب های زیر بدست آمده باشد. بررسی کنید در هر حالت حل دقیق سیستم چه خواهد شد؟

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 13.65 \\ 30.5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 13.4 \\ 30.5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 13.5 \\ 30.75 \end{bmatrix}$$

```
A =[23.297 33.074;52.684 74.752];
b =[13.65;30.5];
x = inv(A)* b
x =
  -11.9266
    8.8137

b =[13.4;30.5];
x = inv(A)* b
x =
    7.2746
   -4.7190
```

```
b = [13.5;30.75];
x = inv(A)* b
x =
    8.0897
   -5.2901
```

□

مشخص است که تغییرات بسیار کوچک در بردار **b** به شدت در نتیجه حاصل تأثیر گذار است. به چنین دستگاههای معادلات **بد حالت**[۱] گفته می شود. علت این موضوع را می توان بصورت زیر بیان کرد.

دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید،

$$A_{n\times n}\mathbf{x}_{n\times 1}=\mathbf{b}_{n\times 1}$$

با فرض اینکه ماتریس A غیر منفرد باشد می توان نوشت،

$$\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}$$

حال اگر **b** شامل نویز یا خطاهای محاسباتی ناشی از گرد کردن مانند $\Delta\mathbf{b}$ باشد، در اینصورت این خطا بصورت زیر در پاسخ ظاهر خواهد شد،

$$\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}=A^{-1}(\mathbf{b}+\Delta\mathbf{b})$$

لذا می توان نوشت،

$$\Delta\mathbf{x}=A^{-1}\Delta\mathbf{b}$$

با توجه به خواص نُرم ماتریس ها از این رابطه می توان نتیجه گرفت،

$$\|\Delta\mathbf{x}\|\le\|A^{-1}\|\|\Delta\mathbf{b}\|$$

نُرم مورد نظر نُرم دو است.

از عبارت اخیر می توان تعبیر کرد که، اگر $\|A^{-1}\|$ مقدار کوچکی داشته باشد، برای تغییرات کم در **b** یعنی $\|\Delta\mathbf{b}\|$ کوچک، مقدار $\|\Delta\mathbf{x}\|$ کم خواهد بود. ولی برای $\|A^{-1}\|$ های بزرگ، مقدار $\|\Delta\mathbf{x}\|$ بزرگ است، حتی اگر $\|\Delta\mathbf{b}\|$ مقدار کوچکی باشد.

لذا برای تشخیص بد حالت بودن یک دستگاه معادلات پارامتری به نام **عدد حالت**[۲] تعریف می گردد،

$$\kappa=\|A\|\|A^{-1}\| \quad , \quad \kappa\ge 1 \qquad (۳-۲)$$

---

[۱] Ill condition
[۲] Condition Number

اگر عدد حالت کوچک باشد، بیان کننده آن است که ماتریس A و دستگاه معادلات حاصل **خوش حالت**[۱] است و اگر عدد حالت مقدار خیلی بزرگی باشد، بیانگر آن است که ماتریس نزدیک به منفرد شدن است، لذا آن ماتریس را بد حالت می نامند و خطای محاسباتی در معکوس کردن ماتریس A زیاد است.

مثال۲-۲

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 23.297x_1+33.074x_2=13.520 \\ 52.684x_1+74.752x_2=30.616 \end{cases}$$

عدد حالت را برای این سیستم بدست آورید و بد حالت یا خوش حالت بودن سیستم را بررسی نمایید.

برای بدست آوردن عدد حالت از تعریف آن استفاده می نماییم، البته دستوری به نام cond(A) برای محاسبه عدد حالت ماتریس ها وجود دارد،

```
A =[23.297 33.074;52.684 74.752];
norm(A)*norm(inv(A))
ans =
  1.0275e+004
cond(A)
ans =
  1.0275e+004
```

نتیجه نشان می دهد که $\kappa=1.0275\times10^4>>1$ است، لذا این سیستم بد حالت می باشد و به همین دلیل تغییرات بسیار کوچک در بردار $\mathbf{b}$ سبب بروز خطای محاسباتی بالایی در حل دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ می گردد.

دستور cond(A) عدد حالت را بر اساس نُرم دو ماتریس محاسبه می نماید و برای محاسبه آن بر حسب دیگر نُرم ها می توان از دستورهای cond(A,1)، cond(A,inf) و cond(A,'fro') استفاده کرد.

□

[۱] Well Conditioned

۲-۳ حل دستگاه معادلات جبری خطی بر پایه الگوریتم ها

یکی از موضوعات مهمی که در حل دستگاه معادلات خطی مورد نظر است، تشخیص سازگار یا ناسازگار بودن سیستم و در صورت سازگار بودن یافتن جواب و یا مجموعه جوابهای ممکن می باشد. در این راستا دو روش عمده که بکار گرفته می شوند روش **خذفی گوسی**[۱] و روش **گوس – جردن**[۲] می باشند، که در ادامه به شرح این دو روش می پردازیم.

۲-۳-۱- روش خذفی گوسی

در روش حذفی گوسی سعی می شود تا با انجام یک سری عملیات ساده نظیر جابجایی سطرها، ضرب سطرها در یک عدد غیر صفر یا جمع سطرها با یکدیگر، سیستم موجود را به یک سیستم ساده ولی معادل با قبلی تبدیل کرد، به نحوی که دستیابی به جواب به راحتی امکان پذیر باشد. برای این منظور باید دو حالت را در نظر گرفت، اول هنگامیکه $m = n$ باشد و دوم در صورتیکه $m \neq n$ باشد.

در حالت $(m = n)$ سعی می شود تا ماتریس افزوده سیستم به شکل بالا مثلثی زیر در آید،

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{nn} & b'_n \end{array}\right) \qquad (۴-۲)$$

در اینصورت دستگاه معادلات حاصل بشکل زیر خواهد بود، که با استفاده از یک **الگوریتم جایگزینی پسرو**[۳] می توان آن را حل کرد،

$$\begin{aligned} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \cdots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ a'_{33}x_3 + \cdots + a'_{3n}x_n &= b'_3 \\ &\vdots \\ a'_{n-1,n-1}x_{n-1} + a'_{n-1,n}x_n &= b'_{n-1} \\ a'_{nn}x_n &= b'_n \end{aligned}$$

الگوریتم جایگزینی پسرو بصورت زیر می باشد،

[۱] Gaussian Elimination
[۲] Gauss - Jordan
[۳] Backward Substitution Algorithm

گام اول) $x_n = \dfrac{b'_n}{a'_{nn}}$

گام دوم) $x_i = \dfrac{1}{a'_{ii}}\left(b'_i - \sum_{j=i+1}^{n} a'_{ij}x_j\right) \quad , \quad i = n-1,\ldots,2,1$

گام سوم) $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$

فرایند تبدیل ماتریس ضرایب به فرم بالا مثلثی را می توان بصورت زیر خلاصه کرد،

گام اول- حذف مجهول x_1 از معادلات دوم تا nام،

$$\frac{-a_{i1}}{a_{11}} r_1 + r_i \to r_i \quad , \quad i = 2,\ldots,n$$

گام دوم- حذف مجهول x_2 از معادلات سوم تا nام،

$$\frac{-a_{i2}}{a_{22}} r_2 + r_i \to r_i \quad , \quad i = 3,\ldots,n$$

گام سوم- به همین ترتیب تا گام $n-1$ ادامه می دهیم.

مثال۲-۳

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 7 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

فرم ماتریس افزوده این معادلات بصورت زیر است،

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 4 & 7 \\ 4 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(۱) ابتدا باید مجهول x_1 را از معادلات دوم و سوم حذف نماییم،

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{-4}{9} r_1 + r_2 \to r_2 \\ \dfrac{-1}{9} r_1 + r_3 \to r_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & \frac{15}{9} & \frac{20}{9} & \frac{44}{9} \\ 0 & \frac{6}{9} & \frac{5}{9} & \frac{20}{9} \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(۲) حال باید مجهول x_2 را از معادله سوم حذف نماییم،

$$\frac{-6}{15}r_2 + r_3 \to r_3 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & \frac{15}{9} & \frac{20}{9} & \frac{44}{9} \\ 0 & 0 & \frac{-3}{9} & \frac{4}{15} \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(۳) بنابراین ماتریس ضرایب به فرم بالامثلثی تبدیل می شود و دستگاه معادلات حاصل بصورت زیر خواهد بود،

$$\begin{aligned} 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 7 \\ \frac{15}{9}x_2 + \frac{20}{9}x_3 &= \frac{44}{9} \\ \frac{-3}{9}x_3 &= \frac{4}{15} \end{aligned}$$

که جواب ها به راحتی با استفاده از الگوریتم جایگزینی پسرو قابل محاسبه هستند،

$$x_1 = \frac{-1}{5}, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = \frac{-4}{5}$$

□

در انجام روش حذفی گوسی، هر یک از مراحل گفته شده را می توان در قالب ضرب یک **ماتریس مقدماتی**[۱] بیان کرد. ماتریس های مقدماتی مربعی بوده و با انجام یک عمل مقدماتی روی ماتریس واحد I_n بدست می آیند. در مجموع سه نوع ماتریس مقدماتی برای انجام عملیات سطری، همچنین برای عملیات ستونی ماتریس ها وجود دارد.

۱- ماتریس های مقدماتی که عمل جابجایی سطر را انجام می دهند، $r_i \leftrightarrow r_j$. به چنین ماتریس هایی **ماتریس جایگشت**[۲] نیز گفته می شود. در این ماتریس ها $\det(E) = -1$ و $E^{-1} = E$ است.

مثال ۲-۴

برای نمونه ماتریس های زیر را در نظر بگیرید،

$$r_2 \leftrightarrow r_3 \Rightarrow \qquad E_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 0 & 6 & 3 \\ 9 & 12 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 9 & 12 & 7 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$r_1 \leftrightarrow r_2 \Rightarrow \qquad E_2 B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -9 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

□

[۱] Elementary Matrix
[۲] Permutation Matrix

۲- ماتریس های مقدماتی که هر سطر از ماتریس را در عددی مثل k ضرب می نمایند، $kr_i \to r_i$.
در این ماتریس ها E یک ماتریس قطری، $\det(E)=k$ است و $[E_i(k)]^{-1}=E_i(1/k)$ است.

مثال ۲-۵

برای نمونه ماتریس های زیر را در نظر بگیرید،

$$-4r_2 \to r_2 \Rightarrow \qquad E_1A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-4&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-5&4\\0&6&3\\9&12&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-5&4\\0&-24&-12\\9&12&7\end{bmatrix}$$

$$5r_1 \to r_1 \Rightarrow \qquad E_2B=\begin{bmatrix}5&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\-9&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&15\\-9&5\end{bmatrix}$$

□

۳- ماتریس های مقدماتی که هر سطر از ماتریس را با مضربی از سایر سطرها جمع می نمایند، $kr_j+r_i \to r_i$. در این ماتریس ها $\det(E)=1$ است و $[E_i(k)]^{-1}=E_i(-k)$ است.

مثال ۲-۶

برای نمونه ماتریس های زیر را در نظر بگیرید،

$$-4r_2+r_1 \to r_1 \Rightarrow \qquad E_1A=\begin{bmatrix}1&-4&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-5&4\\0&6&3\\9&12&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-29&-8\\0&6&3\\9&12&7\end{bmatrix}$$

$$5r_1+r_2 \to r_2 \Rightarrow \qquad E_2B=\begin{bmatrix}1&0\\5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\-9&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\1&20\end{bmatrix}$$

□

مثال ۲-۷

در مثال (۲-۳) برای انجام هر یک از مراحل گفته شده ماتریس های مقدماتی E_1، E_2 و E_3 را می توان بصورت زیر بیان کرد،

مرحله (۱) : $\frac{-4}{9}r_1+r_2 \to r_2$

$$E_1[A|\mathbf{b}]=\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{-4}{9}&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\left[\begin{array}{ccc|c}9&3&4&7\\4&3&4&8\\1&1&1&3\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}9&3&4&7\\0&\frac{15}{9}&\frac{20}{9}&\frac{44}{9}\\1&1&1&3\end{array}\right]$$

مرحله (۲) : $\frac{-1}{9}r_1 + r_3 \to r_3$

$$E_2E_1[A|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{9} & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & \frac{15}{9} & \frac{20}{9} & \frac{44}{9} \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & \frac{15}{9} & \frac{20}{9} & \frac{44}{9} \\ 0 & \frac{6}{9} & \frac{5}{9} & \frac{20}{9} \end{array}\right]$$

مرحله (۳) : $\frac{-6}{15}r_2 + r_3 \to r_3$

$$E_3E_2E_1[A|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-6}{15} & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & \frac{15}{9} & \frac{20}{9} & \frac{44}{9} \\ 0 & \frac{6}{9} & \frac{5}{9} & \frac{20}{9} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & \frac{15}{9} & \frac{20}{9} & \frac{44}{9} \\ 0 & 0 & \frac{3}{9} & \frac{4}{15} \end{array}\right]$$

بنابراین کل این تبدیلات را می توان بصورت زیر بیان کرد،

$$E_3E_2E_1[A|\mathbf{b}]$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB می توان برنامه ای برای محاسبه ماتریس های مقدماتی از روش حذفی گوسی و حل دستگاه معادلات با استفاده از الگوریتم جایگزینی پسرو نوشت،

```
%Gaussian Eliminatio n algorithm without pivoting.
function [x, AB] = gauss1(A, B)
NA = size(A,2);
[NB1, NB] = size(B);
if NB1 ~= NA,
   error(' A and B must have compatible dimensions ');
end
AB = [A B];
E = eye(NA, NA);
for j = 1 : NA - 1
for i = j + 1 : NA
      if AB(j, j) ~= 0
      E(i, j) = - AB(i, j) / AB(j, j);
   AB = E * AB;
         E = eye(NA, NA);
      else
         error(' algorithm needs pivoting' )
      end
   end
end
```

```
% backward substitution for a upper-triangular matrix equation
x = zeros(1,NA);
sum = 0;
for i = NA:-1:1
   for j = i+1:NA
      sum = sum + x(1,j)*AB(i,j);
   end
   x(1,i) = (AB(i,NA+1) - sum)/AB(i,i);
   sum = 0;
end
```

خروجی برنامه اصلی شامل پاسخ نهایی و ماتریس افزوده بالامثلثی می باشد و در صورتیکه با حذف (;) اجازه نوشتن نتایج را برای ماتریس های مقدماتی بدهید، اجرای برنامه بصورت زیر خواهد بود،

```
A=[9 3 4;4 3 4;1 1 1];
b=[7;8;3];
[x AB]=gauss1(A,b)
E =
    1.0000         0         0
   -0.4444    1.0000         0
         0         0    1.0000
E =
    1.0000         0         0
         0    1.0000         0
   -0.1111         0    1.0000
E =
    1.0000         0         0
         0    1.0000         0
         0   -0.4000    1.0000
x =
   -0.2000    4.0000   -0.8000
AB =
    9.0000    3.0000    4.0000    7.0000
         0    1.6667    2.2222    4.8889
         0         0   -0.3333    0.2667
```

□

مثال ۲-۸

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13 \\ 3x_1 + x_3 = -1 \end{cases}$$

فرم ماتریس افزوده این معادلات بصورت زیر می باشد،

$$[A|\mathbf{b}] \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 13 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

<u>گام اول</u>- حذف مجهول x_1 از معادلات دوم و سوم،

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}r_1 + r_2 \rightarrow r_2 \\ \frac{3}{2}r_1 + r_3 \rightarrow r_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 15 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 5 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>گام دوم</u>- حذف مجهول x_2 از معادلات سوم،

$$\frac{-3}{5}r_2 + r_3 \rightarrow r_3 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 15 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

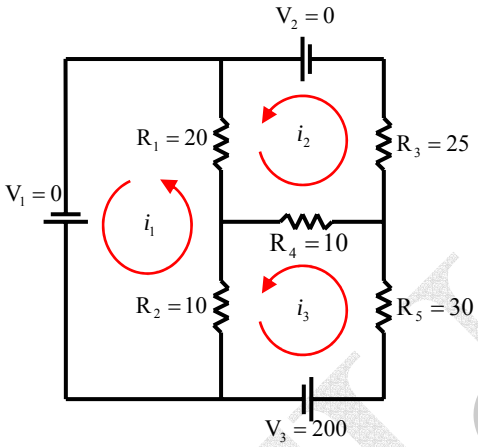
<u>گام سوم</u> - اجرای الگوریتم جایگزینی پسرو برای حل معادلات،

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ \frac{5}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3 = 15 \\ -2x_3 = -4 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = \frac{2}{5}(15 - \frac{5}{2}x_3) = 4 \\ x_1 = -\frac{1}{2}(4 - x_2 + x_3) = -1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

□

مثال ۲-۹

در مدار الکتریکی زیر با اعمال روش حذفی گوسی جریانهای i_1، i_2 و i_3 را بدست آورید.



معادلات مداری برای حلقه ها و ماتریس افزوده حاصل برای این سیستم بصورت زیر بدست می آید،

$$\begin{cases} 20(i_1-i_2)+10(i_1-i_3)=0 \\ 25i_2+10(i_2-i_3)+20(i_2-i_1)=0 \\ 30i_3+10(i_3-i_2)+10(i_3-i_1)=200 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 30 & -20 & -10 & 0 \\ -20 & 55 & -10 & 0 \\ -10 & -10 & 50 & 200 \end{array}\right]\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

حال با اعمال روش حذفی گوسی دستگاه معادلات حاصل را حل می کنیم،

گام اول- حذف مجهول i_1 از معادلات دوم و سوم،

$$\left.\begin{array}{l} \frac{20}{30}r_1+r_2\rightarrow r_2 \\ \frac{10}{30}r_1+r_3\rightarrow r_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 30 & -20 & -10 & 0 \\ 0 & \frac{125}{3} & \frac{-50}{3} & 0 \\ 0 & \frac{-50}{3} & \frac{140}{3} & 200 \end{array}\right]\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

گام دوم- حذف مجهول i_2 از معادله سوم،

$$\left.\frac{2}{5}r_2+r_3\rightarrow r_3\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 30 & -20 & -10 & 0 \\ 0 & \frac{125}{3} & \frac{-50}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 200 \end{array}\right]\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

گام سوم - اجرای الگوریتم جایگزینی پسرو برای حل معادلات،

$$\begin{cases} 30i_1-20i_2-10i_3=0 \\ \frac{125}{3}i_2-\frac{50}{3}i_3=0 \\ 40i_3=200 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i_3=5 \\ i_2=2 \\ i_1=3 \end{cases}$$

لذا جریان هر یک از حلقه ها بدست می آید.

□

مثال ۲-۱۰

در یک آزمایش پرتاب موشک، سرعت موشک در راستای قائم در زمان های مختلف بصورت زیر اندازه گیری شده است،

t (sec) زمان	v (m/sec) سرعت
5	106.8
8	177.2
12	279.2

با توجه به این جدول سرعت موشک بر حسب زمان را می توان بصورت چندجمله ای درجه دوم تقریب زد،

$$v(t) = a_1 t^2 + a_2 t + a_3 \qquad , \qquad 5 \le t \le 12$$

با استفاده از روش حذفی گوسی مقدار ضرایب این چند جمله ای را بدست آورید. سپس سرعت موشک را در لحظه $t = 6\,\text{sec}$ بیابید.

ابتدا باید با قرار دادن نقاط در معادله سرعت موشک بر حسب زمان دستگاه معادلات حاصل را بدست آوریم،

$$\begin{bmatrix} t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_3^2 & t_3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

حال با اعمال روش حذفی- گوسی این دستگاه معادلات را حل می نماییم، فرم ماتریس افزوده سیستم بصورت زیر است،

$$[A|\mathbf{b}] \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 25 & 5 & 1 & 106.8 \\ 64 & 8 & 1 & 177.2 \\ 144 & 12 & 1 & 279.2 \end{array}\right]\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

<u>گام اول</u>- حذف مجهول a_1 از معادلات دوم و سوم، توجه کنید که $-64/25 = -2.56$ و $-144/25 = -5.76$ می باشد،

$$\left.\begin{array}{l} -2.56r_1 + r_2 \rightarrow r_2 \\ -5.76r_1 + r_3 \rightarrow r_3 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 25 & 5 & 1 & 106.8 \\ 0 & -4.8 & -1.56 & -96.208 \\ 0 & -16.8 & -4.76 & -335.968 \end{array}\right]\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

گام دوم- حذف مجهول a_2 از معادله سوم، توجه کنید که $-16.8/4.8=-3.5$ می باشد،

$$-3.5r_2+r_3\rightarrow r_3\} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 25 & 5 & 1 & 106.8 \\ 0 & -4.8 & -1.56 & -96.208 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.76 \end{array}\right]\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

گام سوم - اجرای الگوریتم جایگزینی پسرو برای حل معادلات،

$$\begin{cases} 25a_1+5a_2+a_3=106.8 \\ -4.8a_2-1.56a_3=-96.208 \\ 0.7a_3=0.76 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_3=1.0857 \\ a_2=19.6905 \\ a_1=0.2905 \end{cases}$$

لذا معادله سرعت موشک بر حسب زمان بصورت زیر بدست می آید،

$$v(t)=0.2905t^2+19.6905t+1.0857 \quad , \quad 5\le t\le 12$$

سرعت موشک را در لحظه $t=6\sec$ بصورت زیر محاسبه می شود،

$$v(6)=0.2905\times(6)^2+19.6905\times(6)+1.0857=129.686 \ \ \mathrm{m/sec}$$

□

نکته۱: در اجرای عملیات حذفی- گوسی اگر یکی از عناصر قطر اصلی برابر با صفر گردد انجام عملیات متوقف خواهد شد. در چنین مواردی برای ادامه عملیات نیاز به جابجا کردن معادله مذکور یا همان سطرهای ماتریس افزوده داریم، که به این کار **محورگیری**[۱] گفته می شود. در انتخاب سطر مناسب برای جابجایی بخاطر پایداری الگوریتم، بهتر است سطری را در نظر بگیریم که بزرگترین عدد محوری را داشته باشد.

مثال ۲-۱۱

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2-2x_3-2x_4=-4 \\ x_1+2x_2+4x_3-3x_4=5 \\ -3x_1-3x_2+8x_3-2x_4=7 \\ -x_1+x_2+6x_3-3x_4=7 \end{cases}$$

فرم ماتریسی این معادلات بصورت زیر می باشد،

[۱] Pivoting

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & -3 \\ -3 & -3 & 8 & -2 \\ -1 & 1 & 6 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

می خواهیم این دستگاه معادلات خطی را با استفاده از روش حذفی گوسی حل کنیم. حال مراحل مربوطه را طی می نماییم،

(۱) ابتدا باید مجهول x_1 را از معادلات دوم تا چهارم حذف نماییم،

$$\left.\begin{array}{l} \frac{-1}{2}r_1+r_2\rightarrow r_2 \\ \frac{3}{2}r_1+r_3\rightarrow r_3 \\ \frac{1}{2}r_1+r_4\rightarrow r_4 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & -4 & 5 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

(۲) حال باید مجهول x_2 را از معادلات سوم و چهارم حذف نماییم، لیکن به علت صفر بودن عنصر محوری a_{22} این کار امکان پذیر نمی باشد. در چنین شرایطی باید عمل محورگیری انجام دهیم، یعنی جای معادله دوم را با معادله چهارم عوض می نماییم. بنابراین ماتریس افزوده جدید بصورت زیر قابل بازنویسی خواهد بود،

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 5 & -4 & 5 \\ 0 & 3 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 7 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

(۳) حال می توانیم مجهول x_2 را از معادلات سوم و چهارم حذف کنیم،

$$-r_2+r_3\rightarrow r_3 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 5 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 7 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

(۴) این بار لازم است تا مجهول x_3 را از معادله چهارم حذف نماییم، لیکن باز هم عنصر محوری a_{33} برابر با صفر است، پس باز هم عمل محورگیری را انجام داده و جای معادله سوم را با معادله چهارم عوض می نماییم،

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 5 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

به این ترتیب ماتریس ضرایب به فرم بالامثلثی تبدیل می گردد و دستگاه معادلات حاصل بصورت زیر خواهد بود،

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= -4 \\ 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= 5 \\ 5x_3 - 2x_4 &= 7 \\ -x_4 &= -4 \end{aligned}$$

که جواب ها به راحتی با استفاده از الگوریتم جایگزینی پسرو قابل محاسبه هستند،

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 4$$

ماتریس های مقدماتی برای انجام هر مرحله بصورت زیر بدست می آیند،

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

در برنامه gauss1 عملیات محورگیری در نظر گرفته نشده است، لذا استفاده از این برنامه در این حالت پیغام خطایی بصورت زیر می دهد،

```
A =[2 4 - 2 - 2;1 2 4 - 3;-3 - 3 8 - 2;-1 1 6 - 3];
b =[-4;5;7;7];
x = gauss1(A,b)
??? Error using ==> gauss1
algorithm needs pivoting
```

لذا می توان بصورت زیر برنامه را اصلاح نمود تا عمل محورگیری هم صورت گیرد،

```
%Gaussian Elimination algorithm with pivoting.
function [x,AB] = gauss2(A,B)
NA = size(A,2);
[NB1,NB] = size(B);
if NB1 ~= NA,
   error('A and B must have compatible dimensions');
end
NA;
AB = [A B];
E = eye(NA,NA);
for j = 1:NA - 1
for i = j+1:NA
      if AB(j,j) ~= 0
      E(i,j) = - AB(i,j) / AB(j,j);
   AB = E * AB;
         E = eye(NA,NA);
      else
         [max,k] = max(abs(AB([j:NA],j)));
         AB([j k+(j-1)],:) = AB([k+(j-1) j],:);
         E(i,j) = - AB(i,j) / AB(j,j);
   AB = E * AB;
         E = eye(NA,NA);
      end
   end
end
```

```
% backward substitution for a upper-triangular matrix equation
x = zeros(1,NA);
sum = 0;
for i = NA:-1:1
   for j = i+1:NA
      sum = sum + x(1,j) * AB(i,j);
   end
   x(1,i) = (AB(i,NA+1) - sum) / AB(i,i);
   sum = 0;
end
```

اجرای برنامه بصورت زیر است،

```
A=[2  4 -2 -2;1  2  4 -3;-3 -3  8 -2;-1  1  6 -3];
b=[-4;5;7;7];
[x AB]=gauss2(A,b)
x =
     1     2     3     4
AB =
     2     4    -2    -2    -4
     0     3     5    -5     1
     0     0     5    -2     7
     0     0     0     1     4
```

□

مثال ۲-۱۲

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7 \end{cases}$$

فرم ماتریس افزوده این دستگاه معادلات بصورت زیر می باشد،

$$[A|\mathbf{b}] \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & -7 \end{array}\right]$$

گام اول- حذف مجهول x_1 از معادلات دوم و سوم،

$$\left.\begin{array}{l} r_1+r_2\to r_2 \\ -2r_1+r_3\to r_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$E_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

گام دوم- جابجایی معادلات دوم و سوم حذف مجهول x_2 از معادله سوم،

$$r_2\leftrightarrow r_3 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \to \quad E_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

گام سوم - اجرای الگوریتم جایگزینی پسرو برای حل معادلات،

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=-2 \\ 3x_2-3x_3=-3 \\ x_3=1 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} x_3=1 \\ x_2=\frac{1}{3}(-3+3x_3)=0 \\ x_1=-2+2x_2-3x_3=-5 \end{cases}$$

□

۲-۳-۱-۱- حجم محاسبات جبری الگوریتم حذفی گوسی

الگوریتم حذفی گوسی را می توان از نظر تعداد محاسبات جبری نیز بررسی نمود. در حالت کلی تعداد عملیات لازم برای محاسبات جبری بصورت زیر بدست می آید،

۱- جمع دو بردار $n\times 1$: $\mathbf{u}+\mathbf{v}=[u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots, u_n+v_n]$

- نیاز به انجام n عملیات جمع جبری دارد،

۲- ضرب عدد اسکالر a در یک بردار $n\times 1$: $a\mathbf{u}=[au_1, au_2 \ldots, au_n]$

- نیاز به انجام n عملیات ضرب جبری دارد،

هر یک از این عملیات جبری (جمع/ تفریق و ضرب/ تقسیم) را اصطلاحاً یک flop[۱] می نامند.

[۱] Floating-point operation

۳- ضرب داخلی دو بردار $n\times 1$: $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = u^T v = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$

- معادل با n عمل ضرب و $n-1$ عمل جمع می باشد، لذا تعداد کل عملیات $2n-1$ خواهد بود.

۴- ضرب بردار در ماتریس: $\mathbf{y}_{m\times 1} = A_{m\times n}\mathbf{x}_{n\times 1}$

- این حالت را می توان معادل با ضرب داخلی m بردار $n\times 1$ در نظر گرفت، لذا تعداد کل عملیات $(2n-1)m$ است.

- برای ماتریس هایی با ابعاد بزرگ ($n\to\infty$) می توان $2nm$ عملیات در نظر گرفت.

- اگر A ماتریس قطری باشد $(m=n)$، محاسبات n عمل ضرب خواهد بود.

۵- ضرب ماتریس در ماتریس: $C_{m\times p} = A_{m\times n}B_{n\times p}$

- با توجه به بند ۴ تعداد محاسبات جبری $(2n-1)mp$ بدست می آید.

- برای ماتریس هایی با ابعاد بزرگ ($n\to\infty$) می توان $2nmp$ عملیات در نظر گرفت.

۶ - الگوریتم جایگزینی پسرو یا پیشرو:

- دستگاه معادلات زیر را در بگیرید،

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

الگوریتم جایگزینی پسرو به فرم زیر است،

$$\begin{aligned} x_n &= b_n / a_{nn} \\ x_{n-1} &= (b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n)/a_{n-1,n-1} \\ x_{n-2} &= (b_{n-2} - a_{n-2,n-1}x_{n-1} - a_{n-2,n}x_n)/a_{n-2,n-2} \\ &\vdots \\ x_1 &= (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n)/a_{11} \end{aligned}$$

تعداد عملیات جبری مورد نیاز برای انجام این الگوریتم بصورت زیر بدست می آید،

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \rightarrow \quad \text{عملیات ضرب یا تقسیم}$$

$$0+1+2+\cdots+n-1 = \frac{n(n+1)}{2} - n \quad \rightarrow \quad \text{عملیات جمع یا تفریق}$$

لذا در کل n^2 عملیات جبری خواهد بود.

۷- الگوریتم حذفی گوسی برای دستگاه معادلات $n \times n$:

$$\frac{n^3}{3}+n^2-\frac{n}{3} \quad \rightarrow \quad \text{عملیات ضرب یا تقسیم}$$

$$\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}-\frac{5n}{6} \quad \rightarrow \quad \text{عملیات جمع یا تفریق}$$

- برای ($n \rightarrow \infty$) می توان هر یک را $\frac{n^3}{3}$ عملیات و در کل $\frac{2n^3}{3}$ در نظر گرفت.

مثال۲-۱۳

به حجم محاسبات برای حل دستگاه معادلات با روش حذفی گوسی توجه نمایید،

$$3\times 3 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \frac{3^3}{3}+3^2-\frac{3}{3}=11 \\ \frac{3^3}{3}+\frac{3^2}{2}-\frac{5\times 3}{6}=5 \end{cases} \quad \rightarrow \quad 16\ flops$$

عبارت flop[1] برای بیان تعداد عملیات جبری بکار می رود.

$$5\times 5 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \frac{5^3}{3}+5^2-\frac{5}{3}=65 \\ \frac{5^3}{3}+\frac{5^2}{2}-\frac{5\times 5}{6}=50 \end{cases} \quad \rightarrow \quad 115\ flops$$

□

در نرم افزار MATLAB از دستور flops می توان تعداد عملیات جبری انجام شده را بدست آورد. این دستور برای عمل جمع یا تفریق اعداد حقیقی $flops$ 1 و برای اعداد مختلط $flops$ 2 در نظر می گیرد. در مورد عمل ضرب و تقسیم برای اعداد حقیقی $flops$ 1 و برای اعداد مختلط $flops$ 6 در نظر می گیرد. دستور flops(0) شمارش را از صفر آغاز می کند.

به نمونه های زیر توجه نمایید،

```
u =[3;1;0;-5;9];
v =[2;-1;3;4;8];
A =[6 -1;2 9;7 8];
B =[3 8 5 6;8 -1 -9 6];
C =[5 6 4 2 5;1 6 -1 0 3];
```

[1] Floating point operations per second

```
flops(0)
u+v;
nflops=flops
nflops =
     5
flops(0)
u'*v;
nflops=flops
nflops =
    10
flops(0)
A*B;
nflops=flops
nflops =
    48
flops(0)
C*u;
nflops=flops
nflops =
    20
```

۲-۳-۱-۲- فرم سطری پلکانی

در مثال های قبل تعداد معادلات با تعداد مجهولات مساوی در نظر گرفته شده بود، به عبارتی $m=n$ و ماتریس A مربعی است. لیکن در صورتیکه ماتریس A مربعی نباشد، سعی می شود تا ماتریس A به **فرم سطری پلکانی**[۱] زیر تبدیل گردد،

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۵-۲)$$

[۱] Row Echelon Form

فرم سطری پلکانی خصوصیات زیر را داراست،

۱- سطرهایی که تمامی عناصر آنها صفر است در بخش پایین ماتریس قرار می گیرند.

۲- در سطرهایی که شامل عناصر غیر صفر هستند، اولین عنصر غیر صفر در سمت چپ سطر، عدد یک می باشد، که به آن، **عنصر محوری**[۱] گفته می شود.

فرایند تبدیل ماتریس ضرایب $m \times n$ به فرم سطری پلکانی را می توان بصورت زیر خلاصه کرد،

گام اول- در صورتیکه ضریب x_1 در معادله اول یک نباشد،

$$\frac{1}{a_{11}} r_1 \to r_1$$

حذف مجهول x_1 از معادلات دوم تا mام،

$$-a_{i1} r_1 + r_i \to r_i \qquad , \qquad i = 2, \ldots, m$$

گام دوم- در صورتیکه ضریب x_2 در معادله دوم یک نباشد،

$$\frac{1}{a_{22}} r_2 \to r_2$$

حذف مجهول x_2 از معادلات سوم تا mام،

$$-a_{i2} r_2 + r_i \to r_i \qquad , \qquad i = 3, \ldots, m$$

گام سوم- به همین ترتیب تا گام $m-1$ ادامه می دهیم.

مثال۲-۱۴

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 = 5 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$$

فرم ماتریس افزوده این معادلات بصورت زیر می باشد،

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 7 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

[۱] Pivot Entry

(۱) از آنجاییکه ضریب x_1 در سطر اول یک و در سطر دوم صفر می باشد، لذا x_1 را از سطر سوم حذف نماییم،

$$-2r_1+r_3\to r_3 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{ccccc|c}1&3&1&5&1&5\\0&1&1&2&1&4\\0&-2&-2&-3&-1&-7\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}$$

(۲) با توجه به اینکه ضریب x_2 در سطر دوم یک است، لذا x_2 را از سطر سوم حذف می نماییم،

$$2r_2+r_3\to r_3 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{ccccc|c}1&3&1&5&1&5\\0&1&1&2&1&4\\0&0&0&1&1&1\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}$$

(۳) از آنجاییکه در سطر سوم، اولین عدد غیر صفر از سمت چپ یک می باشد، لذا الگوریتم پایان یافته است و فرم سطری پلکانی بصورت زیر بدست می آید،

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}1&3&1&5&1&5\\0&1&1&2&1&4\\0&0&0&1&1&1\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}$$

بنابراین، دستگاه معادلات معادل بصورت زیر در خواهد آمد،

$$\begin{aligned}&x_1+3x_2+x_3+5x_4+x_5=5\\&x_2+x_3+2x_4+x_5=4\\&x_4+x_5=1\end{aligned}$$

از آنجائیکه تعداد مجهولات بیشتر از تعداد معادلات می باشند، می توان برخی از مجهولات را برحسب دیگری بدست آورد،

$$x_1=-6+x_5+2x_3,\quad x_2=2+x_5-x_3,\quad x_4=1-x_5$$

با توجه به این جوابها، متغیرهای x_1,x_2,x_4 مستقل نبوده و وابسته به مقدار x_3 و x_5 هستند، به x_3 و x_5 **متغیرهای آزاد**[1] نیز گفته می شود. با کمی دقت می توان دریافت که متغیرهای x_1,x_2,x_4 مربوط به ستون هایی هستند که عناصر محوری در آنها قرار دارند.

□

[1] Free variables

مثال۲-۱۵

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} 7x_1+2x_2-2x_3-4x_4+3x_5=8 \\ -3x_1-3x_2+2x_4+x_5=-1 \\ 4x_1-x_2-8x_3+20x_5=1 \end{cases}$$

فرم ماتریس افزوده این معادلات بصورت زیر می باشد،

$$[A|\mathbf{b}] \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 7 & 2 & -2 & -4 & 3 & 8 \\ -3 & -3 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -8 & 0 & 20 & 1 \end{array}\right]$$

گام اول- ابتدا ضریب x_1 را در معادله اول به یک تبدیل می کنیم،

$$\frac{1}{7}r_1 \rightarrow r_1 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{2}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{-4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{8}{7} \\ -3 & -3 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -8 & 0 & 20 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

حذف مجهول x_1 از معادلات دوم و سوم،

$$\left.\begin{array}{l} 3r_1+r_2 \rightarrow r_2 \\ -4r_1+r_3 \rightarrow r_3 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{2}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{-4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{8}{7} \\ 0 & \frac{-15}{7} & \frac{-6}{7} & \frac{2}{7} & \frac{16}{7} & \frac{17}{7} \\ 0 & \frac{-15}{7} & \frac{-48}{7} & \frac{16}{7} & \frac{128}{7} & \frac{-25}{7} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

گام دوم- از آنجاییکه ضریب x_2 در معادله دوم یک نیست داریم،

$$\frac{-7}{15}r_2 \rightarrow r_2 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{2}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{-4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{8}{7} \\ 0 & 1 & \frac{6}{15} & \frac{-2}{15} & \frac{-16}{15} & \frac{-17}{15} \\ 0 & \frac{-15}{7} & \frac{-48}{7} & \frac{16}{7} & \frac{128}{7} & \frac{-25}{7} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

حذف مجهول x_2 از معادله سوم،

$$\frac{15}{7}r_2 + r_3 \to r_3 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{2}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{-4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{8}{7} \\ 0 & 1 & \frac{6}{15} & \frac{-2}{15} & \frac{-16}{15} & \frac{-17}{15} \\ 0 & 0 & -6 & 2 & 16 & -6 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

گام سوم- ضریب x_3 را در معادله سوم به یک تبدیل می کنیم،

$$\frac{-1}{6}r_3 \to r_3 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{2}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{-4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{8}{7} \\ 0 & 1 & \frac{6}{15} & \frac{-2}{15} & \frac{-16}{15} & \frac{-17}{15} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-8}{3} & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

گام چهارم- با توجه به اینکه x_4 و x_5 متغیرهای آزاد هستند، دستگاه معادلات حاصل را حل می کنیم،

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + \frac{2}{7}x_2 - \frac{2}{7}x_3 - \frac{4}{7}x_4 + \frac{3}{7}x_5 = \frac{8}{7} \\ x_2 + \frac{6}{15}x_3 - \frac{2}{15}x_4 - \frac{16}{15}x_5 = \frac{-17}{15} \\ x_3 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{8}{3}x_5 = 1 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x_1 = \frac{28}{15} + \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 \\ x_2 = \frac{-23}{15} \\ x_3 = 1 + \frac{1}{3}x_4 + \frac{8}{3}x_5 \end{array}\right.$$

این دستگاه بیشمار جواب دارد.

□

مثال۲-۱۶

معادله شیمیایی اکسیداسیون آمونیاک را در نظر بگیرید،

$$(x_1)NH_3 + (x_2)O_2 \to (x_3)NO + (x_4)H_2O$$

که محصول نهایی آن منواکسید نیتروژن و آب می باشد. هدف یافتن کمترین مقادیر صحیح مثبت برای x_1، x_2، x_3 و x_4 می باشد بطوریکه تعادل در معادله شیمیایی بالا برقرار گردد. برای این منظور تعداد اتمهای هر یک از عناصر را در طرفین معادله شیمیایی در نظر می گیریم،

$$\begin{aligned} N &: \quad x_1 = x_3 \\ H &: \quad 3x_1 = 2x_4 \\ O &: \quad 2x_2 = x_3 + x_4 \end{aligned}$$

در نتیجه یک دستگاه معادلات همگن با سه معادله و چهار مجهول بشکل زیر بدست می آید،

$$x_1 - x_3 = 0$$
$$3x_1 - 2x_4 = 0$$
$$2x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

برای این دستگاه معادلات خطی ماتریس افزوده زیر قابل نوشتن است،

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

با اعمال روش سطری پلکانی معادلات به شکل زیر در می آید،

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{3} & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

با توجه به محل قرار گرفتن عناصر محوری می توان گفت که x_1، x_2 و x_3 متغیرهای وابسته و x_4 متغیر آزاد می باشد. به این ترتیب مجموعه جواب به شکل زیر بدست می آید،

$$x_1 = \frac{2}{3}x_4\,, \qquad x_2 = \frac{5}{6}x_4\,, \qquad x_3 = \frac{2}{3}x_4$$

بنابراین با انتخاب $x_4 = 6$ کمترین مقادیر صحیح مثبت برای x_1، x_2، x_3 و x_4 بدست می آید،

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4,5,4,6)$$

نهایتاً معادله شیمیایی به شکل زیر خواهد بود،

$$4NH_3 + 5O_2 \rightarrow 4NO + 6H_2O$$

□

۲-۳-۲- روش گوس- جردن

در روش گوس - جردن سعی بر آن است تا عملیات انجام شده بر روی ماتریس افزورده چنان باشد که ماتریس A تبدیل به یک ماتریس قطری با عناصر قطر اصلی یک گردد. به عبارتی ماتریس افزوده در حالت $m = n$ به فرم زیر تبدیل می گردد،

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & b'_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b'_n \end{array}\right) \qquad (۶-۲)$$

الگوریتم کلی را بصورت زیر می توان بیان کرد،

گام اول- حذف مجهول x_1 از تمامی معادلات به جز معادله اول،

$$\frac{-a_{i1}}{a_{11}} r_1 + r_i \to r_i \quad , \quad i = 2,\ldots,n$$

گام دوم- حذف مجهول x_2 از تمامی معادلات به جز معادله دوم،

$$\frac{-a_{i2}}{a_{22}} r_2 + r_i \to r_i \quad , \quad i = 1,\ldots,n, \quad i \neq 2$$

گام سوم- به همین ترتیب تا گام $n-1$ ادامه می دهیم.

گام چهارم- تبدیل عناصر قطری به یک،

$$\frac{1}{a_{ii}} r_i \to r_i \quad , \quad i = 1,\ldots,n$$

همانند آنچه که در اعمال روش حذفی گوسی گفته شد، در روش گوس- جردن نیز اگر یکی از عناصر قطری به عدد صفر تبدیل گردد نیاز به عمل محورگیری خواهد بود. در این روش نسبت به روش حذفی گوسی حجم محاسبات الگوریتم بیشتر است، لیکن در پایان نیازی به اجرای الگریتم جایگزینی پسرو وجود ندارد.

مثال۲-۱۷

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

فرم ماتریس افزوده سیستم به بصورت زیر خواهد بود،

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

از آنجاییکه ضریب x_1 در معادله اول برابر صفر است، با جابجا کردن سطر اول و سوم داریم،

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(۱) ضریب x_1 در معادله سوم صفر می باشد، لذا مجهول x_1 را از معادله دوم حذف می نماییم ،

$$\frac{-1}{2}r_1 + r_2 \to r_2 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(۲) حذف مجهول x_2 از معادلات اول و سوم،

$$\left.\begin{array}{l} -2r_2 + r_1 \to r_1 \\ -4r_2 + r_3 \to r_3 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -5 & -6 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(۳) حذف مجهول x_3 از معادلات اول و دوم،

$$\left.\begin{array}{l} \frac{-2}{5}r_3 + r_1 \to r_1 \\ \frac{3}{10}r_3 + r_2 \to r_2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & \frac{22}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{7}{10} \\ 0 & 0 & -5 & -6 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(۴) در این مرحله که ماتریس A بصورت قطری در آمده است، با تقسیم هر سطر بر عنصر قطر اصلی آن ماتریس A را به یک ماتریس واحد تبدیل می نماییم،

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}r_1 \to r_1 \\ 2r_2 \to r_2 \\ \frac{-1}{5}r_3 \to r_3 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{5} \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

به این ترتیب مقدار مجهولات به صورت زیر بدست می آید،

$$x_1 = \frac{11}{5}, \qquad x_2 = \frac{7}{5}, \qquad x_3 = \frac{6}{5}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB می توان برنامه ای برای الگوریتم گوس- جردن نوشت،

```
%Gauss-Jordan algorithm with pivoting.
function [x,AB] = gaussjordan(A,B)
NA = size(A,2);
[NB1,NB] = size(B);
if NB1 ~= NA,
   error('A and B must have compatible dimensions');
end
NA;
AB = [A B];
E = eye(NA,NA);
```

```
for j = 1:NA
for i = 1:NA
      if AB(j,j) ~= 0
      E(i,j) = - AB(i,j) / AB(j,j);
   AB = E * AB;
         E = eye(NA,NA);
      else
         [max,k] = max(abs(AB([j:NA],j)));
         AB([j k+(j-1)],:) = AB([k+(j-1) j],:);
         E(i,j) = - AB(i,j) / AB(j,j);
         AB = E * AB;
         E = eye(NA,NA);
      end
   end
end
E = eye(NA,NA);
for i = 1:NA
   E(i,i) = 1 / AB(i,i);
end
   AB = E * AB;
x = AB(:,NA+1)';
```

اجرای برنامه بصورت زیر است که شامل پاسخ سیستم و ماتریس افزوده قطری شده می باشد،

```
A =[0 2 1;1 1 2;2 1 1];
b =[4;6;7];
[x AB]= gaussjordan(A,b)
x =
    2.2000    1.4000    1.2000
AB =
    1.0000         0         0    2.2000
         0    1.0000         0    1.4000
         0         0    1.0000    1.2000
```

□

مثال۲-۱۸

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13 \\ 3x_1 + x_3 = -1 \end{cases}$$

فرم ماتریس افزوده این معادلات بصورت زیر می باشد،

$$[A|\mathbf{b}] \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 13 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

<u>گام اول</u>- حذف مجهول x_1 از تمامی معادلات به جز معادله اول،

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}r_1 + r_2 \rightarrow r_2 \\ \frac{3}{2}r_1 + r_3 \rightarrow r_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 15 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 5 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>گام دوم</u>- حذف مجهول x_2 از تمامی معادلات به جز معادله دوم،

$$\left.\begin{array}{l} \frac{-2}{5}r_2 + r_1 \rightarrow r_1 \\ \frac{-3}{5}r_2 + r_3 \rightarrow r_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 15 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

<u>گام سوم</u> - حذف مجهول x_3 از تمامی معادلات به جز معادله سوم،

$$\left.\begin{array}{l} -r_3 + r_1 \rightarrow r_1 \\ \frac{5}{4}r_3 + r_2 \rightarrow r_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

گام چهارم- تبدیل عناصر قطری به عدد یک و بدست آوردن جوابها،

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \rightarrow E_7 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

$$x_1 = -1 \quad , \quad x_2 = 4 \quad , \quad x_3 = 2$$

□

مثال۲-۱۹

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7 \end{cases}$$

فرم ماتریس افزوده این دستگاه معادلات بصورت زیر می باشد،

$$[A|\mathbf{b}] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & -7 \end{array}\right]$$

گام اول- حذف مجهول x_1 از تمامی معادلات به جز معادله اول،

$$\left.\begin{array}{l} r_1 + r_2 \rightarrow r_2 \\ -2r_1 + r_3 \rightarrow r_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

گام دوم- جابجایی معادلات دوم و سوم حذف مجهول x_2 از تمامی معادلات به جز معادله دوم،

$$r_2 \leftrightarrow r_3 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \rightarrow E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\frac{2}{3} r_2 + r_1 \rightarrow r_1\right\} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \rightarrow E_4 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

گام سوم- حذف مجهول x_3 از تمامی معادلات به جز معادله سوم،

$$\left.\begin{array}{l} -r_3+r_1\rightarrow r_1 \\ 3r_3+r_2\rightarrow r_2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$E_5=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_6=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

گام چهارم- تبدیل عناصر قطری به عدد یک و بدست آوردن جوابها،

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow E_7=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1=-5 \quad , \quad x_2=0 \quad , \quad x_3=1$$

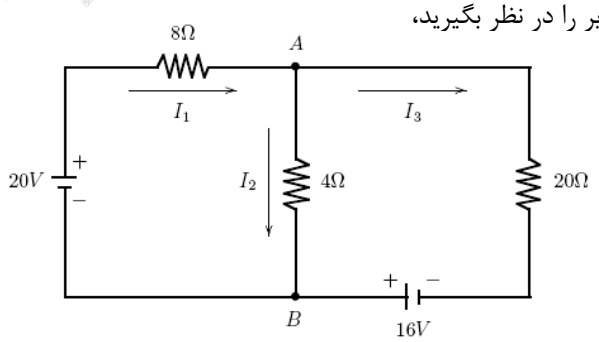
با اجرای برنامه gaussjordan نتایج بصورت زیر بدست می آید،

```
A =[1 - 2 3;-1 2 - 2;2 - 1 3];
b =[-2;3;-7];
x = gaussjordan(A,b)
x =
    - 5     0     1
AB =
     1     0     0    - 5
     0     1     0     0
     0     0     1     1
```

□

مثال۲-۲۰

مدار الکتریکی ساده زیر را در نظر بگیرید،



هدف در این مدار یافتن مقدار جریانهای I_1، I_2 و I_3 می باشد. با اعمال قوانین مداری معادلات زیر بدست می آیند،

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\ 8I_1 + 4I_2 &= 20 \\ 4I_2 - 20I_3 &= -16 \end{aligned}$$

برای این دستگاه معادلات خطی ماتریس افزوده زیر قابل نوشتن است،

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \end{array}\right]\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

که با اعمال روش گاوس- جردن به صورت زیر بیان می گردد،

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

بنابراین جوابها بصورت زیر خواهند بود،

$$I_1 = 2A, \quad I_2 = I_3 = 1A,$$

□

۲-۳-۲-۱- حجم محاسبات جبری الگوریتم گوس- جردن

حجم محاسبات جبری برای الگوریتم گوس- جردن بصورت زیر است،

$$\frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{2} \rightarrow \text{عملیات ضرب یا تقسیم}$$

$$\frac{n^3}{2} - \frac{n}{2} \rightarrow \text{عملیات جمع یا تفریق}$$

برای ($n \to \infty$) می توان هر یک را $\frac{n^3}{2}$ عملیات و در مجموع n^3 در نظر گرفت. لذا برای دستگاه معادلات با ابعاد بزرگ استفاده از روش گوس- جردن نیازمند عملیات بسیار بیشتری نسبت به روش حذفی گوسی است. بطور مثال برای $n = 100$ داریم،

روش حذفی گوسی: $\frac{2n^3}{3} = 0.67 \times 10^6$

روش گوس- جردن: $n^3 = 10^6$

اختلاف در حجم محاسبات دو روش معادل 300000 عملیات جمع و ضرب است.

۲-۳-۲-۲- کاربرد در محاسبه ماتریس معکوس

یکی از کاربردهای روش گوس- جردن در محاسبه ماتریس معکوس می باشد،

$$AA^{-1}=I \quad \rightarrow \quad [A|I]\Rightarrow[I|A^{-1}] \qquad (۷-۲)$$

مثال۲-۲۱

معکوس ماتریس A را با استفاده از روش گوس- جردن بدست آورید،

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 1 & -2\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}$$

با استفاده از رابطه(۲-۷) داریم،

$$[A|I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

حال روش گوس- جردن را بر روی این ماتریس افزوده پیاده می کنیم،

$$\left.\begin{array}{l}r_1+r_2\rightarrow r_2\\ -2r_1+r_3\rightarrow r_3\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -5 & -3 & -2 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{-2}{3}r_2+r_1\rightarrow r_1\\ \frac{5}{3}r_2+r_3\rightarrow r_3\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & 0\\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{-4}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{5}{3} & 1\end{array}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{7}{4}r_3+r_1\rightarrow r_1\\ \frac{3}{4}r_3+r_2\rightarrow r_2\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{9}{4} & \frac{7}{4}\\ 0 & 3 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} & \frac{3}{4}\\ 0 & 0 & \frac{-4}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{5}{3} & 1\end{array}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{3}r_2\rightarrow r_2\\ \frac{-3}{4}r_3\rightarrow r_3\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{9}{4} & \frac{7}{4}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{-5}{3} & \frac{-3}{4}\end{array}\right]=[I|A^{-1}]$$

لذا به راحتی و بدون نیاز به محاسبه ماتریس الحاقی معکوس ماتریس A بدست می آید. می توان با اجرای برنامه gaussjordan و دستور inv نتیجه را بررسی نمود،

```
A =[1 2 3;-1 1 -2;2 -1 3];
I = eye(3);
[x AB]= gaussjordan(A,I)
AB =
    1.0000         0         0   -0.2500    2.2500    1.7500
         0    1.0000         0    0.2500    0.7500    0.2500
         0         0    1.0000    0.2500   -1.2500   -0.7500
inv(A)
ans =
   -0.2500    2.2500    1.7500
    0.2500    0.7500    0.2500
    0.2500   -1.2500   -0.7500
```

در خروجی برنامه ماتریس افزوده $\left[I \middle| A^{-1}\right]$ ظاهر می شود، که با حاصل دستور inv مطابقت دارد.

□

۲-۳-۲-۳- فرم سطری پلکانی کاهش یافته

در صورتیکه ماتریس A مربعی نباشد و $m \neq n$ باشد دیگر نمی توان معادلات را به شکل رابطه (۲-۵) در آورد، در این صورت سعی می شود تا ماتریس A را به **فرم سطری پلکانی کاهش یافته**[1] درآورد، یک نمونه از فرم سطری پلکانی کاهش یافته در رابطه زیر نشان داده شده است. در اینجا *ها می توانند عددی صفر یا غیر صفر باشند،

$$\left[\begin{array}{cc:c:ccc:c:c} 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad (۲-۸)$$

نمایش سطری پلکانی دارای خصوصیات زیر می باشد،

۱- سطرهایی که تمامی عناصر آنها صفر می باشد در بخش پایین ماتریس قرار دارند.

۲- در سطرهایی که شامل عناصر غیر صفر هستند، اولین عنصر غیر صفر در سمت چپ آن سطر، عدد یک می باشد، که به آن، عنصر محوری گفته می شود.

۳- در ستون هایی که دارای عنصر محوری است، کلیه عناصر بالای عنصر محوری صفر می باشد.

[1] Reduced Row Echelon Form

فرایند تبدیل ماتریس ضرایب $m\times n$ به فرم سطری پلکانی کاهش یافته بصورت زیر است،

گام اول- در صورتیکه ضریب x_1 در معادله اول یک نباشد،

$$\frac{1}{a_{11}}r_1 \to r_1$$

حذف مجهول x_1 از معادلات دوم تا mام،

$$-a_{i1}r_1 + r_i \to r_i \quad , \quad i=2,\dots,m$$

گام دوم- در صورتیکه ضریب x_2 در معادله دوم یک نباشد،

$$\frac{1}{a_{22}}r_2 \to r_2$$

حذف مجهول x_2 از تمامی معادلات به جز معادله دوم،

$$-a_{i2}r_2 + r_i \to r_i \quad , \quad i=1,\dots,m, \quad i\neq 2$$

گام سوم- به همین ترتیب تا گام $m-1$ ادامه می دهیم.

مثال۲-۲۲

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3+5x_4+x_5=5 \\ x_2+x_3+2x_4+x_5=4 \\ 2x_1+4x_2+7x_4+x_5=3 \end{cases}$$

ماتریس افزوده این معادلات به فرم زیر می باشد،

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 7 & 1 & 3 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

حال می خواهیم آن را به فرم سطری پلکانی کاهش یافته در آوریم.

(۱) ضریب x_1 در معادله اول یک و در معادله دوم صفر می باشد، لذا باید x_1 را از سطر سوم حذف نماییم،

$$-2r_1+r_3 \to r_3 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -3 & -1 & -7 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

(۲) ضریب x_2 در معادله دوم یک می باشد، لذا x_2 را از سطر اول و دوم حذف می نماییم،

$$\left.\begin{array}{l} -3r_2+r_1\to r_1 \\ 2r_2+r_3\to r_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

(۳) از آنجاییکه ضریب x_3 در سطر سوم صفر می باشد، سراغ x_4 می رویم. ضریب x_4 یک است، پس کافی است که x_4 را از معادلات اول و دوم حذف نماییم،

$$\left.\begin{array}{l} r_3+r_1\to r_1 \\ -2r_3+r_2\to r_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

به این ترتیب فرم سطری پلکانی کاهش یافته معادلات بدست می آید، با توجه به معادلات بدست آمده نتایج زیر حاصل می شود،

$$x_1=-6+x_5+2x_3,\quad x_2=2+x_5-x_3,\quad x_4=1-x_5$$

با کمی دقت متوجه می شویم که متغیرهای x_1, x_2, x_4 مربوط به ستون هایی هستند که عناصر محوری در آن قرار دارند.

برای بدست آوردن فرم سطری پلکانی کاهش یافته در نرم افزار MATLAB می توان از دستور rref(A) استفاده نمود،

```
A =[1 3 1 5 1;0 1 1 2 1;2 4 0 7 1];
b =[5;4;3];
rref([A b])
ans =
    1    0   -2    0   -1   -6
    0    1    1    0   -1    2
    0    0    0    1    1    1
```

دستور [A b] فرم ماتریس افزوده را نتیجه می دهد.

□

مثال۲-۲۳

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} 7x_1+2x_2-2x_3-4x_4+3x_5=8 \\ -3x_1-3x_2+2x_4+x_5=-1 \\ 4x_1-x_2-8x_3+20x_5=1 \end{cases}$$

ماتریس افزوده این معادلات به فرم زیر است،

$$[A|\mathbf{b}] \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 7 & 2 & -2 & -4 & 3 & 8 \\ -3 & -3 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -8 & 0 & 20 & 1 \end{array}\right]$$

گام اول- ابتدا ضریب x_1 را در معادله اول به یک تبدیل می کنیم،

$$\frac{1}{7}r_1 \rightarrow r_1 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{2}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{-4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{8}{7} \\ -3 & -3 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -8 & 0 & 20 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

حذف مجهول x_1 از تمامی معادلات به جز معادله اول،

$$\left.\begin{array}{l} 3r_1+r_2 \rightarrow r_2 \\ -4r_1+r_3 \rightarrow r_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{2}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{-4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{8}{7} \\ 0 & \frac{-15}{7} & \frac{-6}{7} & \frac{2}{7} & \frac{16}{7} & \frac{17}{7} \\ 0 & \frac{-15}{7} & \frac{-48}{7} & \frac{16}{7} & \frac{128}{7} & \frac{-25}{7} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

گام دوم- از آنجاییکه ضریب x_2 در معادله دوم یک نیست داریم،

$$\frac{-7}{15}r_2 \rightarrow r_2 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{2}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{-4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{8}{7} \\ 0 & 1 & \frac{6}{15} & \frac{-2}{15} & \frac{-16}{15} & \frac{-17}{15} \\ 0 & \frac{-15}{7} & \frac{-48}{7} & \frac{16}{7} & \frac{128}{7} & \frac{-25}{7} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

حذف مجهول x_2 از تمامی معادلات به جز معادله دوم،

$$\left.\begin{array}{l}\frac{15}{7}r_2+r_3\to r_3\\ \frac{-2}{7}r_2+r_1\to r_1\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad\left[\begin{array}{ccccc|c}1&0&\frac{-6}{15}&\frac{-8}{15}&\frac{11}{15}&\frac{22}{15}\\0&1&\frac{6}{15}&\frac{-2}{15}&\frac{-16}{15}&\frac{-17}{15}\\0&0&-6&2&16&-6\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}$$

گام سوم- ضریب x_3 را در معادله سوم به یک تبدیل می کنیم،

$$\frac{-1}{6}r_3\to r_3\quad\Rightarrow\quad\left[\begin{array}{ccccc|c}1&0&\frac{-6}{15}&\frac{-8}{15}&\frac{11}{15}&\frac{22}{15}\\0&1&\frac{6}{15}&\frac{-2}{15}&\frac{-16}{15}&\frac{-17}{15}\\0&0&1&\frac{-1}{3}&\frac{-8}{3}&1\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}$$

گام چهارم - حذف مجهول x_3 از تمامی معادلات به جز معادله سوم،

$$\left.\begin{array}{l}\frac{6}{15}r_3+r_1\to r_1\\ \frac{-6}{15}r_3+r_2\to r_2\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad\left[\begin{array}{ccccc|c}1&0&0&\frac{-2}{3}&\frac{-1}{3}&\frac{28}{15}\\0&1&0&0&0&\frac{-23}{15}\\0&0&1&\frac{-1}{3}&\frac{-8}{3}&1\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}$$

گام پنجم- با توجه به اینکه x_4 و x_5 متغیرهای آزاد هستند، دستگاه معادلات حاصل را حل می کنیم،

$$\left.\begin{array}{r}x_1-\frac{2}{3}x_4-\frac{1}{3}x_5=\frac{28}{15}\\ x_2=\frac{-23}{15}\\ x_3-\frac{1}{3}x_4-\frac{8}{3}x_5=1\end{array}\right\}\to\quad\left\{\begin{array}{l}x_1=\frac{28}{15}+\frac{2}{3}x_4+\frac{1}{3}x_5\\ x_2=\frac{-23}{15}\\ x_3=1+\frac{1}{3}x_4+\frac{8}{3}x_5\end{array}\right.$$

□

مثال۲-۲۴

دستگاه معادلات جبری خطی زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases}3x_1-4x_2=10\\-5x_1+8x_2=-17\\-3x_1+12x_2=-12\end{cases}$$

فرم ماتریس افزوده این معادلات بصورت زیر می باشد،

$$[A|\mathbf{b}] \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 10 \\ -5 & 8 & -17 \\ -3 & 12 & -12 \end{array}\right]$$

گام اول- از آنجاییکه ضریب x_1 در معادله اول یک نیست داریم،

$$\frac{1}{3}r_1 \rightarrow r_1 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{-4}{3} & \frac{10}{3} \\ -5 & 8 & -17 \\ -3 & 12 & -12 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

حذف مجهول x_1 از تمام معادلات به جز معادله اول،

$$\left.\begin{array}{l} 5r_1 + r_2 \rightarrow r_2 \\ 3r_1 + r_3 \rightarrow r_3 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{-4}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 8 & -2 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

گام دوم- از آنجاییکه ضریب x_2 در معادله دوم یک نیست داریم،

$$\frac{3}{4}r_2 \rightarrow r_2 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{-4}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{4} \\ 0 & 8 & -2 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

حذف مجهول x_2 از تمام معادلات به جز معادله دوم،

$$\left.\begin{array}{l} -8r_2 + r_3 \rightarrow r_3 \\ \frac{4}{3}r_2 + r_1 \rightarrow r_1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

همانطور که پیداست سیستم سازگار است و جواب دارد، لذا جواب ها را بدست می آوریم،

$$x_1 = 3, \qquad x_2 = \frac{-1}{4}$$

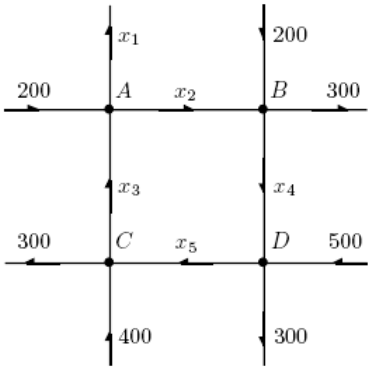
با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[3 -4;-5 8;-3 12];
b =[10;-17;-12];
rref([A b])
ans =
   1.0000         0    3.0000
        0    1.0000   -0.2500
        0         0         0
```

□

مثال۲-۲۵

شکل زیر بیانگر روند ترافیک در طول خیابانهای بخشی از یک شهر می باشد. تمامی خیابان ها یکطرفه بوده و محل تقاطع ها با گره ها نمایش داده شده است،



معادلات را برای هر یک از گره ها بصورت زیر می توان نوشت،

$$A: \quad 200 + x_3 = x_1 + x_2$$
$$B: \quad 200 + x_2 = 300 + x_4$$
$$C: \quad 400 + x_5 = 300 + x_3$$
$$D: \quad 500 + x_4 = 300 + x_5$$

فرض کنید که کل بار وارد شده در شبکه برابر با کل بار خارج شده از شبکه است،

$$400 + 200 + 200 + 500 = 300 + 300 + x_1 + 300$$

بنابراین دستگاه معادلات خطی با پنج معادله و پنج مجهول زیر بدست می آید،

$$x_1 + x_2 - x_3 = 200$$
$$x_2 - x_4 = 100$$
$$x_3 - x_5 = 100$$
$$x_4 - x_5 = -200$$
$$x_1 = 400$$

برای این دستگاه معادلات خطی ماتریس افزوده زیر قابل نوشتن است،

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -200 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

با تبدیل به فرم سطری پلکانی کاهش یافته خواهیم داشت،

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

بنابراین جواب کلی بصورت زیر بدست می آید،

$$x_1 = 400, \quad x_2 = x_5 - 100, \quad x_3 = x_5 + 100, \quad x_4 = x_5 - 200$$

از آنجائیکه خیابانها یکطرفه می باشند مقدار بار نمی تواند منفی باشد، پس باید $x_5 \geq 200$ انتخاب گردد.

□

یکی از کاربردهای دستور rref(A) در تشخیص سازگار یا ناسازگار بودن دستگاه معادلات است. معادلات معرفی شده با ماتریس افزوده $[A|\mathbf{b}]$ زمانی سازگار است، که در فرم سطری پلکانی کاهش یافته یا فرم سطری پلکانی آن، سطری به شکل زیر ظاهر نشده باشد،

$$\left(0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \middle| \alpha\right), \quad \alpha \neq 0 \tag{۸-۲}$$

در غیر اینصورت معادله حاصل از سطر مذکور بصورت زیر در خواهد آمد،

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = \alpha$$

که برای $\alpha \neq 0$ این معادله راه حلی ندارد و نتیجتاً دستگاه معادلات خطی اصلی ناسازگار خواهد بود.

مثال۲-۲۶

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

این دستگاه معادلات نمونه ای از یک سیستم ناسازگار است. زیرا فرم سطری پلکانی آن به شکل زیر می باشد،

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

□

مثال۲-۲۷

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید و در صورت سازگار بودن جواب آن را بدست آورید،

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = 10 \\ -5x_1 + 8x_2 = -17 \\ -3x_1 + 12x_2 = -12 \end{cases}$$

این دستگاه یک سیستم فرامعین است، فرم ماتریس افزوده این معادلات بصورت زیر می باشد،

$$[A|\mathbf{b}] \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 10 \\ -5 & 8 & -17 \\ -3 & 12 & -12 \end{array}\right]$$

<u>گام اول</u>- از آنجاییکه ضریب x_1 در معادله اول یک نیست داریم،

$$\frac{1}{3}r_1 \rightarrow r_1 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{-4}{3} & \frac{10}{3} \\ -5 & 8 & -17 \\ -3 & 12 & -12 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

حذف مجهول x_1 از معادلات دوم و سوم،

$$\left.\begin{array}{l} 5r_1 + r_2 \rightarrow r_2 \\ 3r_1 + r_3 \rightarrow r_3 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{-4}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 8 & -2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

<u>گام دوم</u>- از آنجاییکه ضریب x_2 در معادله دوم یک نیست داریم،

$$\frac{3}{4}r_2 \rightarrow r_2 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{-4}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{4} \\ 0 & 8 & -2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

حذف مجهول x_2 از معادله سوم،

$$-8r_2 + r_3 \rightarrow r_3 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{-4}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

همانطور که پیداست سیستم سازگار بوده و دستگاه معادلات جواب دارد. لذا جواب ها را بدست می آوریم،

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - \frac{4}{3}x_2 = \frac{10}{3} \\ x_2 = \frac{-1}{4} \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad x_1 = 3, \quad x_2 = \frac{-1}{4}$$

□

مثال۲-۲۸

نشان دهید سیستم زیر به شرطی سازگار است که $c = 2a - 3b$ باشد.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = a \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = b \\ -5x_1 - 5x_2 + 21x_3 = c \end{cases}$$

فرم ماتریس افزوده این معادلات بصورت زیر می باشد،

$$[A|\mathbf{b}] \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & a \\ 3 & 1 & -5 & b \\ -5 & -5 & 21 & c \end{array}\right]$$

با اعمال روش حذفی- گوسی، فرم سطری پلکانی را بدست می آوریم،

$$\frac{1}{2}r_1 \rightarrow r_1 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{a}{2} \\ 3 & 1 & -5 & b \\ -5 & -5 & 21 & c \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} -3r_1 + r_2 \rightarrow r_2 \\ 5r_1 + r_3 \rightarrow r_3 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{-19}{2} & \frac{-3}{2}a + b \\ 0 & \frac{-15}{2} & \frac{57}{2} & \frac{5}{2}a + c \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{2}{5}r_2 \rightarrow r_2 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-19}{5} & \frac{-3}{5}a + \frac{2}{5}b \\ 0 & \frac{-15}{2} & \frac{57}{2} & \frac{5}{2}a + c \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{15}{2}r_2 + r_3 \rightarrow r_3 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-19}{5} & \frac{-3}{5}a + \frac{2}{5}b \\ 0 & 0 & 0 & -2a + 3b + c \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

لذا برای سازگار بودن دستگاه معادلات باید $-2a + 3b + c = 0$ باشد. بنابراین، $c = 2a - 3b$ است.

□

نمونه ای دستگاه معادلات که همواره سازگار است دستگاه معادلات **همگن**[۱] می باشد. فرم کلی دستگاه معادلات جبری خطی همگن بصورت زیر می باشد،

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \qquad (۹-۲)$$

همانطور که از معادلات بالا بر می آید دستگاه معادلات خطی همگن سازگار می باشد، زیرا شرط ناسازگاری هرگز رخ نخواهد داد، همچنین یک مجموعه جواب **پاسخ بدیهی**[۲] یعنی $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ برای حل این معادلات همواره وجود دارد. البته گاهی دستگاه معادلات خطی همگن می تواند علاوه بر پاسخ بدیهی بیشمار جواب دیگر هم داشته باشد.

مثال ۲-۲۹

دستگاه معادلات همگن زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$$

ماتریس افزوده و تبدیل آن با روش خذفی گوسی بصورت زیر بدست می آید،

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

با حل این معادلات در می یابیم که تنها جواب ممکن پاسخ بدیهی $(x_1, x_2, x_3) = (0,0,0)$ می باشد.

□

مثال ۲-۳۰

دستگاه معادلات همگن زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

[۱] Homogeneous Systems
[۲] Trivial Solution

ماتریس افزوده و تبدیل آن با روش سطری پلکانی بصورت زیر بدست می آید،

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&2&3&0\\2&4&1&3&0\\3&6&1&4&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&2&3&0\\0&0&-3&-3&0\\0&0&-5&-5&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&2&3&0\\0&0&1&1&0\\0&0&-5&-5&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&2&3&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

با توجه به محل عناصر محوری x_1 و x_3 متغیرهای وابسته و x_2 و x_4 متغیرهای آزاد هستند.

$$x_1=-2x_2-x_4 \quad , \quad x_3=-x_4$$

همانطور که مشاهده می شود در این حالت دستگاه معادلات علاوه بر پاسخ بدیهی، بینهایت جواب دیگر هم خواهد داشت.

□

۲-۴- حل دستگاه معادلات جبری خطی بر پایه تجزیه ماتریس ها

یکی دیگر از روش های حل دستگاه معادلات تجزیه ماتریس ضرایب به حاصلضرب چند ماتریس ساده تر است که معمولاً به فرم قطری یا مثلثی هستند. در حل دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ ماتریس ضرایب A بصورت حاصلضرب $A=A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k$ تجزیه می گردد و حل دستگاه معادلات به فرم زیر در می آید،

$$(A_1A_2\cdots A_k)\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

که در واقع شامل حل k معادله ساده به فرم زیر است، که معمولاً برای حل از روش های جایگزینی پیشرو و پسرو استفاده می گردد،

$$A_1\mathbf{z}_1=\mathbf{b}, \quad A_2\mathbf{z}_2=\mathbf{z}_1, \quad \cdots, \quad A_{k-1}\mathbf{z}_{k-1}=\mathbf{z}_{k-2}, \quad A_k\mathbf{x}=\mathbf{z}_{k-1}$$

بنابراین در این روش محاسبات را می توان به دو بخش تقسیم کرد،

۱- محاسبات لازم برای بدست آوردن تجزیه ماتریس A

۲- محاسبات لازم برای حل k دستگاه معادلات ساده

در واقع عمده محاسبات مربوط به تجزیه ماتریس است. یکی از کاربردهای این روش زمانی است که بخواهیم جواب دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ را برای چندین بردار $\mathbf{b}$ مختلف بدست آوریم. در اینصورت عمل تجزیه ماتریس که بیشترین حجم محاسبات را دارد فقط یکبار صورت می گیرد و بخش تکراری فقط مربوط به حل دستگاه معادلات ساده می باشد.

در این راستا دو روش **تجزیه** LU[۱] و **تجزیه چالسکی**[۲] ماتریس ها معرفی می گردد. این دو روش برای حل دستگاه معادلات مربعی کاربرد دارند.

---

[۱] LU Factorization
[۲] Cholesky Factorization

۲-۴-۱- تجزیه LU ماتریس ها

در این روش ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ بصورت حاصلضرب دو ماتریس L و U تجزیه می گردد،

$$A = LU$$

به طوریکه L یک ماتریس پایین مثلثی با عناصر قطری واحد و U یک ماتریس بالا مثلثی باشد. برای بدست آوردن تجزیه LU یک ماتریس مربعی می توان از **روش حذفی گوسی** و **روش ماتریس های بلوکی** استفاده نمود.

۲-۴-۱-۱- حل دستگاه معادلات جبری خطی با تجزیه LU

برای حل دستگاه معادلات ابتدا تجزیه $A = LU$ را بدست می آوریم، سپس با جایگذاری در معادله دستگاه داریم،

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \xrightarrow{A=LU} \quad LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

با فرض اینکه $\mathbf{y} = U\mathbf{x}$ باشد داریم،

$$LU\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \xrightarrow{\mathbf{y}=U\mathbf{x}} \quad L\mathbf{y} = \mathbf{b}$$

بنابراین جواب دستگاه معادلات اصلی با حل یک سری معادلات ساده بصورت زیر بدست می آید،

$$\begin{cases} L\mathbf{y} = \mathbf{b} \\ \mathbf{y} = U\mathbf{x} \end{cases} \qquad (۲-۱۰)$$

که در حل این دو معادله از الگوریتم جایگزینی پیشرو و جایگزینی پسرو استفاده می شود.

مثال۲-۳۱

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -4 \\ -4x_1 + x_2 + 10x_3 = 3 \end{cases}$$

با استفاده از روش تجزیه LU جواب دستگاه معادلات را بیابید.

فرم ماتریسی این معادلات به شکل زیر می باشد،

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 2 & 5 & -3 \\ -4 & 1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

تجزیه LU ماتریس A به شکل زیر است،

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{-4}{3} & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -29 \end{bmatrix}$$

با توجه به معادلات داریم،

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{-4}{3} & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

با حل معادلات ماتریسی بوسیله الگوریتم جایگزینی پیشرو جوابها بصورت زیر بدست می آیند،

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ \frac{2}{3} y_1 + y_2 = -4 \\ \frac{-4}{3} y_1 + 9y_2 + y_3 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = -4 \\ y_3 = 39 \end{cases}$$

با جایگذاری این مقادیر در معادلات ماتریس دوم پاسخ نهایی با یک الگوریتم جایگزینی پسرو محاسبه می گردد،

$$\mathbf{y} = U\mathbf{x} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = -4 \\ -29x_3 = 39 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -119/29 \\ x_2 = 1/29 \\ x_3 = -39/29 \end{cases}$$

□

۲-۱-۴-۲- تجزیه LU با روش حذفی گوسی بدون محورگیری

همانطور که توضیح داده شده است، هدف از روش حذفی گوسی تبدیل یک ماتریس مربعی به فرم بالا مثلثی است، بنابراین اگر بتوان ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ را بدون جابجا کردن سطرها و ستونهای آن یعنی بدون محورگیری، به فرم بالا مثلثی درآورد، ماتریس U به راحتی بدست خواهد آمد. از طرفی می دانیم روش حذفی گوسی را می توان بصورت یک سری عملیات ماتریس های مقدماتی مانند $E_1, E_2, \ldots, E_k$ نشان داد، بنابراین داریم،

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = U \qquad (۱۱-۲)$$

از آنجائیکه ماتریس های مقدماتی مربعی و معکوس پذیر هستند می توان نوشت،

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} U = LU \qquad (۱۲-۲)$$

که در آن $L = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$ یک ماتریس پایین مثلثی با عناصر قطری یک می باشد.

مثال۲-۳۲

تجزیه LU ماتریس مربعی A را بیابید،

$$A=\begin{bmatrix}3 & 6 & -9\\ 2 & 5 & -3\\ -4 & 1 & 10\end{bmatrix}$$

همانند آنچه که در روش حذفی گوسی انجام دادیم سعی می کنیم تا ماتریس مذکور را با انجام یک سری عملیات سطری به صورت بالا مثلثی در آوریم.

$$\frac{-2}{3}r_1+r_2\to r_2 \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}3 & 6 & -9\\ 0 & 1 & 3\\ -4 & 1 & 10\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad E_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{-2}{3} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\frac{4}{3}r_1+r_3\to r_3 \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}3 & 6 & -9\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 9 & -2\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad E_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{4}{3} & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$-9r_2+r_3\to r_3 \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}3 & 6 & -9\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -29\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad E_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -9 & 1\end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس بالا مثلثی U بصورت زیر بدست می آید،

$$U=\begin{bmatrix}3 & 6 & -9\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -29\end{bmatrix}$$

حال برای بدست آوردن ماتریس L ابتدا معکوس ماتریس های مقدماتی E_1، E_2 و E_3 را بدست می آوریم که با توجه به خواص ماتریس های مقدماتی به راحتی قابل محاسبه هستند و سپس با توجه به رابطه (۲-۱۱) ماتریس پایین مثلثی L را محاسبه می کنیم،

$$L=E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{2}{3} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{-4}{3} & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 9 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{2}{3} & 1 & 0\\ \frac{-4}{3} & 9 & 1\end{bmatrix}$$

بنابراین تجزیه LU ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$A=LU=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{2}{3} & 1 & 0\\ \frac{-4}{3} & 9 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 6 & -9\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -29\end{bmatrix}$$

در ادامه با استفاده از نرم افزار MATLAB برنامه LUfactor(A) برای محاسبه تجزیه *LU* ماتریس ها بر اساس الگوریتم حذفی گوسی نوشته شده است،

```
% LU factorization without pivoting
function [L,U] = LUfactor(A)
NA = size(A,2);
E = eye(NA,NA);
L = eye(NA,NA);
for j = 1:NA-1
for i = j+1:NA
      if A(j,j) ~= 0
      E(i,j) = -A(i,j)/A(j,j);
         A = E * A;
         L = L * inv(E);
         E = eye(NA,NA);
      else
         error('algorithm needs pivoting')
      end
   end
end
U = A(:,1:NA);
```

اجرای برنامه بصورت زیر خواهد بود،

```
A =[3  6 -9;2  5 -3;-4  1  10];
[L,U]= LUfactor(A,b)
L =
    1.0000         0         0
    0.6667    1.0000         0
   -1.3333    9.0000    1.0000
U =
     3     6    -9
     0     1     3
     0     0    -2
```

□

مثال۲-۳۳

ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ 4 & 18 & 26\\ 3 & 16 & 30\end{bmatrix}$$

الف) ماتریس های مقدماتی E_1، E_2 و E_3 را طوری بدست آورید که ماتریس A را به فرم بالا مثلثی $U=E_3E_2E_1A$ تبدیل نماید و با استفاده از آن تجزیه $A=LU$ ماتریس را بدست آورید.

ب) با استفاده از این تجزیه دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b_1}$ و $A\mathbf{x}=\mathbf{b_2}$ را حل نمایید.

$$\mathbf{b_1}=\begin{bmatrix}6\\0\\-6\end{bmatrix},\qquad \mathbf{b_2}=\begin{bmatrix}6\\6\\12\end{bmatrix}$$

الف) ماتریس های مقدماتی E_1، E_2 و E_3 را با اعمال الگوریتم حذفی گوسی می توان بدست آورد

گام اول- حذف مجهول x_1 از معادلات دوم و سوم،

$$-4r_1+r_2\to r_2 \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ 0 & 2 & 6\\ 3 & 16 & 30\end{bmatrix} \quad\to\quad E_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$-3r_1+r_3\to r_3 \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ 0 & 2 & 6\\ 0 & 4 & 15\end{bmatrix} \quad\to\quad E_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

گام دوم- حذف مجهول x_2 از معادله سوم،

$$-2r_2+r_3\to r_3 \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ 0 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix} \quad\to\quad E_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

به این ترتیب ماتریس بالا مثلثی U بصورت زیر بدست می آید،

$$E_3E_2E_1A=U \quad\to\quad U=\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ 0 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

$A=LU$ ماتریس پایین مثلثی L نیز بشکل زیر قابل محاسبه است،

$$E_3E_2E_1A=U \quad\to\quad A=E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}U=LU$$

$$E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&0\\3&2&1\end{bmatrix}=L$$

لذا تجزیه $A=LU$ بشکل زیر بدست می آید،

$$A=LU \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}1&4&5\\4&18&26\\3&16&30\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&0\\3&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4&5\\0&2&6\\0&0&3\end{bmatrix}$$

اجرای برنامه LUfactor برای این ماتریس بصورت زیر است،

```
A =[1 4 5;4 18 26;3 16 30];
[L,U]= LUfactor(A)
L =
     1     0     0
     4     1     0
     3     2     1
U =
     1     4     5
     0     2     6
     0     0     3
```

ب) برای حل دستگاه معادلات بصورت زیر عمل می کنیم،

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b} \quad\rightarrow\quad LU\mathbf{x}=\mathbf{b} \quad\rightarrow\quad \begin{cases}L\mathbf{y}=\mathbf{b}\\U\mathbf{x}=\mathbf{y}\end{cases}$$

ابتدا مجهول $\mathbf{y}$ و سپس مجهول $\mathbf{x}$ را بدست می آوریم،

برای بردار $\mathbf{b}_1$:

$$L\mathbf{y}=\mathbf{b}_1 \quad\rightarrow\quad \begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&0\\3&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\0\\-6\end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad \begin{cases}y_1=6\\y_2=-24\\y_3=24\end{cases}$$

$$U\mathbf{x}=\mathbf{y} \quad\rightarrow\quad \begin{bmatrix}1&4&5\\0&2&6\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-24\\24\end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad \begin{cases}x_1=110\\x_2=-36\\x_3=8\end{cases}$$

برای بردار $\mathbf{b}_2$:

$$L\mathbf{y}=\mathbf{b}_2 \rightarrow \begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&0\\3&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\6\\12\end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad y_1=6,\ \ y_2=-18,\ \ y_3=30$$

$$U\mathbf{x}=\mathbf{y} \rightarrow \begin{bmatrix}1&4&5\\0&2&6\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-24\\24\end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad x_1=112,\ \ x_2=-39,\ \ x_3=10$$

دستگاه معادلات خطی $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ معادل با $LU\mathbf{x}=\mathbf{b}$ می باشد و با حل دو معادله $\mathbf{y}=L\backslash\mathbf{b}$ و $\mathbf{x}=U\backslash\mathbf{y}$ پاسخ بدست می آید. می توان برنامه LUsolve را بصورت زیر در نظر گرفت،

```
% Solving Ax = b  by  LU factorization without pivoting
function [x,L,U] = LUsolve(A,B)
NA = size(A,2);
[NB1,NB] = size(B);
if NB1 ~= NA,
   error('A and B must have compatible dimensions');
end
AB = [A B];
E = eye(NA,NA);
L = eye(NA,NA);
for j = 1:NA-1
for i = j+1:NA
      if AB(j,j) ~= 0
      E(i,j) = - AB(i,j) / AB(j,j);
         AB = E * AB;
         L = L * inv(E);
         E = eye(NA,NA);
      else
         error('algorithm needs pivoting')
      end
   end
end
U = AB(:,1:NA);
x = (U\(L\B))';
```

اجرای برنامه بصورت زیر است،

```
A =[1 4 5;4 18 26;3 16 30];
b1 =[6;0;-6];
b2 =[6;6;12];
[x1,L,U]= LUsolve(A,b1)
x1 =
   110   -36    8
L =
     1     0     0
     4     1     0
     3     2     1
U =
     1     4     5
     0     2     6
     0     0     3
x2 = LUsolve(A,b2)
x2 =
   112   -39   10
```

□

۲-۴-۱-۳- تجزیه LU با روش ماتریس های بلوکی

الگوریتم دیگری که برای بدست آوردن تجزیه LU ماتریس ها وجود دارد استفاده از ماتریس های بلوکی است. اگر صورت کلی ماتریس های بلوکی $A_{n\times n}$، U و L را بشکل زیر در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad , \quad L=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \quad , \quad U=\begin{bmatrix} u_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix} \qquad (۱۳-۲)$$

در اینصورت داریم،

$$A=LU \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_{11} & U_{12} \\ u_{11}L_{21} & L_{21}U_{12}+L_{22}U_{22} \end{bmatrix}$$

بنابراین می توان نوشت،

$$\begin{aligned} u_{11} &= a_{11} \\ U_{12} &= A_{12} \\ L_{21} &= \frac{1}{a_{11}} A_{21} \\ A_{22} - L_{21}U_{12} &= L_{22}U_{22} \end{aligned} \qquad (۱۴-۲)$$

مثال۲-۳۴

ماتریس مربعی A را در نظر بگیرید

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 2 & 5 & -3 \\ -4 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

تجزیه LU ماتریس را با استفاده از روش ماتریس های بلوکی بدست آورید،

اگر ماتریس $A = LU$ را بصورت زیر بنویسیم،

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} 3 & 6 & -9 \\ \hline 2 & 5 & -3 \\ -4 & 1 & 10 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|cc} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ \hline 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{array}\right]$$

با توجه به روابط(۲-۱۲) و (۲-۱۳) داریم،

$$\begin{aligned} &u_{11} = a_{11} \rightarrow u_{11} = 3 \\ &U_{12} = A_{12} \rightarrow U_{12} = \begin{bmatrix} 6 & -9 \end{bmatrix} \rightarrow u_{12} = 6, \quad u_{13} = -9 \\ &L_{21} = \frac{1}{a_{11}} A_{21} \rightarrow L_{21} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} \rightarrow l_{21} = \frac{2}{3}, \quad l_{31} = \frac{-4}{3} \end{aligned}$$

$$A_{22} - L_{21}U_{12} = L_{22}U_{22}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{-4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{22} & 0 \\ l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{22} & u_{23} \\ 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{22}u_{22} & l_{22}u_{23} \\ l_{32}u_{22} & l_{32}u_{23} + l_{33}u_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} l_{22}u_{22} = 1 & \xrightarrow{l_{22}=1} \quad u_{22} = 1 \\ l_{32}u_{22} = 9 & \xrightarrow{u_{22}=1} \quad l_{32} = 9 \\ l_{22}u_{23} = 3 & \xrightarrow{l_{22}=1} \quad u_{23} = 3 \\ l_{32}u_{32} + l_{33}u_{33} = -2 & \xrightarrow{l_{33}=1} \quad u_{33} = -29 \end{cases}$$

به این ترتیب تجزیه LU ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$A = LU \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 2 & 5 & -3 \\ -4 & 1 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{-4}{3} & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -29 \end{bmatrix}$$

□

مثال۲-۳۵

ماتریس مربعی A را در نظر بگیرید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

تجزیه LU ماتریس را با استفاده از روش ماتریس های بلوکی بدست آورید،

اگر ماتریس $A = LU$ را بصورت زیر بنویسیم،

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|cc} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ \hline 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{array}\right]$$

با توجه به روابط الگوریتم بلوکی بالا داریم،

$$u_{11} = a_{11} \rightarrow u_{11} = 1$$

$$U_{12} = A_{12} \rightarrow U_{12} = [1 \quad 1] \rightarrow u_{12} = 1, \qquad u_{13} = 1$$

$$L_{21} = \frac{1}{a_{11}} A_{21} \rightarrow L_{21} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow l_{21} = 1, \qquad l_{31} = 1$$

$$A_{22} - L_{21}U_{12} = L_{22}U_{22}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}[1 \quad 1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{22} & u_{23} \\ 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{22} & u_{23} \\ l_{32}u_{22} & l_{32}u_{23} + u_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} u_{22} = 3 \\ l_{32}u_{22} = 3 \quad \xrightarrow{u_{22}=3} \quad l_{32} = 1 \\ u_{23} = 3 \\ l_{32}u_{23} + u_{33} = 7 \quad \rightarrow \quad u_{33} = 4 \end{cases}$$

لذا تجزیه $A=LU$ بشکل زیر بدست می آید،

$$A=LU \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}1&1&1\\1&4&4\\1&4&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&3&3\\0&0&4\end{bmatrix}$$

□

۲-۴-۱-۴- تجزیه PLU با روش حذفی گوسی با محورگیری

برای ماتریس مربعی A زمانی تجزیه LU وجود دارد که بتوان روش حذفی گوسی را بدون محورگیری یعنی بدون نیاز به جابجا کردن سطرهای ماتریس اعمال کرد. در غیر این صورت تجزیه LU امکان پذیر نخواهد بود. این موضوع معادل با آن است که هیچ یک از عناصر قطری ماتریس مربعی A در حین انجام عملیات حذفی گوسی برابر صفر نگردند. در چنین مواردی لازم است همانند آنچه که در روش حذفی گوسی بیان گردید، عمل محورگیری صورت گیرد که در اینصورت به آن تجزیه $A=PLU$ [۱] گفته می شود، که ماتریس P در اینجا یک **ماتریس جایگشت** است.

مثال۲-۳۶

تجزیه $A=PLU$ ماتریس زیر را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}5&6&7\\10&12&3\\20&17&19\end{bmatrix}$$

با اعمال روش حذفی گوسی ابتدا ماتریس A را به یک ماتریس بالا مثلثی تبدیل می نماییم و ماتریس مقدماتی هر مرحله را بدست می آوریم،

$$\begin{bmatrix}5&6&7\\10&12&3\\20&17&19\end{bmatrix} \xrightarrow{-2r_1+r_2\to r_2} \begin{bmatrix}5&6&7\\0&0&-11\\20&17&19\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad E_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}5&6&7\\0&0&-11\\20&17&19\end{bmatrix} \xrightarrow{-4r_1+r_3\to r_3} \begin{bmatrix}5&6&7\\0&0&-11\\0&-7&-9\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad E_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-4&0&1\end{bmatrix}$$

[۱] LU Factorization with Pivoting

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -11 \\ 0 & -7 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & -7 & -9 \\ 0 & 0 & -11 \end{bmatrix} \Rightarrow E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

به این ترتیب ماتریس بالا مثلثی U بصورت زیر بدست می آید،

$$U = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & -7 & -9 \\ 0 & 0 & -11 \end{bmatrix}$$

ماتریس پایین مثلثی L نیز بشکل زیر قابل محاسبه است،

$$E_3 E_2 E_1 A = U \quad \rightarrow \quad A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} U = PLU$$

$$E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = PL$$

لذا تجزیه $A = PLU$ بشکل زیر بدست می آید،

$$A = PLU \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 10 & 12 & 3 \\ 20 & 17 & 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & -7 & -9 \\ 0 & 0 & -11 \end{bmatrix}$$

در نرم افزار *MATLAB* از تابع lu(A) برای تجزیه ماتریس A به فرم $PA = LU$ استفاده می شود، که در آن L و U به ترتیب ماتریس های پایین و بالا مثلثی هستند و P ماتریس جایگشت است. از آنجائیکه P یک ماتریس متعامد است، لذا دستگاه معادلات خطی $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ معادل با $LU\mathbf{x} = P^T\mathbf{b}$ می باشد و با حل دو معادله $\mathbf{y} = L \backslash (P^T\mathbf{b})$ و $\mathbf{x} = U \backslash \mathbf{y}$ پاسخ بدست می آید.
به اجرای این دستور توجه نمایید،

```
A =[5 6 7;10 12 3;20 17 19];
[L,U,P]= lu(A)
L =
    1.0000         0         0
    0.5000    1.0000         0
    0.2500    0.5000    1.0000
```

```
U =

   20.0000   17.0000   19.0000
         0    3.5000   -6.5000
         0         0    5.5000

P =

     0     0     1
     0     1     0
     1     0     0
```

نرم افزار MATLAB در اجرای دستور lu(A) برای پایداری بیشتر الگوریتم، همواره سعی می کند عناصر ستون ها را بصورت نزولی مرتب نماید. لذا نیاز به جایگشت های بیشتری دارد در حالیکه در الگوریتم معرفی شده فقط در صورت صفر شدن عناصر قطری عمل جایگشت صورت می گیرد.

□

مثال۲-۳۷

تجزیه $A = PLU$ ماتریس زیر را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

ابتدا ماتریس های مقدماتی E_1، E_2 و E_3 را با اعمال الگوریتم حذفی گوسی بدست می آوریم.

<u>گام اول</u>- جابجایی سطر اول با سوم و حذف مجهول x_1 از معادله دوم،

$$r_1 \leftrightarrow r_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tfrac{-1}{2} r_1 + r_2 \rightarrow r_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{-3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>گام دوم</u>- حذف مجهول x_2 از معادله سوم،

$$\tfrac{2}{3} r_2 + r_3 \rightarrow r_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{-3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

به این ترتیب ماتریس بالا مثلثی U بصورت زیر بدست می آید،

$$E_3E_2E_1A=U \quad \rightarrow \quad U=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 0 & \frac{-3}{2} & -1\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

برای بدست آوردن تجزیه $A=LU$ بصورت زیر عمل می کنیم. ماتریس پایین مثلثی L نیز بشکل زیر قابل محاسبه است،

$$E_3E_2E_1A=U \quad \rightarrow \quad A=E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}U=LU$$

$$E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & \frac{-2}{3} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & \frac{-2}{3} & 1\end{bmatrix}=PL$$

لذا تجزیه $A=PLU$ بشکل زیر بدست می آید،

$$A=PLU \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & \frac{-2}{3} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 0 & \frac{-3}{2} & -1\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

با استفاده از دستور lu(A) برای تجزیه ماتریس A به فرم $PA=LU$ داریم،

```
A =[0 1 1;1 0 1;2 3 4];
[L,U,P]= lu(A)
L =
    1.0000         0         0
    0.5000    1.0000         0
         0   -0.6667    1.0000
U =
    2.0000    3.0000    4.0000
         0   -1.5000   -1.0000
         0         0    0.3333
P =
     0     0     1
     0     1     0
     1     0     0
```

□

۲-۴-۱-۵- تجزیه PLU با استفاده از ماتریس های بلوکی

الگوریتم تجزیه $A = PLU$ را می توان با استفاده از ماتریس های بلوکی نیز بیان کرد، در این روش الگوریتم را همانند قبل انجام می دهیم و هرجا که نیاز بود عمل جابجایی سطرها را انجام داده و آن را بصورت یک ماتریس جایگشت نشان می دهیم.

مثال۲-۳۸

تجزیه $A = PLU$ ماتریس زیر را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

در این ماتریس اگر صورت کلی تجزیه LU را اجرا نماییم داریم،

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|cc} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ \hline 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{array}\right]$$

$$u_{11} = a_{11} \rightarrow u_{11} = 1$$
$$U_{12} = A_{12} \rightarrow u_{12} = 0, \quad u_{13} = 0$$
$$L_{21} = \frac{1}{a_{11}} A_{21} \rightarrow l_{21} = 0, \quad l_{31} = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

دقت کنید عنصر $a_{22} = 0$ است،

$$A_{22} - L_{21}U_{12} = L_{22}U_{22}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{22} & u_{23} \\ 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{22} & u_{23} \\ l_{32}u_{22} & l_{32}u_{23} + u_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} u_{22} = 0 \\ l_{32}u_{22} = 1 \\ u_{23} = 2 \\ l_{32}u_{32} + u_{33} = -1 \end{cases} \xrightarrow{u_{22}=0} \quad l_{32}.0 = 1 \rightarrow ?$$

لذا مشخص است که در حل دچار تناقض می گردیم .

حال برای رفع این مشکل همانند روش حذفی گوسی باید یک عمل جایگشت انجام گیرد،

$$A_{22}-L_{21}U_{12}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\widetilde{A}=P_1\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

حال تجزیه LU را برای ماتریس $\widetilde{A}$ ادامه می دهیم،

$$\widetilde{A}=L_{22}U_{22}\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ l_{32} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{22} & u_{23}\\ 0 & u_{33}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_{22} & u_{23}\\ l_{32}u_{22} & l_{32}u_{23}+u_{33}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}u_{22}=1\\ l_{32}u_{22}=0 & \xrightarrow{u_{22}=1} \quad l_{32}=0\\ u_{23}=-1\\ l_{32}u_{32}+u_{33}=2 & \rightarrow \quad u_{33}=2\end{cases}$$

لذا تجزیه $A=PLU$ بصورت زیر بدست می آید،

$$A=PLU\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

□

مثال۲-۳۹

تجزیه $A=PLU$ ماتریس زیر را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 5 & 5\\ 2 & 3 & 0\\ 6 & 9 & 8\end{bmatrix}$$

ابتدا ماتریس $A=LU$ را بصورت زیر می نویسیم،

$$A=\left[\begin{array}{c:cc}0 & 5 & 5\\ \hdashline 2 & 3 & 0\\ 6 & 9 & 8\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:cc}1 & 0 & 0\\ \hdashline l_{21} & 1 & 0\\ l_{31} & l_{32} & 1\end{array}\right]\left[\begin{array}{c:cc}u_{11} & u_{12} & u_{13}\\ \hdashline 0 & u_{22} & u_{23}\\ 0 & 0 & u_{33}\end{array}\right]$$

از آنجاییکه $a_{11}=0$ می باشد، از ابتدا یک ماتریس جایگشت P_1 را در نظر می گیریم،

$$\tilde{A} = P_1 A \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

با این کار سطر اول و سوم را جابجا می نماییم. حال تجزیه LU را برای ماتریس $\tilde{A}$ بدست می آوریم،

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{c:cc} 6 & 9 & 8 \\ \hdashline 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:cc} 1 & 0 & 0 \\ \hdashline l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c:cc} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ \hdashline 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{array}\right]$$

$$u_{11} = \tilde{a}_{11} \rightarrow u_{11} = 6$$

$$U_{12} = \tilde{A}_{12} \rightarrow U_{12} = \begin{bmatrix} 9 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow u_{12} = 9, \qquad u_{13} = 8$$

$$L_{21} = \frac{1}{\tilde{a}_{11}} \tilde{A}_{21} \rightarrow L_{21} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow l_{21} = \frac{1}{3}, \qquad l_{31} = 0$$

$$\tilde{A}_{22} - L_{21} U_{12} = L_{22} U_{22}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{22} & u_{23} \\ 0 & u_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \frac{-8}{3} \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{22} & u_{23} \\ l_{32} u_{22} & l_{32} u_{23} + u_{33} \end{bmatrix}$$

عنصر (۱،۱) صفر است، لذا نیاز به یک جایگشت دیگر داریم،

$$\tilde{\tilde{A}} = P_2 \begin{bmatrix} 0 & \frac{-8}{3} \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{-8}{3} \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 0 & \frac{-8}{3} \end{bmatrix}$$

با اینکار سطر دوم و سوم در ماتریس اصلی را جابجا می کنیم، حال تجزیه LU را برای ماتریس $\tilde{\tilde{A}}$ ادامه می دهیم،

$$\tilde{\tilde{A}} = L_{22} U_{22} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 0 & \frac{-8}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{22} & u_{23} \\ 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\tilde{A}} = L_{22} \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 0 & \frac{-8}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{22} & u_{23} \\ l_{32} u_{22} & l_{32} u_{23} + u_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} u_{22} = 5 \\ l_{32} u_{22} = 0 \quad \xrightarrow{u_{22}=5} \quad l_{32} = 0 \\ u_{23} = 5 \\ l_{32} u_{32} + u_{33} = \dfrac{-8}{3} \quad \rightarrow \quad u_{33} = \dfrac{-8}{3} \end{cases}$$

لذا تجزیه $A = PLU$ بشکل زیر بدست می آید،

$$P = P_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{\tilde{a}_{11}}P_2^T\tilde{A}_{21} & L_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\frac{1}{3}&0&1\end{bmatrix}$$

$$U=\begin{bmatrix}\tilde{a}_{11} & \tilde{A}_{12}\\ 0 & U_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&9&8\\0&5&5\\0&0&\frac{-8}{3}\end{bmatrix}$$

$$A=PLU\Rightarrow\begin{bmatrix}0&5&5\\2&3&0\\6&9&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\frac{1}{3}&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&9&8\\0&5&5\\0&0&\frac{-8}{3}\end{bmatrix}$$

با استفاده از تابع lu(A) برای تجزیه ماتریس A به فرم $PA=LU$ داریم،

```
A =[0 5 5;2 3 0;6 9 8];
[L,U,P]= lu(A)
L =
    1.0000         0         0
         0    1.0000         0
    0.3333         0    1.0000
U =
    6.0000    9.0000    8.0000
         0    5.0000    5.0000
         0         0   -2.6667
P =
     0     0     1
     1     0     0
     0     1     0
```

□

۲-۴-۱-۶- حجم محاسبات جبری الگوریتم تجزیه LU

تعداد عملیات محاسباتی در حل دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ با استفاده از تجزیه LU بصورت زیر بدست می آید،

۱- تجزیه LU ماتریس A: $\frac{2n^3}{3}-\frac{n^2}{2}-\frac{n}{6}\approx\frac{2n^3}{3}$

۲- حل دستگاه معادلات با استفاده از الگوریتم های جایگزینی پیشرو و پسرو: $2n^2$

۲-۴-۲- تجزیه چالسکی ماتریس ها

تجزیه چالسکی حالت خاصی از تجزیه LU می باشد و زمانی کاربرد دارد که ماتریس A مورد نظر مثبت معین باشد.

بنابر تعریف می توان یک ماتریس مثبت معین $A_{n\times n}$ را بصورت حاصلضرب دو ماتریس به شکل $A = LL^T$ تجزیه کرد، به طوریکه L یک ماتریس پایین مثلثی با عناصر قطری مثبت باشد، به این روش **تجزیه چالسکی** ماتریس $A_{n\times n}$ گفته می شود. علاوه بر حل دستگاه معادلات جبری، یکی از مهمترین کاربردهای تجزیه چالسکی در حل مسئله حداقل مربعات می باشد که در فصل های آتی به آن می دازیم،

برای بدست آوردن این تجزیه همانند تجزیه LU می توان از الگوریتم حذفی گوسی و از ماتریس های بلوکی استفاده نمود. از بیان الگوریتم حذفی گوسی به دلیل تکراری بودن مطالب خودداری می شود و فقط روش ماتریس های بلوکی شرح داده می شود.

صورت کلی ماتریسهای بلوکی $A_{n\times n}$ و L را بشکل زیر در نظر بگیرید،

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & A_{21}^T \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad , \quad L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \tag{۱۵-۲}$$

که در آن،

$$\begin{aligned} l_{11} &= \sqrt{a_{11}} \\ L_{21} &= \frac{1}{l_{11}} A_{21} \\ A_{22} - L_{21}L_{21}^T &= L_{22}L_{22}^T \end{aligned} \tag{۱۶-۲}$$

به این ترتیب ماتریس مثبت معین مذکور بصورت $A = LL^T$ تجزیه می گردد.

مثال۲-۴۰

تجزیه چالسکی ماتریس مثبت معین $A_{3\times 3}$ را بیابید،

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

اگر ماتریس $A = LL^T$ را بصورت زیر بنویسیم،

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

با توجه به روابط گفته شده داریم،

$$l_{11}=\sqrt{a_{11}}\rightarrow l_{11}=5$$
$$L_{21}=\frac{1}{l_{11}}A_{21}\rightarrow L_{21}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}15\\-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}\rightarrow l_{21}=3,\qquad l_{31}=-1$$
$$A_{22}-L_{21}L_{21}^T=L_{22}L_{22}^T$$
$$\begin{bmatrix}18&0\\0&11\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_{22}&0\\l_{32}&l_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}l_{22}&l_{32}\\0&l_{33}\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}9&3\\3&10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_{22}^2&l_{22}l_{32}\\l_{22}l_{32}&l_{32}^2+l_{33}^2\end{bmatrix}\rightarrow l_{22}=3,\qquad l_{32}=1,\qquad l_{33}=3$$

به این ترتیب تجزیه چالسکی ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$A=\begin{bmatrix}25&15&-5\\15&18&0\\-5&0&11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&0&0\\1&3&0\\-1&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&1&-1\\0&3&1\\0&0&3\end{bmatrix}$$

در نرم افزار MATLAB از دستور chol(A) برای بدست آوردن تجزیه چالسکی استفاده می شود،

```
A =[25 15 -5;15 18 0;-5 0 11];
chol(A)
ans =
     5     3    -1
     0     3     1
     0     0     3
```

اگر ماتریس مذکور مثبت معین نباشد، پیغام خطا بصورت زیر حاضر می شود،

```
A =[0 5 5;2 3 0;6 9 8];
chol(A)
??? Error using ==> chol
Matrix must be positive definite.
```

□

۲-۴-۲-۱- حل دستگاه معادلات جبری خطی با تجزیه چالسکی

ابتدا تجزیه چالسکی ماتریس مثبت معین $A_{n\times n}$ را بصورت زیر بدست می آوریم،

$$A = LL^T$$

سپس با جایگذاری در معادله دستگاه داریم،

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \xrightarrow{A=LL^T} \quad LL^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

با فرض اینکه $\mathbf{y} = L^T\mathbf{x}$ باشد داریم،

$$LL^T\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \xrightarrow{\mathbf{y}=L^T\mathbf{x}} \quad L\mathbf{y} = \mathbf{b}$$

بنابراین جواب دستگاه معادلات اصلی با حل یک سری معادلات ساده بصورت زیر بدست می آید،

$$\begin{cases} L\mathbf{y} = \mathbf{b} \\ \mathbf{y} = L^T\mathbf{x} \end{cases} \qquad (۱۷-۲)$$

که در حل این دو معادله از الگوریتم جایگزینی پیشرو و جایگزینی پسرو استفاده می شود.

مثال۲-۴۱

دستگاه معادلات زیر را با استفاده از تجزیه چالسکی حل نمایید،

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 = -1 \end{cases}$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

برای استفاده از تجزیه چالسکی باید ماتریس مثبت معین باشد. پس ابتدا مثبت معین بودن ماتریس A را بررسی می نماییم،

$$1 > 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 5 > 0$$

با توجه به معیار سیلوستر ماتریس A مثبت معین است، لذا می توان از روش تجزیه چالسکی دستگاه را حل نمود. حال تجزیه چالسکی ماتریس A را بدست می آوریم،

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_{11}&0&0\\l_{21}&l_{22}&0\\l_{31}&l_{32}&l_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}l_{11}&l_{21}&l_{31}\\0&l_{22}&l_{32}\\0&0&l_{33}\end{bmatrix}$$

$$l_{11}=\sqrt{a_{11}}\rightarrow l_{11}=1$$

$$L_{21}=\frac{1}{l_{11}}A_{21}\rightarrow L_{21}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\rightarrow l_{21}=1,\qquad l_{31}=1$$

$$A_{22}-L_{21}L_{21}^T=L_{22}L_{22}^T$$

$$\begin{bmatrix}2&2\\2&7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_{22}&0\\l_{32}&l_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}l_{22}&l_{32}\\0&l_{33}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&1\\1&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_{22}^2&l_{22}l_{32}\\l_{22}l_{32}&l_{32}^2+l_{33}^2\end{bmatrix}\rightarrow l_{22}=1,\qquad l_{32}=1,\qquad l_{33}=\sqrt{5}$$

بنابراین تجزیه چالسکی ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&\sqrt{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&\sqrt{5}\end{bmatrix}=LL^T$$

دستگاه معادلات حاصل را همانند تجزیه LU بصورت زیر حل می کنیم،

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}\quad\rightarrow\quad LL^T\mathbf{x}=\mathbf{b}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}L\mathbf{y}=\mathbf{b}\\L^T\mathbf{x}=\mathbf{y}\end{cases}$$

$$L\mathbf{y}=\mathbf{b}\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&\sqrt{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad y_1=2,\ \ y_2=-1,\ \ y_3=-\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$L^T\mathbf{x}=\mathbf{y}\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&\sqrt{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\\\frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad x_1=3,\ \ x_2=-\frac{3}{5},\ \ x_3=-\frac{2}{5}$$

در نرم افزار MATLAB می توان پاسخ دستگاه معادلات خطی $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ را با استفاده از دستور chol(A) و حل دو معادله بدست آورد،

```
A =[1 1 1;1 2 2;1 2 7];
b =[2;1;-1];
U = chol(A);
x = U\(U'\b)
x =
    3.0000
   -0.6000
   -0.4000
```

□

۲-۴-۲-۲- حجم محاسبات جبری الگوریتم تجزیه چالسکی

تعداد عملیات محاسباتی در حل دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ با استفاده از تجزیه چالسکی بصورت زیر بدست می آید،

۱- تجزیه چالسکی ماتریس A: $\frac{n^3}{3}$ که تقریباً نصف محاسبات تجزیه LU را دارد.

۲- حل دستگاه معادلات با استفاده از الگوریتم های جایگزینی پیشرو و پسرو: $2n^2$

مسائل

۲- ۱- دستگاه معادلات جبری زیر را با روش حذفی گوسی و روش گوس- جردن حل نمایید.

الف) $\begin{cases} 2x_1+5x_2+8x_3=2 \\ x_1+2x_2+3x_3=4 \\ 3x_1+4x_2+4x_3=1 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=-2 \\ -x_1+x_2-2x_3=3 \\ 2x_1-x_2+3x_3=1 \end{cases}$

۲-۲- دستگاه معادلات جبری زیر را به فرم سطری پلکانی در آورید و سپس حل نمایید.

الف) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-3x_4=1 \\ 2x_1-5x_2-3x_3+12x_4=2 \\ 7x_1+x_2+8x_3+5x_4=7 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} x_1-4x_2=10 \\ x_1+8x_2=0 \\ x_1+12x_2=-1 \end{cases}$

۲-۳- فرم سطری پلکانی کاهش یافته معادلات زیر را بدست آورید و سپس آنها را حل نمایید.

الف) $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3+2x_4=5 \\ x_1+3x_2+2x_3+4x_4=1 \\ 3x_1+2x_2=2 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} 5x_3+15x_5=5 \\ 2x_2+4x_3+7x_4+x_5=3 \\ x_2+2x_3+3x_4=1 \\ x_2+2x_3+4x_4+x_5=2 \end{cases}$

۲-۴- سازگار و ناسازگار بودن دستگاه معادلات جبری زیر را بررسی نمایید.

الف) $\begin{cases} -x_1+3x_2-2x_3=1 \\ -x_1+4x_2-3x_3=0 \\ -x_1+5x_2-4x_3=0 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3+5x_4=1 \\ 4x_1+4x_3+8x_4=0 \\ x_1+x_2+2x_3+3x_4=0 \\ x_2+x_3+x_4=0 \end{cases}$

ج) $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3+5x_4=7 \\ 4x_1+4x_3+8x_4=8 \\ x_1+x_2+2x_3+3x_4=5 \\ x_2+x_3+x_4=3 \end{cases}$

د) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=2 \\ 2x_1+4x_2=2 \\ 3x_1+6x_2+x_3=4 \end{cases}$

۲-۵- نشان دهید اگر $[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]$ و $[\beta_1,\ldots,\beta_n]$ جواب های یک دستگاه معادلات خطی باشند، مجموعه زیر نیز یک جواب برای دستگاه معادلات مذکور خواهد بود،

$$[(1-t)\alpha_1+t\beta_1,\ldots,(1-t)\alpha_n+t\beta_n]$$

که در آن t یک عدد صحیح است.

۲-۶- اگر A ماتریس ضرایب سیستم همگن n معادله n مجهول زیر باشد،

$$\begin{cases}(1-n)x_1+x_2+\cdots+x_n=0\\ x_1+(1-n)x_2+\cdots+x_n=0\\ \cdots\\ x_1+x_2+\cdots+(1-n)x_n=0\end{cases}$$

فرم سطری پلکانی کاهش یافته آن را بیابید و نشان دهید، که پاسخ این سیستم بصورت زیر است،

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=\alpha$$

۲-۷- دستگاه معادلات زیر را حل نمایید،

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+2x_4+x_5=1\\ 2x_1+2x_2+4x_3+4x_4+3x_5=1\\ 2x_1+2x_2+4x_3+4x_4+2x_5=2\\ 3x_1+5x_2+8x_3+6x_4+5x_5=3\end{cases}$$

حال جوابهایی را بیابید که شرایط زیر را برآورده سازند.

$$\begin{cases}(x_1-x_2)^2-4x_5^2=0\\ x_3^2-x_5^2=0\end{cases}$$

۲-۸- دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

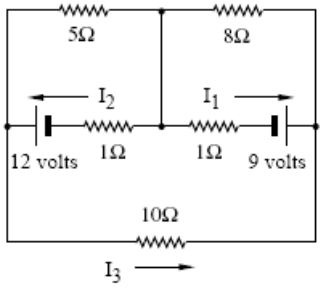
$$\begin{cases}x_1+\lambda x_2-x_3=1\\ 2x_1+x_2+2x_3=5\lambda+1\\ x_1-x_2+3x_3=4\lambda+2\\ x_1-2\lambda x_2+7x_3=10\lambda-1\end{cases}$$

الف) دستگاه معادلات را به فرم سطری پلکانی کاهش یافته در آورید.

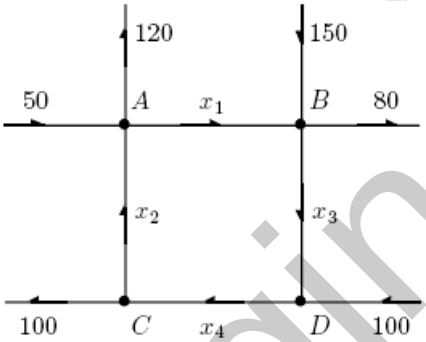
ب) به ازای چه مقادیری از λ دستگاه سازگار خواهد بود؟

ج) پاسخ کلی سیستم را بدست آورید.

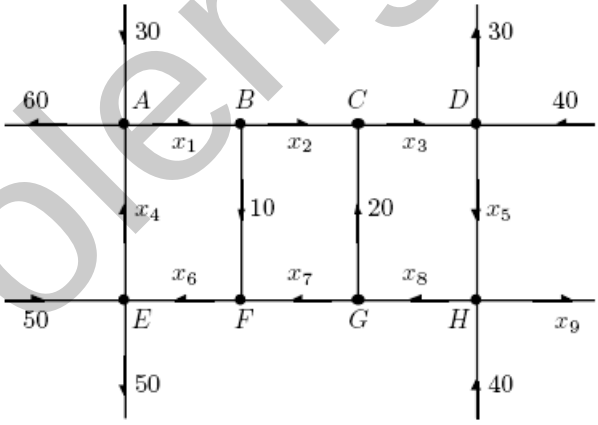
۲-۹- در مدار الکتریکی زیر با اعمال روش گوس- جردن جریانهای I_1، I_2 و I_3 را بدست آورید.



۲-۱۰- در شبکه ترافیک یکطرفه زیر حداقل مقدار x_4 را بیابید.



۲-۱۱- شبکه ترافیک یکطرفه زیر را در نظر بگیرید،



الف) جواب کلی سیستم را بیابید.

ب) محدوده هر یک از متغیرها بیابید.

۲-۱۳- در هر بخش تجزیه LU ماتریس A را بدست آورید و سپس از آن برای حل سیستم $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ استفاده نمایید.

الف) $A=\begin{bmatrix}2&1&2\\4&6&5\\4&6&8\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}6\\21\\24\end{bmatrix}$

ب) $A=\begin{bmatrix}3&1&3\\9&4&10\\6&-1&5\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}5\\18\\9\end{bmatrix}$

ج) $A=\begin{bmatrix}2&1&2\\4&3&5\\4&3&5\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\9\\18\end{bmatrix}$

د) $A=\begin{bmatrix}1&2&4&17\\3&6&-12&3\\2&3&-3&2\\0&2&-2&6\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\0\\3\\-2\end{bmatrix}$

۲-۱۴- ماتریس A و بردار $\mathbf{b}$ را در نظر بگیرید، فرض کنید ماتریس A را بصورت حاصلضرب سه ماتریس ساده تجزیه کردیم. به این روش تجزیه LDU گفته می شود،

$$A=LDU=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_1&0&0\\0&d_2&0\\0&0&d_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

الف) تحت چه شرایطی ماتریس A غیرمنفرد است؟

ب) با استفاده از تجزیه بالا دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ زیر را حل کنید.

۲-۱۵- با استفاده از اطلاعات زیر و بدون محاسبه A یا A^{-1} یا A^{-2} یا A^2 حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$A^{-1}\mathbf{x}+A^{-2}\mathbf{y}$$

$$L=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix},\quad U=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{y}=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

ماتریس های L و U حاصل تجزیه $A=LU$ می باشند.

۲-۱۶- ماتریس های متقارن زیر را در نظر بگیرید،

الف) $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$

ب) $A=\begin{bmatrix}4&2&-6\\2&10&9\\-6&9&26\end{bmatrix}$

ج) $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&4&5\\0&5&6\end{bmatrix}$

د) $A=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}$

مثبت معین بودن ماتریس های زیر را بررسی نمایید و برای ماتریس های مثبت معین تجزیه چالسکی را بدست آورید. نتیجه را با دستور chol(A) در نرم افزار MATLAB بررسی نمایید.

۲-۱۷- هر یک از دستگاه معادلات زیر را با استفاده از تجزیه چالسکی حل نمایید،

الف) $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$

۲-۱۸- دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

الف) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 5 \\ -2x_1 + 4x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ 6x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases}$

ج) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases}$

سازگار یا ناسازگار بودن دستگاه را بررسی نمایید.

۲-۱۹- ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$A = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

الف) نشان دهید به ازای $\varepsilon = 0$ ماتریس A یک ماتریس منفرد است.

ب) برای $\varepsilon = 1$ مقدار A^{-1} و κ را بدست آورید و نشان دهید $\kappa = \|A\| \, \|A^{-1}\|$ است.

ج) با انتخاب $\varepsilon = 0.0001$ نشان دهید که معادله $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ یک سیستم بد حالت است. برای این منظور جواب معادله را برای بردار $\mathbf{b} = [1.1 \quad 1 \quad 1]^T$ بررسی کنید.

۲-۲۰- پاسخ مستقیم دستگاه معادلات زیر را یکبار برای $k = 15$ و یکبار برای $k = 14.9$ بدست آورید. آیا سیستم بد حالت است؟ عدد حالت ماتریس A را بدست آورید؟

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 21 & 19 & 16 \\ 39 & 48 & 53 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} k \\ 56 \\ 140 \end{bmatrix}$$

فصل سوم

فضاهای برداری

۳-۱ مقدمه

در فصل سوم به مفهوم میدان و فضاهای برداری اشاره شده و زیرفضاهای برداری معروف و پرکاربرد معرفی می گردند. مفاهیم پایه ای چون استقلال و وابستگی خطی بردارها، رتبه، پایه و بُعد همراه با مثال های کاربردی و دستورات MATLAB بیان شده است. سپس به معرفی چهار زیرفضای اساسی یک ماتریس و کاربرد آنها در تشخیص پاسخ معادلات جبری خطی پرداخته و نحوه بدست آوردن آنها بوسیله نرم افزار بیان می شود. در مبحث پایانی به معرفی تبدیل های خطی همراه با مثال های کاربردی پرداخته شده است.

۳-۲ فضاهای برداری

در مطالعه مفاهیم جبرخطی و دستگاه معادلات جبری مفهوم **میدان**[۱] و **فضای برداری**[۲] از اهمیت ویژه ای برخوردار است و اساس کلیه تحلیل های جبرخطی را تشکیل می دهد.

۳-۲-۱- مفهوم میدان

یک میدان مجموعه ای از اسکالرها است به طوریکه همراه با دو عمل جمع و ضرب شرایط زیر را برآورده می سازد،

۱- برای هر اسکالر a و b متعلق به میدان F یک اسکالر متناظر $a+b$ در F وجود دارد، که مجموع a و b نامیده می شود. (بسته بودن مجموعه نسبت به عمل جمع)

۲- برای هر اسکالر a و b متعلق به میدان F یک اسکالر متناظر ab در F وجود دارد، که حاصلضرب a و b نامیده می شود. (بسته بودن مجموعه نسبت به عمل ضرب)

۳- برای هر اسکالر a، b و c متعلق به میدان F قوانین زیر برقرار می باشند،

1. $a+b=b+a, \quad ab=ba$ — *قوانین جابجایی پذیری*
2. $(a+b)+c=a+(b+c), \quad (ab)c=a(bc)$ — *قوانین شرکت پذیری*
3. $a(b+c)=ab+ac$ — *قوانین توزیع پذیری*
4. $\forall a\in F, \quad \exists 0\in F \rightarrow \quad a+0=a$ — *عضو خنثی در عمل جمع*
5. $\forall a\in F, \quad \exists 1\in F \rightarrow \quad 1a=a$ — *عضو خنثی در عمل ضرب*
6. $\forall a\in F, \quad \exists b\in F \rightarrow \quad a+b=0$ — *عضو معکوس در عمل جمع*
7. $\forall a\in F, \quad \exists b\in F \rightarrow \quad ab=1$ — *عضو معکوس در عمل ضرب*

مثال ۳-۱

مجموعه های زیر با دو عمل جمع و ضرب معمولی تشکیل یک میدان می دهند،

۱- مجموعه اعداد حقیقی $(\Re)$،

۲- مجموعه اعداد مختلط (C)

۳- مجموعه اعداد گویا (Q)

لیکن مجموعه اعداد صحیح (Z) با قواعد جمع و ضرب معمولی تشکیل یک میدان نمی دهد زیرا شرط هفتم را برآورده نمی سازد.

$$\beta\in Z \rightarrow \frac{1}{\beta}\notin Z$$

□

[۱] Field

[۲] Vector Space

۳-۲-۲- فضای برداری

یک فضای برداری مانند V بر روی میدان F، مجموعه ای از بردارها است که با دو عمل جمع و ضرب شرایط زیر را برآورده می سازد،

1. $\forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in V \rightarrow \quad \mathbf{u}+\mathbf{v} \in V$
2. $\forall \mathbf{u} \in V, \quad \forall c \in F \rightarrow \quad c\mathbf{u} \in V$
3. $\forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in V \rightarrow \quad \mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$
4. $\forall \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in V \rightarrow \quad \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = (\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$
5. $\forall \mathbf{u} \in V, \quad \exists \mathbf{0} \in V \rightarrow \quad \mathbf{u}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{u}$
6. $\forall \mathbf{u} \in V, \quad \exists -\mathbf{u} \in V \rightarrow \quad \mathbf{u}+(-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u})+\mathbf{u} = \mathbf{0}$
7. $\forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in V, \quad \forall a,b \in F \rightarrow \quad (a+b)\mathbf{u} = a\mathbf{u}+b\mathbf{u}, \quad a(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = a\mathbf{u}+a\mathbf{v}$
8. $\forall \mathbf{u} \in V, \quad \forall a,b \in F \rightarrow \quad a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$
9. $\forall \mathbf{u} \in V, \quad \exists 1 \in F \rightarrow \quad 1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

فضایی را که مجهز به نُرم باشد، فضای **اندازه دار**[1] گویند.

مثال ۳-۲

مجموعه های زیر نمونه هایی از فضاهای برداری هستند،

- مجموعه $\Re^n$ (بردارهای n تایی حقیقی) به روی میدان اعداد حقیقی،
- مجموعه $M_{n\times n}(\Re)$ (ماتریس های $n\times n$ با عناصر حقیقی) بر روی میدان اعداد حقیقی ،
- مجموعه ماتریس های متقارن $n\times n$ مختلط بر روی میدان اعداد مختلط،
- مجموعه $P_n(\Re)$ چند جمله ای های مرتبه n به فرم $\alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ بر روی میدان اعداد حقیقی،

□

مثال ۳-۳

ثابت کنید مجموعه $\Re^n$ که شامل تمام بردارهای n تایی به شکل $\mathbf{u} = [u_1,\cdots,u_n]$ است، بر روی میدان $\Re$ تشکیل یک فضای برداری می دهند.

- برای بررسی شرط اول و دوم برای هر بردار u و v در $\Re^n$ و $c \in \Re$ داریم،

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = [u_1+v_1,\ldots,u_n+v_n] \quad , \quad c\mathbf{u} = [cu_1,\ldots,cu_n]$$

همانطور که مشخص است $c\mathbf{u} \in \Re^n$ و $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \Re^n$ می باشند.

[1] Metric

- برای بررسی شرط سوم و چهارم می توان نوشت،

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=[u_1+v_1,\ldots,u_n+v_n]=[v_1+u_1,\ldots,v_n+u_n]=\mathbf{v}+\mathbf{u}$$

و

$$\begin{aligned}\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})&=\\ &=[u_1,\ldots,u_n]+[v_1+w_1,\ldots,v_n+w_n]=[u_1+(v_1+w_1),\ldots,u_n+(v_n+w_n)]\\ &=[(u_1+v_1)+w_1,\ldots,(u_n+v_n)+w_n]=[u_1+v_1,\ldots,u_n+v_n]+[w_1,\ldots,w_n]\\ &=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}\end{aligned}$$

از این رو شرط سوم و چهارم نیز برآورده می شود.

- برای بررسی شرط پنجم و ششم یک بردار صفر بصورت $\mathbf{0}=[0,\ldots,0]$ در نظر می گیریم،

$$\mathbf{u}+\mathbf{0}=[u_1+0,\ldots,u_n+0]=[u_1,\ldots,u_n]=[0+u_1,\ldots,0+u_n]=\mathbf{0}+\mathbf{u}$$

و

$$\begin{aligned}\mathbf{u}+(\mathbf{-u})&=[u_1+(-u_1),\ldots,u_n+(-u_n)]\\ &=[0,\ldots,0]\\ &=[(-u_1)+u_1,\ldots,(-u_n)+u_n]\\ &=(\mathbf{-u})+\mathbf{u}\end{aligned}$$

همانطور که پیداست این شرایط نیز صدق می کنند.

- برای بررسی شرایط هفتم، هشتم و نهم بصورت زیر می توان عمل کرد،

$$\begin{aligned}c(\mathbf{u}+\mathbf{v})&=c[u_1+v_1,\ldots,u_n+v_n]=[c(u_1+v_1),\ldots,c(u_n+v_n)]\\ &=[cu_1+cv_1,\ldots,cu_n+cv_n]=[cu_1,\ldots,cu_n]+[cv_1,\ldots,cv_n]\\ &=c\mathbf{u}+c\mathbf{v}\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}(a+b)\mathbf{u}&=(a+b)[u_1,\ldots,u_n]=[(a+b)u_1,\ldots,(a+b)u_n]\\ &=[au_1+bu_1,\ldots,au_n+bu_n]=[au_1,\ldots,au_n]+[bu_1,\ldots,bu_n]\\ &=a\mathbf{u}+b\mathbf{u}\end{aligned}$$

و

$$(ab)\mathbf{u}=(ab)[u_1,\ldots,u_n]=[(ab)u_1,\ldots,(ab)u_n]=[a(bu_1),\ldots,a(bu_n)]=a(b\mathbf{u})$$

و

$$1\mathbf{u}=1[u_1,\ldots,u_n]=[1u_1,\ldots,1u_n]=[u_1,\ldots,u_n]=\mathbf{u}$$

بنابراین با برآورده شدن شرایط هفتم، هشتم و نهم مشخص می شود که مجموعه $\Re^n$ که شامل تمام بردارهای n تایی به شکل $\mathbf{u}=[u_1,\cdots,u_n]$ می باشد، بر روی میدان $\Re$ تشکیل یک فضای برداری را می دهند.

□

مثال ۳-۴

ثابت کنید مجموعه P_k که شامل تمام چند جمله ای هایی است که به فرم زیر می باشد، بر روی میدان $\Re$ تشکیل یک فضای برداری می دهد ($k \in N$ و $p_0, p_1, \ldots, p_k \in \Re$).

$$p(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_k x^k$$

- برای بررسی شرط اول و دوم، دو چندجمله ای متعلق به مجموعه P_k و $c \in \Re$ را در نظر می گیریم،

$$q(x) = q_0 + q_1 x + \cdots + q_k x^k \text{ و } p(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_k x^k$$

$$p(x) + q(x) = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)x + \cdots + (p_k + q_k)x^k$$

و

$$cp(x) = cp_0 + cp_1 x + \cdots + cp_k x^k$$

بدیهی است که $p(x) + q(x) \in P_k$ و $cp(x) \in P_k$ می باشد.

- برای بررسی شرط سوم و چهارم داریم،

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (p_0 + p_1 x + \cdots + p_k x^k) + (q_0 + q_1 x + \cdots + q_k x^k) \\ &= (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)x + \cdots + (p_k + q_k)x^k \\ &= (q_0 + p_0) + (q_1 + p_1)x + \cdots + (q_k + p_k)x^k \\ &= (q_0 + q_1 x + \cdots + q_k x^k) + (p_0 + p_1 x + \cdots + p_k x^k) \\ &= q(x) + p(x) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} &p(x) + (q(x) + r(x)) = \\ &= (p_0 + p_1 x + \cdots + p_k x^k) + ((q_0 + r_0) + (q_1 + r_1)x + \cdots + (q_k + r_k)x^k) \\ &= (p_0 + (q_0 + r_0)) + (p_1 + (q_1 + r_1))x + \cdots + (p_k + (q_k + r_k))x^k \\ &= ((p_0 + q_0) + r_0) + ((p_1 + q_1) + r_1)x + \cdots + ((p_k + q_k) + r_k)x^k \\ &= ((p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)x + \cdots + (p_k + q_k)x^k) + (r_0 + r_1 x + \cdots + r_k x^k) \\ &= (p(x) + q(x)) + r(x) \end{aligned}$$

لذا شرایط سوم و چهارم نیز برقرار هستند.

- برای بررسی شرط پنجم و ششم چندجمله ای صفر را بصورت $\mathbf{0} = 0 + 0x + \cdots + 0x^k$ در نظر می گیریم،

$$\begin{aligned} p(x)+\mathbf{0} &= (p_0+0)+(p_1+0)x+\cdots+(p_k+0)x^k \\ &= (0+p_0)+(0+p_1)x+\cdots+(0+p_k)x^k \\ &= \mathbf{0}+p(x)=p(x) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} p(x)+(-p(x)) &= (p_0+(-p_0))+(p_1+(-p_1))x+\cdots+(p_k+(-p_k))x^k \\ &= (p_0-p_0)+(p_1-p_1)x+\cdots+(p_k-p_k)x^k \\ &= 0+0x+\cdots+0x^k \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

از این رو شرایط پنجم و ششم نیز برقرار می باشند.

- برای بررسی شرایط هفتم، هشتم و نهم بصورت زیر می توان عمل کرد،

$$\begin{aligned} c(p(x)+q(x)) &= c((p_0+q_0)+(p_1+q_1)x+\cdots+(p_k+q_k)x^k) \\ &= c(p_0+q_0)+c(p_1+q_1)x+\cdots+c(p_k+q_k)x^k \\ &= (cp_0+cq_0)+(cp_1+cq_1)x+\cdots+(cp_k+cq_k)x^k \\ &= (cp_0+cp_1x+\cdots+cp_kx^k)+(cq_0+cq_1x+\cdots+cq_kx^k) \\ &= cp(x)+cq(x) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} (a+b)p(x) &= (a+b)p_0+(a+b)p_1x+\cdots+(a+b)p_kx^k \\ &= (ap_0+bp_0)+(ap_1+bp_1)x+\cdots+(ap_k+bp_k)x^k \\ &= (ap_0+ap_1x+\cdots+ap_kx^k)+(bp_0+bp_1x+\cdots+bp_kx^k) \\ &= ap(x)+bp(x) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} (ab)p(x) &= (ab)p_0+(ab)p_1x+\cdots+(ab)p_kx^k \\ &= a(bp_0)+a(bp_1)x+\cdots+a(bp_k)x^k \\ &= a(bp_0+bp_1x+\cdots+bp_kx^k) \\ &= a(bp(x)) \end{aligned}$$

و

$$1p(x)=1p_0+1p_1x+\cdots+1p_kx^k = p_0+p_1x+\cdots+p_kx^k = p(x)$$

با برآورده شدن شرایط هفتم، هشتم و نهم، می توان نتیجه گرفت که مجموعه P_k بر روی میدان $\Re$ تشکیل یک فضای برداری می دهد.

□

مثال ۳-۵

اگر $\mathrm{M}_{2\times2}(\Re)$ مجموعه تمامی ماتریس های 2×2 با عناصر حقیقی باشد، نشان دهید، این مجموعه همراه با عملیات جمع ماتریس ها و ضرب اعداد حقیقی در ماتریس ها تشکیل یک فضای برداری بر روی میدان اعداد حقیقی می دهد.

- برای این منظور باید شرایط فضای برداری را بررسی نماییم،

1. $\forall P,Q\in \mathrm{M}_{2\times2}(\Re)\rightarrow \quad P+Q\in \mathrm{M}_{2\times2}(\Re)$

$$P+Q=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12}\\ q_{21} & q_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p_{11}+q_{11} & p_{12}+q_{12}\\ p_{21}+q_{21} & p_{22}+q_{22}\end{bmatrix}\in \mathrm{M}_{2\times2}(\Re)$$

2. $\forall P\in \mathrm{M}_{2\times2}(\Re),\quad \forall c\in\Re\rightarrow \quad cP\in \mathrm{M}_{2\times2}(\Re)$

$$cP=c\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} cp_{11} & cp_{12}\\ cp_{21} & cp_{22}\end{bmatrix}\in \mathrm{M}_{2\times2}(\Re)$$

3. $\forall P,Q\in \mathrm{M}_{2\times2}(\Re)\rightarrow \quad P+Q=Q+P$

$$P+Q=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12}\\ q_{21} & q_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p_{11}+q_{11} & p_{12}+q_{12}\\ p_{21}+q_{21} & p_{22}+q_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} q_{11}+p_{11} & q_{12}+p_{12}\\ q_{21}+p_{21} & q_{22}+p_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12}\\ q_{21} & q_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}=Q+P$$

4. $\forall P,Q,R\in \mathrm{M}_{2\times2}(\Re)\rightarrow \quad P+(Q+R)=(P+Q)+R$

$$P+(Q+R)=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12}\\ q_{21} & q_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12}\\ r_{21} & r_{22}\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} q_{11}+r_{11} & q_{12}+r_{12}\\ q_{21}+r_{21} & q_{22}+r_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} p_{11}+q_{11}+r_{11} & p_{12}+q_{12}+r_{12}\\ p_{21}+q_{21}+r_{21} & p_{22}+q_{22}+r_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} p_{11}+q_{11} & p_{12}+q_{12}\\ p_{21}+q_{21} & p_{22}+q_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12}\\ r_{21} & r_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\left(\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12}\\ q_{21} & q_{22}\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12}\\ r_{21} & r_{22}\end{bmatrix}=(P+Q)+R$$

5. $\forall P \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\Re),\quad \exists \mathbf{O} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\Re) \rightarrow \quad P+\mathbf{O}=\mathbf{O}+P=P$

$$P+\mathbf{O}=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p_{11}+0 & p_{12}+0 \\ p_{21}+0 & p_{22}+0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0+p_{11} & 0+p_{12} \\ 0+p_{21} & 0+p_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}=\mathbf{O}+P$$

6. $\forall P \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\Re),\quad \exists -P \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\Re) \rightarrow \quad P+(-P)=(-P)+P=\mathbf{O}$

$$P+(-P)=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -p_{11} & -p_{12} \\ -p_{21} & -p_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p_{11}-p_{11} & p_{12}-p_{12} \\ p_{21}-p_{21} & p_{22}-p_{22} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -p_{11}+p_{11} & -p_{12}+p_{12} \\ -p_{21}+p_{21} & -p_{22}+p_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -p_{11} & -p_{12} \\ -p_{21} & -p_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

$$=(-P)+P=\mathbf{O}$$

7. $\forall P,Q \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\Re),\quad \forall a,b \in \Re \rightarrow \quad (a+b)P=aP+bP,\quad a(P+Q)=aP+aQ$

$$(a+b)P=(a+b)\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (a+b)p_{11} & (a+b)p_{12} \\ (a+b)p_{21} & (a+b)p_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ap_{11}+bp_{11} & ap_{12}+bp_{12} \\ ap_{21}+bp_{21} & ap_{22}+bp_{22} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ap_{11} & ap_{12} \\ ap_{21} & ap_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} bp_{11} & bp_{12} \\ bp_{21} & bp_{22} \end{bmatrix}=aP+bP$$

$$a(P+Q)=a\left(\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}\right)=a\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}+a\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ap_{11} & ap_{12} \\ ap_{21} & ap_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} aq_{11} & aq_{12} \\ aq_{21} & aq_{22} \end{bmatrix}=aP+bQ$$

8. $\forall P \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\Re),\quad \forall a,b \in \Re \rightarrow \quad a(bP)=(ab)P$

$$a(bP)=a\left(b\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}\right)=a\begin{bmatrix} bp_{11} & bp_{12} \\ bp_{21} & bp_{22} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} abp_{11} & abp_{12} \\ abp_{21} & abp_{22} \end{bmatrix}=ab\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}=(ab)P$$

9. $\forall P \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\Re), \quad \exists 1 \in \Re \rightarrow \quad 1P = P$

$$1P = 1\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times p_{11} & 1\times p_{12} \\ 1\times p_{21} & 1\times p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = P$$

لذا $\mathrm{M}_{2\times 2}(\Re)$ همراه با عملیات جمع ماتریس ها و ضرب اعداد حقیقی در ماتریس ها تشکیل یک فضای برداری بر روی میدان اعداد حقیقی می دهد.

□

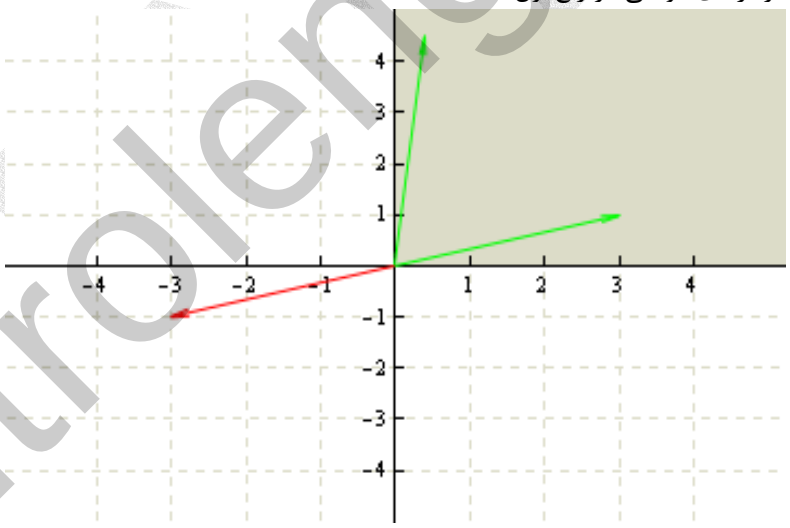
مثال۳-۶

مجموعه های زیر فضای برداری نیستند،

- مجموعه ماتریس های 2×2 مختلط غیرمنفرد یک فضای برداری نیست، زیرا جمع دو ماتریس غیرمنفرد ممکن است ماتریسی منفرد باشد.

$$P+Q = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- مجموعه بردارهای دوتایی در ربع اول صفحه مختصات،



شکل(۳-۱)- مربوط به مثال ۳-۶

برای این منظور کافی است که یک مثال نقض بیاوریم،

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \in S \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} \notin S$$

□

۳-۲-۳- زیر فضای برداری

فرض کنیم V یک فضای برداری بر روی میدان F و S یک زیر مجموعه غیر تهی از V باشد. S را یک **زیر فضا**[۱] از V می نامند هرگاه،

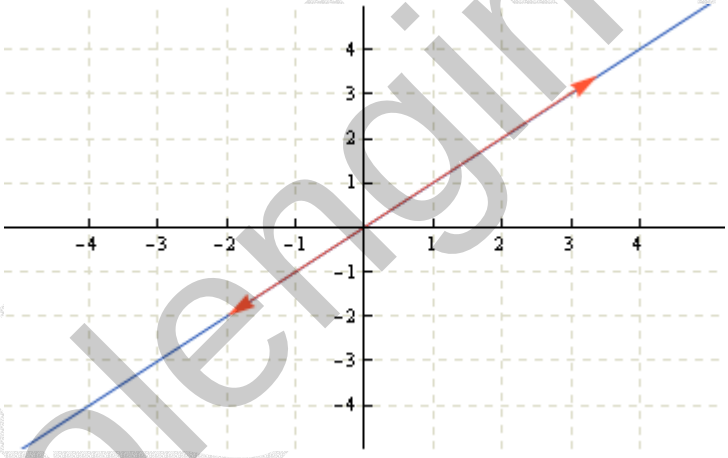
$$\begin{aligned} &1.\quad \forall \mathbf{s},\mathbf{t}\in S \rightarrow \quad \mathbf{s}+\mathbf{t}\in S \\ &2.\quad \forall \mathbf{s}\in S,\quad \forall a\in F \rightarrow \quad a\mathbf{s}\in S \end{aligned} \qquad (۱-۳)$$

بطور مثال فضای برداری $\Re^n$ یک زیرفضا از فضای برداری C^n به روی میدان C می باشد.
($\Re^n$ فضای n بعدی اقلیدسی و C^n فضای n بعدی اقلیدسی مختلط می باشند.)

مثال۳-۷

نشان دهید، در فضای برداری دو بعدی $\Re^2$ هر خط راستی که از مبدأ عبور کند، یک زیر فضای برداری از $\Re^2$ است،

$$S=\{(x,y)\in\Re^2 : ax+by=0\}$$



شکل(۳-۲) - خطی که از مبدا مختصات می گذرد

برای بررسی باید برقراری شرایط (۳-۱) را بررسی کنیم،

$$\left.\begin{aligned}(x,y)\in S \rightarrow ax+by=0\\ (u,v)\in S \rightarrow au+bv=0\end{aligned}\right\}\rightarrow \quad a(x+u)+b(y+v)=0$$

بنابراین نتیجه می گیریم که $(x+u,y+v)\in S$ می باشد و شرط اول بر قرار است.

$$(x,y)\in S\rightarrow \quad ax+by=0\rightarrow \quad a(cx)+b(cy)=0$$

از این رو $c(x,y)=(cx,cy)\in S$ می باشد و شرط دوم نیز برقرار است و هر خط راستی که از مبدأ عبور کند، یک زیر فضای برداری از $\Re^2$ می باشد.

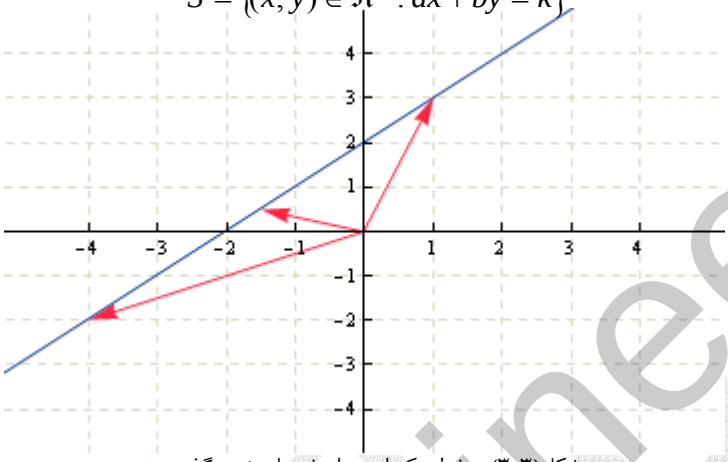
□

[۱] Subspace

مثال ۳-۸

آیا در فضای برداری دو بعدی $\Re^2$ هر خط راستی که از مبدأ عبور نکند، یک زیر فضای برداری از $\Re^2$ است؟

$$S = \{(x, y) \in \Re^2 : ax + by = k\}$$



شکل(۳-۳) - خطی که از مبدا مختصات نمی گذرد

شرایط زیرفضا بودن را بررسی کنیم،

$$\left.\begin{array}{l}(x, y) \in S \rightarrow ax + by = k \\ (u, v) \in S \rightarrow au + bv = k\end{array}\right\} \rightarrow \quad a(x+u) + b(y+v) = 2k$$

بنابراین نتیجه می گیریم که $(x+u, y+v) \notin S$ و نیازی به بررسی شرط دوم نیست. لذا هر خط راستی که از مبدأ عبور نکند، یک زیر فضای برداری از $\Re^2$ نمی باشد

□

مثال ۳-۹

آیا مجموعه S یک زیر فضا از $M_{2\times2}(\Re)$ می باشد؟

$$S = \left\{\begin{bmatrix} 2 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{تمامی ماتریس ها به فرم} \right\}$$

برای زیر فضا بودن باشد شرایط زیر را داشته باشد،

1. $\forall A, B \in S \quad \rightarrow \quad A + B \in S$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & a_{12} + b_{12} \\ 0 & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & c_{12} \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix} \notin S$$

2. $\forall A \in S, \quad \forall a \in \Re \quad \rightarrow \quad aA \in S$

از آنجاییکه شرط اول را برآورده نمی کند، لذا نیازی به بررسی شرط دوم نیست و این مجموعه یک زیر فضا برای $M_{2\times2}(\Re)$ نیست.

□

۳-۲-۳-۱- زیرفضای ستون های یک ماتریس

یکی از زیرفضاهای مهم و پرکاربرد در مباحث جبر خطی **زیرفضای ستون های**[۱] یک ماتریس است. این زیرفضا مجموعه ای از ترکیبهای خطی ستون های ماتریس مذکور است که با نماد $C(A)$ نمایش داده می شود و همواره زیرفضایی از فضای برداریی است که بردارهای ستونی ماتریس مذکور به آن تعلق دارند.

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad C(A)=\{\alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2+\cdots+\alpha_n\mathbf{a}_n\} \quad (۲-۳)$$

یکی از مهمترین کاربردهای این زیرفضا در بدست آوردن مجموعه جواب دستگاه معادلات جبری خطی است.

نکته۱: اگر بردارهای $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ متعلق به فضای برداری V باشد، آنگاه کلیه ترکیبهای خطی این بردارها یک زیرفضای برداری از V می باشد.

مثال۳- ۱۰

ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 3\\ 4 & 1\end{bmatrix}$$

فرض کنید مجموعه $C(A)$ فضای ستون های ماتریس A که شامل تمامی ترکیب های خطی ستون های ماتریس A است بصورت زیر تعریف شود،

$$C(A)=\left\{\alpha\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix}\right\}$$

نشان دهید که $C(A)$ یک زیرفضا از فضای برداری $\Re^3$ است.

باید دو شرط زیر فضا بودن را بررسی نماییم،

شرط اول،

$$1.\quad \forall A,B\in \mathrm{S} \quad \rightarrow \quad A+B\in \mathrm{S}$$

$$\alpha\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha+3\beta\\2\alpha+3\beta\\4\alpha+\beta\end{bmatrix}\in C(A) \quad , \quad \gamma\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}+\varphi\begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma+3\varphi\\2\gamma+3\varphi\\4\gamma+\varphi\end{bmatrix}\in C(A)$$

[۱] Column Space

$$\begin{bmatrix}\alpha+3\beta\\2\alpha+3\beta\\4\alpha+\beta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\gamma+3\varphi\\2\gamma+3\varphi\\4\gamma+\varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\alpha+\gamma)+3(\beta+\varphi)\\2(\alpha+\gamma)+3(\beta+\varphi)\\4(\alpha+\gamma)+(\beta+\varphi)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m+3n\\2m+3n\\4m+n\end{bmatrix}\in C(A)$$

لذا شرط اول برقرار است. حال شرط دوم را بررسی می نماییم،

2. $\forall A\in \mathrm{S},\quad \forall a\in\Re \quad\rightarrow\quad aA\in \mathrm{S}$

$$c\begin{bmatrix}\alpha+3\beta\\2\alpha+3\beta\\4\alpha+\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(c\alpha)+3(c\beta)\\2(c\alpha)+3(c\beta)\\4(c\alpha)+(c\beta)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k+3l\\2k+3l\\4k+l\end{bmatrix}\in C(A)$$

بنابراین $C(A)$ یک زیرفضا از فضای برداری $\Re^3$ است.

□

مثال ۳-۱۱

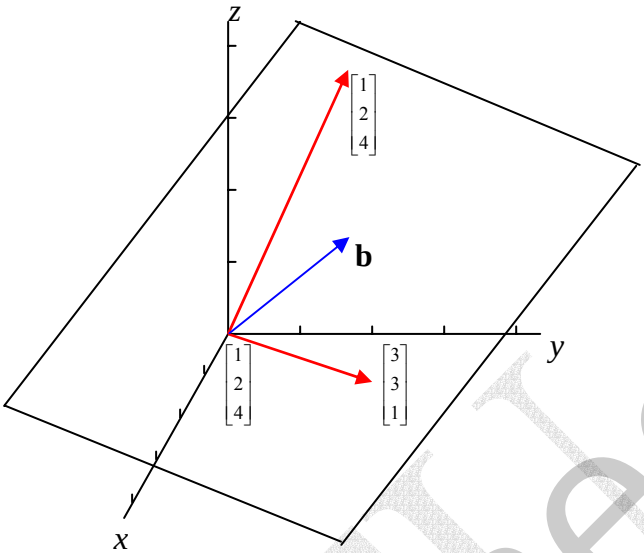
به ازای چه مقادیری از بردار $\mathbf{b}$ دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ جواب دارد؟

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}1&3\\2&3\\4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$$

هدف بدست آوردن مجموعه جواب دستگاه می باشد. ابتدا بردار $\mathbf{b}$ را بصورت ترکیب خطی از ستون های ماتریس A نمایش می دهیم،

$$\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}x_1+\begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix}x_2=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$$

لذا دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ زمانی جواب دارد که بردار $\mathbf{b}$ را بتوان بصورت ترکیب خطی از ستون های ماتریس A نمایش داد. یعنی باید دستگاه معادلات مذکور به ازای آن بردار $\mathbf{b}$ سازگار باشد و لازمه این کار آن است که $\mathbf{b}\in C(A)$ باشد. نمایش هندسی زیرفضای $C(A)$ در شکل(۳-۱) آورده شده است. به لحاظ هندسی فضای ستون های ماتریس A صفحه ای در فضای برداری $\Re^3$ است که از مبدا عبور کرده و بردار ستون های ماتریس A را شامل گردد، لذا تمامی بردارهایی مانند $\mathbf{b}$ که درون این صفحه قرار دارند جزء فضای ستون های ماتریس A هستند و می توان آنها را بصورت ترکیب خطی از ستون های ماتریس A نمایش داد و برای این بردارها دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ سازگار است و جواب دارد. اگر بردار $\mathbf{b}$ طوری انتخاب شود که خارج از این صفحه قرار گیرد، دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ ناسازگار بوده و جواب ندارد.



شکل(۳-۴) - نمایش هندسی زیرفضای ستون های ماتریس A

□

مثال۳-۱۲

ماتریس A و بردارهای $\mathbf{b}_1$ و $\mathbf{b}_2$ را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}1&3\\2&3\\4&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\-7\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

با توجه به فرم سطری پلکانی کاهش یافته، دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}_1$ یک دستگاه سازگار است و جواب دارد،

$$\begin{bmatrix}1&3\\2&3\\4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\-7\end{bmatrix}\rightarrow\left[\begin{array}{cc|c}1&3&1\\2&3&-1\\4&1&-7\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\rightarrow\left[\begin{array}{cc|c}1&0&-2\\0&1&1\\0&0&0\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}x_1=-2\\x_2=1\end{cases}$$

لذا $\mathbf{b}_1\in C(A)$ و می توان بردار $\mathbf{b}_1$ را بصورت ترکیب خطی از ستون های ماتریس A نمایش داد،

$$(-2)\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}+(1)\begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\-7\end{bmatrix}$$

حال دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}_2$ را در نظر می گیریم، این دستگاه معادلات ناسازگار است و جواب ندارد،

$$\begin{bmatrix}1&3\\2&3\\4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\rightarrow\quad\left[\begin{array}{cc|c}1&3&1\\2&3&1\\4&1&1\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\rightarrow\quad\left[\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

لذا $\mathbf{b}_2 \notin C(A)$ و نمی توان بردار $\mathbf{b}_2$ را بصورت ترکیب خطی از ستون های ماتریس A نمایش داد.

□

مثال۳-۱۳

فضای ستون های ماتریس های زیر را بدست آورید.

الف) $A=\begin{bmatrix}1&2\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$

فضای ستون های ماتریس A زیر فضایی از $\Re^3$ بوده و شامل تمامی ترکیبهای خطی ممکن ستون های ماتریس A است.

$$C(A)=\left\{\mathbf{b}\in\Re^3\,|\,\mathbf{b}=c_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$$

از آنجاییکه ستون های ماتریس A وابسته خطی هستند، لذا می توان نمایش فضای ستون های ماتریس A را بصورت زیر خلاصه کرد،

$$C(A)=\left\{\mathbf{b}\in\Re^3\,|\,\mathbf{b}=\alpha\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}\qquad\text{یا}\qquad C(A)=\mathrm{sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$$

$C(A)$ خطی است در فضای برداری $\Re^3$ که شامل بردار $\begin{bmatrix}\alpha\\0\\0\end{bmatrix}$ است، که همان محور x ها خواهد بود.

ب) $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\\0&0\end{bmatrix}$

فضای ستون های ماتریس A زیر فضایی از $\Re^3$ بوده و شامل تمامی ترکیبهای خطی ممکن ستون های ماتریس A است. از آنجاییکه ستون های ماتریس A مستقل خطی هستند، $C(A)$ را می توان به شکل زیر نمایش داد.

$$C(A)=\left\{\mathbf{b}\in\Re^3 \mid \mathbf{b}=c_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}\right\} \quad \text{یا} \quad C(A)=\mathrm{sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}\right\}$$

$C(A)$ صفحه ای در $\Re^3$ است که شامل دو بردار $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}$ و تمامی ترکیبهای خطی آن دو است، که همان صفحه xy خواهد بود.

ج) $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&0&4\end{bmatrix}$

فضای ستون های ماتریس A زیر فضایی از $\Re^2$ بوده و شامل تمامی ترکیبهای خطی ممکن ستون های ماتریس A است.

$$C(A)=\left\{\mathbf{b}\in\Re^2 \mid \mathbf{b}=c_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\right\}$$

از آنجاییکه ستون اول و دوم ماتریس A وابسته خطی هستند، می توان نمایش فضای ستون های ماتریس A را بصورت زیر خلاصه کرد،

$$C(A)=\left\{\mathbf{b}\in\Re^2 \mid \mathbf{b}=\alpha\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\right\} \quad \text{یا} \quad C(A)=\mathrm{sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\right\}$$

$C(A)$ صفحه ای در $\Re^2$ است که توسط دو بردار $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ اسپن می شود که در واقع تمامی فضای $\Re^2$ خواهد بود.

□

۳-۲-۴- مفهوم اسپن

اگر $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ مجموعه ای از بردارها در فضای برداری V و W مجموعه کلیه ترکیبهای خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ باشد، در اینصورت W یک **اسپن**[1] از بردارهای $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ است، که بصورت زیر نمایش داده می شود،

[1] Span

$$W = \mathrm{sp}(S) \quad , \quad W = \mathrm{sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \qquad (۳-۳)$$
$$W = \{c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n : c_1, c_2, \ldots c_n \in \Re\}$$

همچنین می توان گفت، که بردارهای $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ زیر فضای W را اسپن می کنند.

نکته۱: $C(A)$ یا همان زیرفضای ستون های یک ماتریس فضایی است که توسط بردارهای ستونی آن ماتریس اسپن می شود.

مثال۳-۱۴

نشان دهید سه بردار $\mathbf{i} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \ \mathbf{j} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \ \mathbf{k} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ فضای برداری $\Re^3$ را اسپن می کنند.

یک ترکیب خطی از این بردارها به شکل زیر بدست می آید،

$$a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} = a\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$

بنابراین $sp\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ تمامی بردارهای متعلق به فضای برداری $\Re^3$ است که به شکل $\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ باشند، که کلیه فضای برداری $\Re^3$ را شامل می شود.

□

مثال۳-۱۵

بررسی کنید که آیا بردارهای زیر فضای برداری $\Re^3$ را اسپن می کنند.

الف) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \ \mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \ \mathbf{w} = \begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix}$

یک ترکیب خطی از این دو بردار به شکل زیر می باشد،

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} = a\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a+b\\2a+b+2c\\a+b-c\end{bmatrix}$$

اگر این ترکیب خطی را بصورت یک بردار مانند $\mathbf{r}$ نمایش دهیم داریم،

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ 2a+b+2c \\ a+b-c \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} a+b=r_1 \\ 2a+b+2c=r_2 \\ a+b-c=r_3 \end{cases}$$

فرم ماتریسی این دستگاه معادلات بصورت زیر می باشد،

$$A\mathbf{x}=\mathbf{y} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

حال باید بررسی کنیم که این دستگاه معادلات سازگار است یا ناسازگار، برای این منظور باید ماتریس A غیر منفرد باشد، یعنی $|A| \neq 0$ باشد. از آنجائیکه $|A|=1$ است، بنابراین، برای هر بردار دلخواه $\mathbf{r}$ می توان یک جواب پیدا کرد. لذا، بردارهای $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ فضای برداری $\Re^3$ را اسپن می کنند.

ب) $\mathbf{u}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}=\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}=\begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix}$

یک ترکیب خطی از این دو بردار به شکل زیر می باشد،

$$a\mathbf{u}+b\mathbf{v}+c\mathbf{w}=a\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}+c\begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+3b-3c \\ 2a-b+8c \\ -a+b-5c \end{bmatrix}$$

اگر به مانند حالت قبل یک بردار $\mathbf{r}$ در نظر بگیریم، فرم ماتریسی دستگاه معادلات حاصل به شکل زیر خواهد بود،

$$A\mathbf{x}=\mathbf{y} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 8 \\ -1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

از آنجائیکه $|A|=0$ می باشد، لذا این دستگاه معادلات مذکور یک جواب منحصربفرد ندارد. لذا، بردارهایی در فضای برداری $\Re^3$ وجود دارند، که نمی توان آنها را بصورت ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ نوشت، پس بردارهای مذکور فضای برداری $\Re^3$ را اسپن نمی کنند.

□

۳-۲-۵- استقلال خطی و وابستگی خطی بردارها

بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n$ را **مستقل خطی**[۱] گویند، اگر معادله ای به شکل زیر،

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n = 0 \qquad (۴-۳)$$

که در آن $c_1,c_2,\ldots,c_n$ اسکالرهای ثابتی هستند، فقط به ازای شرط $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ برقرار باشد. در غیر اینصورت بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n$ را **وابسته خطی**[۲] گویند.

نکته۱: اگر بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n$ مستقل خطی بوده ولی بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_{n+1}$ وابسته خطی باشند، در اینصورت می توان $\mathbf{u}_{n+1}$ را بصورت یک ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n$ بیان کرد.

نکته۲: شرط لازم و کافی برای مستقل خطی بودن بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n$ که هر یک دارای n تا عنصر هستند، آن است که دترمینان ماتریس ضرایب $n \times n$ حاصل از تعریف، مخالف صفر باشد.

مثال۳-۱۶

استقلال خطی یا وابستگی خطی بردارهای زیر را بررسی کنید.

الف) $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix},\ \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$

با توجه به تعریف داریم،

$$c_1\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} -2c_1 - c_2 + 4c_3 \\ c_1 - 3c_2 - 2c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات مربوطه و فرم سطری پلکانی کاهش یافته آن به شکل زیر می باشد،

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

با توجه به محل عناصر محوری متغیر c_3 آزاد است و بقیه متغیرها را می توان برحسب این متغیر آزاد نوشت،

$$c_1 = 2c_3\,, \qquad c_2 = 0$$

همچنین عناصر محوری نشان می دهند که بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$ مستقل خطی و بردار $\mathbf{u}_3$ به آنها وابسته است. پس در مجموع بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ وابسته خطی می باشند.

---

[۱] Linear Independent
[۲] Linear Dependent

در نرم افزار MATLAB می توان از دستور [R,p] = rref(A) برای تشخیص استقلال خطی بردارها استفاده نمود. در اینجا R فرم سطری پلکانی کاهش یافته و **p** برداری است که محل عناصر محوری و به عبارتی بردارهای مستقل خطی را نشان می دهد.

```
u1 = [-2;1];
u2 = [-1;-3];
u3 = [4;-2];
[R,p] = rref([u1 u2 u3])
R =
     1     0    -2
     0     1     0
p =
     1     2
```

ماتریس R فرم سطری پلکانی کاهش یافته را نشان می دهد و بردار **p** نشان می دهد که $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$ مستقل خطی و بردار $\mathbf{u}_3$ به آنها وابسته است.

ب) $$\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\3\\-4\end{bmatrix},\quad \mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}-1\\3\\4\\2\end{bmatrix},\quad \mathbf{u}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\\-2\end{bmatrix}$$

با توجه به تعریف داریم،

$$c_1\begin{bmatrix}1\\-2\\3\\-4\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\3\\4\\2\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}1\\1\\-2\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}c_1-c_2+c_3\\-2c_1+3c_2+c_3\\3c_1+4c_2-2c_3\\-4c_1+2c_2-2c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

فرم ماتریس افزوده و سطری پلکانی کاهش یافته آن را بدست می آوریم،

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\-2&3&1&0\\3&4&-2&0\\-4&2&-2&0\end{array}\right]\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$$

برای حل این معادلات تنها جواب ممکن جواب بدیهی $c_1=c_2=c_3=0$ می باشد و با توجه به محل عناصر محوری بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ مستقل خطی هستند.

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
u1=[1;-2;3;-4];
u2=[-1;3;4;2];
u3=[1;1;-2;-2];
[R,p]=rref([u1 u2 u3])
R =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1
     0     0     0
p =
     1     2     3
length(p)
ans =
     3
```

بردار $\mathbf{p}$ نشان می دهد که $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ مستقل خطی هستند. اگر تعداد بردارهای داده شده زیاد باشد و فقط محاسبه تعداد بردارهای مستقل خطی مد نظر باشد دستور length(p) مستقیماً تعداد بردارهای مستقل خطی را نشان می دهد.

□

مثال۳-۱۷

به ازای چه مقداری از λ بردارهای زیر مستقل خطی هستند؟

الف) $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}-1\\ \lambda\\ -1\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}=\begin{bmatrix}\lambda\\ -1\\ -1\end{bmatrix},\quad \mathbf{w}=\begin{bmatrix}-1\\ -1,\\ \lambda\end{bmatrix}$

برای بردارهای داده شده شرط استقلال خطی را بررسی می نماییم،

$$c_1\mathbf{u}+c_2\mathbf{v}+c_3\mathbf{w}=\mathbf{0}\quad\rightarrow\quad c_1\begin{bmatrix}-1\\ \lambda\\ -1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}\lambda\\ -1\\ -1\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ \lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات حاصل بصورت زیر بدست می آید، که برای مستقل خطی بودن دترمینان ماتریس ضرایب باید مخالف صفر باشد،

$$\begin{cases} -c_1+\lambda c_2-c_3=0 \\ \lambda c_1-c_2-c_3=0 \\ -c_1-c_2+\lambda c_3=0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} -1 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^2(\lambda-2)$$

لذا برای مستقل خطی بودن باید $\lambda \neq -1$ و $\lambda \neq 2$ باشد.

ب) $\mathbf{u}=\begin{bmatrix} 1-\lambda \\ 2+\lambda \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}=\begin{bmatrix} 2+\lambda \\ 1-\lambda \end{bmatrix}$

شرط استقلال خطی را بررسی می نماییم،

$$c_1\mathbf{u}+c_2\mathbf{v}=\mathbf{0} \quad \rightarrow \quad c_1\begin{bmatrix} 1-\lambda \\ 2+\lambda \end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix} 2+\lambda \\ 1-\lambda \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات حاصل بصورت زیر بدست می آید،

$$\begin{cases} (1-\lambda)c_1+(2+\lambda)c_2=0 \\ (2+\lambda)c_1+(1-\lambda)c_2=0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = -3-6\lambda$$

در این حالت برای مستقل خطی بودن باید $\lambda \neq \dfrac{-1}{2}$ باشد.

□

۳-۲-۶- مفهوم پایه و بُعد در فضای برداری

در یک فضای برداری مانند V، مجموعه بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n$ تشکیل یک **پایه**[۱] می دهند، اگر دو شرط زیر را داشته باشند،

۱- آن فضای برداری را اسپن کنند، $V=\mathrm{sp}\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n\}$

۲- بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n$ مستقل خطی باشند.

تعداد بردارهای پایه در یک فضای برداری مانند V را **بُعد**[۲] آن فضا می نامند و با نماد $\dim(V)$ نشان می دهند. به عبارتی بُعد یک فضا برابر با حداکثر تعداد بردارهای مستقل خطی در آن فضا است، بنابراین در یک فضای n بُعدی حداکثر بردارهای مستقل خطی n عدد می باشد.

نکته۱: در فضای برداری n بُعدی مانند V هر مجموعه بردارهای مستقل خطی در V را می توان به یک پایه تبدیل کرد.

---

[۱] Basis
[۲] Dimension

نکته۲: بردارهای واحد $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n$ برای فضای برداری $\Re^n$ تشکیل یک پایه می دهند و به آن **پایه استاندارد**[۱] برای $\Re^n$ گفته می شود.

$$\mathbf{e}_1=[1,0,\ldots,0],\qquad \mathbf{e}_2=[0,1,\ldots,0],\qquad \cdots\qquad ,\mathbf{e}_n=[0,0,\ldots,1]$$

لذا فضای برداری $\Re^n$ را می توان بصورت زیر نمایش داد،

$$\Re^n=sp\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n\}$$

نکته۳: بردارهای $\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\ldots,\mathbf{p}_n$ برای فضای برداری P_n (چند جمله ای های با درجه n یا کمتر) تشکیل پایه استاندارد می دهند.

$$\mathbf{p}_0=1,\qquad \mathbf{p}_1=x,\qquad \mathbf{p}_2=x^2,\qquad \ldots\qquad ,\mathbf{p}_n=x^n$$

لذا فضای برداری P_n را می توان بصورت زیر نمایش داد،

$$P_n=sp\{1,x,x^2,\ldots,x^n\}$$

نکته۴: اگر فضای برداری V شامل تعداد محدودی بردار پایه باشد، آن را فضا با **بُعد متناهی**[۲] می نامیم در غیر اینصورت به آن فضا با **بُعد نامتناهی**[۳] می گوییم.

مثال۳-۱۸

بررسی نمایید که آیا بردارهای زیر برای فضای برداری $\Re^3$ تشکیل یک پایه می دهند.

$$\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\ \mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix},\ \mathbf{u}_3=\begin{bmatrix}3\\0\\-1\end{bmatrix}$$

برای این منظور دو شرط ذکر شده در تعریف پایه را بررسی می کنیم،

۱- برای اسپن کردن فضای برداری $\Re^3$ باید یک ترکیب خطی از این بردارها بنویسیم و آن را معادل با یک بردار مانند $\mathbf{r}=[r_1,r_2,r_3]$ قرار می دهیم،

$$c_1\mathbf{u}_1+c_2\mathbf{u}_2+c_3\mathbf{u}_3=c_1\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}3\\0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{bmatrix}$$

فرم ماتریسی دستگاه معادلات حاصل بصورت زیر می باشد،

$$\begin{bmatrix}1&0&3\\-1&1&0\\1&2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{bmatrix}$$

[۱] Standard Basis
[۲] Finite Dimension
[۳] Infinite Dimension

چود سیستم مربعی است، شرط وجود جواب آن است که دترمینان ماتریس ضرایب مخالف صفر باشد و $|A| = -10$ است، لذا دستگاه همواره جواب دارد و بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ فضای برداری $\Re^3$ را اسپن می کنند.

۲- برای بررسی مستقل خطی بودن بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ از تعریف استقلال خطی استفاده می کنیم،

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3 = c_1\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}3\\0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

معادلات ماتریسی حاصل به صورت زیر می باشد،

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\-1 & 1 & 0\\1 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

از آنجائیکه دترمینان ماتریس ضرایب مخالف صفر است $(|A| = -10)$، بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ مستقل خطی هستند، لذا برای فضای برداری $\Re^3$ تشکیل یک دسته بردار پایه می دهند. لذا می توان نوشت،

$$\Re^3 = sp\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\0\\-1\end{bmatrix}\right\}$$

□

مثال۳-۱۹

بررسی نمایید که آیا بردارهای زیر برای فضای برداری $\Re^3$ تشکیل یک پایه می دهند.

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix},\quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix},\quad \mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

برای این منظور دو شرط ذکر شده در تعریف پایه را بررسی می کنیم،

۱- برای اسپن کردن فضای برداری $\Re^3$ باید هر بردار دلخواه مانند $\mathbf{r} = [r_1, r_2, r_3]$ را بتوان بصورت ترکیب خطی از این چهار بردار نمایش داد،

$$\mathbf{r} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3 + c_4\mathbf{u}_4 \rightarrow \begin{bmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} + c_4\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

فرم ماتریسی و ماتریس افزوده دستگاه معادلات حاصل بصورت زیر می باشد،

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} -c_2 + c_3 - c_4 = r_1 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 = r_2 \\ c_1 + 2c_2 - c_3 - c_4 = r_3 \end{cases}$$

فرم ماتریس افزوده و سطری پلکانی کاهش یافته آن به شکل زیر بدست می آید،

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 1 & -1 & r_1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & r_2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & r_3 \end{array}\right]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 & \frac{5}{2}r_1 - \frac{1}{2}r_2 + \frac{3}{2}r_3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{-3}{2}r_1 + \frac{1}{2}r_2 - \frac{1}{2}r_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{-1}{2}r_1 + \frac{1}{2}r_2 - \frac{1}{2}r_3 \end{array}\right]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

c_4 متغیر آزاد است و دستگاه معادلات بیشمار جواب دارد. بنابراین این چهار بردار فضای برداری $\Re^3$ را اسپن می کنند.

۲- برای بررسی مستقل خطی بودن بردارهای $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ از تعریف آن استفاده می کنیم،

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3 + c_4\mathbf{u}_4 = c_1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + c_4\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

فرم ماتریس افزوده و سطری پلکانی کاهش یافته حاصل به صورت زیر می باشد،

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

از آنجاییکه c_4 متغیر آزاد است و دستگاه معادلات بیشمار جواب دارد، بردارهای $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ مستقل خطی نیستند و نمی توانند برای فضای برداری $\Re^3$ تشکیل پایه بدهند.

□

مثال ۳-۲۰

کدامیک از دسته بردارها و مجموعه های زیر برای فضای برداری مورد نظر تشکیل یک پایه می دهند؟

الف) $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$ (فضای برداری $\Re^3$)

ابتدا شرط استقلال خطی را بررسی می نماییم،

$$c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3=\mathbf{0} \quad\rightarrow\quad c_1\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\2\\-2\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}-1\\4\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}c_1-c_2-c_3=0\\-c_1+2c_2+4c_3=0\\c_1-2c_2-4c_3=0\end{cases}\quad\rightarrow\quad\begin{vmatrix}1&-1&-1\\-1&2&4\\1&-2&-4\end{vmatrix}=0$$

لذا بردارهای $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ مستقل خطی نیستند و نمی توانند برای فضای برداری $\Re^3$ تشکیل پایه دهند،

ب) $\mathbf{p}_1=x-3,\quad \mathbf{p}_2=x^2+2x,\quad \mathbf{p}_3=x^2+1$ (فضای برداری P_k)

ابتدا شرط استقلال خطی را بررسی می نماییم،

$$c_1\mathbf{p}_1+c_2\mathbf{p}_2+c_3\mathbf{p}_3=0 \quad\rightarrow\quad c_1(x-3)+c_2(x^2+2x)+c_3(x^2+1)=0$$

$$(c_2+c_3)x^2+(c_1+2c_2)x+(-3c_1+c_3)=0x^2+0x+0$$

$$\begin{cases}c_2+c_3=0\\c_1+2c_2=0\\-3c_1+c_3=0\end{cases}\quad\rightarrow\quad\begin{vmatrix}0&1&1\\1&2&0\\-3&0&1\end{vmatrix}=5\neq 0$$

بنابراین چندجمله ای های $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3$ مستقل خطی هستند. حال شرط اسپن کردن فضای برداری P_2 را بررسی می کنیم،

$$c_1\mathbf{p}_1+c_2\mathbf{p}_2+c_3\mathbf{p}_3=r_1x^2+r_2x+r_3$$

$$c_1(x-3)+c_2(x^2+2x)+c_3(x^2+1)=r_1x^2+r_2x+r_3$$

$$(c_2+c_3)x^2+(c_1+2c_2)x+(-3c_1+c_3)=r_1x^2+r_2x+r_3$$

$$\begin{cases}c_2+c_3=r_1\\c_1+2c_2=r_2\\-3c_1+c_3=r_3\end{cases}\quad\rightarrow\quad\begin{vmatrix}0&1&1\\1&2&0\\-3&0&1\end{vmatrix}=5\neq 0$$

لذا هر چندجمله ای مرتبه دوم بصورت $r_1x^2+r_2x+r_3$ را می توان بصورت ترکیب خطی از چندجمله ای های $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3$ نوشت، پس چندجمله ای های $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3$ برای فضای برداری P_2 تشکیل پایه می دهند. لذا می توان نوشت،

$$P_2=sp\{x-3,\quad x^2+2x,\quad x^2+1\}$$

ج) $\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\right\}$ (برای فضای برداری $M_{2\times2}$)

ابتدا شرط استقلال خطی را بررسی می نماییم،

$$c_1\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}+c_4\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix}c_1+c_2+c_3+c_4 & c_2+c_3+c_4\\ c_3+c_4 & c_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}c_1+c_2+c_3+c_4=0\\ c_2+c_3+c_4=0\\ c_3+c_4=0\\ c_4=0\end{cases}\rightarrow\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}=1\neq0$$

لذا عناصر این مجموعه مستقل خطی هستند. حال شرط اسپن کردن فضای برداری $M_{2\times2}$ را بررسی می کنیم،

$$c_1\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}+c_4\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_{11}&r_{12}\\r_{21}&r_{22}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}c_1+c_2+c_3+c_4 & c_2+c_3+c_4\\ c_3+c_4 & c_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_{11}&r_{12}\\r_{21}&r_{22}\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}c_1+c_2+c_3+c_4=r_{11}\\ c_2+c_3+c_4=r_{12}\\ c_3+c_4=r_{21}\\ c_4=r_{22}\end{cases}\rightarrow\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}=1\neq0$$

بنابراین هر ماتریس 2×2 را می توان بصورت ترکیب خطی از این چهار ماتریس نمایش داد، لذا این مجموعه ماتریس ها برای فضای برداری $M_{2\times2}$ تشکیل پایه می دهند. لذا می توان نوشت،

$$M_{2\times2}=sp\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\right\}$$

□

۳-۲-۷- تغییر پایه در فضای برداری

در یک فضای برداری n بُعدی مانند V هر مجموعه از n بردار مستقل خطی می تواند تشکیل یک پایه بدهد. لذا بردارهای پایه منحصر بفرد نیستند، ولی نمایش هر بردار توسط این بردارهای پایه منحصربفرد است. در اینجا نشان می دهیم که می توان ارتباط بین این پایه ها را در قالب یک ماتریس تبدیل نمایش داد.

فرض کنید بردارهای $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n$ و بردارهای $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ دو دسته بردارهای پایه برای فضای برداری n بُعدی مانند V باشند. در اینصورت یک بردار متعلق به این فضا مانند $\mathbf{u}$ را به دو صورت زیر می توان نمایش داد،

$$\mathbf{u} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + \cdots + b_n\mathbf{e}_n = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

که در آن $c_1,c_2,\ldots,c_n$ و $b_1,b_2,\ldots,b_n$ اسکالرهای متناسب با پایه های مربوطه می باشند که مقادیری منحصر بفرد هستند و به آنها مختصات بردار $\mathbf{u}$ نسبت به هر پایه گفته می شود. این اسکالرها را می توان بصورت بردارهای زیر نمایش داد،

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

به این ترتیب داریم،

$$[\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{e}_n]\mathbf{b} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{v}_n]\mathbf{c}$$

حال می خواهیم ارتباطی بین این دو نمایش با پایه های مختلف یا به عبارتی ارتباطی بین اسکالرهای متناسب با این پایه ها پیدا کنیم. برای این منظور بردارهای پایه $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n$ را بصورت یک ترکیب خطی از بردارهای پایه $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ می نویسیم،

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= k_{11}\mathbf{v}_1 + k_{12}\mathbf{v}_2 + \cdots + k_{1n}\mathbf{v}_n \\ \mathbf{e}_2 &= k_{21}\mathbf{v}_1 + k_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + k_{2n}\mathbf{v}_n \\ &\vdots \\ \mathbf{e}_n &= k_{n1}\mathbf{v}_1 + k_{n2}\mathbf{v}_2 + \cdots + k_{nn}\mathbf{v}_n \end{aligned}$$

که نمایش ماتریسی آن بصورت زیر خواهد بود،

$$[\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{e}_n] = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{v}_n] \begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} & \cdots & k_{n1} \\ k_{12} & k_{22} & \cdots & k_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{1n} & k_{2n} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \qquad (۳-۵)$$

ماتریس ضرایب حاصل را K در نظر می گیریم،

$$[\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \dots \quad \mathbf{e}_n] = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n]K$$

حال با جایگذاری در رابطه قبل روابط زیر بدست می آید،

$$[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n]K\mathbf{b} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n]\mathbf{c}$$

$$K\mathbf{b} = \mathbf{c} \quad \rightarrow \quad \mathbf{b} = K^{-1}\mathbf{c} \qquad (۶-۳)$$

به این ترتیب ارتباط بین ضرایب $c_1, c_2, \dots, c_n$ و $b_1, b_2, \dots, b_n$ در قالب یک ماتریس بدست می آید، که به آن **ماتریس تبدیل ضرایب** از پایه های $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ به $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ گویند. لذا اگر نمایش یک بردار برحسب یک مجموعه از پایه ها معلوم باشد، نمایش همان بردار برحسب پایه دیگر را می توان از معادلات بالا بدست آورد. با توجه به رابطه بین ماتریس تبدیل و بردارهای پایه داده شده برای بدست آوردن ماتریس تبدیل K می توان از روش گوس- جردن استفاده نمود،

$$[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n | \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{e}_n] \quad \Rightarrow \quad [I|K]$$

بر این اساس برنامه basistransfer در نرم افزار MATLAB به منظور بدست آوردن ماتریس تبدیل ضرایب بین پایه ها نوشت شده است،

```
% K is a transition matrix  from basis T to basis S
function K = basistransfer(T, S)
[m, n] = size(T);
[p, q] = size(S);
if (m ~= p)|(n ~= q)
error('Matrices must be of the same dimension')
end
K = rref([S T]);
K = K(:,(m + 1):(m + n));
```

مثال۳-۲۱

مجموعه بردارهای $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ و $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ در فضای برداری $\Re^3$ تشکیل دو دسته پایه را می دهند.

$$E: \left\{ \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$V: \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

الف) ماتریس تبدیل متناظر برای تغییر از پایه $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ به پایه $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ را بیابید.

برای این منظور ابتدا هر یک از بردارهای $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ را بصورت یک ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ می نویسیم،

$$\mathbf{v}_1=[1,-1,1]=(1)\mathbf{e}_1+(-1)\mathbf{e}_2+(1)\mathbf{e}_3$$
$$\mathbf{v}_2=[0,1,2]=(0)\mathbf{e}_1+(1)\mathbf{e}_2+(2)\mathbf{e}_3$$
$$\mathbf{v}_3=[3,0,-1]=(3)\mathbf{e}_1+(0)\mathbf{e}_2+(-1)\mathbf{e}_3$$

بنابراین ماتریس تبدیل متناظر بصورت زیر بدست می آید،

$$K_1=\begin{bmatrix}1&0&3\\-1&1&0\\1&2&-1\end{bmatrix}$$

از آنجائیکه بردارهای $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ بردارهای پایه استاندارد برای فضای برداری $\Re^3$ می باشند، بنابراین ستون های ماتریس تبدیل در این حالت همان بردارهای $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ می باشند.

ب) ماتریس تبدیل متناظر برای تغییر از پایه $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ به پایه $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ را بیابید.

برای این منظور این بار بردارهای $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ را بصورت ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ می نویسیم،

$$\mathbf{e}_1=[1,0,0]=(\tfrac{1}{10})\mathbf{v}_1+(\tfrac{1}{10})\mathbf{v}_2+(\tfrac{3}{10})\mathbf{v}_3$$
$$\mathbf{e}_2=[0,1,0]=(\tfrac{-3}{5})\mathbf{v}_1+(\tfrac{2}{5})\mathbf{v}_2+(\tfrac{1}{5})\mathbf{v}_3$$
$$\mathbf{e}_3=[0,0,1]=(\tfrac{3}{10})\mathbf{v}_1+(\tfrac{3}{10})\mathbf{v}_2+(\tfrac{-1}{10})\mathbf{v}_3$$

این بار ماتریس تبدیل متناظر بصورت زیر بدست می آید،

$$K_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{10}&\frac{-3}{5}&\frac{3}{10}\\\frac{1}{10}&\frac{2}{5}&\frac{3}{10}\\\frac{3}{10}&\frac{1}{5}&\frac{-1}{10}\end{bmatrix}$$

همانطور که مشاهده می شود $K_2=(K_1)^{-1}$ می باشد.

ج) نمایش ضرایب بردار $\mathbf{u}$ در پایه V بصورت $[\mathbf{u}]_V=\begin{bmatrix}-2\\3\\4\end{bmatrix}$ است، نمایش آن را در پایه E بیابید.

ابتدا باید بردار $\mathbf{u}$ را برحسب پایه های $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ بنویسیم،

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = (-2)\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} + (3)\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} + (4)\begin{bmatrix}3\\0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\5\\0\end{bmatrix}$$

با توجه به قسمت (الف) ماتریس تبدیل ضرایب از پایه V به پایه E را داریم، بنابراین،

$$K_1\mathbf{c} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\-1 & 1 & 0\\1 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\3\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\5\\0\end{bmatrix}$$

لذا نمایش بردار $\mathbf{u}$ در پایه E بصورت زیر خواهد بود،

$$\mathbf{u} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3 = (10)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + (5)\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\5\\0\end{bmatrix}$$

اجرای برنامه basistransfer برای تغییر از پایه $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ به پایه $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ بصورت زیر می باشد،

```
e1=[1;0;0];  e2=[0;1;0];  e3=[0;0;1];
v1=[1;-1;1];  v2=[0;1;2];  v3=[3;0;-1];
T=[v1 v2 v3];
S=[e1 e2 e3];
K1 = basistransfer(T, S)
K1 =
     1     0     3
    -1     1     0
     1     2    -1
```

اجرای برنامه برای تغییر از پایه $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ به پایه $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ بصورت زیر می باشد،

```
T=[e1 e2 e3];
S=[v1 v2 v3];
K2 = basistransfer(T, S)
K2 =
    0.1000   -0.6000    0.3000
    0.1000    0.4000    0.3000
    0.3000    0.2000   -0.1000
```

حال اگر بردار $\mathbf{u}$ در پایه اول بصورت $[\mathbf{u}]_V = \begin{bmatrix}-2\\3\\4\end{bmatrix}$ باشد، با استفاده از ماتریس تبدیل K_1 می توان تبدیل یافته آن برحسب پایه های دوم بدست آورد،

```
uv =[-2;3;4];
ue = K1 * uv
ue =
    10
     5
     0
```

□

مثال۳-۲۲

بردارهای مستقل خطی زیر را در فضای سه بُعدی $\Re^3$ در نظر بگیرید،

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}$$

یک پایه بدیهی برای این فضا پایه های استاندارد $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ می باشند،

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

می دانیم که مجموعه بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ وابسته خطی می باشند. بنابراین بردار $\mathbf{e}_3$ را می توان بصورت یک ترکیب خطی از بقیه بردارها نوشت،

$$\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = (\tfrac{-4}{3})\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} + (\tfrac{1}{3})\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}$$

حال بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ را در نظر می گیریم. در این مجموعه نیز بردار $\mathbf{e}_2$ را بصورت یک ترکیب خطی از بقیه بردارها می نویسیم،

$$\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}[0,1,0] = (\tfrac{-1}{2})\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + (\tfrac{1}{2})\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}$$

لذا بردارهای باقی مانده $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{e}_1$ مستقل خطی بوده و تشکیل پایه برای فضای $\Re^3$ می دهند. پس می توان نوشت،

$$\Re^3 = sp\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$$

□

مثال ۳-۲۳

بردار $\mathbf{u}$ تحت بردارهای پایه های استاندارد $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ بصورت $[\mathbf{u}]_\mathbf{e}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ نمایش داده می شود.

$$[\mathbf{u}]_\mathbf{e}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad \mathbf{u}=(1)\mathbf{e}_1+(2)\mathbf{e}_2+(3)\mathbf{e}_3=(1)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+(2)\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+(3)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

الف) نمایش آن را تحت پایه های $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ بدست آورید.

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

نمایش $\mathbf{u}$ تحت پایه های $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ بصورت زیر بدست می آید،

$$[\mathbf{u}]_\mathbf{e}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\rightarrow\quad \mathbf{u}=c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3=c_1\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

حال دستگاه معادلات مربوطه را بدست می آوریم،

$$\begin{cases}c_1+c_2-c_3=1\\c_1-c_2+c_3=2\\-c_1+c_2+c_3=3\end{cases}\quad\rightarrow\quad c_1=1.5,\quad c_2=2,\quad c_3=2.5$$

لذا نمایش $\mathbf{u}$ تحت پایه های $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ بصورت زیر خواهد بود،

$$\mathbf{u}=c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3\rightarrow\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=(1.5)\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}+(2)\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}+(2.5)\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\Rightarrow[\mathbf{u}]_\mathbf{v}=\begin{bmatrix}1.5\\2\\2.5\end{bmatrix}$$

ب) ماتریس تبدیل ضرایب از پایه های $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ به پایه های $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ را بدست آورید.

ابتدا بردارهای $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ را بصورت ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ می نویسیم،

$$\mathbf{e}_1=k_1\mathbf{v}_1+k_2\mathbf{v}_2+k_3\mathbf{v}_3\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_2 = k_4\mathbf{v}_1 + k_5\mathbf{v}_2 + k_6\mathbf{v}_3 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = k_4\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix} + k_5\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} + k_6\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_3 = k_7\mathbf{v}_1 + k_8\mathbf{v}_2 + k_9\mathbf{v}_3 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = k_7\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix} + k_8\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} + k_9\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

با حل هر یک از این دستگاه معادلات ضرایب مورد نظر بدست می آید،

$$k_1 = 0.5, \quad k_2 = 0.5, \quad k_3 = 0$$
$$k_4 = 0.5, \quad k_5 = 0, \quad k_6 = 0.5$$
$$k_7 = 0, \quad k_8 = 0.5, \quad k_9 = 0.5$$

حال می توان نوشت،

$$\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1 & k_4 & k_7\\ k_2 & k_5 & k_8\\ k_3 & k_6 & k_9\end{bmatrix}$$

ماتریس تبدیل متناظر بصورت زیر بدست می آید،

$$K = \begin{bmatrix}0.5 & 0.5 & 0\\ 0.5 & 0 & 0.5\\ 0 & 0.5 & 0.5\end{bmatrix}$$

می توان نشان داد که اگر این ماتریس را در ضرایب نمایش $\mathbf{u}$ برحسب پایه های $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ ضرب کنیم، ضرایب نمایش $\mathbf{u}$ برحسب پایه های $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ بدست می آید،

$$\begin{bmatrix}0.5 & 0.5 & 0\\ 0.5 & 0 & 0.5\\ 0 & 0.5 & 0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1.5\\2\\2.5\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad [\mathbf{u}]_{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad [\mathbf{u}]_{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix}1.5\\2\\2.5\end{bmatrix}$$

جواب همان ضرایبی است که در قسمت (الف) بدست آمد.

با استفاده از برنامه basistransfer ماتریس تبدیل از پایه های $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ به $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ را محاسبه می کنیم، سپس نمایش $\mathbf{u}$ تحت پایه های $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ را بدست می آوریم

```
e1 = [1;0;0]; e2 = [0;1;0]; e3 = [0;0;1];
v1 = [1;1;-1]; v2 = [1;-1;1]; v3 = [-1;1;1];
T = [e1 e2 e3];
S = [v1 v2 v3];
K1 = basistransfer(T, S)
K1 =
    0.5000    0.5000         0
    0.5000         0    0.5000
         0    0.5000    0.5000
ue = [1;2;3];
uv = K1 * ue
uv =
    1.5000
    2.0000
    2.5000
```

ج) با استفاده از ماتریس تبدیل بدست آمده، بردارهای زیر را برحسب پایه های $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ نمایش دهید.

$$[\mathbf{w}]_{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{s}]_{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{t}]_{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{w}]_{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow \quad \mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

در واقع باید ضرایب c_1, c_2, c_3 را بدست آوریم. لیکن این بار به جای حل دستگاه معادلات همانند قسمت (الف)، از ماتریس تبدیل ضرایب استفاده می نماییم،

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1.5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{w} = -0.5\mathbf{v}_1 + 1.5\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$$

$$[\mathbf{w}]_{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

برای بردارهای $[\mathbf{t}]_{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $[\mathbf{s}]_{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ هم همانند قبل عمل می کنیم،

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{s} = -0.5\mathbf{v}_1 + 0.5\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$$

$$[\mathbf{s}]_{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{t} = 1.5\mathbf{v}_1 + 2.5\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3$$

$$[\mathbf{t}]_{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

با استفاده از برنامه basistransfer نوشته شده در نرم افزار MATLAB داریم،

```
we =[0;-1;3];  se =[1;-2;0];  te =[4;-1;1];
wv = K1*we
wv =
   -0.5000
    1.5000
    1.0000
sv = K1*se
sv =
   -0.5000
    0.5000
   -1.0000
tv = K1*te
v =
    1.5000
    2.5000
         0
```

□

۳-۲-۸- رتبه ماتریس ها

بنابر تعریف **رتبه**[۱] یک ماتریس $A_{m\times n}$ برابر با ماکزیمم تعداد ستون های (یا سطرهای) مستقل خطی در آن ماتریس است، که با نماد $\text{rank}(A)$ نشان داده می شود. برای بدست آوردن ستون های مستقل خطی یک ماتریس می توان از فرم سطری پلکانی کاهش یافته آن کمک گرفت.

از آنجائیکه رتبه یک ماتریس بصورت بزرگترین درجه کلیه کهادهای غیر صفر آن ماتریس تعریف می شود، می توان نتیجه گرفت که رتبه یک ماتریس مربعی مانند $A_{n\times n}$ حداکثر می تواند برابر n باشد و این زمانی است که تمامی ستون های (یا سطرهای) ماتریس مستقل خطی باشند و در اینصورت $|A|\neq 0$ یعنی، ماتریس $A_{n\times n}$ غیر منفرد است. در چنین حالتی ماتریس $A_{n\times n}$ را **رتبه کامل**[۲] می نامند و اگر $|A|=0$ باشد ماتریس منفرد بوده و تعدادی از ستون های آن وابستگی خطی دارند، چنین ماتریسی **نقص رتبه**[۳] دارد.

برای ماتریس های $A_{m\times n}$ غیر مربعی، $\text{rank}(A)\leq \min(m,n)$ است، که در صورت مساوی بودن می گوئیم ماتریس $A_{m\times n}$ رتبه کامل است و اگر کوچکتر باشد ماتریس $A_{m\times n}$ نقص رتبه دارد.

نکته۱: ضرب یک ماتریس غیرمنفرد در ماتریس $A_{m\times n}$ رتبه آن را تغییر نمی دهد.

مثال۳-۲۴

رتبه ماتریس های A و B را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}5 & 9 & 3\\ 3 & -5 & -6\\ 1 & 5 & 3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & -8\\ 4 & -3 & -7\\ 1 & 12 & -3\end{bmatrix}$$

- فرم سطری پلکانی کاهش یافته ماتریس A بصورت زیر می باشد،

$$A=\begin{bmatrix}5 & 9 & 3\\ 3 & -5 & -6\\ 1 & 5 & 3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & -0.75\\ 0 & 1 & 0.75\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\rightarrow \text{rank}(A)=2$$

با توجه به محل عناصر محوری می توان فهمید که ستون های اول و دوم استقلال خطی دارند و ستون سوم وابسته خطی است. لذا ماتریس A فقط دو ستون مستقل خطی دارد و رتبه آن دو می باشد و لذا این ماتریس نقص رتبه دارد.

در نرم افزار MATLAB از دستور rank(A) برای بدست آوردن رتبه ماتریس استفاده می شود،

---

[۱] Rank
[۲] Full Rank
[۳] Rank Deficiency

```
A =[5 9 3;3 -5 -6;1 5 3];
rank(A)
ans =
     2
```

از طرفی رتبه ماتریس برابر است با تعداد عناصر محوری در فرم سطری پلکانی کاهش یافته ماتریس لذا می توان از دستور rref نیز استفاده نمود،

```
A =[5 9 3;3 -5 -6;1 5 3];
[R,p]= rref(A)
R =
    1.0000         0   -0.7500
         0    1.0000    0.7500
         0         0         0
p =
     1     2
length(p)
ans =
     2
```

در اینجا دستور length(p) رتبه ماتریس را می دهد و p با تعیین محل عناصر محوری نشان می دهد که کدام ستون ها مستقل خطی هستند.

- فرم سطری پلکانی کاهش یافته ماتریس B نیز بصورت زیر می باشد،

$$B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & -8\\ 4 & -3 & -7\\ 1 & 12 & -3\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \rightarrow \text{rank}(B)=3$$

با توجه به محل عناصر محوری هر سه ستون ماتریس B مستقل خطی هستند. لذا رتبه ماتریس B برابر سه است و رتبه کامل دارد.

با نرم افزار MATLAB داریم،

```
B =[1 1 2;1 3 -8;4 -3 -7;1 12 -3];
rank(B)
ans =
     3
```

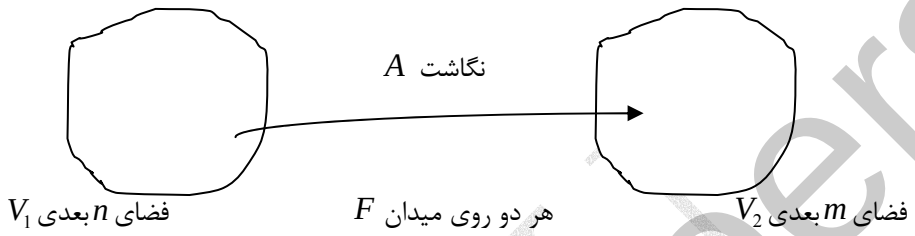
□

۳-۲-۹- فضای گستره ماتریس ها

صورت کلی دستگاه معادلات را می توان به شکل زیر در نظر بگیرید،

$$A_{m\times n}\mathbf{x}_{n\times 1}=\mathbf{b}_{m\times 1}$$

ماتریس A را می توان بصورت یک نگاشتی در نظر گرفت که فضای n بعدی V_1 بر روی میدان F را به فضای m بعدی V_2 بر روی میدان F می نگارد.



بنابر تعریف **فضای گستره**[1] یک نگاشت خطی مانند A مجموعه ای است شامل عناصر $\mathbf{b}$ در فضای m بعدی V_2 که برای آنها حداقل یک بردار مانند $\mathbf{x}$ در فضای n بعدی V_1 وجود دارد، که رابطه $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ را برآورده سازد و آن را با نماد $R(A)$ نشان می دهند. به راحتی می توان نشان داد که این فضای گستره یک زیر فضا از فضای m بعدی V_2 است.

$$R(A)=\left\{\mathbf{b}\in V_2 \;\middle|\; \exists\mathbf{x}\in V_1 \rightarrow A\mathbf{x}=\mathbf{b}\right\} \qquad (۳-۷)$$

نکته۱: فضای گستره یک ماتریس همان فضای ستون های ماتریس است.

نکته۲: رتبه یک ماتریس معادل با بُعد فضای گستره آن ماتریس است. $\dim[R(A)]=\operatorname{rank}(A)$

مثال۳-۲۵

فضای گستره و رتبه ماتریس های زیر را بدست آورید،

الف)
$$A_{4\times 5}=\begin{bmatrix}1&3&-5&1&5\\1&4&-7&3&-2\\1&5&-9&5&-9\\0&3&-6&2&-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&-2&0&3\\0&0&0&1&-5\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

می دانیم فضای گستره ماتریس A کلیه ترکیبهای خطی ممکن کلیه ستون های A است. اگر فرم سطری پلکانی کاهش یافته ماتریس A را بدست آوریم، با توجه به محل عناصر محوری می توان فهمید که ستون های اول، دوم و چهارم مستقل خطی هستند. لذا $R(A)$ بصورت زیر تعریف می شود،

[1] Range Space

$$R(A)=sp\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\4\\5\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\3\\5\\2\end{bmatrix}\right\}$$

به عبارتی $R(A)$ برابر است با تمامی ترکیبهای خطی ستون های اول، دوم و چهارم ماتریس A. از طرفی چون ماتریس A سه ستون مستقل خطی دارد، لذا $\text{rank}(A)=3$ است و ماتریس نقص رتبه دارد.

در دستور [R,p]=rref(A) نرم افزار MATLAB بردار **p** محل عنصر محوری را نشان می دهد، لذا می توان با استفاده از آن پایه های فضای گستره را بدست آورد،

```
A =[1 3 -5 1 5;1 4 -7 3 -2;1 5 -9 5 -9;0 3 -6 2 -1];
[R,p]=rref(A);
A(:,p)
ans =
     1     3     1
     1     4     3
     1     5     5
     0     3     2
length(p)
ans =
     3
```

ب) $$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

ابتدا ماتریس A را به فرم سطری پلکانی کاهش یافته تبدیل می کنیم، با توجه به محل عناصر محوری ستون های اول و سوم مستقل خطی هستند و فضای گستره ماتریس A فضایی است که توسط این دو ستون اسپن می شود. چون دو بردار مستقل خطی دارد، لذا رتبه ماتریس A که همان بُعد فضای گستره می باشد دو است.

$$R(A)=sp\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}\quad,\quad \text{rank}(A)=2$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[1 1 1 1;1 1 -1 -1;0 0 1 1];
[R,p]= rref(A);
A(:,p)
ans =
     1     1
     1    -1
     0     1
length(p)
ans =
     2
```

ج) $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\-1&0&1\\0&2&1\\3&8&1\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

ابتدا ماتریس A را به فرم سطری پلکانی کاهش یافته تبدیل می کنیم، با توجه به محل عناصر محوری ستون های اول و دوم مستقل خطی هستند، لذا رتبه ماتریس A دو است و $R(A)$ فضایی است که توسط این بردارهای ستونی اسپن می شود،

$$R(A)=sp\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\2\\8\end{bmatrix}\right\}\quad,\qquad \text{rank}(A)=2$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[1 2 0;-1 0 1;0 2 1;3 8 1];
[R, p] = rref(A);
A(:, p)
ans =
     1     2
    -1     0
     0     2
     3     8
length(p)
ans =
     2
```

□

نکته۳: با توجه به مفاهیم فضای گستره و رتبه ماتریس، دستگاه معادلات $A_{m\times n}\mathbf{x}_{n\times 1}=\mathbf{b}_{m\times 1}$ با $rank(A)=r$ یک سیستم سازگار است، اگر و فقط اگر $\mathbf{b}_{m\times 1}\in R(A)$ باشد، در اینصورت داریم،

$$\text{rank}(A)=\text{rank}(A\,|\,\mathbf{b})=r$$

اگر معادله $A_{m\times n}\mathbf{x}_{n\times 1}=\mathbf{b}_{m\times 1}$ را بصورت زیر بسط دهیم،

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}\quad\rightarrow\quad x_1\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix}+\cdots+x_n\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{bmatrix}=\mathbf{b}$$

برای آنکه دستگاه معادلات جواب داشته باشد باید بتوان بردار $\mathbf{b}_{m\times 1}$ را بصورت ترکیب خطی از ستون های ماتریس $A_{n\times n}$ نوشت، به عبارتی بردار $\mathbf{b}_{m\times 1}$ باید در فضای اسپن شده توسط ستون های ماتریس $A_{m\times n}$ یعنی $R(A)$ قرار داشته باشد. در چنین حالتی افزودن ستون بردار $\mathbf{b}_{m\times 1}$ به ماتریس $A_{m\times n}$ رتبه آن را تغییر نخواهد داد، لذا $\text{rank}(A)=\text{rank}(A\,|\,\mathbf{b})=r$ می باشد.

مثال۳-۲۶

بدون حل معادلات وجود یا عدم وجود جواب را برای دستگاه معادلات زیر بررسی نمایید.

الف)
$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+x_4=2\\2x_1+x_2+x_3-x_4=4\\5x_1+4x_2+x_3-x_4=9\end{cases}\quad\rightarrow\quad A\mathbf{x}=\mathbf{b}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\2&1&1&-1\\5&4&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\4\\9\end{bmatrix}$$

$\text{rank}(A)=2,\text{rank}(A\,|\,\mathbf{b})=3\rightarrow\mathbf{b}\notin R(A)$ سیستم ناسازگار است و دستگاه جواب ندارد

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[1 2 -1 1;2 1 1 -1;5 4 1 -1];
b =[2;4;9];
rank(A)
ans =
     2
rank([A b])
ans =
     3
```

ب) $\begin{cases} -x_1+2x_2+4x_3=2 \\ x_1+2x_2+x_3=1 \\ 3x_1+5x_2+x_3=3 \end{cases} \rightarrow \quad A\mathbf{x}=\mathbf{b} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\text{rank}(A)=\text{rank}(A\,|\,\mathbf{b})=3 \quad \rightarrow$ سیستم سازگار است و یک جواب منحصر بفرد دارد

زیرا $\mathbf{b}\in R(A)$ و ماتریس ضرایب مربعی و رتبه کامل دارد.

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[-1 2 4;1 2 1;3 5 1];
b =[2;1;3];
rank(A)
ans =
     3
rank([A b])
ans =
     3
```

ج) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ x_1+2x_2+2x_3=5 \\ 2x_1+3x_2+x_3=6 \end{cases} \rightarrow \quad A\mathbf{x}=\mathbf{b} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

$\text{rank}(A)=\text{rank}(A\,|\,\mathbf{b})=2 \quad \rightarrow$ سیستم سازگار است و دستگاه بیشمار جواب دارد

زیرا $\mathbf{b}\in R(A)$ و ماتریس ضرایب مربعی است و نقص رتبه دارد.

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[1 1 -1;1 2 2;2 3 1];
b =[1;5;6];
rank(A)
ans =
     2
rank([A b])
ans =
     2
```

□

۳-۲-۱۰- فضای پوچی ماتریس ها

بنابر تعریف **فضای پوچی**[۱] یک نگاشت خطی $A_{m\times n}$ مجموعه ای است شامل کلیه بردارهای $\mathbf{x}_{n\times 1}$ که رابطه $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ را برآورده سازد. فضای پوچی با نماد $N(A)$ نشان داده می شود،

$$N(A)=\{\mathbf{x}\in V_1 \rightarrow A\mathbf{x}=\mathbf{0}\} \qquad (۸-۳)$$

بُعد فضای پوچی را **پوچی**[۲] ماتریس A می نامند و با نماد $\text{nullity}(A)$ یا $\nu(A)$ نشان می دهند.

$$\dim[N(A)]=\nu(A)$$

نکته۱: فضای پوچی $N(A)$ مجموعه تمامی پاسخهای معادله $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ است.

نکته۲: در صورتیکه تنها پاسخ معادله $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ همان پاسخ بدیهی (بردار صفر) باشد، بنابراین رتبه ماتریس A کامل است، به عبارتی کلیه بردارهای ستونی (یا سطری) این ماتریس مستقل خطی هستند.

نکته۳: فضای پوچی، یک زیر فضا از فضای V_1 است، در حالیکه فضای گستره، یک زیر فضا از فضای V_2 است.

نکته۴: برای ماتریس $A_{m\times n}$ می توان نوشت،

$$\text{rank}(A)+\text{nullity}(A)=n \qquad (۹-۳)$$

مثال۳-۲۷

ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -5 & 1 & 5\\ 1 & 4 & -7 & 3 & -2\\ 1 & 5 & -9 & 5 & -9\\ 0 & 3 & -6 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

می خواهیم فضای پوچی و پوچی این ماتریس را بدست آوریم،

لذا باید جواب معادله $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ را بدست آوریم،

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & -5 & 1 & 5\\ 1 & 4 & -7 & 3 & -2\\ 1 & 5 & -9 & 5 & -9\\ 0 & 3 & -6 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

حال فرم سطری پلکانی کاهش یافته ماتریس را بدست می آوریم،

---

[۱] Null Space
[۲] Nullity

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

و دستگاه معادلات نهایی به فرم زیر بدست می آید.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_5 = 0 \\ x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

باید توجه کرد که تعداد این معادلات برابر با رتبه ماتریس A می باشد. از تعداد معادلات کمتر از مجهولات است، لذا دستگاه بیشمار جواب دارد و هر بردار $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ که سه معادله بالا را برآورده سازد یک بردار متعلق به فضای پوچی ماتریس A خواهد بود. تعداد بردارهایی که بدین ترتیب می توان انتخاب کرد نامحدود است، لیکن تعداد بردارهای مستقل خطی برابر با بُعد فضای پوچی می باشد.

$$\text{nullity}(A) = n - rank(A) = 5 - 3 = 2$$

بطور مثال دو بردار زیر مستقل خطی هستند و سه معادله بالا را برآورده می کنند، بنابراین هر پاسخ معادله $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ باید به اسپن این دو بردار تعلق داشته باشد، به عبارتی، این دو بردار یک پایه برای $N(A)$ تشکیل می دهند.

$$N(A) = sp\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

در نرم افزار MATLAB دو دستور null(A,'r') و null(A) جهت محاسبه پایه های فضای پوچی ماتریس وجود دارند.

- در دستور null(A,'r') همانند آنچه که در محاسبات دستی صورت می گیرد، پایه های فضای پوچی با توجه به فرم سطری پلکانی کاهش یافته ماتریس محاسبه می گردد.

- در دستور null(A) نرم افزار پایه های یکامتعامد شده فضای پوچی را که به روش عددی به دست آمده ارائه می دهد.

به اجرای این دو دستور برای ماتریس A توجه نمایید،

```
A =[1 3 -5 1 5;1 4 -7 3 -2;1 5 -9 5 -9;0 3 -6 2 -1];
null(A,'r')
ans =
    -1    -1
     2    -3
     1     0
     0     5
     0     1
null(A)
ans =
   -0.5050    0.1313
    0.6504    0.5473
    0.4331    0.0307
    0.3596   -0.8100
    0.0719   -0.1620
```

□

مثال۳-۲۸

پوچی و فضای پوچی ماتریس های زیر را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

از آنجاییکه $\text{rank}(A)=2$ است، لذا پوچی ماتریس A برابر با دو می باشد،

$$\text{nullity}(A)=\nu(A)=\text{n - rank}(A)=4-2=2$$

بنابراین فضای پوچی ماتریس A دو بردار مستقل خطی دارد. حال با حل دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ این دو بردار را بدست می آوریم،

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

بنابراین داریم،

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

تعداد معادلات برابر با رتبه ماتریس است با حل این دستگاه بردارهای پایه $N(A)$ بدست می آید،

$$N(A) = sp\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[1 1 1 1;1 1 -1 -1;0 0 1 1];
null(A,'r')
ans =
    -1     0
     1     0
     0    -1
     0     1
```

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

از آنجاییکه $\text{rank}(B) = 2$ است، لذا پوچی ماتریس B برابر با یک می باشد،

$$\text{nullity}(B) = \nu(B) = \text{n - rank}(B) = 3 - 2 = 1$$

بنابراین فضای پوچی ماتریس B فقط یک بردار مستقل خطی دارد که بصورت زیر بدست می آید،

$$B\mathbf{x} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

با حل این دستگاه معادلات بردارهای پایه $N(B)$ بدست می آید،

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad N(B) = sp\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
B =[1 2 0;-1 0 1;0 2 1;3 8 1];
null(B,'r')
ans =
    1.0000
   -0.5000
    1.0000
```

□

۳-۲-۱۱- زیرفضاهای اساسی ماتریس ها

برای یک ماتریس $A_{m\times n}$ با رتبه r ($r \le \min(m,n)$) می توان **چهار زیرفضای اساسی**[۱] بصورت زیر تعریف کرد،

فضای ستون ها[۲] : در واقع همان فضای گستره ماتریس A یا $R(A)$ می باشد، که بُعد آن برابر r است. این فضا مجموعه ای از ترکیبهای خطی ستون های ماتریس A است، به عبارتی توسط ستون های ماتریس A اسپن می شود. در فرم سطری پلکانی کاهشی ماتریس A، ستونهایی که عناصر محوری در آن قرار دارند مطابق با بردارهای پایه فضای ستون ها خواهد بود. بُعد فضای ستون ها برابر با رتبه ماتریس A می باشد.

$$R(A) = \left\{\mathbf{b} \in \Re^m \;\middle|\; \exists \mathbf{x} \in \Re^n \rightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b}\right\} \quad , \quad \dim[R(A)] = \text{rank}(A)$$

فضای پوچی چپ[۳] : در واقع همان فضای پوچی ماتریس A^T است، که آن را با نماد $N(A^T)$ نشان می دهند و بُعد آن برابر $m-r$ است. این فضا مجموعه ای از $\mathbf{x} \in \Re^m$ است که عمود بر تمامی ستون های ماتریس A (یا سطرهای ماتریس A^T) هستند و از این جهت آن را مکمل متعامد فضای $R(A)$ می نامند و با نماد $R(A)^{\perp}$ نیز نشان می دهند. بُعد فضای پوچی چپ برابر با تعداد سطرها منهای رتبه ماتریس A است.

$$N(A^T) = \left\{\mathbf{x} \in \Re^m \rightarrow A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}\right\} \quad , \quad \dim[N(A^T)] = m - \text{rank}(A) \quad (۱۰\text{-}۳)$$

---

[۱] Four Fundamental Subspaces
[۲] Column Space
[۳] Left Nullspace

فضای سطرها[۱]: فضای سطرها برای ماتریس A همان فضای گستره ماتریس A^T است، که با نماد $R(A^T)$ نشان داده می شود و بُعد آن برابر r می باشد. فضای سطرها در واقع زیرفضایی است که توسط سطرهای ماتریس A اسپن می شود یا به عبارتی شامل کلیه ترکیب های خطی سطرهای ماتریس A می باشد. در فرم سطری پلکانی کاهشی ماتریس A سطرهای غیر صفر معادل با بردارهای پایه برای فضای سطرها می باشند. بُعد فضای سطرها برابر با رتبه ماتریس A می باشد.

$$R(A^T)=\left\{\mathbf{b}\in\Re^n \;\middle|\; \exists\mathbf{x}\in\Re^m \to A^T\mathbf{x}=\mathbf{b}\right\} \quad , \quad \dim[R(A^T)]=\text{rank}(A) \qquad (۱۱-۳)$$

فضای پوچی: همانطور که قبلاً نیز مطرح گردید این فضا را با نماد $N(A)$ نمایش می دهند، که بُعد آن برابر با $n-r$ است. این فضا مجموعه ای از $\mathbf{x}\in\Re^n$ است که عمود بر تمامی سطرهای ماتریس A (یا ستون های ماتریس A^T) هستند و از این جهت آن را مکمل متعامد فضای $R(A^T)$ یا **کِرنِل**[۲] ماتریس A نیز می نامند. بُعد فضای پوچی برابر با تعداد ستون ها منهای رتبه ماتریس A است.

$$N(A)=\left\{\mathbf{x}\in\Re^n \to A\mathbf{x}=\mathbf{0}\right\} \quad , \quad \dim[N(A)]=\text{nullity}(A)=n-\text{rank}(A)$$

نکته۱: در حل دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ اگر $N(A^T)$ تهی باشد، آنگاه $\mathbf{b}\in R(A)$ است و سیستم $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ سازگار است و همواره حداقل یک جواب دارد و تهی بودن $N(A)$ بیانگر آن است که اگر پاسخی وجود داشته باشد، آن پاسخ منحصر بفرد است.

مثال۳-۲۹

ماتریس زیر را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 4 & 1 & 3\\ -1 & 3 & 2 & 1 & -1\\ 2 & -3 & 5 & 1 & 5\end{bmatrix}$$

در اینجا $\text{rank}(A)=2$ و فرم سطری پلکانی کاهش یافته آن بصورت زیر می باشد،

$$R=\begin{bmatrix}1 & 0 & 7 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

همانطور که پیداست ستون های اول و دوم شامل عناصر محوری هستند. لذا فضای ستون ها یا همان فضای گستره بصورت زیر است،

---

[۱] Row Space
[۲] Kernel

$$R(A) = sp\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\-1\\3\\-3\end{bmatrix}\right\} \quad , \quad \dim[R(A)] = 2$$

فضای سطرها معادل با سطرهای غیر صفر در فرم سطری پلکانی کاهشی است،

$$R(A^T) = sp\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\7\\2\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\3\\1\\1\end{bmatrix}\right\} \quad , \quad \dim[R(A^T)] = 2$$

فضای پوچی معادل با مجموعه جواب معادله $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ می باشد. این مجموعه جواب را هم می توان با استفاده از فرم سطری پلکانی کاهش یافته بدست آورد،

$$A_R\mathbf{x} = x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}7\\3\\0\\0\end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\end{bmatrix} + x_5\begin{bmatrix}4\\1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات حاصل بصورت زیر بدست می آید،

$$\begin{cases} x_1 + 7x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

همانطور که پیشتر نیز گفته شد تعداد این معادلات به بُعد فضای گستره یا همان رتبه ماتریس A بستگی دارد. با حل این دستگاه فضای پوچی ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$N(A) = sp\left\{\begin{bmatrix}-7\\-3\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\} \quad , \quad \dim[N(A)] = 3$$

فضای پوچی چپ معادل با مجموعه جواب معادله $A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ می باشد. لذا ابتدا ماتریس A^T را بدست می آوریم و سپس آن را به فرم سطری پلکانی کاهشی تبدیل می کنیم و همانند بالا عمل می نماییم.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T{}_R\mathbf{x} = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات حاصل بصورت زیر بدست می آید،

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

تعداد معادلات برابر با بُعد $R(A^T)$ می باشد، با حل این دستگاه فضای پوچی ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$N(A^T) = sp\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \quad , \quad \dim[N(A^T)] = 2$$

برنامه basis در نرم افزار MATLAB برای بدست آوردن پایه های چهار زیر فضای اصلی یک ماتریس نوشته شده است،

```
% Basesof four fundamentà vectorspacesassociate
% with the matrix A.
function[Column,Null,Row,Leftnull]= basis(A)
[R,p]= rref(A);
r = length(p);
Column= A(:,p);
Null= null(A,'r');
Row = R(1:r,:)';
Leftnull= null(A,''r');
```

اجرای برنامه برای ماتریس A بصورت زیر است،

```
A =[1 -2 1 0 2;1 -1 4 1 3;-1 3 2 1 -1;2 -3 5 1 5];
[Column, Null, Row, Leftnull] = basis(A)
Column =
     1    -2
     1    -1
    -1     3
     2    -3
Null =
    -7    -2    -4
    -3    -1    -1
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1
Row =
     1     0
     0     1
     7     3
     2     1
     4     1
Leftnull =
     2    -1
    -1    -1
     1     0
     0     1
```

□

مثال۳-۳۰

برای ماتریس A در مثال قبل، نشان دهید که فضای سطرها و فضای پوچی ماتریس A متعامد هستند و همچنین فضای ستون ها و فضای پوچی چپ ماتریس A نیز متعامد هستند،

$$R(A) \perp N(A^T) \text{ و } R(A^T) \perp N(A)$$

$$R(A^T) = sp\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\7\\2\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\3\\1\\1\end{bmatrix}\right\} = sp\{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2\}$$

$$N(A) = sp\left\{\begin{bmatrix}-7\\-3\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\} = sp\{\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2,\mathbf{n}_3\}$$

برای بررسی متعامد بودن ضرب داخلی یک یک بردارهای پایه را بررسی می نماییم،

$$\langle \mathbf{r}_1,\mathbf{n}_1\rangle = 1\times(-7)+0\times(-3)+7\times1+2\times0+4\times0=0$$
$$\langle \mathbf{r}_1,\mathbf{n}_2\rangle = 1\times(-2)+0\times(-1)+7\times0+2\times1+4\times0=0$$
$$\langle \mathbf{r}_1,\mathbf{n}_3\rangle = 1\times(-4)+0\times(-1)+7\times0+2\times0+4\times1=0$$
$$\langle \mathbf{r}_2,\mathbf{n}_1\rangle = 0\times(-7)+1\times(-3)+3\times1+1\times0+1\times0=0$$
$$\langle \mathbf{r}_2,\mathbf{n}_2\rangle = 0\times(-2)+1\times(-1)+3\times0+1\times1+1\times0=0$$
$$\langle \mathbf{r}_2,\mathbf{n}_3\rangle = 0\times(-4)+1\times(-1)+3\times0+1\times0+1\times1=0$$

حاصل ضرب داخلی ها صفر است، لذا $R(A^T)\perp N(A)$ می باشد. به همین ترتیب می توان نشان داد که $R(A)\perp N(A^T)$ است.

با استفاده از نرم افزار MATLAB و نتایج بدست آمده از برنامه basis داریم،

```
Column'*Leftnull
ans =
     0     0
     0     0
Row'*Null
ans =
     0     0     0
     0     0     0
```

□

مثال ۳- ۳۱

در حالت کلی ثابت کنید برای ماتریس A داریم،

الف) $R(A) \perp N(A^T)$ ب) $R(A^T) \perp N(A)$

ماتریس $A_{m\times n}$ را با بردارهای ستونی در نظر بگیرید،

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \dots & \mathbf{a}_n\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad A^T_{n\times m} = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \mathbf{a}_3^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^T\end{bmatrix}$$

اگر $\mathbf{q} \in N(A^T)$ باشد داریم،

$$A^T\mathbf{q} = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1^T\mathbf{q} \\ \mathbf{a}_2^T\mathbf{q} \\ \mathbf{a}_3^T\mathbf{q} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^T\mathbf{q}\end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

بنابراین بردار $\mathbf{q}$ بر سطرهای ماتریس A^T عمود است و سطرهای ماتریس A^T همان ستون های ماتریس A هستند و ستون های ماتریس A متعلق به $R(A)$ هستند. لذا بردارهای $\mathbf{q} \in N(A^T)$ عمودند بر بردارهای $\mathbf{y} \in R(A)$. بنابراین $R(A) \perp N(A^T)$ است.

ماتریس $A_{m\times n}$ را با بردارهای سطری در نظر بگیرید،

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix}\mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad A^T_{n\times m} = \begin{bmatrix}\mathbf{b}_1^T & \mathbf{b}_2^T & \mathbf{b}_3^T & \dots & \mathbf{b}_m^T\end{bmatrix}$$

اگر $\mathbf{z} \in N(A)$ باشد داریم،

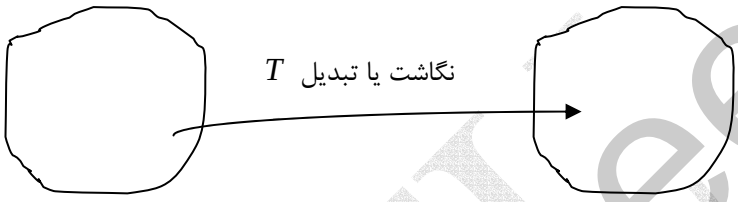
$$A\mathbf{z} = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix}\mathbf{b}_1\mathbf{z} \\ \mathbf{b}_2\mathbf{z} \\ \mathbf{b}_3\mathbf{z} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m\mathbf{z}\end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

بنابراین بردار $\mathbf{z}$ بر سطرهای ماتریس A عمود است و سطرهای ماتریس A همان ستون های ماتریس A^T هستند و ستون های ماتریس A^T متعلق به $R(A^T)$ هستند. لذا بردارهای $\mathbf{z} \in N(A)$ عمودند بر بردارهای $\mathbf{w} \in R(A^T)$، بنابراین $R(A^T) \perp N(A)$ است.

□

۳-۳ تبدیل های خطی

فرض کنیم V_1 و V_2 به ترتیب دو فضای برداری n و m بُعدی بر روی میدان F باشند.



فضای n بعدی V_1 هر دو روی میدان F فضای m بعدی V_2

یک تبدیل، نگاشتی است که یک بردار در فضای n بعدی V_1 را به یک بردار دیگر در فضای m بعدی V_2 تبدیل کند. در این نگاشت تمامی نقاط بردار اولیه با نقاط نظیر در بردار ثانویه جایگزین می شود. تبدیل ها را می توان به دو دسته **تبدیلات هندسی**[۱] و **تبدیلات مختصاتی**[۲] تقسیم بندی نمود. در تبدیلات هندسی محورهای مختصات ثابت هستند و این بردار است که تغییر می کند ولی در تبدیلات مختصاتی بردار ثابت است و محورهای مختصات جابجا می شوند. بردار می تواند بیانگر یک منحنی، تصویر یا جسم باشد.

تابع $T: V_1 \to V_2$ را یک **اپراتور خطی** یا **تبدیل خطی**[۳] از V_1 به V_2 می نامیم، اگر برای تمام بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ متعلق به V_1 و تمام اسکالرهای c متعلق به F دو شرط زیر برآورده گردد،

۱- $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$

۲- $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$

این دو رابطه را می توان بصورت زیر نیز خلاصه نمود،

$$T(c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v}) = c_1T(\mathbf{u}) + c_2T(\mathbf{v}) \qquad (۱۲-۳)$$

نکته۱: تبدیل خطی $T: V_1 \to V_2$ را **یک به یک**[۴] گویند اگر شرط زیر را داشته باشد،

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V_1, \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \quad \Leftrightarrow \quad T(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_2) \qquad (۱۳-۳)$$

نکته۲: کِرنِل تبدیل خطی $T: V_1 \to V_2$ بصورت زیر تعریف می گردد،

$$\text{kernel}(T) = \{\mathbf{v} \in V_1 \quad \to \quad T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} \qquad (۱۴-۳)$$

---

[۱] Geometric
[۲] Coordinate
[۳] Linear Transformation
[۴] One to one

نکته۳: فضای گستره تبدیل خطی $T:V_1 \to V_2$ بصورت زیر تعریف می گردد،

$$\text{range}(T)=\{\mathbf{w}\in V_2 \mid \exists \mathbf{v}\in V_1 \quad \to \quad T(\mathbf{v})=\mathbf{w}\} \qquad (۱۵\text{-}۳)$$

رابطه بین کِرنِل و فضای گستره یک تبدیل خطی بصورت زیر می باشد،

$$\dim[\ker(T)]+\dim[\text{range}(T)]=\dim(V_1) \qquad (۱۶\text{-}۳)$$

مثال۳-۳۲

آیا تابع $T:\Re^3 \to \Re^2$ با تعریف زیر یک تبدیل خطی می باشد؟

$$T(\mathbf{u})=T\left(\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}4u_2+u_3\\u_1-10u_2\end{bmatrix}$$

برای این منظور باید دو شرط بالا را برسی نماییم. شرط اول بصورت زیر است،

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v})=T\left(\begin{bmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\\u_3+v_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}4(u_2+v_2)+(u_3+v_3)\\(u_1+v_1)-10(u_2+v_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4u_2+u_3+4v_2+v_3\\u_1-10u_2+v_1-10v_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4u_2+u_3\\u_1-10u_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4v_2+v_3\\v_1-10v_2\end{bmatrix}=T\left(\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}\right)+T\left(\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}\right)$$

$$=T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})$$

بنابراین شرط اول برقرار است. حال شرط دوم را بررسی می نماییم،

$$T(c\mathbf{u})=T\left(\begin{bmatrix}cu_1\\cu_2\\cu_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}4cu_2+cu_3\\cu_1-10cu_2\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}4u_2+u_3\\u_1-10u_2\end{bmatrix}=cT\left(\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}\right)=cT(\mathbf{u})$$

با برقراری شرط دوم می توان گفت که تابع مذکور یک تبدیل خطی است.

□

مثال۳-۳۳

آیا تابع $T:\Re^n \to \Re$ با تعریف زیر یک تبدیل خطی می باشد؟

$$T(\mathbf{u})=\|\mathbf{u}\|$$

برای این منظور باید دو شرط بالا را برسی نماییم. شرط اول بصورت زیر است،

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v})=T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})$$

از آنجاییکه $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \neq \|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|$ شرط اول برقرار نمی باشد، لذا تبدیل مذکور یک تبدیل خطی نیست.

□

مثال۳-۳۴

آیا تبدیل خطی $L:\Re^2 \to \Re^2$ با تعریف زیر یک به یک است؟

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} x-y \\ x+y \end{bmatrix}$$

بردارهای $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ را در نظر بگیرید،

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$L(v_1)=L(v_2) \quad \to \quad \begin{bmatrix} x_1-y_1 \\ x_1+y_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_2-y_2 \\ x_2+y_2 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} x_1-y_1=x_2-y_2 \\ x_1+y_1=x_2+y_2 \end{matrix}\right\} \quad \to \quad 2x_1=2x_2 \to \begin{cases} x_1=x_2 \\ y_1=y_2 \end{cases} \quad \to \quad \mathbf{v}_1=\mathbf{v}_2$$

لذا تبدیل خطی L یک به یک است.

□

۳-۳-۱- نمایش ماتریسی تبدیل های خطی

برای هر تبدیل خطی $T:V_1 \to V_2$ می توان یک ماتریس $A_{m\times n}$ بدست آورد بطوریکه،

$$T(\mathbf{u})=A\mathbf{u},\ \ \mathbf{u}\in V_1 \qquad (۱۷-۳)$$

ماتریس $A_{m\times n}$ بصورت زیر تعیین می گردد،

$$\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_m\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & \cdots & T(\mathbf{e}_n)\end{bmatrix} \qquad (۱۸-۳)$$

$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n$ و $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_m$ به ترتیب بردارهای پایه فضاهای n و m بُعدی V_1 و V_2 هستند.

برای بدست آوردن ماتریس A می توان از الگوریتم گوس- جردن کمک گرفت،

$$\left[\mathbf{v}_1 \ \ \mathbf{v}_2 \ \ \cdots \ \ \mathbf{v}_m \middle| T(\mathbf{e}_1) \ \ T(\mathbf{e}_2) \ \ \cdots \ \ T(\mathbf{e}_n)\right] \ \Rightarrow \ [I|A] \qquad (۱۹-۳)$$

نکته۱: برای یک تبدیل خطی با تعریف زیر،

$$T:R^n \to R^m,\ T(\mathbf{x})=A_{m\times n}\mathbf{x}$$

کرنل و فضای گستره را می توان بصورت زیر تعریف کرد،

$$range(T)=C(A) \quad \text{و} \quad \ker(T)=N(A)$$

مثال۳-۳۵

برای تبدیل خطی زیر یک ماتریس تبدیل بیابید.

$$T(\mathbf{u}) = T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4u_2 + u_3 \\ u_1 - 10u_2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad T : \Re^3 \to \Re^2$$

ابتدا پایه های فضای برداری $\Re^3$ و $\Re^2$ را در نظر می گیریم،

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

با توجه به تعریف داریم،

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & T(\mathbf{e}_3) \end{bmatrix}$$

حال باید ابتدا $T(\mathbf{e}_i)$ها را بدست آوریم، برای این کار از تعریف تبدیل خطی استفاده می کنیم،

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 4 \\ -10 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

از این رو ماتریس تبدیل خطی مذکور با اعمال روش گوس- جردن بصورت زیر بدست می آید،

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \,|\, T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_1) \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} I \,|\, A \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -10 & 0 \end{array}\right] \quad \to \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

لذا می توان نوشت،

$$T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} \quad \to \quad T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & -10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

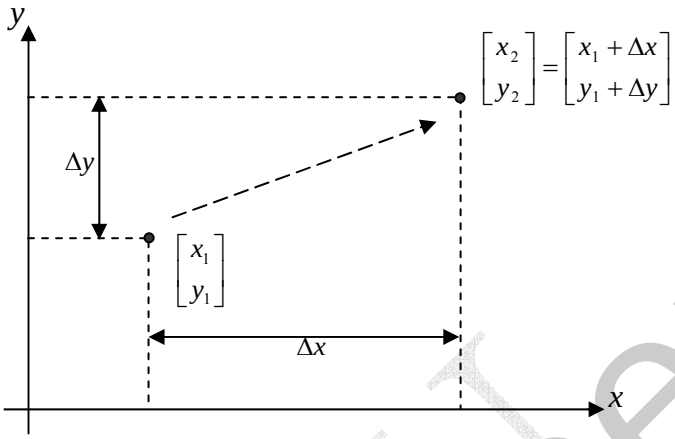
مشخص است که ماتریس تبدیل به انتخاب پایه ها بستگی دارد.

□

نمونه هایی از تبدیل های پرکاربرد عبارتند از،

۱- انتقال[۱] : انتقال در فضای دو بعدی بصورت زیر تعریف می گردد،

[۱] Translation



شکل(۳-۵) - انتقال در فضای دو بعدی

ماتریس انتقال در فضای دو بعدی بصورت زیر است،

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + \Delta x \\ y_1 + \Delta y \\ 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بطور مشابه در فضای سه بعدی هم داریم،

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & 0 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + \Delta x \\ y_1 + \Delta y \\ z_1 + \Delta z \\ 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & 0 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۲- انعکاس یا قرینه[۱]: در فضای دو بعدی انعکاس می تواند سه حالت مختلف داشته باشد،

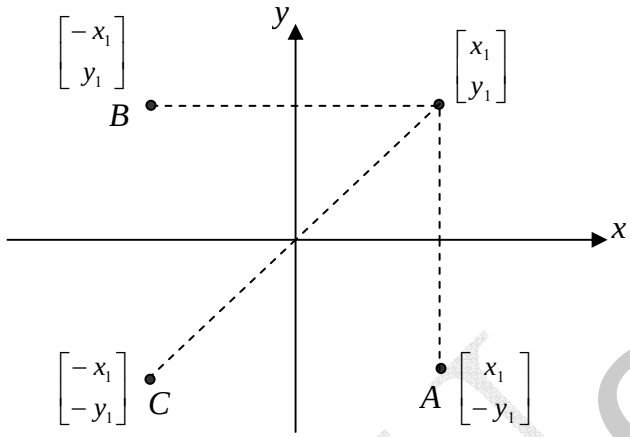
- انعکاس نسبت به محور x مانند نقطه A،
- انعکاس نسبت به محور y مانند نقطه B،
- انعکاس نسبت به مبدا مختصات مانند نقطه C،

ماتریس انعکاس نسبت به محور x ها، y ها و نسبت به نقطه مبدا در فضای دو بعدی بصورت زیر است،

$$A_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_O = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_O = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[۱] Reflection



شکل(۳-۶) - انعکاس در فضای دو بعدی

بطور مشابه در فضای سه بعدی می توان قرینه را نسبت به یک صفحه، یک خط و یا یک نقطه مانند مبدا بدست آورد، بطور مثال ماتریس تبدیل برای قرینه سازی نسبت به نقطه مبدا و صفحات xz و yz بصورت زیر بدست می آید،

$$A_{xz}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad A_{yz}=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad A_O=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

۳- تغییر مقیاس[۱] : تغییر مقیاس در فضای دو بعدی با دو ضریب s_x و s_y مشخص می گردد و هدف از این تبدیل گسترش یا فشرده سازی ابعاد یک جسم نسبت به یک نقطه می باشد.

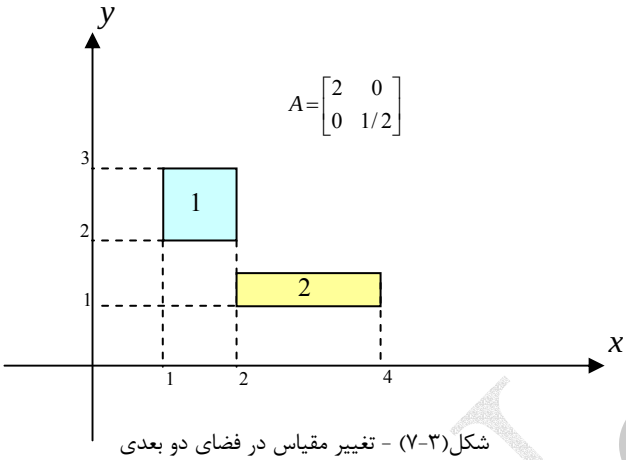
ماتریس تغییر مقیاس در فضای دو بعدی بصورت زیر است،

$$\begin{bmatrix}s_x&0\\0&s_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s_xx_1\\s_yy_1\end{bmatrix}\quad \text{و}\quad \begin{bmatrix}s_x&0&0\\0&s_y&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s_xx_1\\s_yy_1\\1\end{bmatrix}$$

ماتریس تغییر مقیاس در فضای سه بعدی هم بصورت زیر بدست می آید،

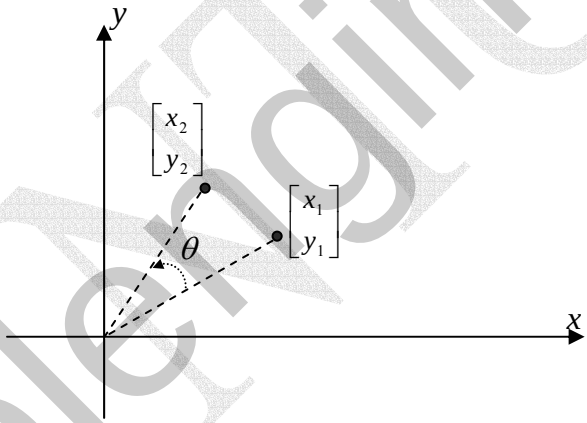
$$\begin{bmatrix}s_x&0&0&0\\0&s_y&0&0\\0&0&s_z&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s_xx_1\\s_yy_1\\s_zz_1\\1\end{bmatrix}$$

[۱] Scaling



شکل(۳-۷) - تغییر مقیاس در فضای دو بعدی

۴- دوران[۱]: مشخصه اصلی دوران در فضای دو بعدی زاویه چرخش و مبدا آن است و معمولاً مبدا دوران را مبدا مختصات در نظر می گیرند. دوران در خلاف ساعتگرد مثبت در نظر گرفته می شود.



شکل(۳-۸) - دوران در فضای دو بعدی

ماتریس دوران دو بعدی به اندازه θ درجه حول مبدا در خلاف ساعتگرد بصورت زیر بدست می آید،

$$\begin{cases} x_2 = x_1\cos\theta - y_1\sin\theta \\ y_2 = x_1\sin\theta + y_1\cos\theta \end{cases} \rightarrow A_R = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}, \quad A_R = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

دوران در فضای سه بعدی براساس زاویه چرخش و محور دوران مشخص می گردد. محور های اصلی دوران عبارت از دوران حول محور x، y و z است و دوران در خلاف ساعتگرد مثبت در نظر گرفته می شود. ماتریس دوران حول محور x بصورت زیر بدست می آید،

[۱] Rotation

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \\ y_2 = y_1\cos\theta - z_1\sin\theta \\ z_2 = y_1\sin\theta + z_1\cos\theta \end{cases} \rightarrow \quad R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

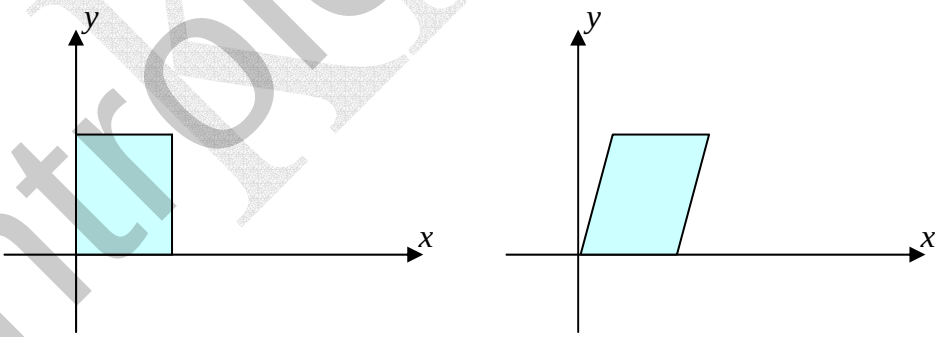
به همین ترتیب دوران حول محور y و z نیز بدست می آیند،

$$\begin{cases} x_2 = x_1\cos\theta + z_1\sin\theta \\ y_2 = y_1 \\ z_2 = -x_1\sin\theta + z_1\cos\theta \end{cases} \rightarrow \quad R_y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1\cos\theta - y_1\sin\theta \\ y_2 = x_1\sin\theta + y_1\cos\theta \\ z_2 = z_1 \end{cases} \rightarrow \quad R_y = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۴- کشیدگی[۱]: کشیدگی در فضای دو بعدی می تواند در راستای هر دو محور یا یکی از محورها صورت گیرد. ماتریس کشیدگی در راستای محور x ها در فضای دو بعدی بصورت زیر بدست می آید،

$$\begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + ky_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

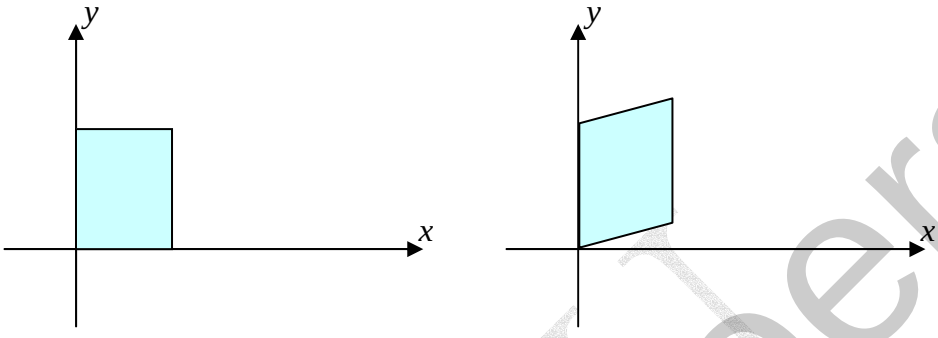


شکل(۳-۹) - کشیدگی در راستای محورxها

ماتریس کشیدگی در راستای محور y ها در فضای دو بعدی نیز بصورت زیر می باشد،

[۱] Shearing

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\k&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\y_1+kx_1\\1\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad A=\begin{bmatrix}1&0&0\\k&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$



شکل(۳-۱۰) - کشیدگی در راستای محور y ها

مثال ۳-۳۶

بیضی E_1 در فضای دو بعدی بصورت زیر تعریف شده است،

$$x^2+\frac{y^2}{4}=1$$

ماتریس تبدیل A را با شرایط زیر بدست آورید و تبدیل یافته این جسم را رسم نمایید.

۱- تغییر مقیاس 0.4 در راستای x ها و 0.6 در راستای y ها،

$$A_S=\begin{bmatrix}s_x&0&0\\0&s_y&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.4&0&0\\0&0.6&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

۲- دوران پادساعتگرد حول محور x ها به اندازه 45 درجه،

$$A_R=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 45&-\sin 45&0\\\sin 45&\cos 45&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

۳- انتقال جسم حاصل به اندازه $\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}$

$$A_T=\begin{bmatrix}1&0&\Delta x\\0&1&\Delta y\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

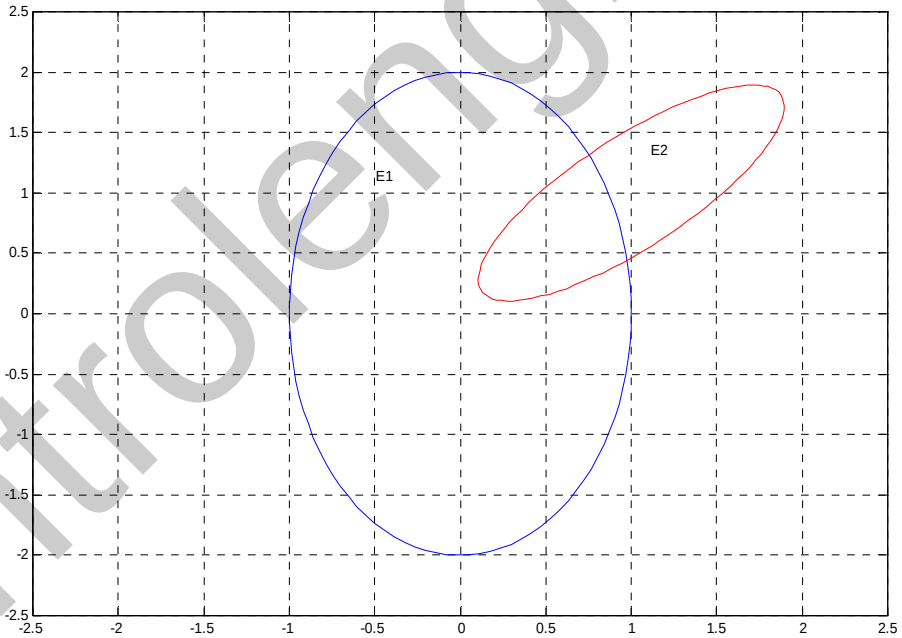
لذا ماتریس تبدیل کل بصورت زیر بدست می آید،

$$A=A_T A_R A_S$$

$$A = A_T A_R A_S = \begin{bmatrix} 0.2828 & 0.4243 & 1 \\ -0.2828 & 0.4243 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در زیر جسم E_1 و تبدیل یافته آن E_2 با استفاده از نرم افزار MATLAB رسم شده است،

```
AS =[0.4 0 0;0 0.6 0;0 0 1];
AR =[cos(pi/4) sin(pi/4) 0;-sin(pi/ 4) cos(pi/4) 0;0 0 1];
AT =[1 0 1;0 1 1;0 0 1];
A = AT * AR * AS;
t = linspace(0 ,2 * pi,100);
x = cos(t);
y = 2 * sin(t);
plot(x, y),grid on,hold on
E2 = A *[x;y;ones(size( x))];
plot(E2(1, :),E2(2,:))
```



شکل(۳-۱۱) - منحنی های مربوط به مثال ۳-۳۶

□

مثال ۳-۳۷

یکی از کاربردهای تبدیل های خطی در رمزنگاری پیام های متنی است. در این روش از اعداد در رمز کردن پیام های متنی استفاده می شود و با احتساب فاصله بین کلمات و دو علامت نگارشی نقطه و علامت پرسشی می توان از جدولی به شکل زیر برای کدگذاری استفاده نمود.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	.	?	¬
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

پیام متنی SINGULAR VALUE با استفاده از این روش بصورت زیر کد می شود،

18 8 13 6 20 11 0 17 28 21 0 11 20 4 4

تا این مرحله توانستیم پیام متنی را بصورت کد ساده نمایش دهیم. لازم به ذکر است در انتهای پیام جهت تکمیل بردار نهایی می توان حرف آخر را به تعداد مورد نیاز تکرار نمود. در مورد این مثال حرف E در انتهای عبارت تکرار شده است.

حال برای رمزی کردن این پیام کد شده از یک ماتریس تبدیل 3×3 و معکوس پذیر به نام **ماتریس کلیدی**[1] استفاده می نماییم،

$$A=\begin{bmatrix}3 & 10 & 20\\ 20 & 9 & 17\\ 9 & 4 & 17\end{bmatrix}$$

لذا ابتدا پیام کد شده را به بردارهای سه تایی تفکیک می نماییم،

$$\begin{matrix}S\\I\\N\end{matrix}\begin{bmatrix}18\\8\\13\end{bmatrix}\quad \begin{matrix}G\\U\\L\end{matrix}\begin{bmatrix}6\\20\\11\end{bmatrix}\quad \begin{matrix}A\\R\\\neg\end{matrix}\begin{bmatrix}0\\17\\28\end{bmatrix}\quad \begin{matrix}V\\A\\L\end{matrix}\begin{bmatrix}21\\0\\11\end{bmatrix}\quad \begin{matrix}U\\E\\E\end{matrix}\begin{bmatrix}20\\4\\4\end{bmatrix}$$

پیام کد شده را می توان بصورت ماتریس زیر نمایش داد،

$$P=\begin{bmatrix}18 & 6 & 0 & 21 & 20\\ 8 & 20 & 17 & 0 & 4\\ 13 & 11 & 28 & 11 & 4\end{bmatrix}$$

[1] key matrix

با ضرب ماتریس کلیدی A در ماتریس P کد رمز شده بدست می آید،

$$C = AP = \begin{bmatrix} 394 & 438 & 730 & 283 & 180 \\ 653 & 487 & 629 & 607 & 504 \\ 415 & 321 & 544 & 376 & 264 \end{bmatrix}$$

لذا گیرنده کد رمز شده ای بصورت زیر دریافت می کند،

394 653 415 438 487 321 730 629 544 283 607 376 180 504 264

برای بدست آوردن پیام متنی اصلی باید از معکوس ماتریس کلیدی استفاده نمود،

$$A^{-1} = \frac{1}{-1635}\begin{bmatrix} 85 & -90 & -10 \\ -187 & -129 & 349 \\ -1 & 78 & -173 \end{bmatrix}$$

لذا دریافت کننده باید کد رمز شده را به بردارهای سه تایی تفکیک کند و با داشتن ماتریس کلیدی پیام اصلی را استخراج نماید.

$$P = A^{-1}C$$

فرض کنید کد رمز شده ای بصورت زیر دریافت شده است،

373 513 352 352 369 325 304 747 439 78 173 87 51 340 153

دریافت کننده با داشتن ماتریس تبدیل کلیدی آن می تواند کد رمزشده را به کد ساده تبدیل کرده سپس پیام اصلی را استخراج نماید. با توجه به اینکه ماتریس کلیدی 3×3 است، کد رمز شده را به بردارهای سه تایی تفکیک می نماییم،

$$C = \begin{bmatrix} 373 & 352 & 304 & 78 & 51 \\ 513 & 369 & 747 & 173 & 340 \\ 352 & 325 & 439 & 87 & 153 \end{bmatrix}$$

حال با استفاده از معکوس ماتریس کلیدی کد ساده را بدست می آوریم،

$$P = A^{-1}C = \begin{bmatrix} 11 & 4 & 28 & 6 & 17 \\ 8 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 13 & 17 & 11 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

پس کد ساده بصورت زیر است و با استفاده از جدول می توان به راحتی متن پیام را بدست آورد،

11 8 13 4 0 17 28 0 11 6 4 1 17 0 0

LINEAR ALGEBRAA

برنامه code.m با استفاده از نرم افزار MATLAB برای انجام عمل رمزنگاری نوشته شده است. در اینجا پیغامی که باید کد شود بصورت یک رشته در نظر می گیریم و با استفاده از جدول نوشته شده آن را بصورت اعداد کد می نماییم.(البته در نرم افزار MATLAB می توان از دستور double نیز برای تبدیل رشته مذکور به یک دنباله از اعداد صحیح مثبت استفاده نمود.) سپس با ضرب کردن آن در یک ماتریس تبدیل غیرمنفرد پیام را رمز می کنیم.

```
% String s is coded using a nonsingular matrix A.
function C = code(s, A)
T=['A''B''C''D''E''F''G''H''I''J''K''L''M''N''O''P''
    'Q''R''S''T''U''V''W''X''Y''X''.''?''']';
for i=1:length(s)
   for j=1:29
      if T(j)==s(i)
         p(i)=j-1;
      end
   end
end
[n,n] = size(A);
r = rem(length(s),n);
if r ~= 0
p = [p p(length(s))*ones(1,n-r)]';
end
P = reshape(p,n,length(p)/n);
C = A*P;
C = C(:)';
```

اجرای برنامه بصورت زیر می باشد،

```
s='SINGULAR VALUE';
A=[3 10 20;20 9 17;9 4 17];
C = code(s, A)
C =
    394 653 415 438 487 321 730 629 544 283 607 376 180 504 264
```

فرآیند رمز گشایی نیز عکس این حالت می باشد که در برنامه decode.m نوشته شده است.(در صورتیکه از دستور double برای کد کردن استفاده شود می توان دستور char را برای کدگشایی بکار برد.)

```
% Coded message, decoded with the nonsingular matrix A
function s = decode(C, A)
T=['A''B''C''D''E''F''G''H''I''J''K''L''M''N'
    'O''P''Q''R''S''T''U''V''W''X''Y''X''.''?''']';
[n,n] = size(A);
C = reshape(C,n,length(C)/n);
P = inv(A)*C;
P = P(:);
for i=1:length(P)
   s(i)=T(P(i)+1);
end
```

اجرای برنامه بصورت زیر است،

```
A=[3 10 20;20 9 17;9 4 17];
C=[394 653 415 438 487 321 730 629 544 283 607 376 180 504 264];
s = decode(C, A)
s =
SINGULAR VALUEE
```

اجرای برای قسمت دوم مثال بصورت زیر است،

```
A=[3 10 20;20 9 17;9 4 17];
C=[373 513 352 352 369 325 304 747 439 78 173 87 51 340 153];
s = decode(C, A)
s =
LINEAR ALGEBRAA
```

□

مسائل

۳-۱- نشان دهید که ماتریس های حقیقی به فرم زیر تشکیل یک میدان می دهند.

$$A=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad , \quad a,b\in\Re$$

۳-۲- هر یک از مجموعه های زیر که یک زیرمجموعه از $\Re^3$ می باشند. زیر فضا بودن این مجموعه ها را بررسی نمایید.

الف) $\{(x,y,z)\in\Re^3 : xz=0\}$

ب) $\{(x,y,z)\in\Re^3 : x=y=z\}$

ج) $\{(x,y,z)\in\Re^3 : x+y=0\}$

۳-۳- استقلال خطی بردارهای زیر را بررسی نمایید.

الف) $\mathbf{u}=[1,0,1,2],\quad \mathbf{v}=[0,1,1,2],\quad \mathbf{w}=[1,1,1,3]$

ب) $\mathbf{u}=[7,-3,1],\quad \mathbf{v}=[2,1,-5],\quad \mathbf{w}=[1,-3,8]$

ج) $\mathbf{u}=[1,-2,3,-4],\quad \mathbf{v}=[-1,3,4,2],\quad \mathbf{w}=[1,1,-2,-2]$

د) $\mathbf{p}_1=x-3,\quad \mathbf{p}_2=x^2+2x,\quad \mathbf{p}_3=x^2+1$

ه) $\mathbf{p}_1=x^2+x,\quad \mathbf{p}_2=x+1,\quad \mathbf{p}_3=x^2+1$

۳-۴- به ازای چه مقداری از λ بردارهای زیر مستقل خطی هستند.

الف) $\mathbf{u}=[-1,\lambda,0],\quad \mathbf{v}=[1-\lambda,-1,-1],\quad \mathbf{w}=[-1,-1,\lambda+1]$

ب) $\mathbf{u}=[1+\lambda,0,1],\quad \mathbf{v}=[3-2\lambda,\lambda-1,0],\quad \mathbf{w}=[2-\lambda,\lambda,0]$

ج) $\mathbf{u}=[0,1,\lambda],\quad \mathbf{v}=[-\lambda,0,-1],\quad \mathbf{w}=[2,-1,\lambda]$

۳-۵- آیا بردارهای زیر فضای برداری $\Re^3$ را اسپن می کنند.

الف) $\mathbf{u}=[4,4,0],\quad \mathbf{v}=[2,0,-1],\quad \mathbf{w}=[1,2,1]$

ب) $\mathbf{u}=[1,2,1],\quad \mathbf{v}=[1,0,1],\quad \mathbf{w}=[1,1,1]$

ج) $\mathbf{u}=[1,0,0],\quad \mathbf{v}=[0,1,-1],\quad \mathbf{w}=[0,2,0]$

۳-۶- رتبه و پوچی ماتریس های زیر را تعیین نمایید و فضای پوچی و فضای گستره آنها را بدست آورید.

الف) $A=\begin{bmatrix}1&2&2&2\\2&4&6&8\\3&6&8&10\end{bmatrix}$

ب) $A=\begin{bmatrix}1&1&2&-1\\1&-1&1&1\\3&-1&4&1\end{bmatrix}$

ج) $A=\begin{bmatrix}1&1&2&0&1\\2&2&5&0&3\\0&0&2&1&3\\8&11&19&0&11\end{bmatrix}$

د) $A=\begin{bmatrix}1&2&4&-1&1\\0&1&1&1&1\\-1&2&3&1&1\\0&4&7&0&2\\-1&6&10&1&3\end{bmatrix}$

۳-۷- بردار $\mathbf{u}$ تحت بردارهای پایه $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ بصورت زیر نمایش داده می شود. نمایش آن را تحت پایه های $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ نشان دهید.

الف) $\mathbf{u}=[1,3,2]$

$$\mathbf{e}_1=[1,0,0],\quad \mathbf{e}_2=[0,1,0],\quad \mathbf{e}_3=[0,0,1]$$

$$\mathbf{v}_1=[1,1,-1],\quad \mathbf{v}_2=[1,-1,1],\quad \mathbf{v}_3=[-1,1,1]$$

ب) $\mathbf{u}=[1,2,-1]$

$$\mathbf{e}_1=[1,0,0],\quad \mathbf{e}_2=[0,1,0],\quad \mathbf{e}_3=[0,0,1]$$

$$\mathbf{v}_1=[2,1,-1],\quad \mathbf{v}_2=[1,3,0],\quad \mathbf{v}_3=[0,1,-1]$$

۳-۸- برای پایه های داده شده ماتریس تبدیل را بیابید.

الف) $A=\{1,x,x^2\}$
$B=\{2,-4x,5x^2-1\}$

ب) $A=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$
$B=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&0\\-1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3&0\\0&2\end{bmatrix}\right\}$

۳-۹- ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}2&1&-1&1&3\\1&0&1&2&-1\\3&1&2&5&-2\end{bmatrix}$$

الف) در صورت وجود یک معکوس راست برای آن پیدا کنید.

ب) پایه های متعامد ستون های آن را بیابید و ستون پنجم ماتریس را بر حسب پایه ها بنویسید.

۳-۱۰- ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

الف) ماتریس A^T را بدست آورید. سپس رتبه، فضای گستره، پوچی و فضای پوچی ماتریس A^T را حساب کنید.

ب) نشان دهید $R(A)\perp N(A^T)$ و $R(A^T)\perp N(A)$ است.

۳-۱۱- a، b و c را چنان بیابید که رتبه ماتریس A یکبار 1، یکبار 2 و یکبار 3 گردد.

$$A=\begin{bmatrix}a & -3 & c\\ 1 & 3 & -1\\ b & 9 & -3\end{bmatrix}$$

۳-۱۲- نشان دهید هر یک از ماتریس های رتبه یک را می توان بصورت حاصلضرب دو بردار ستونی و سطری نمایش داد.

الف) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ -3 & -6 & -9\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

ب) $A=\begin{bmatrix}-6 & 3 & 9\\ 2 & -1 & -3\\ 4 & -2 & -6\end{bmatrix}$

ج) $A=\begin{bmatrix}3 & 12 & -1 & -6\\ 6 & 24 & -2 & -12\\ -3 & -12 & 1 & 6\end{bmatrix}$

۳-۱۳- برای چه مقادیری از بردار $\mathbf{b}$ دستگاه معادلات زیر سازگار است؟

الف) $\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 2 & 8 & 4\\ -1 & -4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 9\\ -1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}$

۳-۱۴- تبدیل خطی زیر را در نظر بگیرید،

$$T(x,y,z)=(3x+2y+z,x+3z,-y+4z)$$

نمایش ماتریسی، فضای گستره و کرنل این تبدیل خطی را بیابید.

۳-۱۵- تبدیل خطی $T:\Re^3 \to R^3$ پایه های استاندارد فضای $\Re^3$ را بصورت زیر تبدیل می کند،

$$T(1,0,0)=(1,\tfrac{-3}{2},2)$$
$$T(0,1,0)=(-3,\tfrac{9}{2},-6)$$
$$T(0,0,1)=(2,-3,4)$$

تبدیل یافته بردار $(5,1,-1)$ را تحت این نگاشت بدست آورید.

۳-۱۶- خطی بودن تبدیل های زیر را بررسی نمایید، در صورت خطی بودن فضای گستره و کرنل آنها را بدست آورید.

الف) $T:\Re^2 \to \Re^4 : (x,y) \mapsto (2x-3y, x-7y, x+2y+1{,}5x-2y)$

ب) $T:\Re^3 \to \Re^4 : (x,y,z) \mapsto (x-z, x+y, z-y, x-2y)$

ج) $T:\Re^3 \to \Re^3 : (x,y,z) \mapsto (x+3y-2z, x-4z, x+6y)$

۳-۱۷- نشان دهید هر یک از مجموعه های زیر یک زیر فضای برداری برای فضای برداری مر بوطه هستند.

الف) تمامی ماتریس های 2×2 بالا مثلثی به فرم $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$ (برای فضای برداری $\mathrm{M}_{2\times 2}(\Re)$)

ب) مجموعه $S=\{[x,y,z]\in\Re^3 \mid 2x-y+z=\mathbf{0}\}$ (برای فضای برداری $\Re^3$)

ج) مجموعه $S=\left\{\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} 1 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}=0\right\}$ (برای فضای برداری $\mathrm{M}_{2\times 2}(\Re)$)

فصل چهارم

متعامد سازی
و
مسئله حداقل مربعات

۴-۱ مقدمه

در فصل چهارم به مفهوم متعامد سازی، تصاویر متعامد و اهمیت آنها پرداخته شده است و الگوریتم فرایند گرام اشمیت همراه با کد نویسی های MATLAB به عنوان یک روش متداول جهت متعامد سازی معرفی می گردد. سپس مسئله حداقل مربعات و کاربرد آن در حل دستگاه معادلات ناسازگار مطرح شده و نحوه بدست آوردن معادلات نرمال و روش های حل آنها بطور مستقیم و با استفاده از تجزیه چالسکی و تجزیه QR ارائه می شود. در انتهای فصل به موضوع کاربرد روش حداقل مربعات در برازش داده ها، که یکی از مباحث پایه ای در تخمین و شناسایی سیستم ها می باشد پرداخته شده و چند مثال کاربردی همراه با کد نویسی های مربوطه آورده شده است.

۴-۲ متعامد سازی

بردار $\mathbf{u}$ را بر زیرفضای V_1 متعامد گویند، اگر بردار $\mathbf{u}$ بر هر بردار در زیرفضای V_1 متعامد باشد و به مجموعه ای که شامل تمامی بردارهای متعامد بر زیرفضای V_1 باشد، **مکمل متعامد**[۱] زیرفضای V_1 گویند و آن را با نماد $V_1^{\perp}$ نشان می دهند.

دو زیرفضای V_1 و V_2 را متعامد گویند، اگر هر بردار در زیرفضای V_1 با هر بردار در زیرفضای V_2 متعامد باشد.

مثال ۴-۱

چهار زیرفضای اصلی ماتریس A بصورت زیر تعریف می گردند،

- فضای گستره $$R(A)=\left\{\mathbf{b}\in\Re^m \;\middle|\; \exists\mathbf{x}\in\Re^n \rightarrow A\mathbf{x}=\mathbf{b}\right\}$$

- فضای پوچی $$N(A)=\left\{\mathbf{x}\in\Re^n \rightarrow A\mathbf{x}=\mathbf{0}\right\}$$

- فضای سطرها $$R(A^T)=\left\{\mathbf{b}\in\Re^n \;\middle|\; \exists\mathbf{x}\in\Re^m \rightarrow A^T\mathbf{x}=\mathbf{b}\right\}$$

- فضای پوچی چپ $$N(A^T)=\left\{\mathbf{x}\in\Re^m \rightarrow A^T\mathbf{x}=\mathbf{0}\right\}$$

از مطالب فصل قبل داریم فضای سطرها و فضای پوچی ماتریس A متعامد هستند،

$$R(A^T)\perp N(A)$$

لذا می توان نوشت، $R(A^T)^{\perp}=N(A)$

همچنین فضای ستون ها و فضای پوچی چپ ماتریس A نیز متعامد هستند،

$$R(A)\perp N(A^T)$$

لذا می توان نوشت، $R(A)^{\perp}=N(A^T)$

□

مثال ۴-۲

ثابت کنید تمامی بردارهای یک مجموعه متعامد، مستقل خطی هستند.

یک مجموعه متعامد با بردارهای غیر صفر $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_m$ را در نظر بگیرید. با استفاده از اسکالرهای $c_1,c_2,\ldots,c_m\in\Re$ یک ترکیب خطی از این بردارها را بصورت زیر می توان نوشت،

[۱] Orthogonal Complement

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$$

برای هر $i = 1,2,\ldots,m$ داریم،

$$\begin{aligned} 0 = \langle \mathbf{0}, \mathbf{v}_i \rangle &= \langle c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_m\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_i \rangle \\ &= c_1\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_i \rangle + c_2\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_i \rangle + \ldots + c_m\langle \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_i \rangle \\ &= c_i\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle \end{aligned}$$

از آنجائیکه بردارها متعامد هستند، بنابراین برای $i \neq j$ داریم $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$ و از آنجائیکه $\mathbf{v}_i \neq 0$ است، پس $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle \neq 0$، لذا باید $c_i = 0$ باشد. بدین ترتیب نشان دادیم که،

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$$

پس بردارهای $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ مستقل خطی هستند.

□

۴-۲-۱- فرآیند یکامتعامد سازی گرام – اشمیت

فرض کنید بردارهای $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ بردارهای پایه فضای برداری nبعدی V_1 هستند، اگر بردارهای پایه $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ متعامد باشند، به آن مجموعه **پایه های متعامد**[۱] گویند و هر بردار مانند $\mathbf{u}$ متعلق به فضای برداری nبعدی V_1 را می توان بصورت ترکیب خطی زیر نمایش داد،

$$\mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_n\|^2}\mathbf{v}_n \qquad (۱-۴)$$

اگر بردارهای پایه $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ یکامتعامد باشند به آن **پایه های یکامتعامد**[۲] گویند، در اینصورت هر بردار مانند $\mathbf{u}$ متعلق به فضای برداری nبعدی V_1 را می توان بصورت ترکیب خطی زیر نمایش داد،

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n \qquad (۲-۴)$$

بطور نمونه بردارهای پایه استاندارد $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ در فضای برداری $\Re^n$ تشکیل یک مجموعه پایه های یکامتعامد را می دهند.

حال چگونه می توان بردارهای پایه موجود را بصورت پایه های متعامد و یکامتعامد تبدیل کرد. یکی از روش هایی که برای تبدیل بردارهای پایه به بردارهای پایه متعامد و یکامتعامد استفاده می شود به **فرآیند گرام – اشمیت**[۳] معروف است، در ادامه به شرح آن می پردازیم.

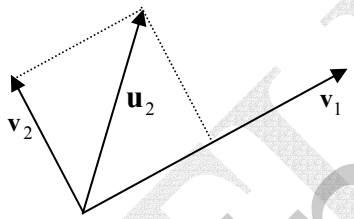
---

[۱] Orthogonal Basis
[۲] Orthonormal Basis
[۳] Gram-Schmidt Process

ایده اساسی بکار گرفته شده در این فرآیند را می توان بصورت زیر خلاصه کرد، دو بردار مخالف صفر $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{u}_2$ را در فضای برداری V_1 در نظر بگیرید، که لزوماً متعامد نیستند. هدف این است که با زدودن برخی از بردارهایی به شکل $\alpha_1\mathbf{v}_1$ از بردار $\mathbf{u}_2$ آن را به یک بردار $\mathbf{v}_2$ بصورت $\mathbf{v}_2=\mathbf{u}_2-\alpha_1\mathbf{v}_1$ تبدیل کنیم، به نحوی که بردارهای $\mathbf{v}_2$ و $\mathbf{v}_1$ متعامد باشند. به عبارتی ما به دنبال یافتن اعداد حقیقی مناسبی مانند α_1 هستیم، بطوریکه شرط زیر برقرار گردد،

$$\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\rangle=\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{u}_2-\alpha_1\mathbf{v}_1\rangle=0$$

تعبیر هندسی مسئله بصورت زیر مطرح می گردد،



شکل(۴-۱)- نمایش هندسی دو بردار عمود بر یکدیگر

از این رو می توان نوشت،

$$\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{u}_2\rangle-\alpha_1\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1\rangle=0 \quad\rightarrow\quad \alpha_1=\frac{\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{u}_2\rangle}{\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1\rangle}=\frac{\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{u}_2\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}$$

بنابراین انتخاب α_1 بصورت بالا مناسب خواهد بود و نتیجتاً دو بردار $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ متعامد خواهند بود،

$$\mathbf{v}_2=\mathbf{u}_2-\frac{\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{u}_2\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1$$

در حالت کلی بردارهای غیر صفر $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_m$ و بردار غیر صفر $\mathbf{u}_{m+1}$ را در فضای برداری V_1 در نظر بگیرید. می خواهیم یک ترکیب خطی بصورت $\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\ldots+\alpha_m\mathbf{v}_m$ بیابیم، بطوریکه بردار $\mathbf{v}_{m+1}$ که بصورت زیر تعریف می گردد، بر هر یک از بردارهای $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_m$ عمود باشد،

$$\mathbf{v}_{m+1}=\mathbf{u}_{m+1}-\alpha_1\mathbf{v}_1-\alpha_2\mathbf{v}_2-\cdots-\alpha_m\mathbf{v}_m \qquad (۴-۳)$$

به عبارتی در اینجا باید اسکالرهای حقیقی مناسب $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ را بیابیم، به طوریکه شرط زیر برقرار باشد،

$$\langle \mathbf{v}_i,\mathbf{v}_{m+1}\rangle=\langle \mathbf{v}_i,\mathbf{u}_{m+1}-\alpha_1\mathbf{v}_1-\alpha_2\mathbf{v}_2-\cdots-\alpha_m\mathbf{v}_m\rangle=0 \quad , \quad i=1,2,\ldots,m$$

بدین ترتیب رابطه بالا به شکل زیر قابل بیان است،

$$\langle \mathbf{v}_i,\mathbf{u}_{m+1}\rangle-\alpha_1\langle \mathbf{v}_i,\mathbf{v}_1\rangle-\alpha_2\langle \mathbf{v}_i,\mathbf{v}_2\rangle-\cdots-\alpha_m\langle \mathbf{v}_i,\mathbf{v}_m\rangle=0$$

بنابراین هر یک از α_iها بصورت زیر تعریف می شوند،

$$\alpha_i = \frac{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{u}_{m+1} \rangle}{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle} = \frac{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{u}_{m+1} \rangle}{\|\mathbf{v}_i\|^2} \qquad (۴-۴)$$

به این ترتیب بردار $\mathbf{v}_{m+1}$ با تعریف زیر بر هر یک از بردارهای $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ عمود خواهد بود،

$$\mathbf{v}_{m+1} = \mathbf{u}_{m+1} - \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_{m+1} \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_{m+1} \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 - \cdots - \frac{\langle \mathbf{v}_m, \mathbf{u}_{m+1} \rangle}{\|\mathbf{v}_m\|^2}\mathbf{v}_m \qquad (۵-۴)$$

مثال ۴-۳

بردارهای زیر را در نظر بگیرید،

$$\mathbf{u}_1 = [1,2,1,0], \quad \mathbf{u}_2 = [3,3,3,0], \quad \mathbf{u}_3 = [2,-10,0,0], \quad \mathbf{u}_4 = [-2,1,-6,2]$$

از آنجائیکه $|\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3 \quad \mathbf{u}_4| \neq 0$ است، این بردارها مستقل خطی می باشند، لذا مجموعه $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ تشکیل یک پایه برای فضای برداری $\Re^4$ می دهند. حال می خواهیم با استفاده از فرآیند گرام - اشمیت این بردارهای پایه را به بردارهای پایه متعامد تبدیل نماییم.

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = [1,2,1,0],$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 = [3,3,3,0] - \frac{\langle [1,2,1,0],[3,3,3,0] \rangle}{\|[1,2,1,0]\|^2}[1,2,1,0]$$

$$= [3,3,3,0] - \frac{12}{6}[1,2,1,0] = [3,3,3,0] + [-2,-4,-2,0] = [1,-1,1,0]$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_3 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2$$

$$= [2,-10,0,0] - \frac{\langle [1,2,1,0],[2,-10,0,0] \rangle}{\|[1,2,1,0]\|^2}[1,2,1,0] - \frac{\langle [1,-1,1,0],[2,-10,0,0] \rangle}{\|[1,-1,1,0]\|^2}[1,-1,1,0]$$

$$= [2,-10,0,0] - \frac{18}{6}[1,2,1,0] - \frac{13}{3}[1,-1,1,0]$$

$$= [2,-10,0,0] + [3,6,3,0] + [-4,4,-4,0] = [1,0,-1,0]$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_4 &= \mathbf{u}_4 - \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_4 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_4 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_4 \rangle}{\|\mathbf{v}_3\|^2}\mathbf{v}_3 \\
&= [-2,1,-6,2] - \frac{\langle [1,2,1,0],[-2,1,-6,2] \rangle}{\|[1,2,1,0]\|^2}[1,2,1,0] - \frac{\langle [1,-1,1,0],[-2,1,-6,2] \rangle}{\|[1,-1,1,0]\|^2}[1,-1,1,0] \\
&\quad - \frac{\langle [1,0,-1,0],[-2,1,-6,2] \rangle}{[1,0,-1,0]^2}[1,0,-1,0] = \\
&= [-2,1,-6,2] - \frac{6}{6}[1,2,1,0] - \frac{9}{3}[1,-1,1,0] - \frac{4}{2}[1,0,-1,0] \\
&= [-2,1,-6,2] + [1,2,1,0] + [3,-3,3,0] + [-2,0,2,0] = [0,0,0,2]
\end{aligned}$$

به این ترتیب بردارهای بدست آمده بصورت زیر دو به دو متعامد هستند،

$$\mathbf{v}_1 = [1,2,1,0], \quad \mathbf{v}_2 = [1,-1,1,0], \quad \mathbf{v}_3 = [1,0,-1,0], \quad \mathbf{v}_4 = [0,0,0,2]$$

لذا مجموعه $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ بردارهای پایه متعامد برای فضای برداری $\Re^4$ می باشد. با نرمالیزه کردن این بردارها می توان بردارهای پایه یکا متعامد را نیز بدست آورد،

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= \frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1,0) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right) \\
\mathbf{w}_2 &= \frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|}\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1,0) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) \\
\mathbf{w}_3 &= \frac{1}{\|\mathbf{v}_3\|}\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right) \\
\mathbf{w}_4 &= \frac{1}{\|\mathbf{v}_4\|}\mathbf{v}_4 = \frac{1}{2}(0,0,0,2) = (0,0,0,1)
\end{aligned}$$

بنابراین، مجموعه $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ بردارهای پایه یکامتعامد برای فضای برداری $\Re^4$ هستند.

□

برنامه gramsch.m در نرم افزار MATLAB برای یکامتعامدسازی یک دسته بردار هم مرتبه بر اساس روش گرام- اشمیت نوشته شده است. در این برنامه بردارهای مذکور بصورت ستون های یک ماتریس ارائه می شوند.

```
% Gram-Schmidt orthogonalization method
function V = gramsch(A)
[m,n] = size(A);
for k=1:n
V(:,k) = A(:,k);
for j=1:k-1
V(:,k) = V(:,k) - (V(:,j)'*A(:,k))*V(:,j);
end
V(:,k) = V(:,k)/norm(V(:,k));
end
```

اجرای برنامه بصورت زیر است،

```
u1=[1;2;1;0]; u2=[3;3;3;0]; u3=[2;-10;0;0]; u4=[-2;1;-6;2];
A=[u1 u2 u3 u4];
V = gramsch(A)
V =
    0.4082    0.5774    0.7071    0.0000
    0.8165   -0.5774   -0.0000    0.0000
    0.4082    0.5774   -0.7071    0.0000
         0         0         0    1.0000
```

در اینجا ماتریس V حاصل یک ماتریس متعامد است، این موضوع را می توان بصورت زیر بررسی نمود،

```
 V'*V
ans =
    1.0000    0.0000   -0.0000    0.0000
    0.0000    1.0000    0.0000   -0.0000
   -0.0000    0.0000    1.0000    0.0000
    0.0000   -0.0000    0.0000    1.0000
```

□

مثال۴-۴

ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 2 & 5\end{bmatrix}$$

پایه های فضای گستره ماتریس A را بدست آورید، سپس با استفاده از روش گرام- اشمیت پایه ها را به پایه های یکامتعامد تبدیل نمایید.

برای بدست آوردن پایه های فضای گستره فرم سطری پلکانی کاهش یافته ماتریس A را بدست می آوریم،

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

با توجه به محل عناصر محوری پایه های فضای گستره بصورت زیر بدست می آید،

$$R(A)=\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$$

حال با اعمال فرایند گرام-اشمیت این پایه ها را به پایه های یکامتعامد تبدیل می نماییم،

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{a}_1=[2,1,3]$$

$$\mathbf{v}_2=\mathbf{a}_2-\frac{\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{a}_2\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1=[1,0,1]-\frac{\langle[2,1,3],[1,0,1]\rangle}{\|[2,1,3]\|^2}[2,1,3]$$

$$=[1,0,1]-\frac{5}{14}[2,1,3]=[1,0,1]+[\frac{-10}{14},\frac{-5}{14},\frac{-15}{14}]=[\frac{4}{14},\frac{-5}{14},\frac{-1}{14}]$$

$$\mathbf{v}_3=\mathbf{a}_3-\frac{\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{a}_3\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1-\frac{\langle\mathbf{v}_2,\mathbf{a}_3\rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2$$

$$=[-1,1,2]-\frac{\langle[2,1,3],[-1,1,2]\rangle}{\|[2,1,3]\|^2}[2,1,3]-\frac{\langle[\frac{4}{14},\frac{-5}{14},\frac{-1}{14}],[-1,1,2]\rangle}{\|[\frac{4}{14},\frac{-5}{14},\frac{-1}{14}]\|^2}[\frac{4}{14},\frac{-5}{14},\frac{-1}{14}]$$

$$=[-1,1,2]-\frac{5}{14}[2,1,3]+\frac{11}{3}[\frac{4}{14},\frac{-5}{14},\frac{-1}{14}]$$

$$=[-1,1,2]+[\frac{-10}{14},\frac{-5}{14},\frac{-15}{14}]+[\frac{44}{42},\frac{-55}{42},\frac{-11}{42}]=[\frac{-2}{3},\frac{-2}{3},\frac{2}{3}]$$

به این ترتیب پایه های متعامد بصورت زیر بدست می آیند،

$$\mathbf{v}_1=[2,1,3],\qquad \mathbf{v}_2=[\frac{4}{14},\frac{-5}{14},\frac{-1}{14}],\qquad \mathbf{v}_3=[\frac{-2}{3},\frac{-2}{3},\frac{2}{3}]$$

با نرمالیزه کردن این بردارها می توان بردارهای پایه یکا متعامد را بدست آورد،

$$\mathbf{w}_1=\frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1=\frac{1}{\sqrt{14}}[2,1,3]=[\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}]$$

$$\mathbf{w}_2=\frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|}\mathbf{v}_2=\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}}[\frac{4}{14},\frac{-5}{14},\frac{-1}{14}]=[\frac{4}{\sqrt{42}},\frac{-5}{\sqrt{42}},\frac{-1}{\sqrt{42}}]$$

$$\mathbf{w}_3=\frac{1}{\|\mathbf{v}_3\|}\mathbf{v}_3=\frac{3}{2\sqrt{3}}[\frac{-2}{3},\frac{-2}{3},\frac{2}{3}]=[\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}]$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB نیز پاسخ چنین بدست می آید،

```
A =[2 1 -1 1;1 0 1 2;3 1 2 5];
[R,p]= rref(A);
Rs = A(:,p)
Rs =
     2     1    -1
     1     0     1
     3     1     2
V = gramsch(Rs)
V =
    0.5345    0.6172   -0.5774
    0.2673   -0.7715   -0.5774
    0.8018   -0.1543    0.5774
```

در اینجا ابتدا پایه های فضای گستره ماتریس A را بدست می آوریم، سپس با استفاده از برنامه gramsch آنها را یکامتعامدسازی می کنیم.

□

مثال ۴-۵

اگر فرایند گرام- اشمیت را به یک دسته بردار یکامتعامد اعمال نماییم، نتیجه نهایی چه خواهد شد؟ با انتخاب سه بردار یکا متعامد پاسخ خود را بررسی نمایید.

سه بردار یکامتعامد $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ را در نظر بگیرید،

$$\mathbf{u}_1=[\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{-1}{\sqrt{5}}],\qquad \mathbf{u}_2=[0,-1,0],\qquad \mathbf{u}_3=[\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}]$$

حال فرایند گرام- اشمیت را بر این سه بردار اعمال می نماییم،

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = [\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{5}}]$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 = [0,-1,0] - \frac{\langle [\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{5}}], [0,-1,0] \rangle}{\|[\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{5}}]\|^2}[\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{5}}] = [0,-1,0]$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_3 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2$$

$$= [\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}] - \frac{\langle [\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{5}}], [\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}] \rangle}{\|[\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{5}}]\|^2}[\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{5}}] - \frac{\langle [0,-1,0], [\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}] \rangle}{\|[0,-1,0]\|^2}[0,-1,0]$$

$$= [\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}]$$

لذا با اعمال فرایند گرام اشمیت به یک دسته بردار یکامتعامد مجدداً خود بردارها بدست می آیند.

□

مثال۴-۶

اگر فرایند گرام- اشمیت را به یک دسته بردار وابسته خطی اعمال نماییم، نتیجه نهایی چه خواهد شد؟ با انتخاب سه بردار وابسته خطی پاسخ خود را بررسی نمایید.

سه بردار وابسته خطی $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ را در نظر بگیرید،

$$\mathbf{u}_1 = [1,0,-1], \qquad \mathbf{u}_2 = [2,0,-2], \qquad \mathbf{u}_3 = [-1,0,1]$$

حال فرایند گرام- اشمیت را بر این سه بردار اعمال می نماییم،

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = [1,0,-1]$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 = [2,0,-2] - \frac{\langle [1,0,-1], [2,0,-2] \rangle}{\|[1,0,-1]\|^2}[1,0,-1]$$

$$= [2,0,-2] - \frac{4}{2}[1,0,-1] = [0,0,0]$$

مشاهده می شود که بردار $\mathbf{v}_2$ صفر بدست می آید، لذا فرایند متوقف می شود زیـرا $\|\mathbf{v}_2\| = 0$ اسـت. بنابراین برای اجرای صحیح فرایند متعامد سازی گرام- اشمیت باید بردارها مستقل خطی باشند.

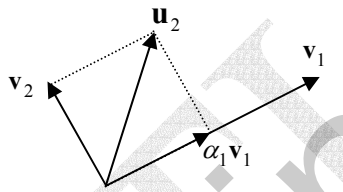
□

۴-۲-۲- تصاویر متعامد

فرض کنید V_2 یک زیرفضای برداری از فضای V_1 باشد. در اینصورت برای هر بردار مانند $\mathbf{u}$ در فضای برداری V_1 می توان عبارت زیر را نوشت،

$$\mathbf{u} = \text{proj}_{V_2}\mathbf{u} + \text{proj}_{V_2^{\perp}}\mathbf{u} \qquad (۶-۴)$$

که در آن $\text{proj}_{V_2}\mathbf{u}$ یک بردار در زیر فضای V_2 است، که به آن **تصویر متعامد**[۱] بردار $\mathbf{u}$ بر روی V_2 گفته می شود و همینطور $\text{proj}_{V_2^{\perp}}\mathbf{u}$ یک بردار در $V_2^{\perp}$ (مکمل متعامد V_2) است، که به آن **مؤلفه عمودی**[۲] بردار $\mathbf{u}$ عمود بر V_2 می گویند. یک تعبیر هندسی ساده از این گفته در شکل زیر نشان داده شده است،



شکل(۴-۲)- نمایش هندسی تصویر متعامد یک بردار

بردار $\mathbf{u}_2$ را می توان بصورت مجموع مؤلفه های عمودی و افقی آن نسبت به بردار $\mathbf{v}_1$ نوشت،

$$\mathbf{u}_2 = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \text{proj}_{\mathbf{v}_1}\mathbf{u}_2 + \text{proj}_{\mathbf{v}_1^{\perp}}\mathbf{u}_2$$

از طرفی با توجه به فرآیند گرام-اشمیت می توان نوشت،

$$\text{proj}_{\mathbf{v}_1}\mathbf{u}_2 = \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 \qquad (۷-۴)$$

حال اگر زیر فضای V_2 مجموعه ای از بردارهای پایه متعامد بصورت $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ داشته باشد، در اینصورت رابطه بالا را بصورت زیر می توان نوشت،

$$\text{proj}_{V_2}\mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{v}_n\|^2}\mathbf{v}_n \qquad (۸-۴)$$

در واقع هر یک از اجزای عبارت سمت راست رابطه بالا تصویر بردار $\mathbf{u}$ بر روی یک یک بردارهای پایه متعامد $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ می باشد و مجموع این تصاویر تصویر بردار $\mathbf{u}$ بر روی زیرفضای V_2 را نتیجه می دهد. حال اگر بردارهای پایه $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ یکامتعامد باشند داریم،

$$\text{proj}_{V_2}\mathbf{u} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u} \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u} \rangle \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{u} \rangle \mathbf{v}_n \qquad (۹-۴)$$

---

[۱] Orthogonal Projection
[۲] Orthogonal Component

مثال۴-۷

ماتریس A و بردار $\mathbf{b}$ را در نظر بگیرید، تصویر متعامد بردار $\mathbf{b}$ بر روی $R(A)$ را بدست آورید

الف) $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$

ابتدا پایه های یکامتعامد $R(A)$ را بدست می آوریم،

$$R(A)=sp\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

باید از فرایند گرام- اشمیت استفاده کنیم،

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad \mathbf{w}_1=\mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{v}_2=\mathbf{a}_2-\frac{\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{a}_2\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}-\frac{1}{1}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad \mathbf{w}_2=\mathbf{v}_2$$

حال تصویر بردار $\mathbf{b}$ را بر روی پایه های یکامتعامد $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2$ بدست می آوریم،

$$\text{proj}_{R(A)}\mathbf{b}=\langle\mathbf{w}_1,\mathbf{b}\rangle\mathbf{w}_1+\langle\mathbf{w}_2,\mathbf{b}\rangle\mathbf{w}_2=(2)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+(3)\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix}$$

ب) $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\\0&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}4\\4\\6\end{bmatrix}$

ابتدا با استفاده از فرایند گرام- اشمیت پایه های یکامتعامد $R(A)$ را بدست می آوریم،

$$R(A)=sp\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad \mathbf{w}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{a}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{2}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2$$

حال تصویر بردار $\mathbf{b}$ را بر روی پایه های یکامتعامد $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ بدست می آوریم،

$$\text{proj}_{R(A)}\mathbf{b} = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{b} \rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{b} \rangle \mathbf{w}_2 = (\frac{8}{\sqrt{2}})\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix} + (6)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\4\\6\end{bmatrix}$$

می توان نتیجه گرفت که $\mathbf{b} \in R(A)$ بوده، لذا تصویر متعامد آن بر روی $R(A)$ خود بردار است.

ج) $A = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix}3\\2\\7\end{bmatrix}$

ابتدا با استفاده از فرایند گرام- اشمیت پایه های یکامتعامد $R(A)$ را بدست می آوریم،

$$R(A) = sp\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{a}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{0}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

حال تصویر بردار $\mathbf{b}$ را بر روی پایه های یکامتعامد $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ بدست می آوریم،

$$\text{proj}_{R(A)}\mathbf{b} = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{b} \rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{b} \rangle \mathbf{w}_2 = (\frac{-4}{\sqrt{2}})\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} + (\frac{12}{\sqrt{3}})\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$$

با کمی تغییر در برنامه gramsch به راحتی می توان آن را به برنامه ای تبدیل کرد که تصویر متعامد یک بردار را بر روی فضای گستره یک ماتریس بدست آورد،

□

۴-۳ مسئله حداقل مربعات

یکی از مهمترین کاربردهای تصاویر متعامد در حل دستگاه معادلات خطی ناسازگار است. از آنجائیکه دستگاه معادلات خطی ناسازگار جواب ندارد، این سؤال در ذهن ایجاد شود که چرا ما به این موضوع می پردازیم؟ برای روشن تر شدن مطلب به دو مثال زیر توجه کنید،

مثال ۴-۸

معادله خطی را بیابید که از چهار نقطه زیر عبور کند،

$$(1,-1),\quad (4,11),\quad (-1,-9),\quad (-2,-13)$$

فرم کلی معادله خط را بصورت $y = mx + n$ در نظر می گیریم. برای اینکه خط مذکور از این نقاط عبور کند باید مختصات نقاط در آن صدق نماید. با قرار دادن هر یک از نقاط بالا در معادله خط، معادلات زیر بدست می آیند،

$$\left.\begin{array}{l} m+n=-1 \\ 4m+n=11 \\ -m+n=-9 \\ -2m+n=-13 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 11 \\ -9 \\ -13 \end{bmatrix}$$

با حل معادلات بالا جواب $m = 4$ و $n = -5$ بدست می آید. بنابراین معادله خط مذکور بصورت $y = 4x - 5$ می باشد. لازم به ذکر است که این نمونه ای از یک دستگاه معادلات سازگار است. سازگار بودن سیستم را می توان بصورت زیر بررسی کرد،

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \text{rank}(A) = \text{rank}(A\,|\,\mathbf{b}) = 2$$

□

مثال ۴-۹

معادله خطی را بیابید که از چهار نقطه زیر عبور کند،

$$(-3,70),\quad (1,21),\quad (-7,110),\quad (5,-35)$$

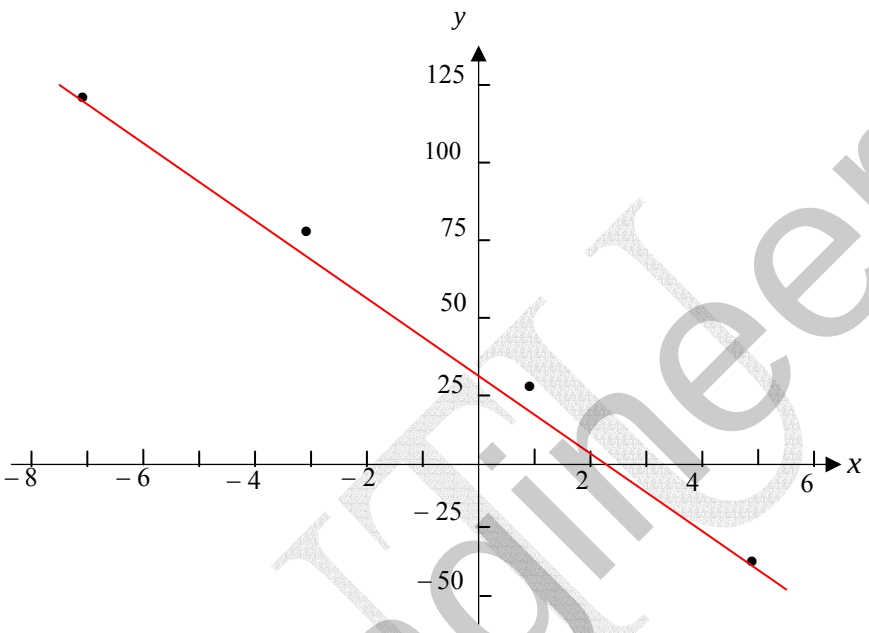
همانند آنچه که در مثال قبل انجام شد، با قرار دادن هر یک از نقاط در معادله خط، معادلات زیر بدست می آیند،

$$\left.\begin{array}{l} -3m+n=70 \\ m+n=21 \\ -7m+n=110 \\ 5m+n=-35 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \\ -7 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 \\ 21 \\ 110 \\ -35 \end{bmatrix}$$

از آنجائیکه این دستگاه معادلات ناسازگار است، لذا پاسخی برای آن وجود ندارد. پس بر خلاف مثال قبل در این حالت نمی توان خطی را از این چهار نقطه عبور داد. ناسازگار بودن سیستم را بررسی کرد،

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \text{rank}(A) = 2 \quad , \quad \text{rank}(A\,|\,\mathbf{b}) = 3$$

لذا $\mathbf{b} \notin R(A)$ و سیستم ناسازگار است. برای اینکه این سیستم ناسازگار را بیشتر بررسی نماییم نمودار مختصات نقاط را رسم می نماییم،



شکل(۴-۳)- چهار نقطه از سیستم نازگار

با توجه به شکل بالا چهار نقطه مذکور بر روی یک خط راست قرار ندارند و همانطور که گفته شد، دستگاه معادلات حاصل نیز ناسازگار می باشد. لیکن ممکن است این چهار نقطه از نتایج تجربی یک سری آزمایشات بدست آمده و به خاطر برخی خطاهای فیزیکی و اندازه گیری از مقدار واقعی خود منحرف شده بر راستای یک خط راست قرار نگرفته باشند. در اینجا مسئله ای که مطرح می شود آن است که آیا می توان معادله خطی را بدست آورد که این چهار نقطه بطور تقریبی بر روی آن قرار گیرد؟

□

۴-۳-۱- تعریف مسئله حداقل مربعات[۱]

دستگاه معادلات خطی ناسازگار زیر را در نظر بگیرید،

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

چون سیستم ناسازگار است $\mathbf{b} \notin R(A)$ و برای هیچ مقدار از $\mathbf{x}$ تساوی مذکور برقرار نیست. لذا داریم،

$$\varepsilon = \mathbf{b} - A\mathbf{x} \qquad (۱۰-۴)$$

[۱] Least Square Problem

که در آن ε **بردار خطا**[1] می باشد، اندازه خطا با استفاده از نُرم دو بصورت زیر تعریف می شود،

$$\|\varepsilon\| = \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\| \qquad (۱۱-۴)$$

برای یک سیستم ناسازگار $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$، هدف یافتن برداری مانند $\hat{\mathbf{x}}$ است، بطوریکه خطای محاسبه شده بصورت $\|\hat{\varepsilon}\| = \|\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}\|$ کوچکترین مقدار خطای ممکن باشد. در اینصورت بردار $\hat{\mathbf{x}}$ را **جواب حداقل مربعات**[2] می گویند. در واقع باید بردار $\hat{\mathbf{b}} = A\hat{\mathbf{x}}$ تا حد ممکن به بردار $\mathbf{b}$ شبیه باشد و مسخص است که باید $\hat{\mathbf{b}} \in R(A)$ باشد. پس به دنبال بهترین تقریب برای بردار $\mathbf{b}$ در $R(A)$ هستیم. برای این منظور باید $\hat{\mathbf{b}}$ را بصورت زیر انتخاب نماییم،

$$\hat{\mathbf{b}} = \text{proj}_{R(A)}\mathbf{b} \qquad (۱۲-۴)$$

یعنی تصویر متعامد بردار $\mathbf{b}$ بر روی فضای گستره ماتریس A بهترین تقریب ممکن است. لذا برای حل مسئله حداقل مربعات باید ابتدا $\hat{\mathbf{b}} = \text{proj}_{R(A)}\mathbf{b}$ را بیابیم و سپس معادله $\hat{\mathbf{b}} = A\hat{\mathbf{x}}$ را حل کنیم.

قضیه: اگر V_2 یک زیرفضای برداری از فضای برداری V_1 و $\mathbf{u} \in V_1$ باشد، بهترین تقریب برای بردار $\mathbf{u}$ در زیرفضای V_2 تصویر متعامد آن بر V_2، یعنی $\text{proj}_{V_2}\mathbf{u}$ می باشد و برای هر تقریب دیگری مانند بردار $\mathbf{w}$ (غیر از $\text{proj}_{V_2}\mathbf{u}$) اندازه خطا بزرگتر خواهد بود،

$$\|\mathbf{u} - \text{proj}_{V_2}\mathbf{u}\| < \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| \qquad (۱۳-۴)$$

اثبات: برای هر بردار $\mathbf{w} \in V_2$ می توان نوشت،

$$\mathbf{u} - \mathbf{w} = (\mathbf{u} - \text{proj}_{V_2}\mathbf{u}) + (\text{proj}_{V_2}\mathbf{u} - \mathbf{w})$$

در عبارت اخیر جزء $(\text{proj}_{V_2}\mathbf{u} - \mathbf{w})$ تفاضل دو بردار در زیر فضای V_2 را نشان می دهد، که حاصل آن نیز در همان زیر فضای V_2 قرار دارد. لیکن جزء $(\mathbf{u} - \text{proj}_{V_2}\mathbf{u})$ در واقع همان $\text{proj}_{V_2^\perp}\mathbf{u}$ است، که مؤلفه عمودی بردار $\mathbf{u}$ بر زیر فضای V_2 می باشد، لذا با هر بردار در زیرفضای V_2 متعامد می باشد. از این رو بردارهای $(\text{proj}_{V_2}\mathbf{u} - \mathbf{w})$ و $(\mathbf{u} - \text{proj}_{V_2}\mathbf{u})$ متعامد هستند. بنابر رابطه فیثاغورث می توان نوشت،

$$\|\mathbf{u}\text{-}\mathbf{w}\|^2 = \|(\mathbf{u} - \text{proj}_{V_2}\mathbf{u}) + (\text{proj}_{V_2}\mathbf{u} - \mathbf{w})\|^2 = \|(\mathbf{u} - \text{proj}_{V_2}\mathbf{u})\|^2 + \|(\text{proj}_{V_2}\mathbf{u} - \mathbf{w})\|^2$$

حال اگر $\mathbf{w} \neq \text{proj}_{V_2}\mathbf{u}$ باشد در اینصورت $\|(\text{proj}_{V_2}\mathbf{u} - \mathbf{w})\|^2 > 0$ است. بنابراین داریم،

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2 > \|(\mathbf{u} - \text{proj}_{V_2}\mathbf{u})\|^2 \quad \rightarrow \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| > \|(\mathbf{u} - \text{proj}_{V_2}\mathbf{u})\|$$

□

[1] Error Vector
[2] Least Square Solution

مثال ۴-۱۰

برای سیستم ناسازگار زیر پاسخ مسئله حداقل مربعات را با استفاده از تصاویر متعامد بیابید.

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}\rightarrow \begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & 1\\ -7 & 1\\ 5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\ n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}70\\ 21\\ 110\\ -35\end{bmatrix}\xrightarrow{rref}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\ n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

ابتدا با استفاده از فرایند گرام- اشمیت پایه های یکامتعامد $R(A)$ را بدست می آوریم سپس تصویر متعامد بردار $\mathbf{b}$ را بر روی پایه ها بدست آوریم،

$$R(A)=\left\{\begin{bmatrix}-3\\ 1\\ -7\\ 5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}\right\}$$

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{a}_1=[-3,1,-7,5]\quad\rightarrow\quad \mathbf{w}_1=\left[\tfrac{-3}{2\sqrt{21}},\tfrac{1}{2\sqrt{21}},\tfrac{-7}{2\sqrt{21}},\tfrac{5}{2\sqrt{21}}\right]$$

$$\mathbf{v}_2=\mathbf{a}_2-\frac{\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{a}_2\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1=[1,1,1,1]-\frac{-4}{84}[-3,1,-7,5]=\left[\tfrac{18}{21},\tfrac{22}{21},\tfrac{14}{21},\tfrac{26}{21}\right]$$

$$\mathbf{w}_2=\left[\tfrac{18}{4\sqrt{105}},\tfrac{22}{4\sqrt{105}},\tfrac{14}{4\sqrt{105}},\tfrac{26}{4\sqrt{105}}\right]$$

حال تصویر بردار $\mathbf{b}$ را بر روی پایه های یکامتعامد $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2$ بدست می آوریم،

$$\hat{\mathbf{b}}=\text{proj}_{R(A)}\mathbf{b}=\langle\mathbf{w}_1,\mathbf{b}\rangle\mathbf{w}_1+\langle\mathbf{w}_2,\mathbf{b}\rangle\mathbf{w}_2$$

$$\hat{\mathbf{b}}=\left(\frac{-567}{\sqrt{21}}\right)\begin{bmatrix}\frac{-3}{2\sqrt{21}}\\ \frac{1}{2\sqrt{21}}\\ \frac{-7}{2\sqrt{21}}\\ \frac{5}{2\sqrt{21}}\end{bmatrix}+\left(\frac{588}{\sqrt{105}}\right)\begin{bmatrix}\frac{18}{4\sqrt{105}}\\ \frac{22}{4\sqrt{105}}\\ \frac{14}{4\sqrt{105}}\\ \frac{26}{4\sqrt{105}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}65.7\\ 17.3\\ 114.1\\ -31.1\end{bmatrix}$$

حال با حل معادله $A\hat{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{b}}$ جواب مسئله حداقل مربعات را بدست می آوریم،

$$A\hat{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{b}}\rightarrow\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & 1\\ -7 & 1\\ 5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\ n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}65.7\\ 17.3\\ 114.1\\ -31.1\end{bmatrix}\xrightarrow{rref}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\ n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-12.1\\ 29.4\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

بنابراین بهترین تقریب برای خطی که از چهار نقطه $(-3,70),(1,21),(-7,110),(5,-35)$ بگذرد بصورت زیر می باشد،

$$y=mx+n=-12.1x+29.4$$

□

۴-۳-۲- استفاده از معادلات نرمال

یکی از روش های حل مسئله حداقل مربعات با ماتریس A رتبه کامل و خوش حالت، استفاده از معادلات نرمال است.

قضیه: اگر بردار $\hat{\mathbf{x}}$ جواب مسئله حداقل مربعات برای یک دستگاه معادلات خطی ناسازگار بصورت $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ باشد، می تواند جواب دستگاه معادلات خطی زیر نیز باشد،

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b} \qquad (۱۴-۴)$$

که به آن **معادلات نرمال**[۱] گفته می شود، از این رو اگر ماتریس A رتبه کامل و خوش حالت باشد، در اینصورت می توان یک پاسخ حداقل مربعات منحصر بفرد بصورت زیر بدست آورد،

$$\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T\mathbf{b} \qquad (۱۵-۴)$$

این جوابی است که $\|A\mathbf{x}-\mathbf{b}\|$ را مینیمم می نماید.

اثبات: فرض کنید بردار $\hat{\mathbf{x}}$ جواب مسئله حداقل مربعات باشد، لذا داریم،

$$A\hat{\mathbf{x}} = \text{proj}_{R(A)}\mathbf{b}$$

این رابطه را می توان بصورت زیر بازنویسی کرد،

$$\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b} - \text{proj}_{R(A)}\mathbf{b}$$

می دانیم بردار $\mathbf{b} - \text{proj}_{R(A)}\mathbf{b}$ متعلق به زیر فضای $R(A)^{\perp}$ یا همان $N(A^T)$ می باشد. طبق تعریف $N(A^T)$ داریم،

$$N(A^T) = \{\mathbf{x} \in \Re^m \rightarrow A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

لذا باید داشته باشیم،

$$A^T(\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}) = A^T(\mathbf{b} - \text{proj}_{R(A)}\mathbf{b}) = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad A^T\mathbf{b} = A^T A\hat{\mathbf{x}}$$

حال اگر ماتریس A رتبه کامل باشند ماتریس $A^T A$ معکوس پذیراست. لذا جواب منحصر بفرد این معادله بصورت زیر بدست می آید،

$$\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T\mathbf{b}$$

که همان جواب حداقل مربعات است. بنابراین می توان گفت که $\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T\mathbf{b}$ مقدار $\|A\mathbf{x}-\mathbf{b}\|$ را مینیمم می کند.

□

با توجه به نتیجه بدست آمده بردار $\hat{\mathbf{b}} = \text{proj}_{R(A)}\mathbf{b}$ را می توان بصورت زیر نیز بیان کرد،

$$A\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{b}} \quad \rightarrow \quad \hat{\mathbf{b}} = A(A^T A)^{-1} A^T\mathbf{b} = P\mathbf{b} \qquad (۱۶-۴)$$

---

[۱] Normal Equations

ماتریس P را، **ماتریس تصویر**[۱] $R(A)$ گویند. با استفاده از این ماتریس می توان تصویر متعامد هر بردار $\mathbf{b}_{m\times 1}$ را بر روی $R(A_{m\times n})$ بدست آورد. همچنین ماتریس $A^L=(A^TA)^{-1}A^T$ را **معکوس چپ**[۲] ماتریس A گویند،

$$A^L=(A^TA)^{-1}A^T \qquad (۱۷-۴)$$

زیرا اگر از سمت چپ در A ضرب شود ماتریس واحد I_n را می دهد،

$$A^{LM}A=(A^TA)^{-1}A^TA=(A^TA)^{-1}(A^TA)=I_n$$

مثال ۴-۱۱

حال دستگاه معادلات ناسازگار مثال قبل را با استفاده از معادلات نرمال حل می کنیم،

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}\rightarrow \begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & 1\\ -7 & 1\\ 5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\ n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}70\\ 21\\ 110\\ -35\end{bmatrix}$$

با توجه به معادلات نرمال داریم،

$$A^TA\hat{\mathbf{x}}=A^T\mathbf{b} \quad \rightarrow \begin{bmatrix}-3 & 1 & -7 & 5\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & 1\\ -7 & 1\\ 5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{m}\\ \hat{n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 1 & -7 & 5\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}70\\ 21\\ 110\\ -35\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}84 & -4\\ -4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{m}\\ \hat{n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1134\\ 166\end{bmatrix}\rightarrow \quad \hat{m}=\frac{-121}{10}=-12.1, \qquad \hat{n}=\frac{147}{5}=29.4$$

$$\hat{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}\hat{m}\\ \hat{n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-12.1\\ 29.4\end{bmatrix}$$

بنابراین بهترین تقریب برای خطی که از چهار نقطه $(-3,70),(1,21),(-7,110),(5,-35)$ بگذرد بصورت زیر می باشد، که همان نتیجه مثال قبل است،

$$y=-12.1x+29.4$$

حال می توان در صورت نیاز خطای تقریب را نیز محاسبه کرد،

[۱] Projection Matrix
[۲] Left Inverse

$$\varepsilon = \mathbf{b} - A\mathbf{x} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 \\ 21 \\ 110 \\ -35 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \\ -7 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70-(-3m+n) \\ 21-(m+n) \\ 110-(-7m+n) \\ -35-(5m+n) \end{bmatrix}$$

با در نظر گرفتن مقدار تقریب $\hat{\mathbf{x}}$ می توان نوشت،

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12.1 \\ 29.4 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \hat{\varepsilon}_1 = 70-(-12.1(-3)+29.4) = 4.3 \\ \hat{\varepsilon}_2 = 21-(-12.1(1)+29.4) = 3.7 \\ \hat{\varepsilon}_3 = 110-(-12.1(-7)+29.4) = -4.1 \\ \hat{\varepsilon}_4 = -35-(-12.1(5)+29.4) = -3.9 \end{cases}$$

بنابراین بردار خطا بصورت زیر بدست می آید،

$$\begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \hat{\varepsilon}_3 \\ \hat{\varepsilon}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.3 \\ 3.7 \\ -4.1 \\ -3.9 \end{bmatrix}$$

مقدار نُرم خطا را می توان به شکل زیر محاسبه کرد،

$$\|\hat{\varepsilon}\|^2 = (4.3)^2 + (3.7)^2 + (-4.1)^2 + (-3.9)^2 = 64.2 \quad , \quad \|\varepsilon\| = \sqrt{64.2} = 8.0125$$

در واقع هر مقدار دیگری برای m و n انتخاب گردد نُرم خطا بزرگتر از 8.0125 خواهد شد.

در نرم افزار MATLAB اگر ماتریس A رتبه کامل و خوش حالت باشد از عملگر تقسیم چپ (\ ) می توان برای حل مسئله حداقل مربعات سیستم ناسازگار $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ استفاده نمود.

```
A =[-3 1;1 1;-7 1;5 1];
b =[70;21;110;-35];
x = A \ b
x =
   -12.1000
    29.4000
e = norm(A*x - b)
e =
    8.0125
```

اگر نقص رتبه وجود داشته باشد پیغام اخطار مربوطه ظاهر می گردد، در اینصورت می توان از دستور pinv(A) استفاده نمود این دستور شبه معکوس ماتریس A را محاسبه می نماید. البته تعداد

محاسباتی که در این حالت انجام می شود بیشتر از حالتی است که از عملگر تقسیم چپ(\ ) استفاده می شود. تعریف شبه معکوس و نحوه محاسبه آن در مباحث بعدی آورده شده است. به مثال زیر توجه نمایید،

```
A = [2 1; 1 10; 1 2];
b = [1 2 3]';
flops(0)
x = A\b
nflps = flops
x =
     0.9151
     0.1509
nflps =
        92
flops(0)
x = pinv(A)*b
nflps = flops
x =
     0.9151
     0.1509
nflps =
       196
```

□

مثال۴-۱۲

ماتریس A و بردار $\mathbf{b}$ را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 4\end{bmatrix}$$

الف) سازگار یا ناسازگار بودن دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ را بررسی نمایید.

- از آنجاییکه $\operatorname{rank}(A)=2$ و $\operatorname{rank}(A|\mathbf{b})=3$ است، لذا سیستم ناسازگار است. این را می توان از روی فرم سطری پلکانی کاهش یافته سیستم نتیجه گرفت،

$$[A|\mathbf{b}]=\left[\begin{array}{cc|c}1&1&2\\0&1&3\\0&0&4\end{array}\right]\xrightarrow{rref}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right]$$

ب) بردار $\hat{\mathbf{b}}$ یعنی تصویر متعامد بردار $\mathbf{b}$ بر روی $R(A)$ و ماتریس تصویر $R(A)$ را بدست آورید.

- برای بدست آوردن بردار $\hat{\mathbf{b}}$ دو روش را می توان بکار برد،

۱- با استفاده از متعامد سازی و روش گرام- اشمیت می توان تصویر متعامد بردار $\mathbf{b}$ بر روی $R(A)$ را محاسبه کرد، ابتدا پایه های یکامتعامد $R(A)$ را بدست می آوریم،

$$R(A)=sp\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

پایه های یکامتعامد با روش گرام- اشمیت $\rightarrow$ $\mathbf{w}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\mathbf{w}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$

حال تصویر بردار $\mathbf{b}$ را بر روی پایه های $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2$ بدست می آوریم،

$$\hat{\mathbf{b}}=\langle\mathbf{w}_1,\mathbf{b}\rangle\mathbf{w}_1+\langle\mathbf{w}_2,\mathbf{b}\rangle\mathbf{w}_2\quad\rightarrow\quad\hat{\mathbf{b}}=\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix}$$

۲- با استفاده از معادلات نرمال بردار $\hat{\mathbf{b}}$ بصورت زیر بدست می آید،

$$\hat{\mathbf{b}}=A\hat{\mathbf{x}}=A(A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}\quad\rightarrow\quad\hat{\mathbf{b}}=\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix}$$

- ماتریس تصویر $R(A)$ در واقع ارتباط بین بردار $\mathbf{b}$ و $\hat{\mathbf{b}}$ است که بصورت زیر بدست می آید،

$$\hat{\mathbf{b}}=A(A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}=P\mathbf{b}\quad\rightarrow\quad P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

ج) یک معکوس چپ برای ماتریس A بیابید.

- معکوس چپ ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$A^L=(A^TA)^{-1}A^T\quad\rightarrow\quad A^L=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

□

مثال۴-۱۳

ناسازگار بودن دستگاه معادلات را بررسی نمایید و جواب حداقل مربعات را با روش معادلات نرمال محاسبه کنید.

الف) $\begin{cases} 2x_1 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_2 = -1 \end{cases}$

ابتدا سازگار یا ناسازگار بودن را بررسی می کنیم،

$\text{rank}(A) = 2, \quad \text{rank}(A \mid \mathbf{b}) = 3 \quad \rightarrow$ سیستم ناسازگار است

حال جواب حداقل مربعات را بدست می آوریم،

$$A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b} \quad \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \rightarrow \quad \hat{x}_1 = 0.333, \quad \hat{x}_2 = -0.333$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.333 \\ -0.333 \end{bmatrix}$$

به حل مسئله در نرم افزار MATLAB توجه نمایید،

```
A =[2 0;-1 1;0 2];
b =[1;0;-1];
flops(0)
x = inv(A'*A)* A'*b
x =
    0.3333
   -0.3333
nflops = flops
nflops =
    105
```

در اینجا از دستور inv برای بدست آوردن جواب استفاده کردیم و تعداد محاسبات را نیز بدست آوردیم. حال یکبار هم با استفاده از عملگر (\) مسئله را حل می کنیم و تعداد محاسبات را مقایسه می نماییم،

```
flops(0)
x =(A'*A)\(A'*b)
x =
    0.3333
   -0.3333
nflops = flops
nflops =
   57
```

تعداد محاسبات در این حالت بسیار کمتر است و برای ماتریس های با ابعاد بالا استفاده از دستور inv اکیداً توصیه نمی شود.

ب)
$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

ابتدا سازگار یا ناسازگار بودن را بررسی می کنیم،

$$\text{rank}(A) = 3, \qquad \text{rank}(A\,|\,\mathbf{b}) = 4 \quad \rightarrow \quad \text{سیستم ناسازگار است}$$

حال جواب حداقل مربعات را بدست می آوریم،

$$A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 4 & 10 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 10 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 4 & 10 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 24 \\ 0 & 12 & 20 \\ 24 & 20 & 124 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 0 \\ 92 \end{bmatrix} \rightarrow \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5455 \\ -1.9318 \\ 1.1591 \end{bmatrix}$$

به حل مسئله در نرم افزار MATLAB توجه نمایید،

```
A =[1 0 4;2 2 10;1 -2 2;1 -2 -2];
b =[3;7;6;1];
x =(A'*A)\(A'*b)
x =
   -0.5455
   -1.9318
    1.1591
```

□

۴-۳-۳- استفاده از تجزیه چالسکی

یکی از کاربردهای تجزیه چالسکی استفاده از آن در حل مسئله حداقل مربعات می باشد. معادلات نرمال را در نظر بگیرید،

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

می دانیم زمانیکه ماتریس A رتبه کامل باشد، ماتریس $A^T A$ یک ماتریس مثبت معین است. برای نشان دادن این موضوع می توان از تعریف ماتریس مثبت معین استفاده نمود،

$$\mathbf{x}^{\mathbf{T}}(A^T A)\mathbf{x} = (A\mathbf{x})^{\mathrm{T}}(A\mathbf{x}) = \begin{cases} \|A\mathbf{x}\|^2 > 0 & , \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ \|A\mathbf{x}\|^2 = 0 & , \quad \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases}$$

لذا می توان تجزیه چالسکی $A^T A$ را بدست آورد و برای بدست آوردن جواب مسئله حداقل مربعات از طریق تجزیه چالسکی روند زیر را طی نمود،

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b} \quad \xrightarrow{C=A^T A} \quad C\mathbf{x} = A^T\mathbf{b} \quad \xrightarrow{\mathbf{d}=C\mathbf{x}} \quad \mathbf{d} = A^T\mathbf{b}$$

سپس تجزیه چالسکی ماتریس C را بصورت $C = LL^T$ بدست آورده و معادلات زیر را حل نمود،

$$\begin{cases} L\mathbf{z} = \mathbf{d} \\ L^T\mathbf{x} = \mathbf{z} \end{cases} \tag{۱۸-۴}$$

مثال ۴-۱۴

برای دستگاه معادلات زیر مسئله حداقل مربعات را با استفاده از تجزیه چالسکی حل نمایید،

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -6 & 26 \\ 4 & -8 & -7 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

از آنجاییکه $\mathrm{rank}(A) = 3$ و $\mathrm{rank}(A\,|\,\mathbf{b}) = 4$ است، لذا سیستم ناسازگار است.

ابتدا مقدارهای $C = A^T A$ و $\mathbf{d} = A^T\mathbf{b}$ را بدست می آوریم،

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 30 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{-13}{5} \\ 4 \end{bmatrix}$$

سپس معادله نرمال را حل می نماییم،

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b} \rightarrow C\mathbf{x} = \mathbf{d} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 30 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{-13}{5} \\ 4 \end{bmatrix}$$

تجزیه چالسکی ماتریس C بصورت زیر می باشد،

$$C = LL^T \quad \rightarrow \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

حال باید دستگاه معادلات را حل نمائیم،

$$L\mathbf{z} = \mathbf{d} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{-13}{5} \\ 4 \end{bmatrix}$$

از این معادلات مقدار $[z_1, z_2, z_3] = [\frac{7}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}]$ بدست می آید و سرانجام با حل دستگاه معادلات آخر پاسخ مسئله حداقل مربعات محاسبه می گردد،

$$L^T\mathbf{x} = \mathbf{z} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

و از اینجا $[x_1, x_2, x_3] = [\frac{41}{25}, \frac{4}{25}, \frac{1}{25}]$ بدست می آید.

با استفاده از نرم افزار MATLAB می توان برنامه ای بصورت زیر نوشت، در این برنامه ابتدا تجزیه چالسکی ماتریس $A^T A$ محاسبه و سپس با توجه به الگوریتم موجود پاسخ حداقل مربعات و نرم دو خطای حاصل از تقریب محاسبه می گردد،

```
A =(1/5)*[3 -6 26;4 -8 -7;0 4 4;0 -3 -3];
b =[1;1;1;1];
U = chol(A'*A);
x = U\(U'\(A'*b))
x =
    1.6400
    0.1600
    0.0400
e = norm(A*x - b)
e =
    1.4000
```

□

مثال ۴-۱۵

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 2\end{bmatrix}$$

ابتدا سازگار یا ناسازگار بودن دستگاه معادلات را بررسی نمایید. سپس جواب حداقل مربعات را تجزیه چالسکی بدست آورید.

- از آنجاییکه $\text{rank}(A)=2$ و $\text{rank}(A\,|\,\mathbf{b})=3$ است، لذا سیستم ناسازگار است.

- ابتدا مقدارهای $C=A^TA$ و $\mathbf{d}=A^T\mathbf{b}$ را بدست می آوریم،

$$C=\begin{bmatrix}3 & 7\\ 7 & 21\end{bmatrix}\quad,\quad \mathbf{d}=\begin{bmatrix}5\\ 13\end{bmatrix}$$

- سپس معادلات نرمال را با استفاده از تجزیه چالسکی حل می نماییم،

$$A^TA\mathbf{x}=A^T\mathbf{b}\rightarrow C\mathbf{x}=\mathbf{d}\rightarrow\begin{bmatrix}3 & 7\\ 7 & 21\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 13\end{bmatrix}$$

تجزیه چالسکی ماتریس C بصورت زیر می باشد،

$$C=LL^T\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}3 & 7\\ 7 & 21\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_{11} & 0\\ l_{21} & l_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}l_{11} & l_{21}\\ 0 & l_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_{11}^2 & l_{11}l_{21}\\ l_{21}l_{11} & l_{21}^2+l_{22}^2\end{bmatrix}$$

$$l_{11}^2=3\quad\rightarrow\quad l_{11}=\sqrt{3}$$

$$l_{11}l_{21}=7\quad\rightarrow\quad l_{21}=\frac{7}{\sqrt{3}}$$

$$l_{21}^2+l_{22}^2=21\quad\rightarrow\quad l_{22}=\sqrt{21-\frac{49}{3}}=\sqrt{\frac{14}{3}}$$

$$C=\begin{bmatrix}3 & 7\\ 7 & 21\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0\\ \frac{7}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{14}{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & \frac{7}{\sqrt{3}}\\ 0 & \sqrt{\frac{14}{3}}\end{bmatrix}$$

- حال باید دستگاه معادلات را حل نمائیم،

$$L\mathbf{z}=\mathbf{d}\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0\\ \frac{7}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{14}{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 13\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad z_1=\frac{5}{\sqrt{3}},\qquad z_2=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{14}}$$

$$L^T\mathbf{x}=\mathbf{z}\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}\sqrt{3} & \frac{7}{\sqrt{3}}\\ 0 & \sqrt{\frac{14}{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{\sqrt{3}}\\ \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{14}}\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad x_1=1,\qquad x_2=\frac{2}{7}$$

لذا جواب حداقل مربعات بصورت $[x_1,x_2]=[1,\frac{2}{7}]$ بدست می آید.

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[1 1;1 2;1 4];
b =[1;2;2];
U = chol(A'*A);
x = U\(U'\(A'*b))
x =
    1.0000
    0.2857
e = norm(A*x - b)
e =
    0.5345
```

□

۴-۳-۴- استفاده از تجزیه QR

یکی دیگر از روش های حل مسئله حداقل مربعات استفاده از **تجزیه QR**[۱] ماتریس ها است. در این روش ماتریس $A_{m\times n}$ رتبه کامل به حاصلضرب دو ماتریس $A = QR$ تجزیه می گردد، که در آن، $Q_{m\times n}$ یک ماتریس متعامد و $R_{n\times n}$ یک ماتریس معکوس پذیر بالا مثلثی با عناصر قطری مثبت است. با استفاده از این تجزیه معادلات نرمال را بصورت زیر می توان حل نمود،

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

$$(QR)^T QR\mathbf{x} = (QR)^T\mathbf{b}$$

$$R^T Q^T QR\mathbf{x} = R^T Q^T\mathbf{b}$$

از آنجائیکه $Q_{m\times n}$ یک ماتریس متعامد است، $Q^T Q = I_n$ می باشد. لذا،

$$R^T I_n R\mathbf{x} = R^T Q^T\mathbf{b} \quad \rightarrow \quad R^T R\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

از طرفی چون $R_{n\times n}$ یک ماتریس معکوس پذیر است، R^T نیز معکوس پذیر می باشد. بنابراین داریم،

$$R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b} \qquad (۱۹-۴)$$

لذا برای بدست آوردن بردار $\mathbf{x}$ باید ابتدا تجزیه $A = QR$ را بدست آورده و سپس دستگاه معادلات زیر را حل نماییم،

$$\begin{cases} \mathbf{y} = Q^T\mathbf{b} \\ R\mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases} \qquad (۲۰-۴)$$

[۱] QR Factorization

مثال ۴-۱۶

برای دستگاه معادلات زیر مسئله حداقل مربعات را با استفاده از تجزیه QR حل نمایید،

$$\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -6 & 26 \\ 4 & -8 & -7 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

تجزیه $A = QR$ بفرم زیر می باشد،

$$A = QR \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-6}{5} & \frac{26}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{-8}{5} & \frac{-7}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & \frac{-3}{5} & \frac{-3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{-3}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & \frac{-3}{5} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

بردار $\mathbf{y} = Q^T\mathbf{b}$ بصورت زیر بدست می آید،

$$\mathbf{y} = Q^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

حال با حل معادله $R\mathbf{x} = \mathbf{y}$ مقدار $\mathbf{x}$ را بدست می آوریم،

$$R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

لذا جواب حداقل مربعات بصورت $\mathbf{x} = [\frac{41}{25}, \frac{4}{25}, \frac{1}{25}]$ بدست می آید.

□

برای بدست آوردن ماتریس Q و R از فرایند گرام- اشمیت استفاده می نماییم. ماتریس رتبه کامل $A_{m\times n} = [\mathbf{a}_1 \,|\, \mathbf{a}_2 \,|\cdots|\, \mathbf{a}_n]$ را در نظر بگیرید، از آنجائیکه رتبه ماتریس کامل است، ستون های ماتریس $A_{m\times n}$ مستقل خطی می باشند، لذا می توان آنها را به عنوان بردارهای پایه برای فضای گستره ماتریس $A_{m\times n}$، یعنی $R(A)$، در نظر گرفت. از طرفی می توان با اعمال فرآیند گرام – اشمیت این بردارهای پایه را به بردارهای پایه متعامد تبدیل کرد، بنابراین داریم،

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \mathbf{a}_1 \\
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{a}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{a}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 \\
\mathbf{v}_3 &= \mathbf{a}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{a}_3 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{a}_3 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 \\
&\vdots \\
\mathbf{v}_n &= \mathbf{a}_n - \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{a}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{a}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 - \cdots - \frac{\langle \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{a}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_{n-1}\|^2}\mathbf{v}_{n-1}
\end{aligned}
$$

لذا بردارهای $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ پایه های متعامد هستند. حال می توان معادلات بالا را بصورت زیر بازنویسی کرد،

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= \mathbf{v}_1 \\
\mathbf{a}_2 &= \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{a}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \\
\mathbf{a}_3 &= \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{a}_3 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{a}_3 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \\
&\vdots \\
\mathbf{a}_n &= \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{a}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{a}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{a}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_{n-1}\|^2}\mathbf{v}_{n-1} + \mathbf{v}_n
\end{aligned}
$$

نمایش ماتریسی این معادلات به فرم زیر خواهد بود،

$$
A = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n]
\begin{bmatrix}
1 & \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{a}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} & \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{a}_3 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} & \cdots & \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{a}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \\
0 & 1 & \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{a}_3 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2} & \cdots & \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{a}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \\
0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{a}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_3\|^2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\langle \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{a}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_{n-1}\|^2} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{bmatrix}
$$

در این مرحله ماتریس $A_{m\times n}$ را بصورت حاصلضرب یک ماتریس با بردارهای ستونی متعامد در یک ماتریس بالا مثلثی با عناصر قطری یک نمایش دادیم. لذا برای بدست آوردن ماتریس $Q_{m\times n}$ کافی است که بردارهای ستونی متعامد را به بردارهای یکامتعامد تبدیل نماییم. به این ترتیب معادلات به فرم زیر در می آیند،

$$A=[\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \mathbf{q}_3 \quad \cdots \quad \mathbf{q}_n]\begin{bmatrix} \|\mathbf{v}_1\| & \frac{\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{a}_2\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|} & \frac{\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{a}_3\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|} & \cdots & \frac{\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{a}_n\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|} \\ 0 & \|\mathbf{v}_2\| & \frac{\langle \mathbf{v}_2,\mathbf{a}_3\rangle}{\|\mathbf{v}_2\|} & \cdots & \frac{\langle \mathbf{v}_2,\mathbf{a}_n\rangle}{\|\mathbf{v}_2\|} \\ 0 & 0 & \|\mathbf{v}_3\| & \cdots & \frac{\langle \mathbf{v}_3,\mathbf{a}_n\rangle}{\|\mathbf{v}_3\|} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\langle \mathbf{v}_{n-1},\mathbf{a}_n\rangle}{\|\mathbf{v}_{n-1}\|} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \|\mathbf{v}_n\| \end{bmatrix}$$

که در آن $\mathbf{q}_i=\frac{\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|}$ می باشد. بنابراین توانستیم تجزیه $A=QR$ را بدست آوریم، که در آن ستون های ماتریس $Q_{m\times n}=[\mathbf{q}_1\,|\,\mathbf{q}_2\,|\cdots|\,\mathbf{q}_n]$ همان پایه های یکامتعامد شده می باشند و $R_{n\times n}$ یک ماتریس معکوس پذیر بالا مثلثی با عناصر قطری مثبت می باشد. حال می توان نشان داد که ماتریس بالا مثلثی $R_{n\times n}$ بصورت زیر قابل ساده سازی است،

$$R_{n\times n}=\begin{bmatrix} \|\mathbf{v}_1\| & \langle \mathbf{q}_1,\mathbf{a}_2\rangle & \langle \mathbf{q}_1,\mathbf{a}_3\rangle & \cdots & \langle \mathbf{q}_1,\mathbf{a}_n\rangle \\ 0 & \|\mathbf{v}_2\| & \langle \mathbf{q}_2,\mathbf{a}_3\rangle & \cdots & \langle \mathbf{q}_2,\mathbf{a}_n\rangle \\ 0 & 0 & \|\mathbf{v}_3\| & \cdots & \langle \mathbf{q}_3,\mathbf{a}_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \langle \mathbf{q}_{n-1},\mathbf{a}_n\rangle \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \|\mathbf{v}_n\| \end{bmatrix} \qquad (۲۱-۴)$$

تعداد عملیات محاسباتی در حل دستگاه معادلات $A_{m\times n}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ با استفاده از تجزیه QR بصورت زیر بدست می آید،

۱- تجزیه QR ماتریس A بصورت $A=QR$: $2mn^2 \rightarrow \text{flops}$

۲- بدست آوردن بردار $\mathbf{y}=Q^T\mathbf{b}$: $2mn \rightarrow \text{flops}$

۳- حل معادله $R\mathbf{x}=\mathbf{y}$ با روش جایگزینی پسرو: $n^2 \rightarrow \text{flops}$

مثال۴-۱۷

برای ماتریس A معرفی شده در زیر تجزیه QR را با استفاده از فرایند گرام- اشمیت بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 7\\ 0 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

با توجه به اینکه $|A|\neq 0$ است، پس ستون های ماتریس A مستقل خطی هستند. اگر ماتریس A را بصورت $A=[\mathbf{a}_1\,|\,\mathbf{a}_2\,|\,\mathbf{a}_3]$ در نظر بگیریم، ستون های آن بصورت زیر بدست می آیند،

$$\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{a}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\quad \mathbf{a}_3=\begin{bmatrix}3\\7\\-1\end{bmatrix}$$

با اعمال فرآیند گرام-اشمیت بردارهای یکامتعامد زیر بدست می آیند،

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{5}\\\frac{2}{5}\\-1\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}\frac{8}{3}\\\frac{16}{3}\\\frac{8}{3}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_1=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{-1}{\sqrt5}\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{q}_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{30}}\\\frac{2}{\sqrt{30}}\\\frac{-5}{\sqrt{30}}\end{bmatrix},\quad \mathbf{q}_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{v}_1\|=\sqrt5,\quad \|\mathbf{v}_2\|=\frac{\sqrt{30}}{5},\quad \|\mathbf{v}_3\|=\frac{8\sqrt6}{3}$$

بنابراین، ماتریس Q بصورت $Q=[\mathbf{q}_1\,|\,\mathbf{q}_2\,|\,\mathbf{q}_3]$ بدست می آید. حال ماتریس R را بدست می آوریم،

$$R=\begin{bmatrix}\|\mathbf{v}_1\| & \langle\mathbf{q}_1,\mathbf{a}_2\rangle & \langle\mathbf{q}_1,\mathbf{a}_3\rangle\\ 0 & \|\mathbf{v}_2\| & \langle\mathbf{q}_2,\mathbf{a}_3\rangle\\ 0 & 0 & \|\mathbf{v}_3\|\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt5 & \frac{2}{\sqrt5} & \frac{-1}{\sqrt5}\\ 0 & \frac{6}{\sqrt{30}} & \frac{22}{\sqrt{30}}\\ 0 & 0 & \frac{16}{\sqrt6}\end{bmatrix}$$

بنابراین تجزیه QR ماتریس A بصورت زیر خواهد بود،

$$A=QR\rightarrow A=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt6}\\ \frac{-1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt6}\\ 0 & \frac{-5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt5 & \frac{2}{\sqrt5} & \frac{-1}{\sqrt5}\\ 0 & \frac{6}{\sqrt{30}} & \frac{22}{\sqrt{30}}\\ 0 & 0 & \frac{16}{\sqrt6}\end{bmatrix}$$

در نرم افزار MATLAB از دستور qr برای بدست آوردن تجزیهQR ماتریس A استفاده می شود. زمانیکه ماتریس A غیر مربعی باشد دستور $[Q,R]=\mathrm{qr}(A)$ تجزیه QR کامل[۱] و دستور $[Q,R]=\mathrm{qr}(A,0)$ تجزیه QR کاهش یافته[۲] را برای ماتریس A ارائه می دهد. در تجزیه کامل QR ماتریس $R_{m\times n}$ یک ماتریس بالا مثلثی هم اندازه با ماتریس A است و ماتریس متعامد $Q_{m\times m}$ به گونه ای محاسبه می شود که $A=QR$ باشد. در تجزیه کاهش یافته QR ماتریس متعامد $Q_{m\times n}$ هم اندازه با ماتریس A و ماتریس $R_{n\times n}$ یک ماتریس بالا مثلثی می باشد.

```
A =[2 1 3;-1 0 7;0 -1 -1];
[Q,R]= qr(A)     % Full QR factorization of A
Q =
   -0.8944   -0.1826    0.4082
    0.4472   -0.3651    0.8165
         0    0.9129    0.4082
R =
   -2.2361   -0.8944    0.4472
         0   -1.0954   -4.0166
         0         0    6.5320
```

□

مثال ۴-۱۸

برای ماتریس A تجزیه QR را با استفاده از فرایند گرام- اشمیت بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}3 & -6\\ 4 & -8\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

با توجه به اینکه $\mathrm{rank}(A)=2$ است، پس ستون های ماتریس A مستقل خطی هستند.

اگر ماتریس A را بصورت $A=[\mathbf{a}_1\,|\,\mathbf{a}_2]$ در نظر بگیریم، ستون های آن بصورت زیر بدست می آیند،

$$\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}3\\4\\0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{a}_2=\begin{bmatrix}-6\\-8\\1\end{bmatrix}$$

با اعمال فرآیند گرام-اشمیت مطابق بخش بردارهای یکامتعامد زیر بدست می آیند،

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{a}_1=[3,4,0],$$

[۱] Full Factorization
[۲] Reduced Factorization

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{a}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 = [-6,-8,1] - \frac{\langle [3,4,0],[-6,-8,1] \rangle}{\|[3,4,0]\|^2}[3,4,0]$$

$$= [-6,-8,1] - \frac{-50}{25}[3,4,0] = [-6,-8,1] + [6,8,0] = [0,0,1]$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{v}_1\| = 5, \quad \|\mathbf{v}_2\| = 1$$

بنابراین، ماتریس Q بصورت $Q = [\mathbf{q}_1 \,|\, \mathbf{q}_2]$ بدست می آید. حال ماتریس R را بدست می آوریم،

$$R = \begin{bmatrix} \|\mathbf{v}_1\| & \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{a}_2 \rangle \\ 0 & \|\mathbf{v}_2\| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین تجزیه QR ماتریس A بصورت زیر خواهد بود،

$$A = QR \rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[3 -6;4 -8;0 1];
[Q, R] = qr(A)        % Full QR factorizat ion of A
Q =
   -0.6000          0    0.8000
   -0.8000          0   -0.6000
         0    -1.0000         0
R =
    -5    10
     0    -1
     0     0
[Q, R] = qr(A,0)          % Reduced  QR factorizat ion of A
Q =
   -0.6000          0
   -0.8000          0
         0    -1.0000
R =
    -5    10
     0    -1
```

□

مثال۴-۲۰

برای دستگاه معادلات زیر سازگار یا ناسازگار بودن دستگاه را بررسی نمایید، سپس جواب حداقل مربعات خطا را با استفاده از تجزیه QR بدست آورید.

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 2\end{bmatrix}$$

از آنجاییکه $\text{rank}(A)=2$ و $\text{rank}(A\,|\,\mathbf{b})=3$ است، لذا سیستم ناسازگار است. حال جواب حداقل مربعات را با استفاده از تجزیه QR بدست می آوریم،

- تجزیه QR ماتریس A :

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{a}_1=[1,1,1],$$

$$\mathbf{v}_2=\mathbf{a}_2-\frac{\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{a}_2\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1=[1,2,4]-\frac{\langle [1,1,1],[1,2,4]\rangle}{\|[1,1,1]\|^2}[1,1,1]$$

$$=[1,2,4]-\frac{7}{3}[1,1,1]=[\frac{-4}{3},\frac{-1}{3},\frac{5}{3}]$$

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}\frac{-4}{3}\\ \frac{-1}{3}\\ \frac{5}{3}\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{q}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix},\quad \mathbf{q}_2=\begin{bmatrix}\frac{-4}{\sqrt{42}}\\ \frac{-1}{\sqrt{42}}\\ \frac{5}{\sqrt{42}}\end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{v}_1\|=\sqrt{3},\qquad \|\mathbf{v}_2\|=\frac{\sqrt{42}}{3}$$

$$Q=[\mathbf{q}_1\quad \mathbf{q}_2]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-4}{\sqrt{42}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{42}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{5}{\sqrt{42}}\end{bmatrix},\qquad R=\begin{bmatrix}\|\mathbf{v}_1\| & \langle \mathbf{q}_1,\mathbf{a}_2\rangle\\ 0 & \|\mathbf{v}_2\|\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{3} & \frac{7}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{\sqrt{42}}{3}\end{bmatrix}$$

- محاسبه بردار $\mathbf{y}=Q^T\mathbf{b}$:

$$\mathbf{y}=Q^T\mathbf{b} \quad \rightarrow \quad y=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{-4}{\sqrt{42}} & \frac{-1}{\sqrt{42}} & \frac{5}{\sqrt{42}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{\sqrt{3}}\\ \frac{4}{\sqrt{42}}\end{bmatrix}$$

- حل دستگاه معادلات $R\mathbf{x}=\mathbf{y}$ با روش جایگزینی پسرو:

$$R\mathbf{x}=\mathbf{y} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix}\sqrt{3} & \frac{7}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{\sqrt{42}}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{\sqrt{3}}\\ \frac{4}{\sqrt{42}}\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad x_1=1,\quad x_2=\frac{2}{7}$$

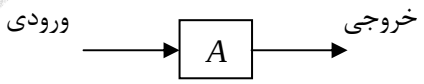
با استفاده از نرم افزار MATLAB ابتدا تجزیه QR ماتریس A را بدست می آوریم، پاسخ حداقل مربعات برای $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ از معادله $R^T R\mathbf{x}=A^T\mathbf{b}$ بدست می آید.

```
A =[1 1;1 2;1 4];
b =[1;2;2];
[Q,R]= qr(A,0)
Q =
   -0.5774    0.6172
   -0.5774    0.1543
   -0.5774   -0.7715
R =
   -1.7321   -4.0415
         0   -2.1602
x = R\(R'\(A'*b))
x =
    1.0000
    0.2857
norm(b - A * x)
ans =
    0.5345
```

□

۴-۳-۵- برازش داده ها با روش حداقل مربعات

شناسایی سیستم های فیزیکی از مباحث پر کاربرد در علوم تجربی و مهندسی است. در اینگونه مباحث طی آزمایشاتی داده هایی به عنوان ورودی و خروجی از سیستم مذکور بدست می آید و سعی می شود بر اساس این داده ها بهترین مدل ممکن برای سیستم تخمین زده شود و معمولاً جهت سادگی در محاسبات مدل مذکور خطی در نظر گرفته می شود. سیستم زیر را در نظر بگیرید،



با فرض خطی بودن، رابطه بین داده های ورودی و خروجی را بصورت زیر می توان بیان کرد،

$$A\mathbf{x}=\mathbf{y}$$

هدف بدست آوردن مدلی برای سیستم است، بطوریکه رابطه بالا برقرار گردد. در تخمین مدل سیستم انتخاب درجه مناسب برای تقریب در میزان دقت مدل تخمین زده شده تاثیر دارد. به مثال زیر توجه نمایید.

مثال۴-۲۱

پنج نقطه زیر را در نظر بگیرید،

$$(0,0) \quad (5,8) \quad (10,15) \quad (15,19) \quad (20,20)$$

با استفاده از روش حداقل مربعات معادله خطی به صورت $y = m_1 x + m_2$ برای تقریب از نقاط بیابید. سپس معادله منحنی مرتبه دومی به شکل $y = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$ را بیابید که از این پنج نقطه بگذرد. با محاسبه بردار خطا و نُرم خطا برای هر دو حالت خطای برازش را با هم مقایسه کنید.

- ابتدا معادله خطی به فرم $y = m_1 x + m_2$ را پیدا می کنیم که از این پنج نقطه بگذرد،

$$\left.\begin{array}{l} 0m+n=0 \\ 5m+n=8 \\ 10m+n=15 \\ 15m+n=19 \\ 20m+n=20 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \\ 10 & 1 \\ 15 & 1 \\ 20 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \\ 19 \\ 20 \end{bmatrix} \rightarrow \quad A\mathbf{m} = \mathbf{y}$$

$$\text{rank}(A) = 2, \qquad \text{rank}(A \mid \mathbf{y}) = 3 \quad \rightarrow \quad \text{سیستم ناسازگار است}$$

با استفاده از روش حداقل مربعات می توان معادله خط $y = mx + n$ را بدست آورد.

$$A^T A\hat{\mathbf{m}} = A^T \mathbf{y} \rightarrow \begin{bmatrix} 750 & 50 \\ 50 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{m}_1 \\ \hat{m}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 875 \\ 62 \end{bmatrix} \rightarrow \hat{m}_1 = 1.02, \qquad \hat{m}_2 = 2.2$$

بنابراین بهترین تقریب برای خطی که از این چهار نقطه می گذرد بصورت زیر است،

$$y = 1.02x + 2.2$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
x =[0;5;10;15;20];
y =[0;8;15;19;20];
A = zeros(5,2);
for i =1:5
   A(i,:) = [x(i)  1];
end
m = A\(A'\(A'*y))
m =
    1.0200
    2.2000
```

- حال معادله منحنی دوم به فرم $y=\alpha_2 x^2+\alpha_1 x+\alpha_0$ را پیدا می کنیم که از این پنج نقطه بگذرد،

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_0+0\alpha_1+0\alpha_2=0\\ \alpha_0+5\alpha_1+25\alpha_2=8\\ \alpha_0+10\alpha_1+100\alpha_2=15\\ \alpha_0+15\alpha_1+225\alpha_2=19\\ \alpha_0+20\alpha_1+400\alpha_2=20\end{array}\right\}\rightarrow \begin{bmatrix}1&0&0\\1&5&25\\1&10&100\\1&15&225\\1&20&400\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_0\\\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\8\\15\\19\\20\end{bmatrix}\rightarrow \quad A\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{y}$$

$\mathrm{rank}(A)=3, \quad \mathrm{rank}(A\,|\,\mathbf{y})=4 \quad \rightarrow$ سیستم ناسازگار است

با استفاده از روش حداقل مربعات می توان معادله منحنی مرتبه دوم $y=\alpha_2 x^2+\alpha_1 x+\alpha_0$ را بدست آورد.

$$A^T A\hat{\boldsymbol{\alpha}}=A^T\mathbf{y} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix}5&50&750\\50&750&12500\\750&12500&221250\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\alpha}_0\\\hat{\alpha}_1\\\hat{\alpha}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}62\\875\\13975\end{bmatrix}$$

$$\hat{\alpha}_0=-0.2286, \quad \hat{\alpha}_1=1.9914, \quad \hat{\alpha}_2=-0.0486$$

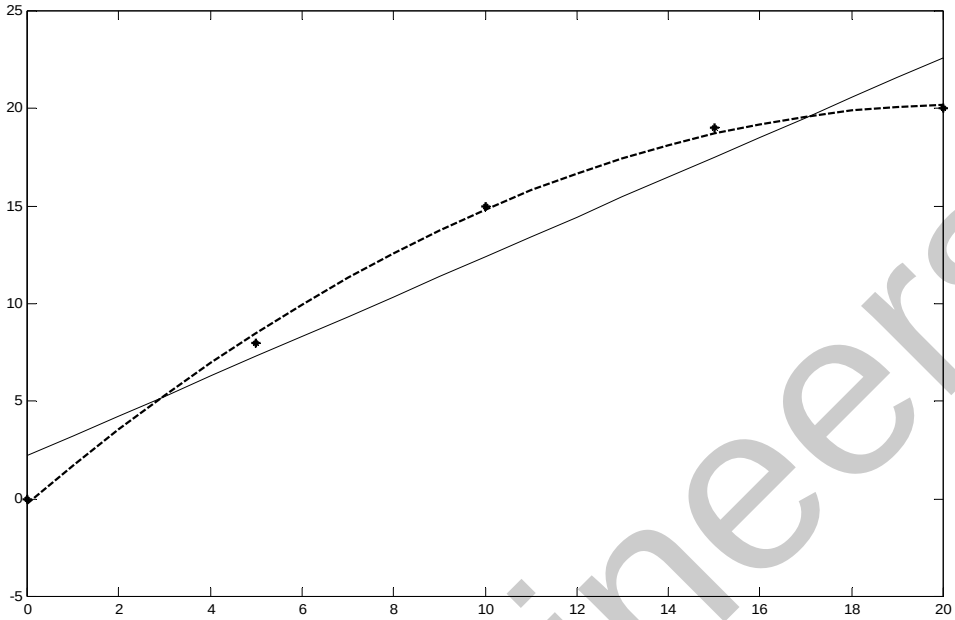
بنابراین بهترین تقریب برای منحنی مرتبه دوم بصورت زیر است،

$$y=-0.0486x^2+1.9914x-0.2286$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
x =[0;5;10;15;20];
y =[0;8;15;19;20];
A = zeros(5,3);
for i = 1:5
   A(i,:) = [x(i)^2  x(i)  1];
end
a = A\(A'\(A'*y))
a =
   -0.0486
    1.9914
   -0.2286
```

نمودارهای خط و منحنی بدست به همراه نقاط مذکور در شکل زیر آورده شده است،



شکل(۴-۴)- خط و منحنی بدست آمده از تخمین حداقل مربعات

بردار خطا و نُرم خطا نیز بصورت زیر بدست می آیند،

۱- خطا برای تقریب $y = 1.02x + 2.2$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{b} - A\mathbf{x} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \\ 19 \\ 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \\ 10 & 1 \\ 15 & 1 \\ 20 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-(0m+n) \\ 8-(5m+n) \\ 15-(10m+n) \\ 19-(15m+n) \\ 20-(20m+n) \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.02 \\ 2.2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \hat{\varepsilon}_3 \\ \hat{\varepsilon}_4 \\ \hat{\varepsilon}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.2 \\ 0.7 \\ 2.6 \\ 1.5 \\ -2.6 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}\| = 4.5935$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
norm_e = norm(A * m - y)
norm_e =
    4.5935
```

۲- خطا برای تقریب $y=-0.0486x^2+1.9914x-0.2286$

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{b}-A\mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\8\\15\\19\\20\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&0\\1&5&25\\1&10&100\\1&15&225\\1&20&400\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0-(\alpha_0+0\alpha_1+0\alpha_2)\\8-(\alpha_0+5\alpha_1+25\alpha_2)\\15-(\alpha_0+10\alpha_1+100\alpha_2)\\19-(\alpha_0+15\alpha_1+225\alpha_2)\\20-(\alpha_0+20\alpha_1+400\alpha_2)\end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}\hat{\alpha}_0\\ \hat{\alpha}_1\\ \hat{\alpha}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.2286\\1.9914\\-0.0486\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\hat{\varepsilon}_1\\ \hat{\varepsilon}_2\\ \hat{\varepsilon}_3\\ \hat{\varepsilon}_4\\ \hat{\varepsilon}_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.2286\\-0.5143\\0.1714\\0.2857\\-0.1714\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad\|\boldsymbol{\varepsilon}\|=0.6761$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
norm_e = norm(A*a - y)
norm_e =
    0.6761
```

با توجه به اینکه نُرم خطا در این حالت کمتر است لذا منحنی مرتبه دوم تقریب بهتری برای برازش این پنج نقطه است.

□

علاوه بر انتخاب درجه مناسب منحنی برازش، اثر نویز در داده ها و خطاهای اندازه گیری هم می تواند یکی از عوامل تاثیر گذار در دقت تخمین باشد. در این جا می توان دو حالت مختلف را در نظر گرفت،

۱- تعداد داده ها با مجهولات تخمین برابر باشد. در چنین حالتی دستگاه معادلات مذکور مربعی است و پاسخ سیستم از حل مستقیم دستگاه $A\mathbf{x}=\mathbf{y}$ بدست می آید. این روش هر چند خطای کمتری دارد لیکن چون از طریق حل مستقیم بدست می آید نسبت به نویز و خطاهای محاسباتی حساس است.

۲- تعداد داده ها بیشتر از مجهولات تخمین باشد. در این حالت دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{y}$ فرامعین بوده و معمولاً ناسازگار است، لذا برای بدست آوردن پاسخ مناسب از روش حداقل مربعات استفاده می شود. این روش در برابر نویزی شدن داده ها و خطاهای اندازه گیری مقاوم تر است.

مثال۴-۲۲

برای سیستمی داده های ورودی و خروجی بصورت زیر بدست آمده است،

x	0	5	10	15	20
y	0	8	15	19	20

الف) یک مدل مرتبه چهار برای این سیستم تخمین بزنید.

$$y = \alpha_4 x^4 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$$

دستگاه معادلات حاصل بصورت زیر بدست می آید،

$$A\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{y} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 625 & 125 & 25 & 5 & 1 \\ 10000 & 1000 & 100 & 10 & 1 \\ 50625 & 3375 & 225 & 15 & 1 \\ 160000 & 8000 & 400 & 20 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_3 \\ \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \\ 19 \\ 20 \end{bmatrix}$$

حال می توان دستگاه معادلات 5×5 حاصل را بصورت مستقیم حل نمود و جواب ها را بدست آورد،

$$\alpha_4 = 0.0001, \quad \alpha_3 = -0.0067, \quad \alpha_2 = 0.0567, \quad \alpha_1 = 1.4667, \quad \alpha_0 = 0$$

در این حالت خطای برازش در حد صفر است،

$$\boldsymbol{\varepsilon} = A\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{y} \quad \rightarrow \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}\| = 1.7764\times 10^{-15}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
x =[0;5;10;15;20];
y =[0;8;15;19;20];
A = zeros(5);
for i = 1:5
   A(i,:) = [x(i)^4 x(i)^3 x(i)^2 x(i) 1];
end
a = A \ y
a =
    0.0001
   -0.0067
    0.0567
    1.4667
         0
norm_e = norm(A * a - y)
norm_e =
    1.7764e - 015
```

ب) یک مدل مرتبه دو برای این سیستم تخمین بزنید.

$$y = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$$

دستگاه معادلات حاصل بصورت زیر بدست می آید،

$$A\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{y} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \\ 100 & 10 & 1 \\ 225 & 15 & 1 \\ 400 & 20 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \\ 19 \\ 20 \end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات حاصل فرامعین و ناسازگار است، لذا برای بدست آوردن جواب از روش حداقل مربعات استفاده می نماییم،

$$A^T A\hat{\boldsymbol{\alpha}} = A^T \mathbf{y} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 221250 & 12500 & 750 \\ 12500 & 750 & 50 \\ 750 & 50 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_2 \\ \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13975 \\ 875 \\ 62 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\alpha}_2 = -0.0486, \quad \hat{\alpha}_1 = 1.9914, \quad \hat{\alpha}_0 = -0.2286$$

خطای برازش در این حالت بیشتر از قبل است،

$$\boldsymbol{\varepsilon} = A\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{y} \quad \rightarrow \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}\| = 0.6761$$

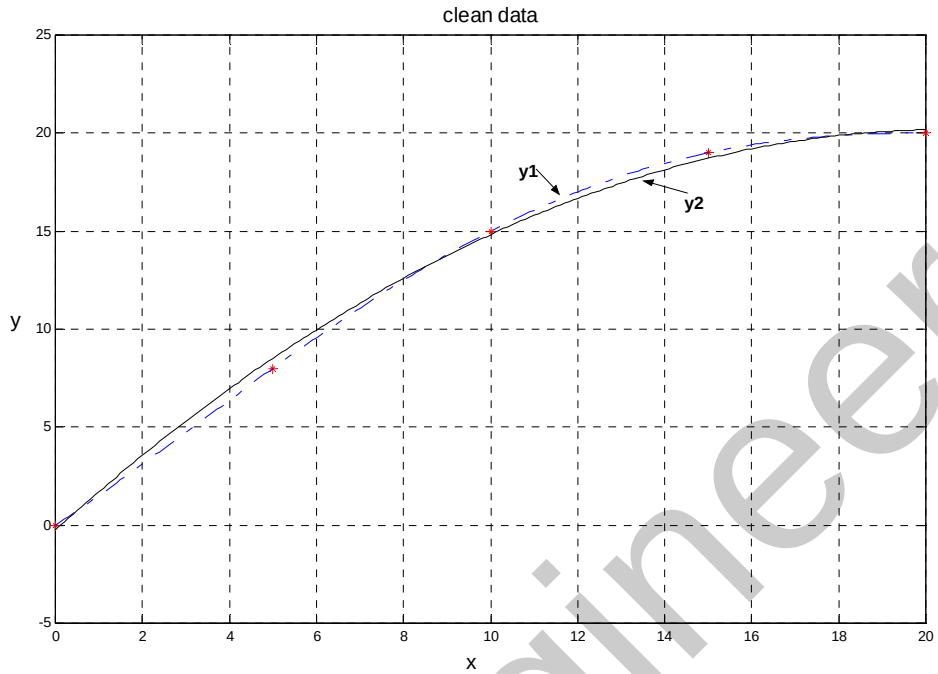
با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
x =[0;5;10;15;20];
y =[0;8;15;19;20];
A = zeros(5,3);
for i = 1:5
   A(i,:) = [x(i)^2  x(i)  1];
end
a = A \(A'\(A'*y))
a =
   -0.0486
    1.9914
   -0.2286
norm_e = norm(y - A * a)
norm_e =
    0.6761
```

حال داده های ورودی- خروجی و منحنی های برازش شده را رسم می نماییم، برای این منظور از دستور plot در نرم افزارMATLAB استفاده می کنیم،

```
x = [0;5;10;15;20];
y = [0;8;15;19;20];
plot(x,y,'r*')
A1 = zeros(5);
for i = 1:5
   A1(i,:) = [x(i)^4 x(i)^3 x(i)^2 x(i) 1];
end
a1 = A1\y;
A2 = zeros(5,3);
for i = 1:5
   A2(i,:) = [ x(i)^2 x(i) 1];
end
a2 = A2\(A2'\(A2'*y));
j = 1;
for i = 0:0.1:20
   y1(j) = a1(1)*i^4 + a1(2)*i^3 + a1(3)*i^2 + a1(4)*i + a1(5);
   y2(j) = a2(1)*i^2 + a2(2)*i + a2(3);
   j = j + 1;
end
hold on
i = 0:0.1:20;
plot(i,y1)
plot(i,y2,'k')
```

در شکل حاصل پنج نقطه اندازه گیری شده به همراه منحنی های برازش داده شده رسم گردیده است. y_1 منحنی حاصل از برازش مستقیم داده ها و y_2 منحنی حاصل از تقریب حداقل مربعات می باشد. با توجه به نتایج و شکل های رسم شده مشخص است است که روش اول خطای کمتری دارد لیکن این روش در برابر نویز حساس می باشد و با ایجاد نویز برازش حاصل به شدت دچار خطا می گردد.



شکل(۴-۵) - نتیجه برازش با داده های بدون نویز

برای بررسی این موضوع داده های اندازه گیری شده را بصورت نویزی در نظر می گیریم و نتایج دو تخمین را مجدداً بررسی می کنیم. بدین منظور از تابع randn در نرم افزار MATLAB استفاده می نماییم. از این تابع برای تولید یک سری اعداد تصادفی با توزیع نرمال استفاده می شود. نویز را بصورت زیر تعریف می کنیم و آن را به خروجی اندازه گیری شده از سیستم اضافه می کنیم،

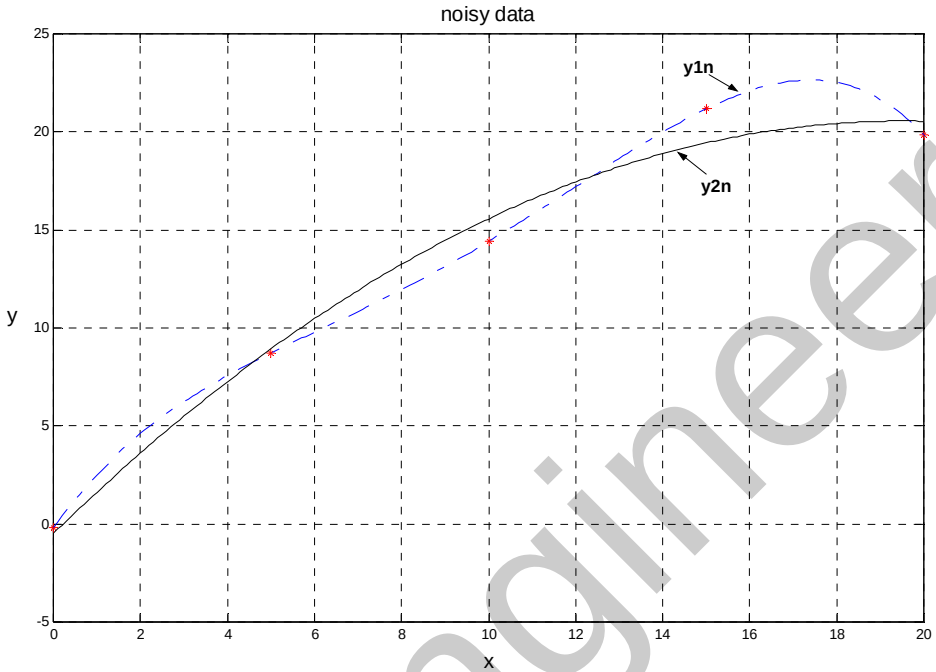
```
n = 0.01*randn(size(y));
yn = y + n;
```

با اعمال این تویز داده های اندازه گیری شده بصورت زیر تغییر می یابند،

```
yn = -0.1867,    8.7258,    14.4117,    21.1832,    19.8636
```

نتایج برازش مرتبه چهار و تقریب حداقل مربعات مرتبه دو حاصل در شکل بعدی آورده شده است. در این شکل پنج نقطه نویزی و منحنی های حاصل از برازش رسم شده است. منحنی y_{1n} حاصل برازش مستقیم مرتبه چهارم می باشد و منحنی y_{2n} منحنی مرتبه دو حاصل از تقریب حداقل مربعات است. مشخص است که در برازش مستقیم سیستم سعی می کند منحنی حاصل از تمام نقاط عبور کند، لذا نتیجه حاصل از واقعیت دور شده و خطای زیادی حاصل می گردد. در حالیکه تقریب با حداقل مربعات به مدل سیستم واقعی نزدیک تر است. از آنجاییکه وجود نویز و خطاهای اندازه گیری

همواره در سیستم های واقعی اجتناب ناپذیر می باشد، لذا استفاده از روش حداقل مربعات به منظور قوام بیشتر محاسبات و بدست آوردن نتایج دقیق تر توصیه می گردد.



شکل(۴-۶) - نتیجه برازش با داده های نویزی

□

مثال۴-۲۳

منحنی $f(t)$ را در نظر بگیرید،

$$f(t)=\frac{1}{1+25t^2}$$

با استفاده از روش حداقل مربعات توسط یک چند جمله ای به فرم زیر تقریب بزنید،

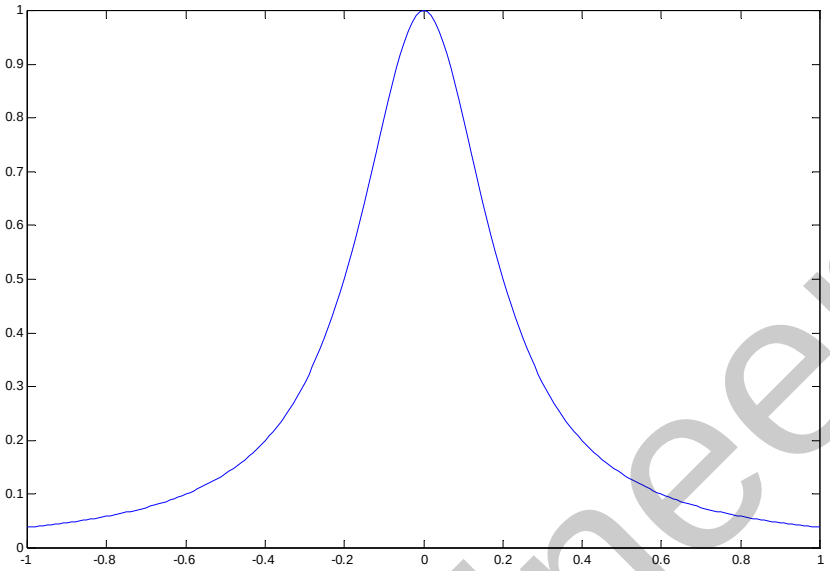
$$g(t)=\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\cdots+\alpha_n t^n$$

مرتبه تخمین را چنان انتخاب کنید که خطای تخمین در حد 0.1 گردد.

منحنی $f(t)$ با استفاده از کد زیر در شکل بعدی رسم شده است،

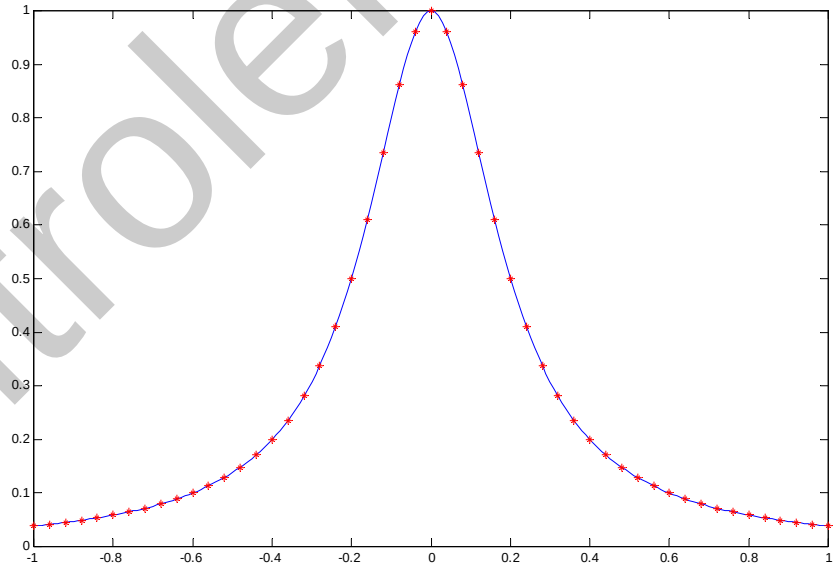
```
t = linspace(- 1,1);
f = 1./(1 + 25 * t.^2);
plot(t, f)
```

دستور linspace(a,b) فاصله اعداد a تا b را به صد قسمت مساوی تقسیم می نماید.



شکل(۴-۷)- منحنی $f(t)=\frac{1}{1+25t^2}$

ابتدا باید یک دسته نقاط بر روی منحنی $f(t)$ در نظر بگیریم. انتخاب تعداد نقاط و مرتبه منحنی در دقت برازش تاثیر دارد. در اینجا ۵۱ نقطه بصورت زیر انتخاب می کنیم،

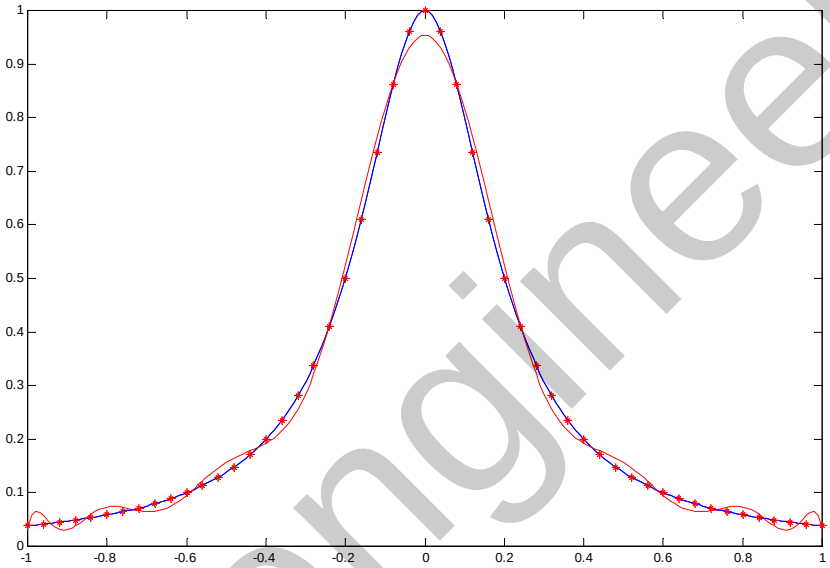


شکل(۴-۸)- منحنی $f(t)$ به همراه پنجاه و یک نقطه تعیین شده بر روی آن

برای تعیین این ۵۱ نقطه می توان از کد زیر استفاده نمود،

```
t = linspace(-1,1,51);
f = 1./(1+25*t.^2);
data = [t' f'];
```

حال برای افزایش دقت تقریب یک منحنی مرتبه ۱۴ را در نظر می گیریم، تقریب حاصل چنین خواهد بود،



شکل(۴-۹)- منحنی $f(t)$ به همراه منحنی $g(t)$ مرتبه چهاردهم برازش داده شده از ۵۱ نقطه مذکور

همانطور که پیداست تقریب حاصل بسیار بهتر است و خطای تقریب $\|\varepsilon\| = \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\| = 0.1275$ می باشد.

□

۴-۳-۶- سری فوریه

یکی دیگر از روش های تقریب زدن توابع تکه ای پیوسته مانند $f(x)$ استفاده از بسط فوریه آن تابع است. از دیدگاه فضاهای برداری سری فوریه را بدین بصورت می توان تحلیل کرد. اگر فضای برداری E را به نحوی تعریف نماییم که شامل توابع حقیقی تکه ای پیوسته بصورت $f:[-\pi,\pi]\to\Re$ باشد و ضرب داخلی در این فضا نیز به شکل زیر تعریف شده باشد،

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx \qquad (۲۲-۴)$$

می توان نشان داد که مجموعه نامتناهی زیر پایه های یکامتعامد این فضا هستند،

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \sin 3x, \cos 3x, \ldots\right\} \tag{۲۳-۴}$$

برای بررسی یکامتعامد بودن می توان ضرب داخلی آنها را بررسی کرد،

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} dx = 1$$

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin kx \right\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin kx dx = 0$$

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos kx \right\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos kx dx = 0$$

همچنین،

$$\begin{aligned}\langle \sin kx, \sin mx \rangle &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mx dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(\cos(k-m)x - \cos(k+m)x) dx = \begin{cases} 1 & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \cos kx, \cos mx \rangle &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(\cos(k-m)x + \cos(k+m)x) dx = \begin{cases} 1 & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases}\end{aligned}$$

و داریم،

$$\begin{aligned}\langle \sin kx, \cos mx \rangle &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos mx dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(\sin(k-m)x + \sin(k+m)x) dx = 0\end{aligned}$$

بنابراین هر تابع $f \in E$ را می توان بصورت یک ترکیب خطی از این پایه های یکامتعامد نوشت،

$$\begin{aligned} f(x) = a_0 \frac{1}{\sqrt{2}} + b_1 \sin x + a_1 \cos x + b_2 \sin 2x + a_2 \cos 2x \\ + b_3 \sin 3x + a_3 \cos 3x + \cdots \end{aligned} \tag{۲۴-۴}$$

با استفاده از فرآیند گرام- اشمیت ضرایب بصورت زیر قابل محاسبه هستند،

$$\begin{aligned} a_0 &= \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle, \quad b_1 = \langle f, \sin x \rangle, \quad a_1 = \langle f, \cos x \rangle, \\ b_2 &= \langle f, \sin 2x \rangle, \quad a_2 = \langle f, \cos x \rangle, \ldots \end{aligned} \tag{۲۵-۴}$$

حال رابطه(۴-۲۴) را می توان بصورت یک مجموع بشکل زیر بازنویسی کرد،

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (۴-۲۶)$$

که ضرایب در آن بصورت زیر محاسبه می گردند،

$$a_0=\sqrt{2}\left\langle f,\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$a_n=\langle f,\cos nx\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx \qquad (۴-۲۷)$$

$$b_n=\langle f,\sin nx\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$$

که معادل با روابط بسط سری فوریه می باشد. در واقع در تحلیل فضای برداری زمانیکه تابع $f(x)$ را بصورت سری فوریه نمایش می دهیم، در حقیقت تصویر متعامد آن را بر روی فضای برداری E بدست می آوریم و برای این منظور از پایه های یکامتعامد این فضا استفاده می کنیم. مشخص است که بُعد فضای برداری مذکور نامتناهی است و هر چه تعداد پایه های انتخاب شده بیشتر باشد تصویر حاصل به تابع اصلی شبیه تر خواهد بود.

مثال۴-۲۴

بسط فوریه تابع $f:[-\pi,\pi]\to\Re$ ، $f(x)=x$ و $x\in[-\pi,\pi]$ را بدست آورید.

ابتدا ضرایب a_0، a_n و b_n را بدست می آوریم،

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx \quad\to\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nxdx=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx \quad\to\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin nxdx$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\left(-\left[\frac{x\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right)=\frac{2}{\pi}\left(-\left[\frac{x\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}+\left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}\right)=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

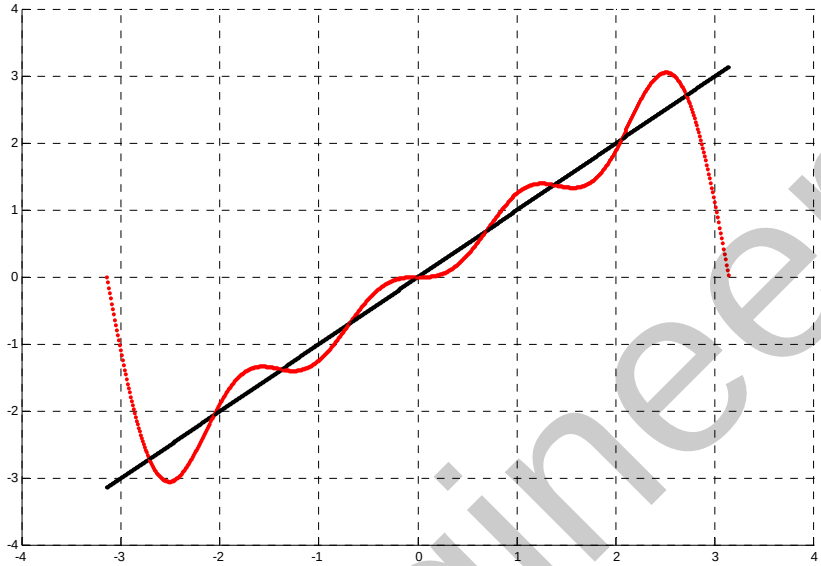
بنابراین سری فوریه بصورت زیر بدست می آید،

$$f(x)=x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

فرم گسترده این سری بشکل زیر است،

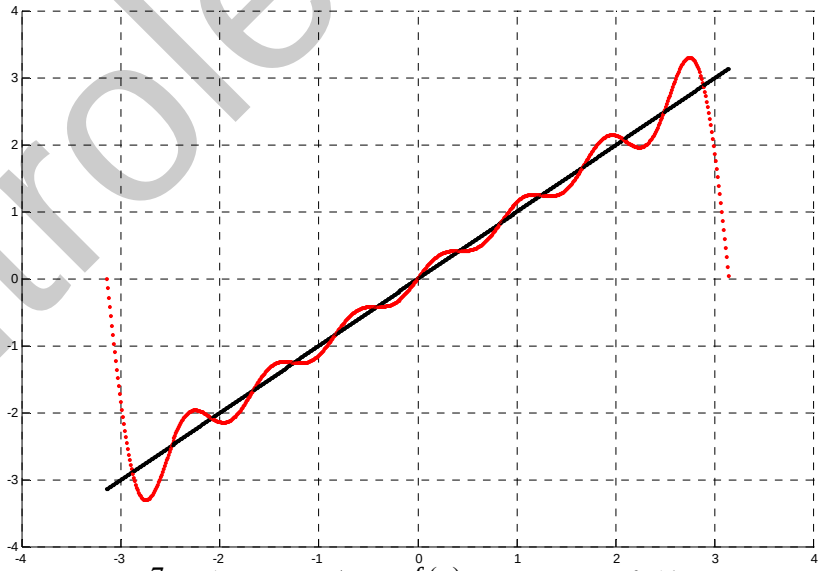
$$f(x)=x=2\sin x-\sin 2x+\frac{2}{3}\sin 3x-\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{2}{5}\sin 5x-\frac{1}{3}\sin 6x+\cdots$$

مشخص است که بینهایت بردار پایه وجود دارد. اگر چهار بردار پایه اول را در نظر بگیریم یعنی تابع $f(x)=x$ را بر روی فضای اسپن شده توسط این چهار بردار تصویر نماییم نتیجه تقریبی مطابق شکل زیر خواهد بود،

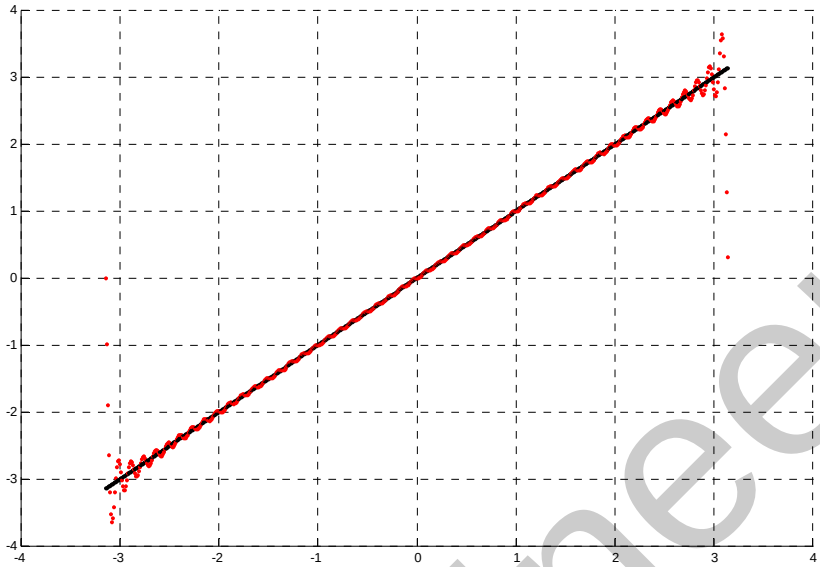


شکل(۴-۱۰)- منحنی $f(x)=x$ به همراه تقریب سری فوریه $n=4$

حال اگر تعداد بردارهای پایه بیشتری انتخاب نماییم دقت تصویر متعامد حاصل و نتیجتاً تقریب منحنی بهتر خواهد شد. نتیجه حاصل با انتخاب ۷ بردار پایه و سپس ۵۰ بردار پایه در شکل های بعدی نشان داده شده است.



شکل(۴-۱۱)- منحنی $f(x)=x$ به همراه تقریب سری فوریه $n=7$



شکل(۴-۱۵)- منحنی $f(x)=x$ به همراه تقریب سری فوریه $n=50$

□

مثال۴-۲۵

بسط فوریه تابع $f:[-\pi,\pi]\to\Re$ ، $f(x)=x^2$ و $x\in[-\pi,\pi]$ را بدست آورید.

ابتدا ضرایب a_0 ، a_n و b_n را بدست می آوریم،

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx \quad\to\quad a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{2\pi^2}{3}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx \quad\to\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nxdx=0$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx \quad\to\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x^2\cos nxdx$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{x^2\sin nx}{n}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{2x\sin nx}{n}dx\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{x^2\sin nx}{n}\right]_0^{\pi}+\left[\frac{2x\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{2\cos nx}{n^2}dx\right)=\frac{4(-1)^n}{n^2}$$

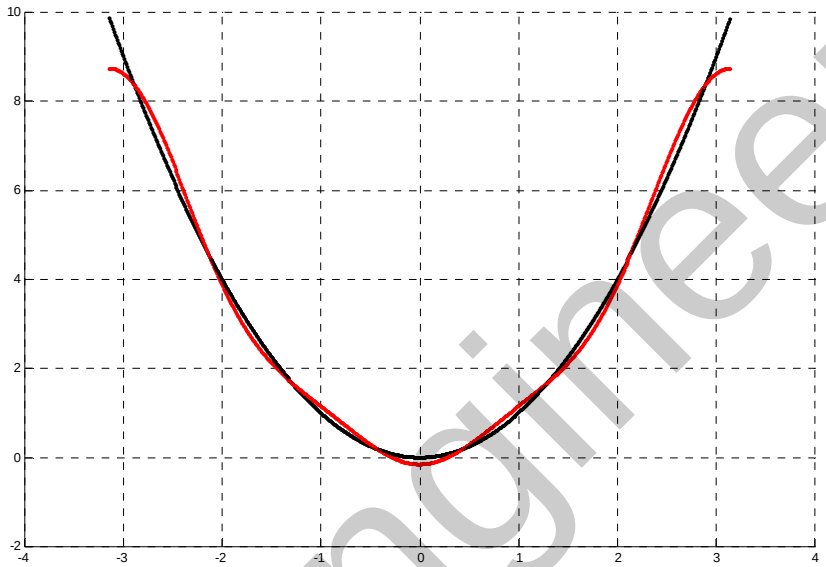
بنابراین سری فوریه بصورت زیر بدست می آید،

$$f(x)=x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

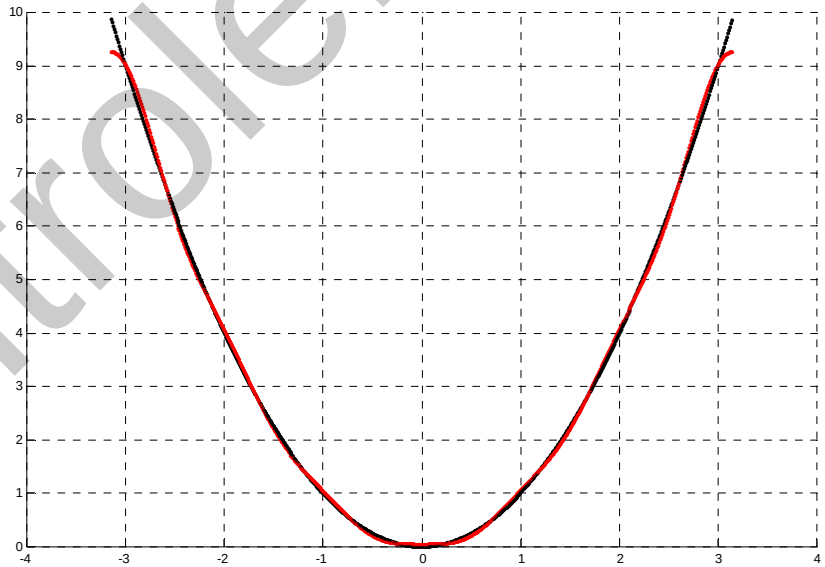
فرم گسترده این سری بشکل زیر است،

$$f(x)=x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\cos x+\cos 2x-\frac{4}{9}\cos 3x+\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{4}{25}\cos 5x+\frac{1}{9}\cos 6x+\cdots$$

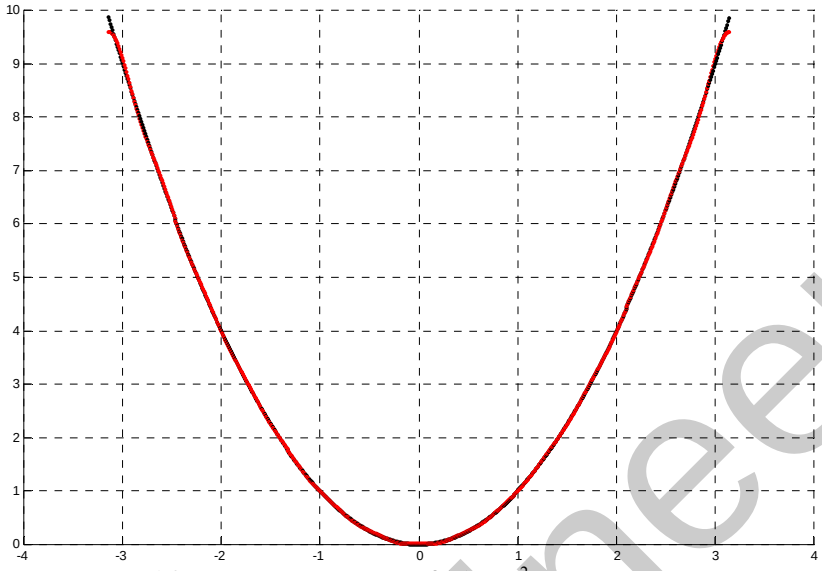
در اینجا نیز بُعد فضای برداری بینهایت است و برای نشان دادن اثر انتخاب تعداد بردارهای پایه تقریب های حاصل از انتخاب چهار، هفت و پانزده بردار پایه مطابق شکل های بعدی نشان داده شده است.



شکل(۴-۱۶)- منحنی $f(x)=x^2$ به همراه تقریب سری فوریه $n=3$



شکل(۴-۱۷)- منحنی $f(x)=x^2$ به همراه تقریب سری فوریه $n=6$



شکل(۴-۱۸)- منحنی $f(x)=x^2$ به همراه تقریب سری فوریه $n=14$

□

مسائل

۴-۱- برای هر یک از دسته بردارهای زیر،

الف) متعامد و یکامتعامد بودن بردارها را بررسی کنید.

ب) با استفاده از فرآیند یکامتعامد سازی گرام- اشمیت بردارها را یکا متعامد نمایید.

$$S:\left\{\mathbf{v_1}=[2,-1,0],\quad \mathbf{v}_2=[1,0,-1],\quad \mathbf{v}_3=[3,7,-1]\right\}$$

$$K:\left\{\mathbf{v_1}=[1,1,1,1],\quad \mathbf{v}_2=[1,1,1,0],\quad \mathbf{v}_3=[1,1,0,0],\quad \mathbf{v}_4=[1,0,0,0]\right\}$$

۴-۲- برای ماتریس های زیر تجزیه QR را بدست آورید، سپس با استفاده از آن جواب $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ را به روش حداقل مربعات بیابید. ($\mathbf{b}=[1,1,1]^{\mathrm{T}}$)

الف) $A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&2&1\\1&2&-1\end{bmatrix}$ ب) $A=\begin{bmatrix}0&0\\1&3\\0&2\end{bmatrix}$

۴-۳- معادله ماتریسی $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ زیر را در نظر بگیرید،

الف) $\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&4\end{bmatrix}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&0&-3\\0&1&1\\0&-1&1\end{bmatrix}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}4\\6\\-1\\2\end{bmatrix}$

پاسخ $\mathbf{x}$ را چنان بیابید که $\|A\mathbf{x}-\mathbf{b}\|$ حداقل گردد.

۴-۴- مجموعه نقاط زیر را در نظر بگیرید،

t	0	1	2	3	4	1/2
$f(t)$	0	1	0	1	4	7

الف) با بکارگیری روش حداقل مربعات ضرایب منحنی $f(t)=ae^t+bt+ct^2+d\sin t$ را جهت برازش این نقاط تعیین نمایید.

ب) خطای برازش را بدست آورید.

۴-۵- بسط سری فوریه تابع $f:[-\pi,\pi]\to\Re$ را ابدست آورید.

الف) $f(x)=|x|$ برای $x\in[-\pi,\pi]$

ب) $f(x)=x|x|$ برای $x\in[-\pi,\pi]$

ج) $f(x)=|\sin x|$ برای $x\in[-\pi,\pi]$

د) $f(x)=\cos(x/2)$ برای $x\in[-\pi,\pi]$

۴-۶- مجموعه نقاط زیر را در نظر بگیرید،

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	2	7	9	12	13	14	14	13	10	8	4

الف) با بکارگیری روش حداقل مربعات خطا یک منحنی مناسب برای نقاط زیر برازش نمایید. یک بار منحنی مرتبه اول $y=mx+n$ را در نظر بگیرید و بار دیگر منحنی مرتبه دوم $y=\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0$ را استفاده کنید.

ب) با محاسبه خطا تعیین کنید کدام منحنی تخمین بهتری برای برازش این نقاط است؟

ج) با استفاده از نرم افزار MATLAB منحنی های بدست آمده را به همراه نقاط داده شده رسم نمایید.

۴-۷- پاسخ حداقل مربعات دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ را برای هر یک از سیستم های ناسازگار زیر بدست آورید.

الف) $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&2\\1&-2\\8&4\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\5\end{bmatrix}$

ب) $A=\begin{bmatrix}1&0&4\\2&2&10\\1&-2&2\\1&-2&-2\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}3\\7\\6\\1\end{bmatrix}$

۴-۸- دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases}x_1=0\\x_2-1=0\\3x_1+x_2-1=0\end{cases}$$

الف) سازگار یا ناسازگار بودن دستگاه را بررسی نمایید.

ب) جواب حداقل مربعات را با استفاده از تجزیه چالسکی بدست آورید.

فصل پنجم

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

۵-۱ مقدمه

در این فصل مفاهیمی چون مقدار ویژه، بردار ویژه و معادله مشخصه و چگونگی بدست آوردن آنها مطرح می شود، در روش های محاسبه مقادیر ویژه، علاوه بر روش کلاسیک دو روش مبتنی بر الگوریتم های تکراری نیز مطرح و الگوریتم ها همراه با کدنویسی آنها در MATLAB ارائه شده است. در انتها کاربرد بردارهای ویژه در قطری سازی ماتریس ها با استفاده از تبدیل های همانندی مطرح و نحوه محاسبه ماتریس قطری و فرم کانونیکال جردن بیان می شود.

۵-۲ مقدار ویژه، بردار ویژه و معادله مشخصه

دستگاه معادلات $A_{n\times n}\mathbf{x}_{n\times 1}=\mathbf{b}_{n\times 1}$ را در نظر بگیرید. این سیستم را می توان بصورت نگاشتی در فضای برداری $\Re^n$ در نظر گرفت، که هر بردار $\mathbf{x}$ را به یک بردار $\mathbf{b}$ تبدیل می کند،

$$\mathbf{x} \longrightarrow \boxed{A} \longrightarrow A\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

در بین این نگاشت ها مواردی وجود دارند که تنها اندازه بردار $\mathbf{x}$ را تغییر می کند و امتداد آن حفظ می گردد، به عبارتی بردار $\mathbf{b}$ بصورت مضربی از بردار $\mathbf{x}$ تعریف می گردد. در اینصورت نگاشت حاصل به شکل زیر تعریف می شود،

$$A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x} \qquad (۱-۵)$$

به بردارهای $\mathbf{x}_i$ غیر صفر که چنین خاصیتی را دارند **بردار ویژه**[۱] ماتریس $A_{n\times n}$ گویند و ضریب ثابت λ_i را **مقدار ویژه**[۲] ماتریس $A_{n\times n}$ می نامند. با توجه به تعریف داریم،

$$(\lambda_i I-A)\mathbf{x}_i=\mathbf{0}$$

لذا بردارهای ویژه $\mathbf{x}_i$ متعلق به فضای پوچی ماتریس $(\lambda_i I-A)$ بوده و مقادیر ویژه λ_i ریشه های چندجمله ای **مونیک**[۳] و مرتبه n حاصل از $|\lambda I-A|$ هستند. حال اگر $|\lambda I-A|$ را بسط دهیم، چند جمله ای بصورت زیر بیان می گردد،

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}=\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+\cdots+c_{n-1}\lambda+c_n \qquad (۲-۵)$$

که به آن **چندجمله ای مشخصه**[۴] ماتریس $A_{n\times n}$ می گویند. ریشه های چندجمله ای مشخصه همان مقادیر ویژه خواهند بود که به تعداد n تا هستند.

نکته۱: برای ماتریس حقیقی $A_{n\times n}$ معادله مشخصه $|\lambda I-A|=0$ یک چند جمله ای با ضرایب حقیقی است. بنابراین کلیه مقادیر ویژه بصورت حقیقی یا به فرم مختلط مزدوج $\alpha\pm j\beta$ هستند.

نکته۲: اگر بردار $\mathbf{v}_i$ یک بردار ویژه باشد، آنگاه برای هر اسکالر مخالف صفر مانند α، حاصل $\alpha\mathbf{v}_i$ نیز یک بردار ویژه خواهد بود.

---

[۱] Eigenvector
[۲] Eigenvalues
[۳] Monic
[۴] Characteristic Polynomial

نکته۳: اگر λ یک مقدار ویژه برای ماتریس A و بردار $\mathbf{v}$ بردار ویژه متناظر با آن باشد، در اینصورت λ^k نیز یک مقدار ویژه برای ماتریس A^k با بردار ویژه متناظر $\mathbf{v}$ خواهد بود. (k مقدار صحیح مثبت می باشد).

$$A^k\mathbf{v} = A^{k-1}(A\mathbf{v}) = A^{k-1}(\lambda\mathbf{v}) = \lambda A^{k-2}(A\mathbf{v})$$
$$= \lambda A^{k-2}(\lambda\mathbf{v}) = \cdots = \lambda^{k-1}(A\mathbf{v}) = \lambda^{k-1}(\lambda\mathbf{v}) = \lambda^k\mathbf{v}$$

نکته۴: برای ماتریس $A_{n\times n}$ با مقادیر ویژه $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ دترمینان و اثر ماتریس بصورت زیر قابل محاسبه است،

$$|A| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \quad \text{و} \quad \operatorname{trace}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \qquad (۳-۵)$$

می دانیم چندجمله ای مشخصه برای ماتریس $A_{n\times n}$ یک چندجمله ای مرتبه n و مونیک است،

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0$$

این چندجمله ای را می توان بصورت زیر نمایش داد،

$$|\lambda I - A| = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_{n-1})(\lambda-\lambda_n)$$

$\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ مقادیر ویژه هستند که می توانند حقیقی یا مختلط مزدوج و متمایز یا تکراری باشند. حال اگر در رابطه بالا $\lambda = 0$ قرار دهیم مقدار $|A|$ بدست می آید،

$$|A| = (\lambda_1)(\lambda_2)\cdots(\lambda_{n-1})(\lambda_n) = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i$$

برای اثبات اثر ماتریس بصورت زیر عمل می کنیم،

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

حال دترمینان را برحسب ستون اول بسط می دهیم،

$$|\lambda I - A| = (\lambda - a_{11})|M_{11}| - \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}|M_{i1}|$$

اگر حاصل $|M_{11}|$ را بدست آوریم داریم،

$$|M_{11}| = (\lambda - a_{22})|M'_{11}| - \sum_{i=3}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}|M'_{i1}|$$

به همین ترتیب اگر بسط را ادامه دهیم داریم،

$$|\lambda I - A| = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})\cdots(\lambda - a_{nn}) + P(\lambda)$$

$P(\lambda)$ یک چندجمله ای با درجه $n-2$ است. لذا ضریب بزرگترین درجه یک و ضریب درجه بعدی $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$ خواهد بود. از طرفی داریم،

$$|\lambda I - A| = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_{n-1})(\lambda-\lambda_n)$$

و در اینجا ضریب دومین جمله $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$ است. پس داریم،

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n = a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn} = \text{trace}(A)$$

نکته۵: اگر λ_i یک مقدار ویژه برای ماتریس A باشد، λ_i^{-1} مقدار ویژه ماتریس A^{-1} خواهد بود.

$$|\lambda I - A| = |\lambda A^{-1}A - A| = |(\lambda A^{-1} - I)A| = |\lambda A^{-1} - I|\ |A| = |\lambda|\ |A^{-1} - \lambda^{-1} I|\ |A| = 0$$

$$|\lambda^{-1} I_n - A^{-1}| = 0$$

نکته۶: ستون های غیر صفر ماتریس $adj(\lambda_i I - A)$ بردارهای ویژه ماتریس A هستند.

$$adj(\lambda I - A) = (\lambda I - A)^{-1}|\lambda I - A|$$

$$(\lambda I - A)adj(\lambda I - A) = |\lambda I - A| I$$

$$(\lambda_i I - A)adj(\lambda_i I - A) = |\lambda_i I - A| I = \mathbf{0}$$

رابطه اخیر نشان می دهد که ستون های غیر صفر ماتریس $adj(\lambda_i I - A)$ باید متعلق به فضای پوچی ماتریس $(\lambda_i I - A)$ باشند، لذا همان بردارهای ویژه ماتریس A هستند.

نکته۷: ضرایب معادله مشخصه یک ماتریس را می توان با استفاده از الگوریتم بازگشتی زیر بدست آورد،

$$\begin{aligned}
|\lambda I - A| &= \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0 \\
c_{n-1} &= -W_1 \\
c_{n-2} &= -\frac{1}{2}(c_{n-1}W_1 + W_2) \\
c_{n-3} &= -\frac{1}{3}(c_{n-2}W_1 + c_{n-1}W_2 + W_3) \\
&\vdots \\
c_0 &= -\frac{1}{n}(c_1W_1 + c_2W_2 + \cdots + c_{n-1}W_{n-1} + W_n)
\end{aligned} \tag{۴-۵}$$

در اینجا $W_k = \text{trace}(A^k)$ است. اثبات به عنوان تمرین به خواننده واگذار می شود.

نکته۹: در ماتریس های قطری، بالا مثلثی و پایین مثلثی عناصر روی قطر اصلی همان مقادیر ویژه ماتریس هستند. در مورد ماتریس های خاص شرایط ویژه ای برای مقادیر ویژه و بردارهای ویژه وجود دارد،

- ماتریس متقارن و هرمیتی($A = A^T, A = A^*$) مقادیر ویژه حقیقی و بردارهای ویژه متعامد،
- ماتریس متعامد و یکین($A^{-1} = A^T, A^{-1} = A^*$) مقادیر ویژه $|\lambda_i| = 1$ و بردارهای ویژه متعامد،
- ماتریس شبه متقارن ($A = -A^T$) مقادیر ویژه موهومی و بردارهای ویژه متعامد،
- ماتریس تصویر ($A = A^2 = A^T$) مقادیر ویژه صفر و یک و بردارهای ویژه پایه های فضای گستره و فضای پوچی ماتریس،
- ماتریس مثبت معین ($\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$) مقادیر ویژه مثبت و بردارهای ویژه متعامد،
- ماتریس مثبت نیمه معین ($\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \geq 0$) مقادیر ویژه مثبت و صفر و بردارهای ویژه متعامد،
- ماتریس منفی معین ($\mathbf{x}^T A\mathbf{x} < 0$) مقادیر ویژه منفی و بردارهای ویژه متعامد،
- ماتریس منفی نیمه معین ($\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \leq 0$) مقادیر ویژه منفی و صفر و بردارهای ویژه متعامد،

لذا یکی از راه های تشخیص مثبت معین بودن یک ماتریس متقارن بررسی علامت مقادیر ویژه آن است.

مثال۵-۱

مثبت معین بودن ماتریس زیر را بررسی نمایید.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & -4 \\ -2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

ابتدا از روش سیلوستر بررسی می نماییم سپس مقادیر ویژه آن را بدست می آوریم،

$$3 > 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 17 > 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & -4 \\ -2 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 46 > 0$$

لذا ماتریس مثبت معین است. حال مقادیر ویژه ماتریس را بررسی می کنیم،

معادله مشخصه ماتریس بصورت زیر است،

$$|\lambda I - A| = \lambda^3 - 15\lambda^2 + 51\lambda - 46 = 0$$

مقادیر ویژه بصورت زیر بدست می آید،

$$\lambda_1 = 2.9128, \quad \lambda_2 = 1.4903, \quad \lambda_3 = 10.5969$$

تمامی مقادیر ویژه مثبت هستند.

□

مثال۵-۲

معادله مشخصه ماتریس زیر را با استفاده از الگوریتم ارائه شده بر حسب اثر ماتریس بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}-1 & -4 & 2\\ -1 & -5 & 2\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

معادله مشخصه ماتریس بصورت زیر است،

$$|\lambda I-A|=\lambda^3+c_2\lambda^2+c_1\lambda+c_0$$

و ضرایب c_1 و c_0 بصورت زیر بدست می آیند،

$$c_2=-W_1$$

$$c_1=-\frac{1}{2}(c_2W_1+W_2)$$

$$c_0=-\frac{1}{3}(c_1W_1+c_2W_2+W_3)$$

لذا ماتریس های A^2 و A^3 را تشکیل می دهیم،

$$A^2=\begin{bmatrix}7 & 24 & -12\\ 8 & 29 & -14\\ -2 & -4 & 3\end{bmatrix},\quad A^3=\begin{bmatrix}-43 & -148 & 74\\ -51 & -177 & 88\\ 9 & 28 & -15\end{bmatrix}$$

$$W_1=\text{trace}(A)=-7,\quad W_2=\text{trace}(A^2)=39,\quad W_3=\text{trace}(A_3)=-235$$

$$c_2=7$$

$$c_1=-\frac{1}{2}(7\times(-7)+39)=5$$

$$c_0=-\frac{1}{3}(5\times(-7)+7\times 39+(-235))=-1$$

بنابراین معادله مشخصه بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I-A|=\lambda^3+7\lambda^2+5\lambda-1$$

در نرم افزار MATLAB برای بدست آوردن ضرایب چندجمله ای مشخصه از دستور poly(A) استفاده می شود،

```
A =[-1 -4 2;-1 -5 2;1 0 -1];
poly(A)
ans =
    1.0000    7.0000    5.0000   -1.0000
```

□

مثال۵-۳

ثابت کنید برای یک ماتریس متقارن(هرمیتی) تمامی مقادیر ویژه حقیقی و بردارهای ویژه متعامد هستند.

- فرض کنید A یک ماتریس متقارن یا هرمیتی ($A^T = A$ و $A^* = A$) و $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس A باشند،

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \rightarrow (A\mathbf{v}_i)^* = (\lambda_i \mathbf{v}_i)^* \rightarrow \mathbf{v}_i^* A^* = \bar{\lambda}_i \mathbf{v}_i^* \rightarrow \mathbf{v}_i^* A = \bar{\lambda}_i \mathbf{v}_i^*$$

$$\mathbf{v}_i^* A\mathbf{v}_i = \bar{\lambda}_i \mathbf{v}_i^* \mathbf{v}_i \rightarrow \mathbf{v}_i^* \lambda_i \mathbf{v}_i = \bar{\lambda}_i \|\mathbf{v}_i\|^2 \rightarrow \lambda_i \mathbf{v}_i^* \mathbf{v}_i = \bar{\lambda}_i \|\mathbf{v}_i\|^2$$

$$\lambda_i \|\mathbf{v}_i\|^2 = \bar{\lambda}_i \|\mathbf{v}_i\|^2 \quad , \quad \mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$$

$$\lambda_i = \bar{\lambda}_i$$

لذا مقادیر ویژه $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ اعدادی حقیقی هستند.

- فرض کنید $\mathbf{v}_i$ و $\mathbf{v}_j$ ($i \neq j$) دو بردار ویژه برای ماتریس متقارن A و λ_i و λ_j دو مقدار ویژه متمایز متناظر با آنها هستند،

$$\lambda_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \langle \lambda_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \langle A\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \langle \mathbf{v}_i, A^T \mathbf{v}_j \rangle$$
$$= \langle \mathbf{v}_i, A\mathbf{v}_j \rangle = \langle \mathbf{v}_i, \lambda_j \mathbf{v}_j \rangle = \lambda_j \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle$$

لذا داریم $(\lambda_i - \lambda_j)\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$ و از آنجاییکه $\lambda_i \neq \lambda_j$ است، پس باید $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$ باشد و دو بردار ویژه متعامد هستند.

□

مثال۵-۴

ثابت کنید که برای ماتریس های مربعی $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ داریم،

$$|\lambda I - AB| = |\lambda I - BA|$$

برای اثبات بصورت زیر عمل می کنیم، می دانیم $AA^{-1} = I$ است،

$$|\lambda I - AB| = |\lambda AA^{-1} - ABAA^{-1}| = |A(\lambda I - BA)A^{-1}| = |A||\lambda I - BA||A^{-1}|$$
$$= |A||\lambda I - BA|\frac{1}{|A|} = |\lambda I - BA|$$

□

مثال۵-۵

ماتریس A را در حالتهای مختلف در نظر بگیرید برای هر حالت معادله مشخصه، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را بدست آورید.

الف) $A=\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 3 & -5\end{bmatrix}$

- معادله مشخصه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix}\lambda+4 & -2\\ -3 & \lambda+5\end{vmatrix}=0 \quad\rightarrow\quad \lambda^2+9\lambda+14=0$$

- با حل معادله مشخصه مقادیر ویژه را بدست می آوریم،

$$\lambda^2+9\lambda+14=(\lambda+7)(\lambda+2)=0 \quad\rightarrow\quad \lambda_1=-7, \lambda_2=-2$$

بنابراین ماتریس A دو مقدار ویژه حقیقی متمایز یا غیر تکراری دارد.

- حال بردارهای ویژه متناظر با هر یک از مقادیر ویژه را محاسبه می کنیم،

روش اول: استفاده از تعریف بردار ویژه،

$$A\mathbf{v}_i=\lambda_i\mathbf{v}_i \rightarrow (\lambda_i I - A)\mathbf{v}_i=0 \rightarrow \begin{bmatrix}\lambda_i+4 & -2\\ -3 & \lambda_i+5\end{bmatrix}\mathbf{v}_i=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1=-7 \rightarrow \begin{bmatrix}-3 & -2\\ -3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \rightarrow -3x_1-2x_2=0 \rightarrow x_1=\frac{-2}{3}x_2 \rightarrow \mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=-2 \rightarrow \begin{bmatrix}2 & -2\\ -3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \rightarrow 2x_3-2x_4=0 \rightarrow x_3=x_4 \rightarrow \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$$

روش دوم: استفاده از ماتریس الحاقی،

$$\mathrm{Adj}(\lambda I - A)=\mathrm{Adj}\begin{bmatrix}\lambda+4 & -2\\ -3 & \lambda+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda+5 & 2\\ 3 & \lambda+4\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1=-7 \quad\rightarrow\quad \mathrm{Adj}(-7\mathrm{I}-A)=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 3 & -3\end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad \mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=-2 \quad\rightarrow\quad \mathrm{Adj}(-2\mathrm{I}-A)=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$$

می توان نشان داد که در این حالت بردارهای ویژه $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ مستقل خطی هستند،

$$\begin{vmatrix}2 & 2\\ -3 & 2\end{vmatrix}=4-(-6)=10$$

از آنجائیکه مقدار دترمینان مخالف صفر است، لذا بردارهای ویژه $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ مستقل خطی هستند.

در نرم افزار MATLAB از تابع eig(A) و [V, D] = eig(A) برای محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه یکامتعامد شده ماتریس A استفاده می شود.

به اجرای این دو دستور توجه نمایید،

```
A =[-4 2;3 -5];
eig(A)
ans =
    -2
    -7
[V,D]= eig(A)
V =
    0.7071   -0.5547
    0.7071    0.8321
D =
    -2     0
     0    -7
```

این دستور بردارهای ویژه یکامتعامد شده ماتریس A را می دهد. اگر بخواهیم بردارهای ویژه را همانند محاسبات دستی بدست آوریم می توان از برنامه myeig.m استفاده نمود،

```
% Calculate Eigenvalue and Eigenvectors
function [V,l]= myeig(A)
l = eig(A);
n = size(l,1);
V = zeros(size(A));
for i = 1:n
    V(:,i)= null(l(i)* eye(size(A))- A,'r');
end
```

اجرای برنامه بصورت زیر است،

```
A =[-4 2;3 -5];
[V,l]= myeig(A)
V =
    1.0000   -0.6667
    1.0000    1.0000
l =
    -2
    -7
```

در اینجا بردارهای ویژه فرم یکا متعامد ندارند.

برای بدست آوردن فرم پارامتری معادله مشخصه می توان بصورت زیر عمل نمود،

```
A =[-4 2;3 -5];
l = sym('l');
det(l*eye(2)- A)
 ans =
l^2+9*l+14
```

همچنین می توان با دستور poly(A) ضرایب معادله مشخصه ماتریس را بدست آورد سپس با دستور roots(p) ریشه های آن را محاسبه نمود،

```
A =[-4 2;3 -5];
p = poly(A)
p =
     1     9    14
roots(p)
ans =
    -7
    -2
```

ب) $A=\begin{bmatrix}6 & 5\\ -8 & -6\end{bmatrix}$

- معادله مشخصه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix}\lambda-6 & -5\\ 8 & \lambda+6\end{vmatrix}=0 \quad\rightarrow\quad \lambda^2+4=0$$

- با حل معادله مشخصه مقادیر ویژه را بدست می آوریم،

$$\lambda^2+4=(\lambda-j2)(\lambda+j2)=0 \quad\rightarrow\quad \lambda_1=j2, \lambda_2=-j2$$

بنابراین ماتریس A دو مقدار ویژه مزدوج موهومی دارد.

- بردارهای ویژه متناظر با هر یک از مقادیر ویژه بصورت زیر بدست می آیند،

$$\lambda_1=j2 \rightarrow A\mathbf{v}_1=\lambda_1\mathbf{v}_1 \rightarrow \begin{bmatrix}6 & 5\\ -8 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{21}\end{bmatrix}=j2\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{21}\end{bmatrix} \rightarrow v_{11}=(\frac{-3}{4}-j\frac{1}{4})v_{21}$$

$$\lambda_2=-j2 \rightarrow A\mathbf{v}_2=\lambda_2\mathbf{v}_2 \rightarrow \begin{bmatrix}6 & 5\\ -8 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{12}\\ v_{22}\end{bmatrix}=-j2\begin{bmatrix}v_{12}\\ v_{22}\end{bmatrix} \rightarrow v_{12}=(\frac{-3}{4}+j\frac{1}{4})v_{22}$$

از این رو بردار ویژه $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ را می توان بدین صورت نوشت،

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{-3}{4} - j\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{-3}{4} + j\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

می توان نشان داد که در این حالت بردارهای ویژه $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ مستقل خطی هستند،

$$\begin{vmatrix} \frac{-3}{4} - j\frac{1}{4} & \frac{-3}{4} + j\frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[6 5;-8 -6];
poly(A)
ans =
     1     0     4
[V,D]= eig(A)
V =
   0.1961 - 0.5883i   0.1961 + 0.5883i
        0 + 0.7845i        0 - 0.7845i
D =
        0 + 2.0000i        0
        0                  0 - 2.0000i
```

و یا با استفاده از برنامه myeig.m داریم،

```
A =[6 5;-8 -6];
[V,l]= myeig(A)
V =
  -0.7500 - 0.2500i  -0.7500 + 0.2500i
   1.0000             1.0000
l =
        0 + 2.0000i
        0 - 2.0000i
```

□

قضیه۱: اگر یک ماتریس $A_{n\times n}$ دارای n مقدار ویژه متمایز $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ باشد، آنگاه n بردار ویژه مستقل خطی $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ وجود خواهد داشت.

اثبات: فرض کنیم فقط k تا از این بردارها مستقل خطی باشند،

$$\mathbf{v}_{k+1}=\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\cdots+\alpha_k\mathbf{v}_k \qquad (۵-۵)$$

طرفین رابطه بالا را در A ضرب کنیم،

$$A\mathbf{v}_{k+1}=\alpha_1A\mathbf{v}_1+\alpha_2A\mathbf{v}_2+\cdots+\alpha_kA\mathbf{v}_k$$

می دانیم $A\mathbf{v}_i=\lambda_i\mathbf{v}_i$،

$$\lambda_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}=\alpha_1\lambda_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\lambda_2\mathbf{v}_2+\cdots+\alpha_k\lambda_k\mathbf{v}_k \qquad (۶-۵)$$

اگر طرفین رابطه(۵-۵) را در λ_{k+1} ضرب می کنیم،

$$\lambda_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}=\alpha_1\lambda_{k+1}\mathbf{v}_1+\alpha_2\lambda_{k+1}\mathbf{v}_2+\cdots+\alpha_k\lambda_{k+1}\mathbf{v}_k \qquad (۷-۵)$$

با تفاضل رابطه(۵-۶) و (۵-۷) داریم،

$$\alpha_1(\lambda_{k+1}-\lambda_1)\mathbf{v}_1+\alpha_2(\lambda_{k+1}-\lambda_2)\mathbf{v}_2+\cdots+\alpha_k(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\mathbf{v}_k=\mathbf{0}$$

طبق فرض $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k$ مستقل خطی و مقادیر ویژه مجزا هستند، لذا باید،

$$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_k=0$$

بنابراین طبق رابطه(۵-۵) باید $\mathbf{v}_{k+1}=\mathbf{0}$ باشد که با شرط $\mathbf{v}_{k+1}\neq\mathbf{0}$ بردار ویژه منافات دارد. پس نمی توان $\mathbf{v}_{k+1}$ را بصورت ترکیب خطی از $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k$ نوشت و $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ مستقل خطی هستند.

□

نکته: اگر ماتریس $A_{n\times n}$ یک مقدار ویژه تکراری از مرتبه k داشته باشد، آنگاه حداقل یک و حداکثر k بردار ویژه مستقل خطی متناظر با این مقدار ویژه تکراری λ_i وجود خواهد داشت و تعداد بردارهای مستقل خطی در این حالت برابر با $n-\operatorname{rank}(A-\lambda_iI)$ است.

مثال۵-۶

برای ماتریس A معادله مشخصه، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را بدست آورید.

الف) $$A=\begin{bmatrix}4&-2&0\\1&2&0\\0&0&6\end{bmatrix}$$

- معادله مشخصه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&2&0\\-1&\lambda-2&0\\0&0&\lambda-6\end{vmatrix}=0 \quad\rightarrow\quad \lambda^3-12\lambda^2+46\lambda-60=0$$

- پس از حل معادله مشخصه مقادیر ویژه بصورت زیر بدست می آیند،

$$\lambda^3 - 12\lambda^2 + 46\lambda - 60 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 6, \lambda_{2,3} = 3 \pm j$$

بنابراین ماتریس A یک مقدار ویژه حقیقی و دو مقدار ویژه مختلط مزدوج دارد.

- بردارهای ویژه متناظر با این مقادیر ویژه را با استفاده از تعریف بردار ویژه بدست می آوریم،

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda-4 & 2 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-6 \end{bmatrix} \mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 6 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3 + j \rightarrow \begin{bmatrix} -1+j & 2 & 0 \\ -1 & 1+j & 0 \\ 0 & 0 & -3+j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1+j \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 3 - j \rightarrow \begin{bmatrix} -1-j & 2 & 0 \\ -1 & 1-j & 0 \\ 0 & 0 & -3-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1-j \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[4 -2 0;1 2 0;0 0 6];
[V,D]= eig(A)
V =
  -0.5774 + 0.5774i  -0.5774 - 0.5774i        0
        0 + 0.5774i        0 - 0.5774i        0
        0                  0             1.0000
D =
   3.0000 + 1.0000i        0                  0
        0             3.0000 - 1.0000i        0
        0                  0             6.0000
```

و یا با استفاده از برنامه myeig.m داریم،

```
A =[4 -2 0;1 2 0;0 0 6];
[V,l]= myeig(A)
V =
   1.0000 + 1.0000i   1.0000 - 1.0000i        0
   1.0000             1.0000                  0
        0                  0             1.0000
l =
   3.0000 + 1.0000i
   3.0000 - 1.0000i
   6.0000
```

نتایج بدست آمده با این برنامه مطابق با محاسبات دستی انجام شده می باشد.

ب) $A=\begin{bmatrix}6 & 3 & -8\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -3\end{bmatrix}$

- معادله مشخصه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I_3 - A| = \begin{vmatrix}\lambda-6 & -3 & 8\\ 0 & \lambda+2 & 0\\ -1 & 0 & \lambda+3\end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda^3-\lambda^2-16\lambda-20=0$$

- با حل معادله مشخصه مقادیر ویژه را بدست می آوریم،

$$\lambda^3-\lambda^2-16\lambda-20=(\lambda+2)^2(\lambda-5)=0 \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2}=-2, \lambda_3=5$$

بنابراین ماتریس A دو مقدار ویژه حقیقی تکراری و یک مقدار ویژه متمایز دارد.

- حال بردارهای ویژه متناظر با هر یک از مقادیر ویژه را محاسبه می کنیم، از آنجاییکه $n-\text{rank}(A-\lambda_1 I)=3-2=1$ است، لذا برای مقدار ویژه تکراری $\lambda_{1,2}=-2$ فقط یک بردار ویژه مستقل خطی داریم. با استفاده از تعریف بردار ویژه داریم،

$$\lambda_1=-2 \rightarrow A\mathbf{v}_1=\lambda_1\mathbf{v}_1 \rightarrow \begin{bmatrix}6 & 3 & -8\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{21}\\ v_{31}\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{21}\\ v_{31}\end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases}v_{11}=v_{31}\\ v_{21}=0\end{cases}$$

$$\lambda_3=5 \rightarrow A\mathbf{v}_3=\lambda_3\mathbf{v}_3 \rightarrow \begin{bmatrix}6 & 3 & -8\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{13}\\ v_{23}\\ v_{33}\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}v_{13}\\ v_{23}\\ v_{33}\end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases}v_{13}=8v_{33}\\ v_{23}=0\end{cases}$$

از این رو بردار ویژه $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_3$ را می توان بدین صورت نوشت،

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بطور مشابه با روش ماتریس الحاقی نیز می توان محاسبه کرد،

$$\mathrm{Adj}(\lambda I - A) = \mathrm{Adj}\begin{bmatrix} \lambda-6 & -3 & 8 \\ 0 & \lambda+2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda^2+5\lambda+6 & 3\lambda+9 & -8\lambda-16 \\ 0 & \lambda^2-3\lambda-10 & 0 \\ \lambda+2 & 3 & \lambda^2-4\lambda-12 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -2 \quad \rightarrow \quad \mathrm{Adj}(-2\mathrm{I} - A) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 5 \quad \rightarrow \quad \mathrm{Adj}(5\mathrm{I} - A) = \begin{bmatrix} 56 & 24 & -56 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & -7 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 24 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[6 3 -8;0 -2 0;1 0 -3];
poly(A)
ans =
     1    -1   -16   -20
[V,D]= eig(A)
V =
    0.9923    0.7071    0.7071
         0         0    0.0000
    0.1240    0.7071    0.7071
D =
     5     0     0
     0    -2     0
     0     0    -2
```

و با استفاده از برنامه myeig.m داریم،

```
A =[6 3 -8;0 -2 0;1 0 -3];
[V,l]= myeig(A)
V =
     8     1     1
     0     0     0
     1     1     1
l =
     5
    -2
    -2
```

توجه کنید که برای مقدار ویژه تکراری یک بردار ویژه ارائه می دهد و این موضوع تحلیل های دستی انجام شده را تایید می کند.

□

۵-۳ محاسبه مقادیر ویژه با روش های تکراری

استفاده از روش کلاسیک برای محاسبه مقادیر ویژه برای ماتریس هایی با ابعاد بزرگ مقرون به صرفه نیست. لذا در چنین شرایطی اغلب از روش های عددی یا تکراری برای بدست آوردن مقادیر ویژه استفاده می شود. در این بخش به دو روش توانی و تجزیه QR اشاره شده است.

۵-۳-۱- استفاده از روش توانی

یکی از معروف ترین روش های تکراری برای محاسبه مقادیر ویژه **روش توانی**[1] یا **روش به توان رسانی** است. در این روش که یک روش تکراری است در هر مرحله بزرگترین مقدار ویژه از نظر قدرمطلق و بردار ویژه متناظر با آن با توجه به معیار دقت مورد نظر تعیین می گردد. این روش زمانی کاربرد دارد که ماتریس دارای مقادیر ویژه تکراری نباشد. اگر این روش را برای ماتریس معکوس اجرا کنیم کوچکترین مقدار ویژه به لحاظ قدر مطلق بدست می آید.

ماتریس $A_{n\times n}$ را با مقادیر ویژه متمایز $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ و بردارهای ویژه مستقل خطی $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ در نظر بگیرید. لذا بردارهای ویژه تشکیل یک دسته پایه برای $\Re^n$ می دهند. الگوریتم تکراری بصورت زیر قابل اجرا است،

[1] Power Method

مرحله۱- بردار دلخواه $\mathbf{u}_0 \in \Re^n$ را چنان در نظر بگیرید که $\|\mathbf{u}_0\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\{|u_i|\} = 1$ باشد.

مرحله۲- بردار $\mathbf{u}_1 = \dfrac{A\mathbf{u}_0}{\|A\mathbf{u}_0\|_\infty}$ را بدست آورید.

مرحله۳- بردار $\mathbf{u}_2 = \dfrac{A\mathbf{u}_1}{\|A\mathbf{u}_1\|_\infty}$ را بدست آورید.

$\vdots$

مرحله۴- بردار $\mathbf{u}_k = \dfrac{A\mathbf{u}_{k-1}}{\|A\mathbf{u}_{k-1}\|_\infty}$ را بدست آورید.

مرحله۵- $\lambda_1 = \dfrac{\mathbf{u}_k^T A\mathbf{u}_k}{\mathbf{u}_k^T\mathbf{u}_k}$ بزرگترین مقدار ویژه به لحاظ قدر مطلق و $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_k$ بردار ویژه متناظر با آن است.

زمان خاتمه الگوریتم به دقت مورد نظر بستگی دارد. اگر دقت مورد نظر را ε در نظر بگیریم می توان چنین معیاری را برای خاتمه الگوریتم در نظر گرفت،

$$\left|\frac{\lambda^{(i+1)} - \lambda^{(i)}}{\lambda^{(i+1)}}\right| \le \varepsilon$$

برای اجرای این الگوریتم تکراری برنامه powereig.m در نرم افزار MATLAB نوشته شده است،

```
% Calculate  largest  absolute  eigenvalue  by Power  Method
function  [V, D] = powereig(A  ,err)
n = size(A,1);
ee = 10;
u = randn(n,1)  ;
u = u/norm(u, 'inf' );
u = (A * u)/norm(A  * u,'inf' );
l1 = (u'*A  * u)/(u'*u);
while(ee  > err)
    u = (A * u)/norm(A  * u,'inf' );
    l2 = (u'*A  * u)/(u'*u);
    ee = abs((l2 - l1)/l2);
    l1 = l2;
end
V = u;
D = l2;
```

برنامه invpowereig.m کوچکترین مقدار ویژه را به لحاظ قدرمطلق محاسبه می کند. در این برنامه الگوریتم برای ماتریس معکوس اجرا شده و بزرگترین مقدار ویژه آن محاسبه می شود که معکوس آن برابر با کوچکترین مقدار ویژه ماتریس اصلی است.

```
% Calculate smallest absolute eigenvalues by Power Method
function [V,D] = invpowereig(A,err)
n = size(A,1);
ee = 10;
u = randn(n,1);
u = u/norm(u,'inf');
u = (A\u)/norm(A\u,'inf');
l1 = (u'*(A\u))/(u'*u);
while(ee > err)
    u = (A\u)/norm(A\u,'inf');
    l2 = (u'*(A\u))/(u'*u);
    ee = abs((l2-l1)/l2);
    l1 = l2;
end
V = u;
D = l2;
```

مثال۵-۷

با استفاده از روش توانی مقادیر ویژه ماتریس A را با توجه به دقت خواسته شده بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}5 & -6\\ 4 & -6\end{bmatrix} \quad , \quad \varepsilon=10^{-2}$$

۱- بردار دلخواه $\mathbf{u}_0=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ را انتخاب می کنیم.

۲- بردار $\mathbf{u}_1=\dfrac{A\mathbf{u}_0}{\|A\mathbf{u}_0\|_\infty}$ را بدست می آوریم.

$$A\mathbf{u}_0=\begin{bmatrix}5 & -6\\ 4 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{u}_1=\frac{A\mathbf{u}_0}{2}=\begin{bmatrix}-0.5\\-1\end{bmatrix}$$

مقدار ویژه را در مرحله اول بدست می آوریم،

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{\mathbf{u}_1^T A\mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1^T\mathbf{u}_1} = -4.6000$$

۳- بردار $\mathbf{u}_2 = \dfrac{A\mathbf{u}_1}{\|A\mathbf{u}_1\|_\infty}$ را بدست می آوریم.

$$A\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0.5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{u}_2 = \frac{A\mathbf{u}_1}{4} = \begin{bmatrix} 0.8750 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مقدار ویژه را در مرحله دوم بدست می آوریم،

$$\lambda_1^{(2)} = \frac{\mathbf{u}_2^T A\mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2^T\mathbf{u}_2} = -2.2212$$

حال برای ادامه کار خطا را بررسی می کنیم،

$$\left|\frac{\lambda_1^{(2)} - \lambda_1^{(1)}}{\lambda_1^{(2)}}\right| = \left|\frac{-2.2212 + 4.600}{-2.2212}\right| = 1.0710 > 10^{-2}$$

لذا مرحله بعدی را ادامه می دهیم،

۴- بردار $\mathbf{u}_3 = \dfrac{A\mathbf{u}_2}{\|A\mathbf{u}_2\|_\infty}$ را بدست می آوریم.

$$A\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.8750 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.6250 \\ -2.5000 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{u}_3 = \frac{A\mathbf{u}_2}{2.5} = \begin{bmatrix} -0.6500 \\ -1 \end{bmatrix}$$

مقدار ویژه را در مرحله سوم بدست می آوریم،

$$\lambda_1^{(3)} = \frac{\mathbf{u}_3^T A\mathbf{u}_3}{\mathbf{u}_3^T\mathbf{u}_3} = -3.6467$$

حال برای ادامه کار خطا را بررسی می کنیم،

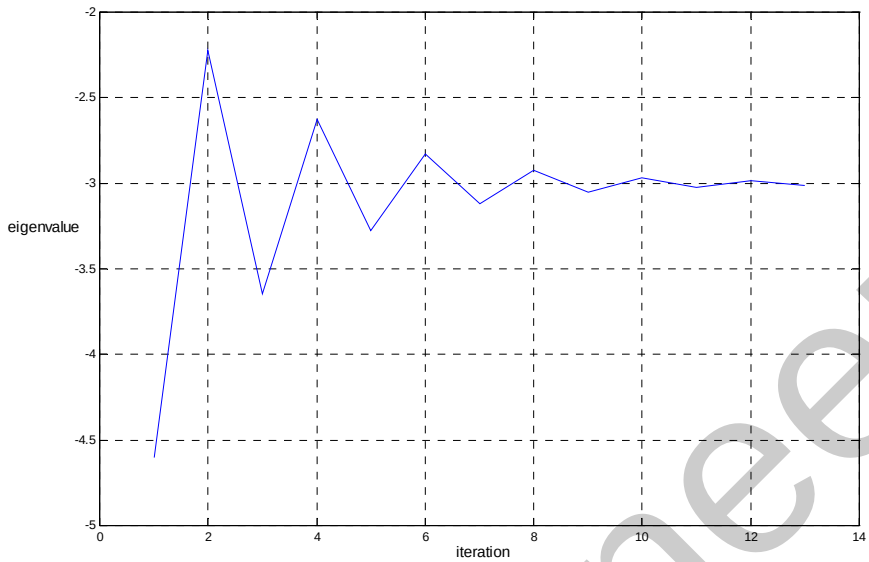
$$\left|\frac{\lambda_1^{(3)} - \lambda_1^{(2)}}{\lambda_1^{(3)}}\right| = \left|\frac{-3.6467 + 2.2212}{-3.6467}\right| = 0.3909 > 10^{-2}$$

با ادامه الگوریتم نهایتاً به جواب می رسیم. به دلیل طولانی بودن محاسبات دستی نتایج کلی توسط نرم افزار MATLAB بدست آمده است. در اجرای برنامه powereig برای این مثال خاص به جای استفاده از تابع randn برای تولید بردار $\mathbf{u}$ اولیه آن را بردار $[1,1]$ در نظر گرفته ایم.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \varepsilon = 10^{-2}$$

step	$\mathbf{u}$	λ	ε
1	$\begin{bmatrix}-0.5\\-1\end{bmatrix}$	-4.6000	
2	$\begin{bmatrix}0.875\\1\end{bmatrix}$	-2.2212	1.0709
3	$\begin{bmatrix}-0.6500\\-1\end{bmatrix}$	-3.6467	0.3909
4	$\begin{bmatrix}0.8088\\1\end{bmatrix}$	-2.6277	0.3878
5	$\begin{bmatrix}-0.7074\\-1\end{bmatrix}$	-3.2739	0.1974
6	$\begin{bmatrix}0.7768\\1\end{bmatrix}$	-2.8290	0.1575
7	$\begin{bmatrix}-0.7314\\-1\end{bmatrix}$	-3.1191	0.0930
8	$\begin{bmatrix}0.7621\\1\end{bmatrix}$	-2.9229	0.0671
9	$\begin{bmatrix}-0.7418\\-1\end{bmatrix}$	-3.0524	0.0424
10	$\begin{bmatrix}0.7554\\1\end{bmatrix}$	-2.9655	0.0293
11	$\begin{bmatrix}-0.7464\\-1\end{bmatrix}$	-3.0232	0.0191
12	$\begin{bmatrix}0.7524\\1\end{bmatrix}$	-2.9846	0.0129
13	$\begin{bmatrix}-0.7484\\-1\end{bmatrix}$	-3.0103	0.0085

لذا مقدار ویژه غالب $\lambda_1 = -3.0103$ و بردار ویژه متناظر با آن $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}-0.7484\\-1\end{bmatrix}$ است. در شکل زیر نحوه همگرایی مقدار ویژه λ_1 رسم شده است،



شکل(۵-۱) - نحوه همگرایی مقدار ویژه λ_1 برای ماتریس A

به منظور مقایسه نتایج ابتدا مقادیر ویژه و بردار ویژه ماتریس را با استفاده از دستور eig نرم افزار MATLAB بدست می آوریم،

```
A =[5 -6;4 -6];
[V,D]= eig(A)
V =
    0.8944    0.6000
    0.4472    0.8000
D =
     2     0
     0    -3
```

نتیجه نرم افزار با محاسبات الگوریتم مطابقت دارد.

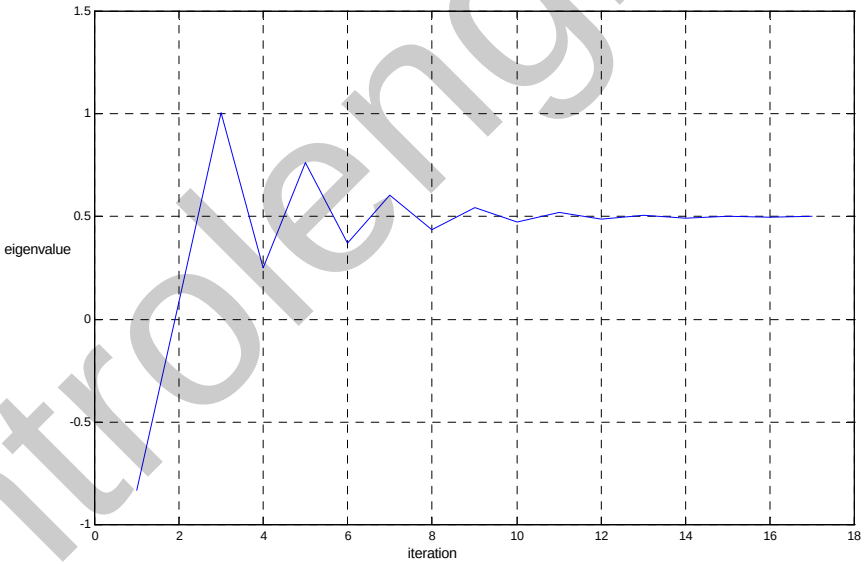
حال برنامه را برای معکوس ماتریس اجرا می کنیم تا کوچکترین مقدار ویژه ماتریس بدست آید. در اینجا هم بردار **u** اولیه آن را بردار $[1,1]$ در نظر گرفته ایم.

```
A =[5 -6;4 -6];
err =.01;
[V,D] = invpowereig(A,err)
V =
    1.0000
    0.4987
D =
    0.5017
```

لذا بزرگترین مقدار ویژه ماتریس A^{-1} برابر با 0.5017 است، پس کوچکترین مقدار ویژه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$\lambda_2 = \frac{1}{0.5017} = 1.9932 \approx 2$$

در شکل زیر نحوه همگرایی مقدار ویژه ماتریس معکوس نشان داده شده است،



شکل(۵-۲) - نحوه همگرایی مقدار ویژه λ_1 برای ماتریس A^{-1}

□

مثال۵-۸

با استفاده از روش توانی بزرگترین و کوچکترین مقادیر ویژه ماتریس A را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}4 & 0 & 1\\ -1 & -6 & -2\\ 5 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad , \quad \varepsilon=10^{-3}$$

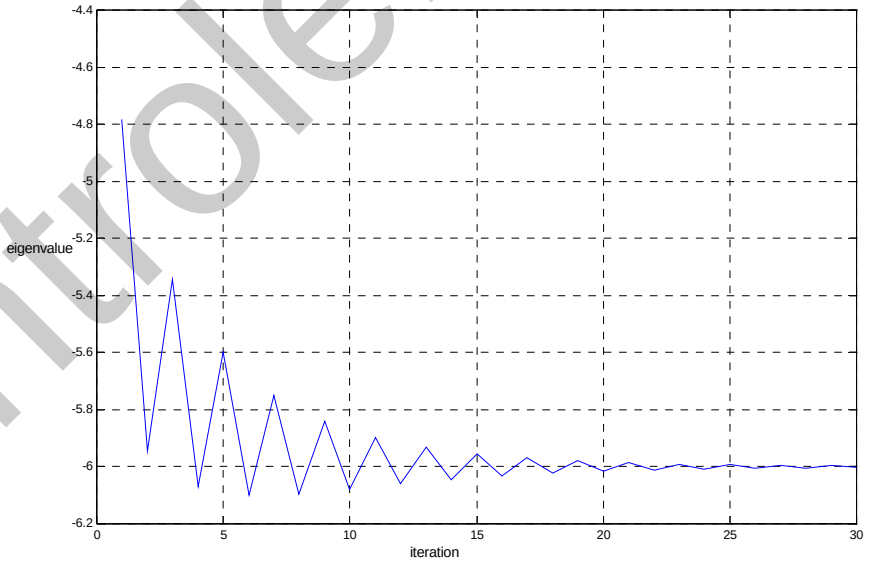
جهت مقایسه نتایج ابتدا با استفاده از دستور eig مقادیر ویژه ماتریس را بدست می آوریم،

```
A =[4 0 1;-1 -6 -2;5 0 0];
eig(A)'
ans =
    -6    5    -1
```

با اجرای برنامه powereig داریم،

```
A =[4 0 1;-1 -6 -2;5 0 0];
err =.001;
[V,D] = powereig(A,err)
V =
   -0.0009
   -1.0000
   -0.0009
D =
   -6.0027
```

در شکل(۵-۳) نحوه همگرایی مقدار ویژه λ_1 رسم شده است،



شکل(۵-۳) - نحوه همگرایی مقدار ویژه λ_1 برای ماتریس A

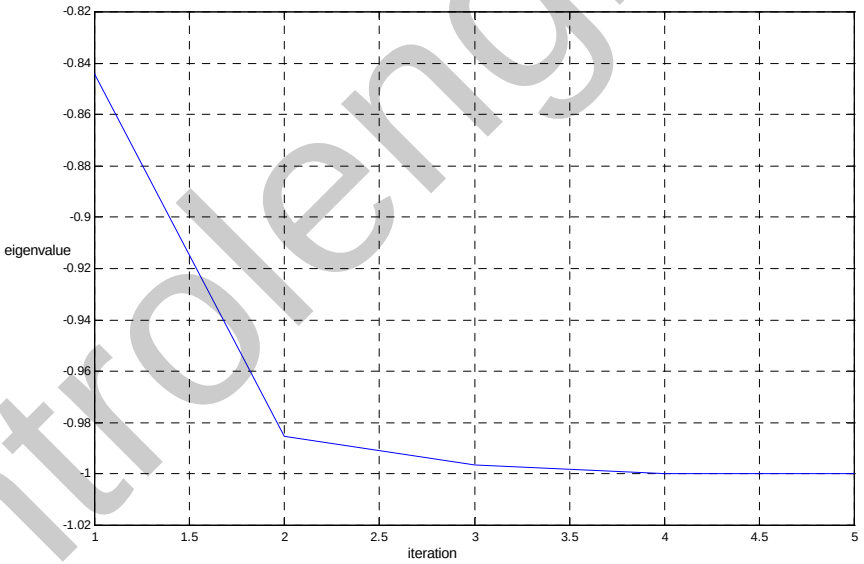
همچنین با اجرای برنامه invpowereig.m داریم،

```
A =[4 0 1;-1 -6 -2;5 0 0];
err =.001;
[V,D] = invpowereig(A,err)
V =
    0.2000
    0.3603
   -1.0000
D =
   -0.9999
```

لذا بزرگترین مقدار ویژه ماتریس A^{-1} برابر با -0.9999 است، پس کوچکترین مقدار ویژه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$\lambda_3 = \frac{1}{-0.9999} = -1.0001$$

در شکل زیر نحوه همگرایی مقدار ویژه ماتریس معکوس نشان داده شده است،



شکل(۵-۴) - نحوه همگرایی مقدار ویژه λ_1 برای ماتریس A^{-1}

در اجرای برنامه از آنجاییکه مقدار بردار **u** اولیه توسط تابع randn انتخاب می شود، لذا سرعت همگرایی می تواند تغییر کند.

□

۵-۳-۲- استفاده از تجزیه QR

یک روش دیگر برای بدست آوردن مقادیر ویژه استفاده از تجزیه QR است. در این روش سعی می شود تا با استفاده از تجزیه QR ماتریس $A_{n\times n}$ به یک ماتریس بالا مثلثی تبدیل گردد، که در این صورت عناصر روی قطر اصلی همان مقادیر ویژه خواهند بود. این روش برای ماتریس هایی کاربرد دارد که مقادیر ویژه متمایز و حقیقی داشته باشند. الگوریتم مذکور بصورت زیر است،

مرحله ۱- تجزیه $A = Q_0 R_0$ را بدست آورید. سپس ماتریس $A_1 = R_0 Q_0$ را محاسبه نمایید.
مرحله ۲- تجزیه $A_1 = Q_1 R_1$ را بدست آورید. سپس ماتریس $A_2 = R_1 Q_1$ را محاسبه نمایید.
مرحله ۳- به همین ترتیب تا k مرحله ادامه دهید.

الگوریتم زمانی پایان می یابد که عناصر زیر قطر اصلی ماتریس A_m به صفر نزدیک شده باشند. در اینصورت عناصر روی قطر اصلی ماتریس A_m همان مقادیر ویژه ماتریس A خواهند بود.

مثال۵-۹

با استفاده از الگوریتم بالا ثابت کنید، ماتریس های A_2, A_1, A تا A_k مقادیر ویژه یکسانی دارند.

ابتدا ثابت می کنیم $A = Q_0 A_1 Q_0^T$ و $A_1 = Q_0 A_2 Q_0^T$ است.

$$A_1 = R_0 Q_0 \rightarrow A_1 Q_0^T = R_0 \underbrace{Q_0 Q_0^T}_{I} \rightarrow A_1 Q_0^T = R_0$$

$$A_2 = R_1 Q_1 \rightarrow A_2 Q_1^T = R_1 \underbrace{Q_1 Q_1^T}_{I} \rightarrow A_2 Q_1^T = R_1$$

حال با توجه با اینکه $A = Q_0 R_0$ و $A_1 = Q_1 R_1$ است داریم،

$$A = Q_0 R_0 = Q_0 A_1 Q_0^T \quad , \quad A_1 = Q_1 R_1 = Q_1 A_2 Q_1^T$$

حال به اثبات مسئله اصلی می پردازیم،

$$|\lambda I - A| = |\lambda Q_0 Q_0^T - Q_0 A_1 Q_0^T| = |Q_0(\lambda I - A_1)Q_0^T| = \underbrace{|Q_0|}_{1}|\lambda I - A_1|\underbrace{|Q_0^T|}_{1} = |\lambda I - A_1|$$

$$|\lambda I - A_1| = |\lambda Q_1 Q_1^T - Q_1 A_2 Q_1^T| = |Q_1(\lambda I - A_2)Q_1^T| = \underbrace{|Q_1|}_{1}|\lambda I - A_2|\underbrace{|Q_1^T|}_{1} = |\lambda I - A_2|$$

لذا $|\lambda I - A| = |\lambda I - A_1| = |\lambda I - A_2|$ است و ماتریس های A_2, A_1, A مقادیر ویژه یکسانی دارند.
می توان با ادامه همین روش بقیه ماتریس ها را نیز بدست آورد.

□

برنامه QReig.m در نرم افزار MATLAB برای اجرای این الگوریتم نوشته شده است. این برنامه ماتریس A و تعداد تکرار برای الگوریتم را به عنوان ورودی گرفته و مقادیر ویژه ماتریس A را در خروجی ارائه می دهد.

```
% Calculate eigenvalues by QR method
function L = QReig(A,k)
for i=1:k
   [Q0,R0] = qr(A,0);
    A1 = R0*Q0;
    A = A1;
end
L = diag(A);
```

می توان به جای تعیین تعداد تکرارها یک حدی برای خاتمه الگوریتم قرار داد. در اینصورت می توان برنامه را به شکل زیر اصلاح نمود،

```
% Calculate eigenvalues by QR method
function L = QReig(A)
k = 1;
while(abs(k)>0.0001)
   [Q0,R0] = qr(A,0);
    A1 = R0*Q0;
    A = A1;
    B = tril(A,-1);
    k = sum(B(:));
end
L = diag(A);
```

در اینجا نیازی به وارد کردن تعداد دفعات تکرار نیست.

مثال۵-۱۰

با استفاده از الگوریتم تجزیه QR مقادیر ویژه ماتریس زیر را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 3 & -5\end{bmatrix}$$

برای مقایسه نتایج ابتدا با استفاده از دستور eig مقادیر ویژه را بدست می آوریم،

```
A =[-4 2;3 -5];
eig(A)
ans =
    -2
    -7
```

حال با استفاده از برنامهQReig.m اصلاح شده مقادیر ویژه را حساب می کنیم،

```
A =[-4 2;3 -5];
L = QReig(A)
L =
   -7.0000
   -2.0000
```

روند اجرا در جدول زیر آورده شده است،

step i	$A_i = R_{i-1}Q_{i-1}$
1	$\begin{bmatrix} -6.76 & -0.68 \\ -1.68 & -2.24 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} -7.0495 & -0.5153 \\ 0.4847 & -1.9505 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} -7.0234 & 0.8641 \\ -0.1359 & -1.9766 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} -7.0074 & -0.9614 \\ 0.0386 & -1.9926 \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} -7.0022 & 0.9890 \\ -0.0110 & -1.9978 \end{bmatrix}$
6	$\begin{bmatrix} -7.0006 & -0.9969 \\ 0.0031 & -1.9994 \end{bmatrix}$
7	$\begin{bmatrix} -7.0002 & 0.9991 \\ -0.0009 & -1.9998 \end{bmatrix}$
8	$\begin{bmatrix} -7.0001 & -0.9997 \\ 0.0003 & -1.9999 \end{bmatrix}$
9	$\begin{bmatrix} -7.0000 & 0.9999 \\ -0.0001 & -2.0000 \end{bmatrix}$

در این مثال پس از ۹ مرحله تکرار ماتریس بالامثلثی به دقت مورد نظر 10^{-4} رسیده و عناصر روی قطر اصلی ماتریس A_9 نیز بیانگر مقادیر ویژه ماتریس A شدند.

□

مثال۵-۱۱

با استفاده از الگوریتم تجزیه QR مقادیر ویژه ماتریس های زیر را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 8\\ 7 & -7 & 6\\ 5 & 7 & -8\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}4 & -2 & 3 & -7\\ 1 & 2 & 6 & 8\\ 8 & 5 & 1 & -5\\ -5 & 8 & -5 & 3\end{bmatrix}$$

برای مقایسه نتایج با استفاده از دستور eig نیز مقادیر ویژه را بدست می آوریم،

```
A =[1 -2 8;7 -7 6;5 7 -8];
eig(A)
ans =
    5.8191
   -6.7680
  -13.0512
L = QReig(A)
L =
  -13.0512
   -6.7679
    5.8191

B =[4 -2 3 -7;1 2 6 8;8 5 1 -5;-5 8 -5 3];
eig(B)
ans =
   13.8299
   -2.5011
    8.9167
  -10.2455
L = QReig(B)
L =
   13.8299
  -10.2455
    8.9168
   -2.5011
```

□

۵-۴ قطری سازی ماتریس های مربعی

یکی از کاربردهای مهم مقادیر ویژه و بردارهای ویژه در قطری سازی ماتریس های مربعی است. اگر یک ماتریس $A_{n\times n}$ دارای n بردار ویژه مستقل خطی باشد، این ماتریس را با تبدیل همانندی می توان قطری نمود. ولی ماتریسی که مجموعه کاملی از n بردار ویژه مستقل خطی را نداشته باشد نمی تواند قطری گردد، چنین ماتریسی را باید به فرم کانونیکال جردن تبدیل کرد.

۵-۴-۱- ماتریس های همانند

ماتریس های $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ را **همانند**[۱] گویند اگر یک ماتریس غیرمنفرد مانند T وجود داشته باشد، چنانکه عبارت زیر برقرار گردد،

$$T^{-1}AT = B \tag{۵-۸}$$

در اینصورت می گوییم ماتریس B با یک **تبدیل همانندی**[۲] از ماتریس A بدست آمده است و ماتریس غیرمنفرد T را **ماتریس تبدیل** گویند. همچنین ماتریس A را می توان از طریق ماتریس تبدیل T^{-1} بدست آورد،

$$A = TBT^{-1} \tag{۵-۹}$$

نکته۱: دترمینان دو ماتریس همانند $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ یکسان می باشد،

$$|B| = |T^{-1}AT| = |T^{-1}|\ |A|\ |T| = \frac{1}{|T|}|A|\ |T| = |A|$$

لذا با اعمال یک تبدیل همانندی دترمینان ماتریس تغییر نمی کند.

نکته۲: معادله مشخصه یک ماتریس مانند $A_{n\times n}$ تحت تبدیل همانندی تغییر نمی یابد،

$$|\lambda I - A| = |\lambda I - B| = 0$$

این موضوع را می توان به این شکل نشان داد،

$$|\lambda I - B| = |\lambda I - T^{-1}AT| = |\lambda T^{-1}T - T^{-1}AT| = |T^{-1}(\lambda I - A)T|$$

$$= |T^{-1}|\ |\lambda I - A|\ |T| = \frac{1}{|T|}|\lambda I - A|\ |T| = |\lambda I - A|$$

لذا با اعمال یک تبدیل همانندی مقادیر ویژه ماتریس تغییر نمی کند.

---

[۱] Similar
[۲] Similarity Transformation

نکته۳: یک خاصیت از یک ماتریس را **تغییرناپذیر** گویند، اگر کلیه ماتریس های همانند ماتریس A، آن خاصیت را دارا باشند. این خواص عبارتند از اثر، دترمینان، رتبه، مقادیر ویژه، تعداد بردارهای مستقل خطی و فرم جردن یک ماتریس که تمامی این موارد تحت تبدیل های همانندی تغییرناپذیر هستند.

مثال۵-۱۲

ماتریس های A و B تحت ماتریس تبدیل T همانند هستند،

$$A=\begin{bmatrix}6 & -2\\ -4 & 3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}8 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix},\quad T=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}1 & \frac{-1}{2}\\ 0 & \frac{-1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & -2\\ -4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}=B$$

$$TBT^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{-1}{2}\\ 0 & \frac{-1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -2\\ -4 & 3\end{bmatrix}=A$$

حال برخی از خواص تغییر ناپذیر تحت تبدیل های همانندی را بررسی می نماییم،

$$\text{trace}(A)=6+3=9 \qquad \text{trace}(B)=8+1=9$$

$$\det(A)=18-8=10 \qquad \det(B)=8+2=10$$

$$\text{rank}(A)=2 \qquad \text{rank}(B)=2$$

$$\lambda_{1A}=7.7016,\lambda_{2A}=1.298 \quad \lambda_{1B}=7.7016,\lambda_{2B}=1.2984$$

□

۵-۴-۲- قطری سازی ماتریس ها با مقادیر ویژه متمایز و حقیقی

اگر مقادیر ویژه یک ماتریس $A_{n\times n}$ متمایز باشند، آنگاه دقیقاً n بردار ویژه مستقل خطی وجود دارد که می توان با استفاده از آنها یک ماتریس تبدیل T بدست آورد که می تواند ماتریس $A_{n\times n}$ را به یک ماتریس قطری تبدیل کند. اگر $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ بردارهای ویژه مستقل خطی برای ماتریس $A_{n\times n}$ باشند، در اینصورت ماتریس تبدیل T را بصورت زیر تعریف می کنیم،

$$A\mathbf{v}_i=\lambda_i\mathbf{v}_i \quad , \quad i=1,\ldots,n$$

$$A\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{bmatrix}$$

$$AT=T\Lambda$$

$$T = [\mathbf{v}_1 \,|\, \mathbf{v}_2 \,|\cdots|\, \mathbf{v}_n] \qquad (۱۰-۵)$$

به این ماتریس تبدیل T که ماتریس $A_{n\times n}$ را به فرم قطری تبدیل می کند، **ماتریس مُدال**[۱] گویند و فرم قطری سازی شده ماتریس $A_{n\times n}$ بصورت زیر نمایش داده می شود،

$$\Lambda = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad (۱۱-۵)$$

λ_iها مقادیر ویژه ماتریس A هستند و به ماتریس Λ **صورت قطری**[۲] ماتریس A گفته می شود.

نکته۱: اگر ماتریس A بصورت $\Lambda = T^{-1}AT$ قطری سازی شده باشد،

۱- برای هر مقدار صحیح مثبت k داریم، $A^k = T\Lambda^k T^{-1}$.

۲- اگر کلیه عناصر قطری Λ غیر صفر باشند، در اینصورت A معکوس پذیر بوده و داریم،

$$A^{-1} = T\Lambda^{-1}T^{-1}$$

نکته۲: ماتریس $A_{n\times n}$ بصورت زیر را **فرم همبسته**[۳] می نامند،

$$A_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad (۱۲-۵)$$

برای یک ماتریس به فرم همبسته معادله مشخصه بصورت زیر قابل بیان است،

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \qquad (۱۳-۵)$$

که ریشه های آن همان مقادیر ویژه ماتریس A هستند. همچنین بردار ویژه $\mathbf{v}_i$ متناظر با هر مقدار ویژه متمایز λ_i بشکل زیر بدست می آید،

$$\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_i & \lambda_i^2 & \cdots & \lambda_i^{n-1} \end{bmatrix}^T \qquad (۱۴-۵)$$

---

[۱] Modal Matrix
[۲] Diagonal Form
[۳] Companion Form

در این صورت ماتریس مُدال T به شکل زیر خواهد بود، که به آن **ماتریس وندرموند**[۱] گویند،

$$T=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \qquad (۱۵-۵)$$

فرم دیگری از ماتریس همبسته به شکل زیر می باشد،

$$A_C=\begin{bmatrix} -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۱۶-۵)$$

در اینصورت بردار ویژه $\mathbf{v}_i$ متناظر با هر مقدار ویژه متمایز λ_i بشکل زیر بدست می آید،

$$\mathbf{v}_i=\begin{bmatrix}\lambda_i^{n-1} & \lambda_i^{n-2} & \cdots & \lambda_i & 1\end{bmatrix}^T \qquad (۱۷-۵)$$

و ماتریس وندرموند به صورت زیر محاسبه می شود،

$$T=\begin{bmatrix} \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & & \lambda_n^2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad (۱۸-۵)$$

می توان نشان داد که در ماتریس وندرموند، دترمینان ماتریس T بصورت زیر قابل محاسبه است،

$$|T|=\prod_{1<i<j<n}(\lambda_i-\lambda_j) \qquad (۱۹-۵)$$

[۱] Vandermonde

مثال۵-۱۳

فرم قطری سازی شده ماتریس A را بدست آورید، سپس مقدار A^{-1} و A^{20} را محاسبه نمایید.

$$A=\begin{bmatrix}4 & 0 & 1\\ -1 & -6 & -2\\ 5 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

معادله مشخصه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I_3 - A| = \begin{vmatrix}\lambda-4 & 0 & -1\\ 1 & \lambda+6 & 2\\ -5 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=0 \quad\rightarrow\quad \lambda^3+2\lambda^2-29\lambda-30=0$$

با حل معادله مشخصه مقادیر ویژه بصورت زیر بدست می آیند،

$$\lambda^3+2\lambda^2-29\lambda-30=(\lambda+6)(\lambda+1)(\lambda-5)=0\rightarrow \quad \lambda_1=-6,\lambda_2=-1,\lambda_3=5$$

لذا ماتریس A سه مقدار ویژه متمایز دارد. حال می توان سه بردار ویژه مستقل خطی متناظر با هر یک از مقادیر ویژه بدست آورد.

$$\lambda_1=-6\rightarrow A\mathbf{v}_1=\lambda_1\mathbf{v}_1\rightarrow\begin{bmatrix}4 & 0 & 1\\ -1 & -6 & -2\\ 5 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{21}\\ v_{31}\end{bmatrix}=-6\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{21}\\ v_{31}\end{bmatrix}\rightarrow\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=-1\rightarrow A\mathbf{v}_2=\lambda_2\mathbf{v}_2\rightarrow\begin{bmatrix}4 & 0 & 1\\ -1 & -6 & -2\\ 5 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{12}\\ v_{22}\\ v_{32}\end{bmatrix}=-1\begin{bmatrix}v_{12}\\ v_{22}\\ v_{32}\end{bmatrix}\rightarrow\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}\frac{-1}{5}\\ \frac{-9}{25}\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\lambda_3=5\rightarrow A\mathbf{v}_3=\lambda_3\mathbf{v}_3\rightarrow\begin{bmatrix}4 & 0 & 1\\ -1 & -6 & -2\\ 5 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{13}\\ v_{23}\\ v_{33}\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}v_{13}\\ v_{23}\\ v_{33}\end{bmatrix}\rightarrow\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}1\\ \frac{-3}{11}\\ 1\end{bmatrix}$$

توجه کنید، از آنجائیکه $A(\alpha\mathbf{v}_i)=\lambda_i(\alpha\mathbf{v}_i)$ می باشد، یعنی مضارب اسکالر یک بردار ویژه نیز خود یک بردار ویژه است، لذا می توان مقدار α را چنان انتخاب کرد که ماتریس مُدال T حدالامکان ساده باشد. لذا ماتریس مُدال T بصورت زیر بدست می آید،

$$T=[\mathbf{v}_1\,|\,\mathbf{v}_2\,|\,\mathbf{v}_3]=\begin{bmatrix}0 & \frac{-1}{5} & 1\\ 1 & \frac{-9}{25} & \frac{-3}{11}\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

حال می توان ماتریس قطری سازی شده را بدست آورد.

$$\Lambda = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \frac{-4}{55} & 1 & \frac{19}{55} \\ \frac{-5}{6} & 0 & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & -6 & -2 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{5} & 1 \\ 1 & \frac{-9}{25} & \frac{-3}{11} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

همانطور که دیده می شود عناصر قطری ماتریس همان مقادیر ویژه ماتریس A هستند.

$$A^{-1} = T\Lambda^{-1}T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{5} & 1 \\ 1 & \frac{-9}{25} & \frac{-3}{11} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-4}{55} & 1 & \frac{19}{55} \\ \frac{-5}{6} & 0 & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{6} & \frac{7}{30} \\ 1 & 0 & \frac{-4}{5} \end{bmatrix}$$

$$A^{20} = T\Lambda^{20}T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{5} & 1 \\ 1 & \frac{-9}{25} & \frac{-3}{11} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-6)^{20} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{20} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-4}{55} & 1 & \frac{19}{55} \\ \frac{-5}{6} & 0 & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

با استفاده از برنامه myeig.m می توان ماتریس مُدال را همانند محاسبات دستی بدست آورد و با استفاده از آن فرم قطری سازی شده ماتریس را بدست آورد،

```
A =[4 0 1;-1 -6 -2;5 0 0];
[V,l]= myeig(A);
T = V
T =
        0    1.0000   -0.2000
   1.0000   -0.2727   -0.3600
        0    1.0000    1.0000
L = T\A*T
L =
   -6.0000         0         0
        0    5.0000   -0.0000
        0         0   -1.0000
```

البته ماتریس V در دستور [V,D]=eig(A) نیز همان ماتریس مُدال را می دهد، لیکن ستون های ماتریس به فرم یکامتعامد هستند.

□

مثال۵-۱۴

فرم قطری سازی شده و ماتریس مدال ماتریس A را بدست آورید،

$$A=\begin{bmatrix}2 & 10 & -2\\ 10 & 5 & 8\\ -2 & 8 & 11\end{bmatrix}$$

ابتدا مقادیر ویژه ماتریس A را بدست می آوریم،

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -10 & 2\\ -10 & \lambda-5 & -8\\ 2 & -8 & \lambda-11\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-18)(\lambda-9)(\lambda+9)=0 \quad\rightarrow\quad \lambda_1=18,\lambda_2=9,\lambda_3=-9$$

از آنجاییکه سه مقدار ویژه حقیقی و متمایز دارد می توان فرم قطری کامل را بدست آورد. فرم قطری کامل به صورت زیر است،

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & -9\end{bmatrix}$$

حال ماتریس تبدیل همانندی را می یابیم که رابطه $\Lambda=T^{-1}AT$ را برآورده سازد. برای این منظور باید بردارهای ویژه نظیر هر یک از مقادیر ویژه را بدست آوریم،

$$\mathrm{Adj}(\lambda I-A)=\mathrm{Adj}\begin{bmatrix}\lambda-2 & -10 & 2\\ -10 & \lambda-5 & -8\\ 2 & -8 & \lambda-11\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda^2-16\lambda-9 & 10\lambda-126 & 90-2\lambda\\ 10\lambda-126 & \lambda^2-13\lambda+18 & 8\lambda-36\\ 90-2\lambda & 8\lambda-36 & \lambda^2-7\lambda-90\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1=18 \quad\rightarrow\quad \mathrm{Adj}(18I\text{-}A)=\begin{bmatrix}27 & 54 & 54\\ 54 & 108 & 108\\ 54 & 108 & 108\end{bmatrix}\rightarrow \mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}27\\ 54\\ 54\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 2\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=9 \quad\rightarrow\quad \mathrm{Adj}(9I\text{-}A)=\begin{bmatrix}-72 & -36 & 72\\ -36 & -18 & 36\\ 72 & 36 & -72\end{bmatrix}\rightarrow \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}-72\\ -36\\ 72\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}-2\\ -1\\ 2\end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = -9 \quad \rightarrow \quad \mathrm{Adj}(-9I\text{-}A) = \begin{bmatrix} 216 & -216 & 108 \\ -216 & 216 & -108 \\ 108 & -108 & 54 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 216 \\ -216 \\ 108 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

دقت کنید برای ایجاد ماتریس مُدال در انتخاب بردار ویژه باید ستون های همسان را در ماتریس الحاقی انتخاب نمود . لذا ماتریس مُدال T به شکل زیر خواهد بود،

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

با استفاده از برنامه myeig.m داریم،

```
A =[2 10 -2;10 5 8;-2 8 11];
[V,l]= myeig(A);
T = V
T =
    0.5000   -1.0000    1.0000
    1.0000   -0.5000   -1.0000
    1.0000    1.0000    0.5000
L = T\A*T
L =
    18     0     0
     0     9     0
     0     0    -9
```

□

مثال۵-۱۵

فرم قطری سازی شده ماتریس همبسته A_C را بدست آورید،

$$A_C = \begin{bmatrix} -9 & -26 & -24 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

معادله مشخصه ماتریس A_C بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+9 & 26 & 24 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda^3 + 24\lambda^2 + 26\lambda + 9 = 0$$

مقادیر ویژه بصورت زیر بدست می آیند،

$$\lambda^3 + 24\lambda^2 + 26\lambda + 9 = (\lambda+4)(\lambda+3)(\lambda+2) = 0 \rightarrow \quad \lambda_1 = -4, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = -2$$

از آنجائیکه ماتریس A_C همبسته بوده و سه مقدار ویژه متمایز دارد، لذا می توان برای قطری سازی آن ماتریس وندرموند را بدست آورد،

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 9 & 4 \\ -4 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

فرم قطری ماتریس A_C به شکل زیر می باشد،

$$\Lambda = T^{-1} A_C T$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0.5 & 2.5 & 3 \\ -1 & -6 & -8 \\ 0.5 & 3.5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 & -26 & -24 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 9 & 4 \\ -4 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

با استفاده از برنامه myeig.m ماتریس مُدال بدست می آید،

```
A =[-9 -26 -24;1 0 0;0 1 0];
[V,l]= myeig(A);
T = V
T =
   16.0000    9.0000    4.0000
   -4.0000   -3.0000   -2.0000
    1.0000    1.0000    1.0000
```

همچنین فرم قطری سازی شده نیز قابل محاسبه است،

```
L = T\A*T
L =
   -4.0000   -0.0000   -0.0000
    0.0000   -3.0000    0.0000
   -0.0000   -0.0000   -2.0000
```

□

۵-۴-۳- قطری سازی ماتریس ها با مقادیر ویژه متمایز مختلط

اگر ماتریس $A_{n\times n}$ دارای مقادیر ویژه مختلط غیر تکراری باشد می توان روش گفته شده برای مقادیر ویژه متمایز حقیقی را اجرا نمود. لیکن در اینصورت ماتریس تبدیل T و ماتریس قطری Λ شامل عناصری با اعداد مختلط خواهد بود که ممکن است در کاربردهای بعدی این ماتریس مشکل ساز گردد. برای اجتناب از حضور اعداد مختلط می توان ماتریس تبدیل T را بصورتی تغییر داد که فقط اعداد حقیقی در آن ظاهر شوند.

فرض کنید مقادیر ویژه ماتریس $A_{n\times n}$ بصورت زیر باشند،

$$\underbrace{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m,\lambda_{m+1}}_{complex\ conjugate},\underbrace{\lambda_{m+2},\ldots,\lambda_n}_{real}$$

که در آن $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m,\lambda_{m+1}$ مقادیر ویژه مختلط مزدوج بفرم $\sigma_m \pm j\omega_m$ و $\lambda_{m+2},\ldots,\lambda_n$ مقادیر ویژه حقیقی باشند. حال بردارهای ویژه متناظر با این مقادیر ویژه را بصورت زیر در نظر بگیرید،

$$\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_3,\ldots,\mathbf{v}_m,\mathbf{v}_{m+2},\ldots,\mathbf{v}_n$$

یک ماتریس تبدیل T با عناصر حقیقی را بشکل زیر می توان تعریف کرد،

$$\mathrm{T}=[\mathrm{Re}\{\mathbf{v}_1\}\,|\,\mathrm{Im}\{\mathbf{v}_1\}\,|\,\mathrm{Re}\{\mathbf{v}_3\}\,|\,\mathrm{Im}\{\mathbf{v}_3\}\,|\cdots|\,\mathrm{Re}\{\mathbf{v}_m\}\,|\,\mathrm{Im}\{\mathbf{v}_m\}\,|\,\mathbf{v}_{m+2}\,|\cdots|\,\mathbf{v}_n] \quad (۲۰-۵)$$

با استفاده از این ماتریس تبدیل ماتریس A به فرم **قطری بلوکی**[۱] زیر تبدیل می گردد، در این حالت ماتریس قطری کامل نخواهد بود.

$$\Lambda = T^{-1}AT$$

$$=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix}\sigma_1 & \omega_1\\ -\omega_1 & \sigma_1\end{bmatrix} & & & & & \\ & \begin{bmatrix}\sigma_3 & \omega_3\\ -\omega_3 & \sigma_3\end{bmatrix} & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \begin{bmatrix}\sigma_m & \omega_m\\ -\omega_m & \sigma_m\end{bmatrix} & & \\ & 0 & & & \lambda_{m+2} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (۲۱-۵)$$

مثال ۵-۱۶

[۱] Block-Diagonal

اگر مقادیر ویژه ماتریس A بصورت زیر باشد،

$$\lambda_{1,2}=1\pm 3j,\qquad \lambda_{3,4}=-2\pm 5j,\qquad \lambda_5=-4$$

فرم قطری بلوکی شده این ماتریس بصورت زیر خواهد بود،

$$\begin{bmatrix}1+3j & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1-3j & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2+5j & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2-5j & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4\end{bmatrix} \rightarrow \Lambda=\left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0\\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & -2 & 5 & 0\\ 0 & 0 & -5 & -2 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -4\end{array}\right]$$

به جای قطری کامل با عناصر مختلط به فرم قطری بلوکی تبدیل می شود.

□

مثال۵-۱۷

فرم قطری سازی شده ماتریس A و ماتریس تبدیل را بدست آورید،

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

معادله مشخصه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I_3-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 2 & 1\\ 0 & \lambda+2 & 0\\ -1 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=0 \quad\rightarrow\quad \lambda^3+5\lambda^2+9\lambda+6=0$$

پس از حل معادله مشخصه مقادیر ویژه بصورت زیر بدست می آیند،

$$\lambda^3+5\lambda^2+9\lambda+6=(\lambda+2)(\lambda^2+3\lambda+3)=0 \quad\rightarrow\quad \lambda_1=-2,\lambda_{2,3}=\tfrac{-3}{2}\pm j\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین ماتریس A یک مقدار ویژه حقیقی و دو مقدار ویژه مختلط مزدوج دارد. بردارهای ویژه متناظر با این مقادیر ویژه را بدست می آوریم،

$$A\mathbf{v}_i=\lambda_i\mathbf{v}_i$$

$$\lambda_1=-2\rightarrow\begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{21}\\ v_{31}\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{21}\\ v_{31}\end{bmatrix}\rightarrow \mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=\tfrac{-3}{2}+j\tfrac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow\begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{12}\\ v_{22}\\ v_{32}\end{bmatrix}=(\tfrac{-3}{2}+j\tfrac{\sqrt{3}}{2})\begin{bmatrix}v_{12}\\ v_{22}\\ v_{32}\end{bmatrix}\rightarrow \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ \tfrac{1}{2}-j\tfrac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = \tfrac{-3}{2} - j\tfrac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \end{bmatrix} = (\tfrac{-3}{2} - j\tfrac{\sqrt{3}}{2})\begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \tfrac{1}{2} + j\tfrac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

لذا ماتریس تبدیل T بصورت زیر بدست می آید،

$$\mathrm{T} = [\mathbf{v}_1 \mid \mathrm{Re}\{\mathbf{v}_2\} \mid \mathrm{Im}\{\mathbf{v}_2\}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & \tfrac{1}{2} & \tfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

حال ماتریس قطری- بلوکی شده Λ را بدست می آوریم،

$$\Lambda = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:cc} -2 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & \frac{-3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-3}{2} \end{array}\right]$$

برای بدست آوردن ماتریس تبدیل در این حالت اگر از دستور [V,D]=eig(A) در نرم افزار MATLAB و یا از برنامه myeig.m استفاده نماییم، از آنجاییکه بردارهای ویژه بطور مختلط محاسبه می شوند، لذا ماتریس تبدیل بدست آمده نیز فرم مختلط خواهد داشت. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه مختلط بصورت زیر بدست می آید،

```
A =[-1 2 -1;0 -2 0;1 0 -2];
[V,l]= myeig(A)
V =
   0.5000 + 0.8660i   0.5000 - 0.8660i        0
   0.0000             0.0000              0.5000
   1.0000             1.0000              1.0000
l =
   -1.5000 + 0.8660i
   -1.5000 - 0.8660i
   -2.0000
```

لذا برای بدست آوردن ماتریس تبدیل به فرم حقیقی و فرم قطری بلوکی ماتریس مورد نظر برنامه را بصورت زیر تغییر می دهیم،

```
%Calculate modal matrix and block diagonal form for complex eigenvalues
function [T,L]= complexeig(A)
l = eig(A);
n = size(l,1);
T = zeros(size(A));
f = 1;
for i = 1:n
   T(:,i)= null(l(i)* eye(size(A))- A,'r');
   if isreal(T(:,i))== 0 & f == 1
      T(:,i)= real(T(:,i));
      f = 0;
   elseif isreal(T(:,i))== 0 & f == 0
      T(:,i)= -imag(T(:,i));
      f = 1;
   end
end
L = T\A*T;
```

اجرای برنامه بصورت زیر است،

```
A =[-1 2 -1;0 -2 0;1 0 -2];
[T,L]= complexeig(A)
T =
    0.5000   -0.8660         0
    0.0000         0    0.5000
    1.0000         0    1.0000
L =
   -1.5000    0.8660         0
   -0.8660   -1.5000   -0.0000
   -0.0000   -0.0000   -2.0000
```

با دقت مشاهده می شود که ماتریس تبدیل عناصر حقیقی دارند و ماتریس قطری بلوکی حاصل نیز با فرم گفت شده مطابقت دارد.

□

مثال۵-۱۸

فرم قطری سازی شده ماتریس A و ماتریس تبدیل را بدست آورید،

$$A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & -4 & 8\end{bmatrix}$$

ابتدا مقادیر ویژه، بردارهای ویژه و سپس فرم قطری سازی شده ماتریس A را بدست می آوریم،

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & -2 & -1\\ -1 & \lambda-2 & -1\\ 1 & 4 & \lambda-8\end{vmatrix}=\lambda^3-14\lambda^2+59\lambda-60=0$$

$$\lambda_1=1.4843,\lambda_{2,3}=6.2578\pm j1.1235$$

ماتریس یک مقدار ویژه حقیقی و دو مقدار ویژه مختلط مزدوج دارد، باید به فرم قطری بلوکی تبدیل گردد. فرم قطری بلوکی به صورت زیر است،

$$\Lambda=\left[\begin{array}{c|cc}\lambda_1 & 0 & 0\\ \hline 0 & \sigma_2 & \omega_2\\ 0 & -\omega_2 & \sigma_2\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|cc}1.4843 & 0 & 0\\ \hline 0 & 6.2578 & 1.1235\\ 0 & -1.1235 & 6.2578\end{array}\right]$$

حال ماتریس تبدیل همانندی را می یابیم که رابطه $\Lambda=T^{-1}AT$ را برآورده سازد. برای این منظور بردارهای ویژه نظیر هر یک از مقادیر ویژه را بدست می آوریم،

$$A\mathbf{v}_i=\lambda_i\mathbf{v}_i\rightarrow\begin{bmatrix}\lambda-4 & -2 & -1\\ -1 & \lambda-2 & -1\\ 1 & 4 & \lambda-8\end{bmatrix}\mathbf{v}_i=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

در اینجا از دستور [V,D]=eig(A) نرم افزار MATLAB برای محاسبه بردارهای ویژه استفاده شده است،

$$\lambda_1=1.4843\quad\rightarrow\quad\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}-0.6642\\0.6782\\0.3144\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=6.2578+j1.1235\quad\rightarrow\quad\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}0.3757+j0.3678\\0.1706+j0.2283\\0.0940+j0.7959\end{bmatrix}$$

$$\lambda_3=6.2578-j1.1235\quad\rightarrow\quad\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}0.3757-j0.3678\\0.1706-j0.2283\\0.0940-j0.7959\end{bmatrix}$$

لذا ماتریس تبدیل T به شکل زیر خواهد بود،

$$T=\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathrm{Re}\{\mathbf{v}_2\} & \mathrm{Im}\{\mathbf{v}_2\}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.6642 & 0.3757 & 0.3678\\ 0.6782 & 0.1706 & 0.2283\\ 0.3144 & 0.0940 & 0.7959\end{bmatrix}$$

با استفاده از برنامه complexeig.m می توان نتایج را مقایسه نمود،

```
A =[4 2 1;1 2 1;-1 -4 8];
[T,L]= complexeig(A)
T =
   -2.1124    0.5107    0.4117
    2.1570    0.3079    0.1779
    1.0000    1.0000         0
L =
    1.4843    0.0000    0.0000
   -0.0000    6.2578    1.1235
   -0.0000   -1.1235    6.2578
```

□

۵-۴-۴- قطری سازی ماتریس ها با مقادیر ویژه تکراری

اگر ماتریسی مقادیر ویژه تکراری داشته باشد ممکن است که مجموعه کاملی از n بردار ویژه مستقل خطی را نداشته باشد، لذا در اینصورت نمی توان آن را با روشهای مطرح شده ماتریس را قطری سازی کرد و برای کمبود بردارهای ویژه باید جایگزینی بدست آورد.

فرض کنید ماتریس $A_{n\times n}$ یک مقدار ویژه مکرر مرتبه k مانند λ_1 و تعدادی مقادیر ویژه متمایز و متفاوت از λ_1 بصورت $\lambda_{k+1},\lambda_{k+2},\ldots,\lambda_n$ داشته باشد.

$$\underbrace{\lambda_1,\lambda_1,\ldots,\lambda_1}_{k},\lambda_{k+1},\lambda_{k+2},\ldots,\lambda_n$$

در اینصورت ماتریس $A_{n\times n}$ حداقل یک و حداکثر k بردار ویژه مستقل خطی متناظر با مقدار ویژه تکراری λ_1 خواهد داشت. اگر $\mathrm{rank}(\lambda_1 I-A)=n-\alpha$ باشد، تعداد α بردار ویژه مستقل خطی متناظر با این مقدار ویژه مکرر وجود دارد و باید تعداد $k-\alpha$ بردار دیگر حساب شوند. این بردار های اضافی باید چنان باشند که هم به این مقدار ویژه مربوط بوده و هم نسبت به بردارهای ویژه دیگر مستقل خطی باشد، به چنین بردارهایی **بردارهای ویژه تعمیم یافته**[۱] گویند .

[۱] Generalized Eigenvectors

فرض کنید تعداد α بردار ویژه مستقل خطی $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_\alpha$ باشند، آنها را می توان بصورت زیر بدست آورد،

$$\begin{aligned}(A-\lambda_1 I_n)\mathbf{v}_1&=\mathbf{0}\\(A-\lambda_1 I_n)\mathbf{v}_2&=\mathbf{0}\\&\vdots\\(A-\lambda_1 I_n)\mathbf{v}_\alpha&=\mathbf{0}\end{aligned}\qquad(۲۲-۵)$$

حال می توان برای هریک از بردارهای ویژه تعدادی بردار ویژه تعمیم یافته بدست آورد. بردار ویژه تعمیم یافته متناظر با یک بردار ویژه $\mathbf{v}_i$ بصورت زیر تعریف می گردد،

$$A\varphi_i=\lambda_i\varphi_i+\mathbf{v}_i\rightarrow(A-\lambda_i I)\varphi_i=\mathbf{v}_i\qquad(۲۳-۵)$$

برای بدست آوردن بردارهای ویژه تعمیم یافته دیگر به همین ترتیب عمل می کنیم.

$$(A-\lambda_i I)\varphi_{i+1}=\varphi_i\qquad(۲۴-۵)$$

لذا بردارهای ویژه تعمیم یافته به شکل زیر محاسبه می گردند.

- برای بردار ویژه $\mathbf{v}_1$:

$$\begin{aligned}(A-\lambda_1 I_n)\varphi_1&=\mathbf{v}_1\\(A-\lambda_1 I_n)\varphi_2&=\varphi_1\\&\vdots\\(A-\lambda_1 I_n)\varphi_{P_1-1}&=\varphi_{P_1-2}\end{aligned}$$

- برای بردار ویژه $\mathbf{v}_2$:

$$\begin{aligned}(A-\lambda_1 I_n)\xi_1&=\mathbf{v}_2\\(A-\lambda_1 I_n)\xi_2&=\xi_1\\&\vdots\\(A-\lambda_1 I_n)\xi_{P_2-1}&=\xi_{P_2-2}\end{aligned}$$

و نهایتاً برای بردار ویژه $\mathbf{v}_\alpha$:

$$\begin{aligned}(A-\lambda_1 I_n)\eta_1&=\mathbf{v}_\alpha\\(A-\lambda_1 I_n)\eta_2&=\eta_1\\&\vdots\\(A-\lambda_1 I_n)\eta_{P_\alpha-1}&=\eta_{P_\alpha-2}\end{aligned}$$

با استفاده از این بردارها ماتریس تبدیل T بصورت زیر بدست می آید،

$$T=[\mathbf{v}_1|\varphi_1|\varphi_2|\cdots|\varphi_{P_1-1}|\mathbf{v}_2|\xi_1|\xi_2|\cdots|\xi_{P_2-1}|\cdots|\mathbf{v}_\alpha|\eta_1|\eta_2|\cdots|\eta_{P_\alpha-1}|\mathbf{v}_{k+1}|\mathbf{v}_{k+2}|\cdots|\mathbf{v}_n]\qquad(۲۵-۵)$$

در هنگام چینش بردارهای ویژه تعمیم یافته باید دقت کرد که آنها به ترتیب پس از بردار ویژه مربوطه قرار گیرند. با رعایت این نکته ماتری $\Lambda=T^{-1}AT$ بدست آمده فرم خاصی پیدا می کند که به آن

فرم کانونیکال جردن[۱] می گویند. در این فرم هم ماتریس Λ به شکل قطری کامل نیست بلکه بلوکی است که به آنها **بلوک های جردن** می گویند. صورت کلی یک ماتریس کانونیکال جردن به شکل زیر است،

$$J_{k\times k}=\begin{bmatrix} J_{P1} & & & & & & \\ & J_{P2} & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & J_{P\alpha} & & & \\ & & & & \lambda_{k+1} & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad (۲۶-۵)$$

که هر یک از J_{P_i}ها خود ماتریس های $P_i\times P_i$ هستند، که به آنها **بلوک های جردن** گفته می شود و بصورت زیر تعریف می گردند،

$$J_{P_i}=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}_{P_i\times P_i} \qquad (۲۷-۵)$$

خواص بلوکهای جردن به شرح زیر است،

۱- کلیه عناصر روی قطر اصلی ماتریس مقادیر ویژه ماتریس A هستند.

۲- کلیه عناصر زیر قطر اصلی صفر هستند.

۳- عناصر بلافاصله بالای قطر اصلی یک یا صفر هستند.

۴- تعداد بلوک های جردن متناظر با یک مقدار ویژه داده شده مانند λ_i، برابر با تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی متناظر با آن مقدار ویژه است.

قضیه: ثابت کنید بردارهای ویژه تعمیم یافته با تعریف زیر استقلال خطی دارند.

$$A\varphi_1=\lambda_1\varphi_1+\mathbf{v}_1 \rightarrow (A-\lambda_1 I)\varphi_1=\mathbf{v}_1$$
$$(A-\lambda_1 I)\varphi_2=\varphi_1$$
$$\vdots$$
$$(A-\lambda_1 I)\varphi_{k-1}=\varphi_{k-2}$$

[۱] Jordan Canonical Form

اثبات: فرض کنید λ_1 یک مقدار ویژه تکراری مرتبه k و $\mathbf{v}_1$ بردار ویژه نظیر آن و $\varphi_1,\ldots,\varphi_{k-1}$ بردارهای ویژه تعمیم یافته نظیر باشند. طبق تعریف می توان نوشت،

$$\left.\begin{array}{l}(A-\lambda_1 I)\varphi_1=\mathbf{v}_1\\(A-\lambda_1 I)\varphi_2=\varphi_1\\\vdots\\(A-\lambda_1 I)\varphi_{k-1}=\varphi_{k-2}\end{array}\right\}\rightarrow\quad (A-\lambda_1 I)^{k-1}\varphi_{k-1}=\mathbf{v}_1 \qquad (۲۸\text{-}۵)$$

اگر بردارهای $\varphi_1,\ldots,\varphi_{k-1}$ و $\mathbf{v}_1$ وابسته خطی باشند، ضرایب $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ غیرصفری وجود دارد که رابطه زیر را برآورده کند.

$$\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\varphi_1+\alpha_3\varphi+\cdots+\alpha_k\varphi_{k-1}=\mathbf{0} \qquad (۲۹\text{-}۵)$$

طرفین رابطه(۵-۲۹) را در $(A-\lambda_1 I)^{k-1}$ ضرب می کنیم،

$$\alpha_1(A-\lambda_1 I)^{k-1}\mathbf{v}_1+\alpha_2(A-\lambda_1 I)^{k-1}\varphi_1+\alpha_3(A-\lambda_1 I)^{k-1}\varphi_2+\cdots+\alpha_k(A-\lambda_1 I)^{k-1}\varphi_{k-1}=\mathbf{0} \quad (۳۰\text{-}۵)$$

در رابطه(۵-۳۰) جمله $(A-\lambda_1 I)^{k-1}\mathbf{v}_1=\mathbf{0}$ و جمله $(A-\lambda_1 I)^{k-1}\varphi_{k-1}=\mathbf{v}_1\neq\mathbf{0}$ است و سایر جملات را می توان بصورت زیر خلاصه کرد،

$$\begin{aligned}(A-\lambda_1 I)^{k-1}\varphi_i&=(A-\lambda_1 I)^{k-1-i}(A-\lambda_1 I)^{i}\varphi_i=(A-\lambda_1 I)^{k-1-i}\mathbf{v}_1\\&=(A-\lambda_1 I)^{k-2-i}(A-\lambda_1 I)\mathbf{v}_1=\mathbf{0}\end{aligned}$$

لذا در رابطه(۵-۳۰) باید $\alpha_k=0$ باشد.

حال اگر طرفین رابطه(۵-۲۹) را در $(A-\lambda_1 I)^{k-2}$ ضرب کنیم،

$$\alpha_1(A-\lambda_1 I)^{k-2}\mathbf{v}_1+\alpha_2(A-\lambda_1 I)^{k-2}\varphi_1+\cdots+\alpha_{k-1}(A-\lambda_1 I)^{k-2}\varphi_{k-2}+\alpha_k(A-\lambda_1 I)^{k-2}\varphi_{k-1}=\mathbf{0} \quad (۳۱\text{-}۵)$$

در رابطه(۵-۳۱) جمله $(A-\lambda_1 I)^{k-2}\mathbf{v}_1=\mathbf{0}$ و جمله $(A-\lambda_1 I)^{k-2}\varphi_{k-2}=\mathbf{v}_1\neq\mathbf{0}$ است و سایر جملات را می توان بصورت زیر خلاصه کرد،

$$\begin{aligned}(A-\lambda_1 I)^{k-2}\varphi_i&=(A-\lambda_1 I)^{k-2-i}(A-\lambda_1 I)^{i}\varphi_i=(A-\lambda_1 I)^{k-2-i}\mathbf{v}_1\\&=(A-\lambda_1 I)^{k-3-i}(A-\lambda_1 I)\mathbf{v}_1=\mathbf{0}\end{aligned}$$

لذا در رابطه(۵-۳۱) باید $\alpha_{k-1}=0$ باشد.

به همین ترتیب می توان نشان داد که تمامی ضرایب $\alpha_2=\alpha_3=\cdots=\alpha_k=0$ است. از آنجاییکه $\mathbf{v}_1=\mathbf{0}$ می باشد، باید $\alpha_1=0$ گردد. لذا بردارهای $\varphi_1,\ldots,\varphi_{k-1}$ و $\mathbf{v}_1$ مستقل خطی هستند.

□

مثال۵-۱۹

فرم کانونیکال جردن ماتریس های زیر را بیابید.

الف) $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$

ابتدا مقادیر ویژه ماتریس A را بدست می آوریم،

$$|\lambda I_3-A|=0\rightarrow\begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\1&\lambda-2&0\\-1&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3=0\rightarrow\lambda_{1,2,3}=1$$

لذا ماتریس A یک مقدار ویژه مکرر مرتبه سه دارد $(k=3)$. حال تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی متناسب با این مقدار ویژه را تعیین می نماییم، برای این منظور داریم،

$$\text{rank}(\lambda_1 I_3-A)=\text{rank}\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}=2$$

لذا تنها یک بردار ویژه مستقل خطی $\mathbf{v}_1$ متناظر با مقدار ویژه $\lambda_1=1$ وجود دارد. پس فقط یک بلوک جردن وجود دارد، که مرتبه آن سه می باشد. برای بدست آوردن بردارهای ویژه دو روش را می توان پیش گرفت،

<u>روش اول: استفاده از تعریف بردار ویژه،</u>

ابتدا بردار ویژه $\mathbf{v}_1$ را بدست می آوریم،

$$(\lambda_1 I-A)\mathbf{v}_1=\mathbf{0}\rightarrow\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&-1&0\\-1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\mathbf{0}\rightarrow\begin{cases}x_1-x_2=0\\-x_1=0\end{cases}\rightarrow\quad\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

برای تشکیل ماتریس تبدیل باید دو بردار ویژه تعمیم یافته دیگر نیز بیابیم. برای این منظور از تعریف بردارهای تعمیم یافته استفاده می کنیم،

$$(A-\lambda_1 I)\varphi_1=\mathbf{v}_1\rightarrow\begin{bmatrix}-1&1&0\\-1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}-x_4+x_5=0\\x_4=1\end{cases}\rightarrow\quad\varphi_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$(A-\lambda_1 I)\varphi_2=\varphi_1\rightarrow\begin{bmatrix}-1&1&0\\-1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_7\\x_8\\x_9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}-x_7+x_8=1\\x_7=0\end{cases}\rightarrow\quad\varphi_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

روش دوم: استفاده از ماتریس الحاقی،

$$\mathrm{Adj}(\lambda I - A) = \mathrm{Adj}\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 1 & \lambda-2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^2-3\lambda+2 & \lambda-1 & 0 \\ 1-\lambda & \lambda^2-\lambda & 0 \\ \lambda-2 & 1 & \lambda^2-2\lambda+1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \rightarrow \quad \mathrm{Adj}(1I - A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

برای بدست آوردن دو بردار ویژه تعمیم یافته دیگر از مشتقات اول و دوم ماتریس الحاقی استفاده می کنیم،

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\mathrm{Adj}(\lambda I - A)\right] = \begin{bmatrix} 2\lambda-3 & 1 & 0 \\ -1 & 2\lambda-1 & 0 \\ 1 & 0 & 2\lambda-2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{d\lambda}\left[\mathrm{Adj}(1I - A)\right] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}[Adj(\lambda I - A)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \varphi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

لذا ماتریس تبدیل T بصورت زیر بدست می آید،

$$T = [v_1 \,|\, \varphi_1 \,|\, \varphi_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حال فرم کانونیکال جردن ماتریس A را بدست می آوریم،

$$\Lambda = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

همانطور که پیشتر گفته شد فرم کانونیکال جردن فقط یک بلوک جردن با مرتبه سه دارد.

در نرم افزار MATLAB از دستور jordan(A) و [T,J] = jordan(A) می توان برای بدست آوردن فرم کانونیکال جردن ماتریس A استفاده نمود. دستور jordan(A) فقط ماتریس کانونیکال جردن حاصل را ارائه می دهد و در دستور [T,J] = jordan(A) ماتریس T ماتریس تبدیل مربوطه و J ماتریس فرم کانونیکال جردن ماتریس A است. این دستور برای ریشه های غیر تکراری و مختلط نیز قابل اعمال است و فرم قطری کامل را ارائه می دهد.

به اجرای دستور [T,J] = jordan(A) توجه نمایید،

```
A =[0 1 0;-1 2 0;1 0 1];
[T,J]=jordan(A)
T =
     0    -1     1
     0    -1     0
    -1     1     0
J =
     1     1     0
     0     1     1
     0     0     1
```

ب)
$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -3 & 0\\ -0.5 & -3 & 1 & 0.5\\ -3 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

ابتدا مقادیر ویژه، بردارهای ویژه و سپس فرم قطری سازی شده ماتریس A را بدست می آوریم،

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & \lambda-1 & 3 & 0\\ 0.5 & 3 & \lambda-1 & -0.5\\ 3 & 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}$$
$$=\lambda^4-4\lambda^3-12\lambda^2+32\lambda+64=0\rightarrow\lambda_{1,2}=4,\lambda_{3,4}=-2$$

ماتریس دو مقدار ویژه حقیقی تکراری مرتبه دو دارد، باید به فرم قطری بلوکی جردن تبدیل گردد.
حال باید بدانیم برای هر یک از مقادیر ویژه تکراری چند تا بلوک جردن داریم،

$$\nu(\lambda_1 I - A) = n - \text{rank}(\lambda_1 I - A) = 4 - \text{rank}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0.5 & 3 & 3 & -0.5 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 4 - 3 = 1$$

برای بردار $\lambda_{1,2} = 4$ یک بردار ویژه مستقل خطی داریم، پس یک بلوک جردن برای $\lambda_{1,2} = 4$ خواهیم داشت.

$$\nu(\lambda_3 I - A) = n - \text{rank}(\lambda_3 I - A) = 4 - \text{rank}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0.5 & 3 & -3 & -0.5 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = 4 - 2 = 2$$

برای بردار $\lambda_{3,4} = -2$ دو بردار ویژه مستقل خطی داریم، پس دو بلوک جردن خواهیم داشت.
فرم قطری بلوکی جردن به صورت زیر است،

$$\Lambda = \left[\begin{array}{cc:cc} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc:cc} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -2 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

حال ماتریس تبدیل همانندی را می یابیم که رابطه $\Lambda = T^{-1}AT$ را برآورده سازد.

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \lambda - 1 & 3 & 0 \\ 0.5 & 3 & \lambda - 1 & -0.5 \\ 3 & 0 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ابتدا دو بردار ویژه مستقل خطی $\mathbf{v}_1$ را برای $\lambda_{1,2} = 4$ بدست می آوریم،

$$\lambda_{1,2} = 4 \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0.5 & 3 & 3 & -0.5 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_4 = 0 \\ 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 0.5x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 0.5x_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

سپس بردار ویژه تعمیم یافته φ_1 را محاسبه می کنیم،

$$(A - \lambda_1 I)\varphi_1 = \mathbf{v}_1 \rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ -0.5 & -3 & -3 & 0.5 \\ -3 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -3x_5 - 3x_8 = 0 \\ -3x_6 - 3x_7 = 1 \\ -0.5x_5 - 3x_6 - 3x_7 + 0.5x_8 = -1 \end{cases} \rightarrow \varphi_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{-1}{3} \\ -2 \end{bmatrix}$$

حال دو بردار ویژه مستقل خطی $\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ را برای $\lambda_{3,4} = -2$ محاسبه می کنیم،

$$\lambda_{3,4} = -2 \rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0.5 & 3 & -3 & -0.5 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -3x_9 + 3x_{12} = 0 \\ -3x_{10} + 3x_{11} = 0 \\ 0.5x_9 + 3x_{10} - 3x_{11} - 0.5x_{12} = 0 \end{cases} \rightarrow \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

لذا ماتریس تبدیل T به شکل زیر خواهد بود،

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \varphi_1 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & \frac{-1}{3} & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[1 0 0 -3;0 1 -3 0;-0.5 -3 1 0.5;-3 0 0 1];
[T,J]= jordan(A)
T =
    1.5000         0    0.5000    1.0000
    0.0417    0.2500   -0.0417         0
    0.0417   -0.2500   -0.0417         0
    1.5000         0   -0.5000    1.0000
J =
    -2     0     0     0
     0     4     1     0
     0     0     4     0
     0     0     0    -2
```

ج) $A=\begin{bmatrix}0&1&0&3\\0&-1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&-1&-2\end{bmatrix}$

معادله مشخصه ماتریس A بصورت زیر قابل محاسبه است،

$$|\lambda I_4-A|=0\rightarrow\begin{vmatrix}\lambda&-1&0&-3\\0&\lambda+1&-1&-1\\0&0&\lambda&-1\\0&0&1&\lambda+2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)^3=0\rightarrow\lambda_{1,2,3}=-1,\lambda_4=0$$

لذا ماتریس A یک مقدار ویژه متمایز و یک مقدار ویژه مکرر مرتبه سه دارد $(k=3)$.

برای مقدار ویژه مکرر $\lambda_1=-1$ داریم،

$$\operatorname{rank}(\lambda_1 I_4-A)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}-1&-1&0&-3\\0&0&-1&-1\\0&0&-1&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}=2\quad\rightarrow\quad\alpha=2$$

لذا $\alpha=2$ است، پس دو بلوک جردن برای مقدار ویژه مکرر $\lambda_1=-1$ وجود دارد و دو بردار ویژه مستقل خطی متناظر آن داریم.

$$(A-\lambda_1 I)\mathbf{v}_1=\mathbf{0}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&3\\0&0&1&1\\0&0&1&1\\0&0&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\mathbf{0}\rightarrow\begin{cases}x_1+x_2+3x_4=0\\x_3+x_4=0\end{cases}\rightarrow\quad\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}2\\1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

$$(A-\lambda_1 I)\mathbf{v}_2=\mathbf{0}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&3\\0&0&1&1\\0&0&1&1\\0&0&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\mathbf{0}\rightarrow\begin{cases}x_1+x_2+3x_4=0\\x_3+x_4=0\end{cases}\rightarrow\quad\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}$$

حال یک بردار ویژه تعمیم یافته متناظر با بردار ویژه $\mathbf{v}_1$ بدست می آوریم،

$$(A-\lambda_1 I_4)\varphi_1=\mathbf{v}_1\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&3\\0&0&1&1\\0&0&1&1\\0&0&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_{12}\\\varphi_{22}\\\varphi_{32}\\\varphi_{42}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\1\\-1\end{bmatrix}\rightarrow\varphi_1=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

برای مقدار ویژه متمایز $\lambda_4=0$ یک بردار ویژه $\mathbf{v}_4$ بصورت زیر بدست می آید،

$$(A-\lambda_4 I)\mathbf{v}_4=\mathbf{0}\rightarrow\begin{bmatrix}0&1&0&3\\0&-1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_9\\x_{10}\\x_{11}\\x_{12}\end{bmatrix}=\mathbf{0}\rightarrow\begin{cases}x_{10}+3x_{12}=0\\-x_{10}+x_{11}+x_{12}=0\\x_{12}=0\\-x_{11}+2x_{12}=0\end{cases}\rightarrow\quad\mathbf{v}_4=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس تبدیل T بصورت زیر بدست می آید،

$$T=[\mathbf{v}_1\,|\,\varphi_1\,|\,\mathbf{v}_2\,|\,\mathbf{v}_4]=\begin{bmatrix}2&-1&1&1\\1&0&-1&0\\1&0&0&0\\-1&1&0&0\end{bmatrix}$$

سپس فرم کانونیکال جردن ماتریس A را بدست می آوریم،

$$\Lambda=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&1\\0&-1&1&0\\1&1&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&3\\0&-1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1&1&1\\1&0&-1&0\\1&0&0&0\\-1&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$\Lambda=\left[\begin{array}{cc:cc}-1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & -1 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]=\begin{bmatrix} J_{P_1}(-1) & & 0\\ & J_{P_2}(-1) & \\ 0 & & J_1(0)\end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[0 1 0 3;0 -1 1 1;0 0 0 1;0 0 -1 -2];
[T,J]=jordan(A)
T =
    -2     2     2     0
     0     1    -3    -3
     0     1     0    -1
     0    -1     1     1
J =
     0     0     0     0
     0    -1     1     0
     0     0    -1     0
     0     0     0    -1
```

□

مثال۵-۲۰

اگر در یک ماتریس A مقادیر ویژه بصورت $\lambda_7,\lambda_6,\lambda_1,\lambda_1,\lambda_1,\lambda_1,\lambda_1$ باشند و برای پنج مقدار ویژه تکراری فقط دو بردار ویژه مستقل خطی داشته باشیم، آنگاه فرم کانونیکال جردن می تواند به شکل زیر بیان گردد،

$$J_{7\times7}=\begin{bmatrix} J_3(\lambda_1) & 0 & 0 & 0\\ 0 & J_2(\lambda_1) & 0 & 0\\ 0 & 0 & J_1(\lambda_6) & 0\\ 0 & 0 & 0 & J_1(\lambda_7)\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc:cc:c:c}\lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7\end{array}\right]$$

در واقع یک ماتریس قطری حالت خاصی از فرم کانونیکال جردن است. تعیین شکل بلوک های جردن ممکن است ساده نباشد. ماتریس $A_{3\times3}$ با یک مقدار ویژه مکرر مرتبه سوم مانند λ_1 را در نظر بگیرید. برای این ماتریس هر یک از صورتهای کانونیکال جردن زیر امکان پذیر است،

$$a)\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1\\ 0 & 0 & \lambda_1\end{bmatrix},\quad b)\left[\begin{array}{cc:c}\lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & \lambda_1\end{array}\right],\quad c)\left[\begin{array}{c:c:c}\lambda_1 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & \lambda_1 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & \lambda_1\end{array}\right]$$

هر یک از این سه ماتریس معادله مشخصه یکسانی بصورت $(\lambda-\lambda_1)^3=0$ دارند. لیکن ماتریس (a) متناظر با حالتی است که فقط یک بردار ویژه مستقل خطی وجود دارد و ماتریس های (b) و (c) به ترتیب دارای دو و سه بردار ویژه مستقل خطی هستند. لذا حتی اگر مرتبه تکرار مقدار ویژه یکسان باشد، تعداد بلوک های جردن و ترتیب آنها ممکن است بسته به ساختار ماتریس اصلی متفاوت باشد.

□

مثال۵-۲۱

ماتریس زیر را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -2 & -2\end{bmatrix}$$

فرم قطری سازی شده آن را بدست آورید.

ابتدا معادله مشخصه و مقادیر ویژه ماتریس حالت را بدست می آوریم.

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & \lambda+1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & \lambda & -1\\ 0 & 0 & 2 & \lambda+2\end{vmatrix}=0 \quad\rightarrow\quad (\lambda+1)^2(\lambda^2+2\lambda+2)=0$$

مقادیر ویژه عبارتند از، $\lambda_{1,2}=-1$ و $\lambda_{3,4}=-1\pm j$ لذا باید به فرم قطری بلوکی تبدیل نمود. برای بدست آوردن ماتریس تبدیل T بردارهای ویژه را بدست می آوریم،

$$\text{rank}(\lambda_1 I-A)=rank\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix}=3$$

لذا فقط یک بردار ویژه مستقل خطی متناظر با $\lambda_1 = -1$ وجود دارد و باید یک بردار تعمیم یافته دیگر بدست آوریم.

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$$

$$(\lambda_1 I - A)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{cases} -x_1 = 0 \\ -x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

حال یک بردار ویژه تعمیم یافته برای $\lambda_1 = -1$ محاسبه می کنیم،

$$(A - \lambda_1 I)\varphi_1 = \mathbf{v}_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_5 = 1 \\ x_6 + x_7 + x_8 = 1 \\ -2x_7 - x_8 = -2 \end{cases} \rightarrow \quad \varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بردارهای ویژه متناظر با $\lambda_{3,4} = -1 \pm j$ بصورت زیر است،

$$(\lambda_3 I - A)\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} j & 0 & 0 & 0 \\ -1 & j & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1+j & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1+j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{cases} -jx_1 = 0 \\ -x_1 + jx_2 = 0 \\ -x_2 + (-1+j)x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_3 + (1+j)x_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.5 - 0.5j \\ 1 \end{bmatrix}$$

بردار ویژه $\mathbf{v}_4$ هم مزدوج بردار ویژه $\mathbf{v}_3$ خواهد بود،

$$\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.5+0.5j \\ 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس تبدیل T بصورت زیر بدست می آید،

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \varphi_1 & \mathrm{Re}(\mathbf{v}_3) & \mathrm{Im}(\mathbf{v}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -0.5 & -0.5 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

حال باید فرم قطری بلوکی جردن را بدست آوریم.

$$\Lambda = T^{-1}AT$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -0.5 & -0.5 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{cc:cc} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[-1 0 0 0;1 -1 0 0;0 1 0 1;0 0 -2 -2];
[T,J]=jordan(A)
T =
      0                0                0              1.00
      0                0              1.00               0
  -0.50 + 0.50i    -0.50 - 0.50i      1.00             1.00
    0 - 1.00i        0 + 1.00i      -2.00               0
J =
  -1.00 + 1.00i        0                0                0
      0            -1.00 - 1.00i        0                0
      0                0              -1.00             1.00
      0                0                0             -1.00
```

همانطور که گفته شد دستور jordan(A) برای مقادیر ویژه غیر مختلط فرم قطری کامل ماتریس را ارائه می دهد و به فرم قطری بلوکی تبدیل نمی کند. لذا در چنین مواقعی می توان از برنامه myjordan.m برای بدست آوردن فرم حقیقی ماتریس تبدیل و فرم قطری بلوکی ماتریس جردن استفاده نمود،

```
%Calculate modal matrix and block jordan form
function [T,J]= myjordan(A)
n = size(A,1);
[T,J]= jordan(A);
f = 1;
for i = 1:n
   if isreal(T(:,i))== 0 & f == 1
      T(:,i)= real(T(:,i));
      f = 0;
   elseif isreal(T(:,i))== 0 & f == 0
      T(:,i)= -imag(T(:,i));
      f = 1;
   end
end
J = T\A*T;
```

اجرای برنامه بصورت زیر است،

```
A =[-1 0 0 0;1 -1 0 0;0 1 0 1;0 0 -2 -2];
[T,J]= myjordan(A)
T =
         0         0         0    1.0000
         0         0    1.0000         0
   -0.5000    0.5000    1.0000    1.0000
         0   -1.0000   -2.0000         0
J =
    -1     1     0     0
    -1    -1     0     0
     0     0    -1     1
     0     0     0    -1
```

□

مسائل

۵-۱- برای ماتریس های زیر مقادیر ویژه را بدست آورید و سپس آنها را به فرم قطری تبدیل کنید.

الف) $A=\begin{bmatrix}5 & -2 & 0\\ -2 & 6 & 2\\ 0 & 2 & 7\end{bmatrix}$

ب) $A=\begin{bmatrix}-1 & 6 & -12\\ 0 & -13 & 30\\ 0 & -9 & 20\end{bmatrix}$

ج) $A=\begin{bmatrix}1 & -4 & 2\\ -4 & 1 & -2\\ 2 & -2 & -2\end{bmatrix}$

د) $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 36\\ 0 & 3 & 0\\ 36 & 0 & 23\end{bmatrix}$

۵-۲- ماتریس های A و B را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}-10 & 6 & 3\\ -26 & 16 & 8\\ 16 & -10 & -5\end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix}0 & -6 & -16\\ 0 & 17 & 45\\ 0 & -6 & -16\end{bmatrix}$$

الف) نشان دهید که ماتریس های A و B مقادیر ویژه یکسانی دارند.

ب) ماتریسه های A و B را بصورت دو ماتریس یکسان قطری سازی کنید.

ج) نشان دهید ماتریس معکوس پذیری مانند R وجود دارد، بطوریکه $R^{-1}AR=B$ است.

د) مقدار A^8 و B^8 را بدست آورید.

۵-۳- فرض کنید λ یک مقدار ویژه برای یک ماتریس متعامد مانند A باشد، ثابت کنید $1/\lambda$ نیز یک مقدار ویژه برای ماتریس A است.

۵-۴- برای هر یک از ماتریس های زیر،

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -2\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 7 & 8\\ 0 & -4 & -5 & -5\end{bmatrix}$$

الف) مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را تعیین کنید.

ب) ماتریس تبدیل همانندی را تشکیل دهید.

ج) ماتریس را به فرم قطری یا قطری بلوکی تبدیل کنید.

۵-۵- ثابت کنید ضرایب معادله مشخصه یک ماتریس را می توان با استفاده از الگوریتم بازگشتی زیر بدست آورد،

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0$$

$$c_{n-1} = -W_1$$

$$c_{n-2} = -\frac{1}{2}(c_{n-1}W_1 + W_2)$$

$$c_{n-3} = -\frac{1}{3}(c_{n-2}W_1 + c_{n-1}W_2 + W_3)$$

$$\vdots$$

$$c_0 = -\frac{1}{n}(c_1W_1 + c_2W_2 + \cdots + c_{n-1}W_{n-1} + W_n)$$

در اینجا $W_k = \text{trace}(A^k)$ است.

۵-۶- اگر T تبدیل همانندی باشد که ماتریس A را قطری سازی می کند، بردارهای ویژه ماتریس A^T را بدست آورید.

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۵-۷- ماتریس همبسته زیر را در نظر بگیرید،

$$A_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

الف) نشان دهید که معادله مشخصه آن بصورت زیر است،

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

ب) اگر λ_i یک مقدار ویژه برای آن باشد، نشان دهید بردار ویژه متناظر با آن بصورت زیر است،

$$\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_i & \lambda_i^2 & \cdots & \lambda_i^{n-1} \end{bmatrix}^T$$

۵-۸- نشان دهید برای یک ماتریس وندرموند A رابطه زیر برقرار است،

$$|A| = \prod_{1<i<j<n} (\lambda_i - \lambda_j)$$

۵-۹- نشان دهید که یک ماتریس مربعی مانند $A_{n\times n}$ غیر منفرد است، اگر و فقط اگر کلیه مقادیر ویژه آن غیر صفر باشند.

۵-۱۰- برای هر یک از ماتریس های زیر یک ماتریس تبدیل مناسب بیابید که آنها را به فرم کانونیکال جردن تبدیل کند و سپس فرم جردن آن را بنویسید.

الف) $A=\begin{bmatrix}1 & \frac{3}{5} & \frac{-4}{5}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

ب) $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

ج) $A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -4\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}$

د) $A=\begin{bmatrix}0 & 4 & 3\\ 0 & 20 & 16\\ 0 & -25 & -20\end{bmatrix}$

۵-۱۱- ثابت کنید برای یک ماتریس مربعی شبه متقارن حقیقی تمامی مقادیر ویژه مقداری حقیقی یا صفر یا موهومی هستند.

۵-۱۲- ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

الف) این ماتریس چند مقدار ویژه دارد؟ آنها را بیابید.

ب) چند بردار ویژه مستقل خطی برای ماتریس A وجود دارد؟

ج) چند بردار ویژه تعمیم یافته برای ماتریس A وجود دارد؟

۵-۱۳- ماتریس A را با شرایط زیر در نظر بگیرید،

$$\lambda_1=\lambda_2=2,\qquad \operatorname{rank}(A-2I)=4$$
$$\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=-2,\qquad \operatorname{rank}(A+2I)=3$$

فرم کانونیکال جردن ماتریس A را بدست آورید.

فصل ششم

چند جمله ای ها و توابع ماتریسی

۶-۱ مقدمه

این فصل به بیان قضیه کیلی- هامیلتون و کاربردهای آن در محاسبه توابع ماتریسی به خصوص توابع نمایی ماتریسی می پردازد. در ادامه به مسئله تحقق فضای حالت سیستم های خطی تغییرناپذیر با زمان که یکی از مهمترین مباحث کنترل مدرن است پرداخته شده و نحوه حل معادلات فضای حالت و روش های بدست آوردن ماتریس انتقال حالت همراه با مثال های کاربردی و کدنویسی های انجام شده درMATLAB بیان گردیده است.

۶-۲ توابع و چند جمله ای های ماتریسی

ساده ترین تابع یک ماتریس مربعی توانهای آن می باشد. ماتریس A^n را می توان بصورت n بار حاصلضرب ماتریس A در خودش تعریف کرد. در حالت کلی یک چند جمله ای ماتریسی از یک ماتریس مربع بدین صورت نوشته می شود،

$$f(A)=\alpha_0 I+\alpha_1 A+\alpha_2 A^2+\cdots+\alpha_n A^n \qquad (۶-۱)$$

که در آن α_iها مقادیر اسکالر هستند. چند جمله ای های ماتریسی را می توان همانند چند جمله ای های اسکالر به عوامل مختلف تجزیه کرد.

مثال ۶-۱

با توجه به تابع و ماتریس داده شده مقدار $f(A)$ را محاسبه نمایید.

$$f(x)=2x^3-x^2+3x-4 \quad , \quad A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 2\end{bmatrix}$$

$$f(A)=2A^3-A^2+3A-4I$$

$$f(A)=2\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 2\end{bmatrix}^3-\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 2\end{bmatrix}^2+3\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 2\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-42 & -4\\ 6 & -40\end{bmatrix}$$

□

همانند متغیرهای اسکالر یک سری بینهایت برای ماتریس A بصورت زیر تعریف می شود،

$$f(A)=\alpha_0 I+\alpha_1 A+\alpha_2 A^2+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k A^k \qquad (۶-۲)$$

همگرایی سری بینهایت ماتریسی $f(A)$ منوط بر آن است که سری اسکلر $f(\lambda_i)$ همگرا باشد، که در آن λ_i مقدار ویژه ماتریس A می باشد.

مثال ۶-۲

نمونه ای از یک سری بینهایت تابع نمایی ماتریسی e^A است که بصورت زیر می باشد،

$$e^A=I+A+\frac{1}{2!}A^2+\cdots+\frac{1}{n!}A^n+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k$$

تابع اسکالر e^{λ} به ازای تمامی مقادیر λ همگرا می باشد، لذا تابع ماتریسی e^A مستقل از اینکه مقادیر ویژه آن چه باشند همواره همگرا است.

□

یکی از مهمترین و پرکاربردترین قضایا در مبحث توابع ماتریسی **قضیه کیلی- هامیلتون**[۱] است که از اهمیت ویژه ای برخوردار است.

قضیه کیلی- هامیلتون: هر ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ در معادله مشخصه خود صدق می کند.

اثبات: برای ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ داریم،

$$|\lambda I - A| = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n \qquad (۳-۶)$$

در اینصورت ماتریس $\mathrm{Adj}(\lambda I - A)$ که یک ماتریس با عناصری از چندجمله ای های با درجه کوچکتر یا مساوی $n-1$ است، بصورت زیر تعریف می شود،

$$\mathrm{Adj}(\lambda I - A) = B_0 + B_1\lambda + \cdots + B_{n-1}\lambda^{n-1} \qquad (۴-۶)$$

که در آن $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$ ماتریس های $n\times n$ می باشند.

از طرفی می توان نشان داد که برای هر ماتریس مربعی مانند $B_{n\times n}$ رابطه زیر برقرار است،

$$(\mathrm{Adj}(B))B = B(\mathrm{Adj}(B)) = |B|I_n$$

با توجه به این مسئله می توان نوشت،

$$(\lambda I\text{-}A)\mathrm{Adj}(\lambda I - A) = |\lambda I - A|I_n \qquad (۵-۶)$$

با قرار دادن رابطه(۶-۳) و (۶-۴) در رابطه (۶-۵) عبارت زیر بدست می آید،

$$(\lambda I - A)(B_0 + B_1\lambda + \cdots + B_{n-1}\lambda^{n-1}) = (\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n)I_n$$

از رابطه اخیر می توان تساوی های زیر را نتیجه گرفت،

$$\begin{aligned}
-AB_0 &= \alpha_0 I_n \\
B_0 - AB_1 &= \alpha_1 I_n \\
B_1 - AB_2 &= \alpha_2 I_n \\
&\vdots \\
B_{n-2} - AB_{n-1} &= \alpha_{n-1} I_n \\
B_{n-1} &= I_n
\end{aligned}$$

با پیش ضرب کردن معادلات بالا به ترتیب در $A^n, A^{n-1}, \ldots, A^2, A, I$ و جمع کردن طرفین آنها عبارت زیر بدست می آید،

$$\mathbf{0} = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_{n-1}A^{n-1} + A^n$$

بنابراین ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ در معادله مشخصه خود صدق می کند.

□

[۱] Cayley - Hamilton Theorem

مثال ۶-۳

صحت قضیه کیلی- هامیلتون را برای ماتریس A بررسی کنید.

$$A=\begin{bmatrix}6 & 16\\ -1 & -4\end{bmatrix}$$

معادله مشخصه برای ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix}\lambda-6 & -16\\ 1 & \lambda+4\end{vmatrix}=0 \quad \rightarrow \quad \lambda^2-2\lambda-8=0$$

حال ماتریس A را در این معادله قرار داده و حاصل را محاسبه می کنیم،

$$A^2-2A-8I_2=\begin{bmatrix}6 & 16\\ -1 & -4\end{bmatrix}^2-2\begin{bmatrix}6 & 16\\ -1 & -4\end{bmatrix}-8\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}20 & 32\\ -2 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}12 & 32\\ -2 & -8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}8 & 0\\ 0 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

بدین ترتیب صحت قضیه کیلی- هامیلتون تصدیق می شود.

□

۶-۲-۱- محاسبه ماتریس معکوس

یکی از کاربردهای قضیه کیلی- هامیلتون محاسبه ماتریس معکوس است،

$$A^n+\alpha_{n-1}A^{n-1}+\cdots+\alpha_1 A+\alpha_0 I=\mathbf{0}$$

$$A^n+\alpha_{n-1}A^{n-1}+\cdots+\alpha_1 A=-\alpha_0 I$$

$$A(A^{n-1}+\alpha_{n-1}A^{n-2}+\cdots+\alpha_1 I)=-\alpha_0 I$$

$$\frac{-1}{\alpha_0}A(A^{n-1}+\alpha_{n-1}A^{n-2}+\cdots+\alpha_1 I)=I=AA^{-1}$$

لذا ماتریس معکوس به کمک قضیه کیلی- هامیلتون با استفاده از چندجمله ای مشخصه ماتریس بدست می آید،

$$A^{-1}=\frac{-1}{\alpha_0}(A^{n-1}+\alpha_{n-1}A^{n-2}+\cdots+\alpha_1 I) \qquad (۶-۶)$$

برای اجرای این روش می توان برنامه ای بصورت زیر در نرم افزار MATLAB نوشت،

```
%  Matrix inverse by Cayley Hamilton method
function Ainv = AinvCH(A)
n = size(A,1);
AA = zeros(size(A));
cp = poly(A);
for i=1:n
   AA = AA + cp(i)*A^(n-i);
end
Ainv = (-1/cp(n+1))*AA;
```

مثال۶-۴

با استفاده از قضیه کیلی- هامیلتون مقدار A^{-1} را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}6 & 16\\ -1 & -4\end{bmatrix}$$

معادله مشخصه برای ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix}\lambda-6 & -16\\ 1 & \lambda+4\end{vmatrix}=0 \quad\rightarrow\quad \lambda^2-2\lambda-8=0$$

برای محاسبه A^{-1} می توان بصورت زیر عمل کرد،

$$A^2-2A-8I_2=0\rightarrow \quad \frac{1}{8}(A^2-2A)=I=AA^{-1}\rightarrow \quad \frac{1}{8}A(A-2I)=AA^{-1}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{8}(A-2I)\rightarrow \quad A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}6 & 16\\ -1 & -4\end{bmatrix}-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 2\\ \frac{-1}{8} & \frac{-3}{4}\end{bmatrix}$$

با اجرای برنامه AinvCH(A) نیز چنین پاسخی بدست می آید،

```
A =[6 16;-1 -4];
Ainv = AinvCH(A)
Ainv =
    0.5000    2.0000
   -0.1250   -0.7500
```

با محاسبه ماتریس معکوس بوسیله نرم افزار می توان صحت جواب را بررسی نمود،

```
A =[6 16;-1 -4];
inv(A)
ans =
    0.5000    2.0000
   -0.1250   -0.7500
```

□

۶-۲-۲- محاسبه چندجمله ای های ماتریسی

در حالت کلی یک چندجمله ای مرتبه m ماتریسی از یک ماتریس مربعی بدین صورت نوشته می شود،

$$P(A)=\alpha_0 I+\alpha_1 A+\alpha_2 A^2+\cdots+\alpha_m A^m \qquad (۶-۷)$$

حاصل این چند جمله ای را می توان با جایگذاری مستقیم ماتریس و توان رسانی های متوالی محاسبه نمود، که برای چندجمله ای های مرتبه بالا مستلزم محاسبات فراوانی است. یکی از کاربردهای قضیه کیلی- هامیلتون محاسبه چندجمله ای های ماتریسی است، که انجام کار بسیار ساده تر می گردد.

فرض کنید $P(\lambda)$ یک چندجمله ای مرتبه m و $Q(\lambda)$ چندجمله ای مشخصه ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ باشد. حاصل تقسیم $\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}$ را می توان بصورت زیر بیان کرد،

$$\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}=F(\lambda)+\frac{R(\lambda)}{Q(\lambda)} \quad\rightarrow\quad P(\lambda)=F(\lambda)Q(\lambda)+R(\lambda)$$

که در آن، $F(\lambda)$ خارج قسمت و $R(\lambda)$ باقیمانده تقسیم می باشند. حال اگر $\lambda=\lambda_i$ یک مقدار ویژه ماتریس A باشد، $Q(\lambda_i)=0$ خواهد بود و رابطه بالا بصورت زیر قابل نوشتن است،

$$P(\lambda_i)=F(\lambda_i)Q(\lambda_i)+R(\lambda_i) \quad\rightarrow\quad P(\lambda_i)=R(\lambda_i)$$

و با توجه به قضیه کیلی- هامیلتون می توان نوشت،

$$P(A)=R(A) \qquad (۶-۸)$$

لذا می توان به جای محاسبه چند جمله ای $P(A)$ با مرتبه m می توان حاصل چندجمله ای $R(A)$ را محاسبه نمود که مرتبه آن $n-1$ است.

مثال ۶-۵

ماتریس A را در نظر بگیرید و چند جمله ای $P(A)$ را برای آن بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}6 & 16\\ -1 & -4\end{bmatrix} \quad , \quad P(A)=A^5+16A^4+32A^3+16A^2+4A+I$$

<u>روش اول: جایگذاری مستقیم،</u>

با قرار دادن ماتریس A در چندجمله ای مذکور جواب را بدست می آوریم،

$$P(A)=\begin{bmatrix}6 & 16\\ -1 & -4\end{bmatrix}^5+16\begin{bmatrix}6 & 16\\ -1 & -4\end{bmatrix}^4+32\begin{bmatrix}6 & 16\\ -1 & -4\end{bmatrix}^3+16\begin{bmatrix}6 & 16\\ -1 & -4\end{bmatrix}^2+4\begin{bmatrix}6 & 16\\ -1 & -4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1376 & 2816\\ -176 & -384\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5376 & 10240\\ -640 & -1024\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2816 & 6144\\ -384 & -1024\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}320 & 512\\ -32 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}24 & 64\\ -4 & -16\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$P(A)=\begin{bmatrix}9913 & 19776\\ -1236 & -2447\end{bmatrix}$$

همانطور که مشخص است این روش مستلزم توان رسانی های متعدد برای ماتریس A است و استفاده از آن برای چند جمله ای های مرتبه بالا بسیار دشوار می باشد.

روش دوم: استفاده از قضیه کیلی- هامیلتون،

بجای جایگذاری ماتریس A در چند جمله ای مرتبه بالای $P(A)$ می توان از چندجمله ای $R(A)$ استفاده کرد که به مراتب درجه کمتری دارد. حال با این مقدمه حاصل چند جمله ای $P(A)$ را بدست می آوریم، برای این منظور دو راه کار وجود دارد،

۱- با انجام تقسیم چندجمله ای،

در این روش ابتدا تقسیم $\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}$ را انجام داده و چند جمله ای باقیمانده $R(\lambda)$ را بدست می آوریم،

$$P(\lambda)=\lambda^5+16\lambda^4+32\lambda^3+16\lambda^2+4\lambda+I \quad , \quad Q(\lambda)=\lambda^2-2\lambda-8$$
$$R(\lambda)=\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}=1236\lambda+2497$$

با توجه قضیه کیلی- هامیلتون داریم،

$$P(A)=R(A)$$
$$P(A)=1236A+2497I=1236\begin{bmatrix}6 & 16\\ -1 & -4\end{bmatrix}+2497\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9913 & 19776\\ -1236 & -2447\end{bmatrix}$$

۲- بدون انجام تقسیم چند جمله ای،

در این روش تقسیم $\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}$ انجام نمی شود. با توجه به مرتبه چند جمله ای مشخصه، بدیهی است که چندجمله ای باقیمانده $R(\lambda)$ از مرتبه یک می باشد. لذا آن را بصورت کلی زیر در نظر می گیریم،

$$R(\lambda)=c_1\lambda+c_0$$

حال مقدار c_1 و c_0 را بدست می آوریم،

$$\lambda_1=4\rightarrow R(\lambda_1)=P(\lambda_1)=c_0+c_1\lambda_1\rightarrow 7441=c_0+4c_1$$
$$\lambda_2=-2\rightarrow R(\lambda_2)=P(\lambda_2)=c_0+c_1\lambda_2\rightarrow 25=c_0-2c_1$$

لذا با حل این دستگاه معادلات مقدار $c_1=1236$ و $c_0=2497$ بدست می آید.

$$R(\lambda)=1236\lambda+2497$$

و با توجه قضیه کیلی- هامیلتون می توان نوشت،

$$P(A)=R(A)$$

$$P(A)=1236A+2497I=1236\begin{bmatrix}6 & 16\\ -1 & -4\end{bmatrix}+2497\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9913 & 19776\\ -1236 & -2447\end{bmatrix}$$

□

مثال ۶-۶

ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 1 & 8\end{bmatrix}$$

با استفاده از قضیه کیلی- هامیلتون معکوس ماتریس A و تابع ماتریسی زیر را بدست آورید،

$$P(A)=A^5+2A^3+4A+8I$$

- محاسبه ماتریس A^{-1}،

$$|\lambda I-A|=\lambda^2-6\lambda-16$$

با توجه به قضیه کیلی- هامیلتون داریم،

$$A^2-6A-16I=0\rightarrow \quad \frac{1}{16}(A^2-6A)=I=AA^{-1}\rightarrow \quad \frac{1}{16}A(A-6I)=AA^{-1}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{16}(A-6I)=\frac{1}{16}\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 1 & 8\end{bmatrix}-\frac{3}{8}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{2} & 0\\ \frac{1}{16} & \frac{1}{8}\end{bmatrix}$$

- محاسبه چندجمله ای $P(A)$،

$$P(\lambda)=\lambda^5+2\lambda^3+4\lambda+8 \quad , \quad Q(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda^2-6\lambda-16$$

چندجمله ای باقیمانده تقسیم $\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}$ از مرتبه یک می باشد.

$$R(\lambda)=c_1\lambda+c_0$$

حال مقدار c_1 و c_0 را بدست می آوریم،

$$\lambda_1=8 \quad\rightarrow\quad R(\lambda_1)=P(\lambda_1)=c_0+c_1\lambda_1 \quad\rightarrow\quad 33832=c_0+8c_1$$

$$\lambda_2=-2 \quad\rightarrow\quad R(\lambda_2)=P(\lambda_2)=c_0+c_1\lambda_2 \quad\rightarrow\quad -48=c_0-2c_1$$

با حل این دستگاه معادلات مقدار $c_1=3388$ و $c_0=6728$ بدست می آید.

$$R(\lambda)=3388\lambda+6728$$

و با توجه قضیه کیلی- هامیلتون می توان نوشت،

$$P(A)=R(A)$$

$$P(A)=3388A+6728I=3388\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 1 & 8\end{bmatrix}+6728\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-48 & 0\\ 3388 & 33832\end{bmatrix}$$

□

مثال ۶-۷

ماتریس A را در نظر بگیرید و چندجمله ای $P(A)$ را به کمک قضیه کیلی- هامیلتون بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}\quad,\quad P(A)=A^5+16A^4+32A^3+16A^2+4A+I$$

ابتدا معادله مشخصه و مقادیر ویژه ماتریس را بدست می آوریم،

$$|\lambda I-A|=Q(\lambda)=(\lambda-2)^3\quad\rightarrow\quad\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$$

با توجه به اینکه $Q(\lambda)$ مرتبه سه است، چندجمله ای باقیمانده تقسیم $P(\lambda)$ بر $Q(\lambda)$ چندجمله ای مرتبه دو خواهد بود،

$$R(\lambda)=c_2\lambda^2+c_1\lambda+c_0$$

حال مقدار c_1,c_2 و c_0 را بدست می آوریم،

$$\lambda_1=2\rightarrow R(\lambda_1)=P(\lambda_1)=c_0+c_1\lambda_1+c_2\lambda_1\rightarrow P(2)=c_0+2c_1+4c_2$$

چون مقادیر ویژه تکراری هستند برای دو مقدار ویژه بعدی معادله جدیدی بدست نمی آید. در این مواقع از مشتقات $R(\lambda)$ کمک می گیریم. در این مسئله دو معادله دیگر باید بدست آوریم لذا از مشتق مرتبه اول و دوم $R(\lambda)$ استفاده می کنیم،

$$\dot{R}(\lambda)=2c_2\lambda+c_1$$
$$\ddot{R}(\lambda)=2c_2$$

حال داریم،

$$\lambda_1=2\rightarrow\dot{R}(\lambda_1)=\dot{P}(\lambda_1)=c_1+2c_2\lambda_1\rightarrow\dot{P}(2)=c_1+4c_2$$
$$\lambda_1=2\rightarrow\ddot{R}(\lambda_1)=\ddot{P}(\lambda_1)=2c_2$$

لذا مقدار c_1,c_2 و c_0 از حل دستگاه معادلات زیر بدست می آید،

$$\begin{cases}c_0+2c_1+4c_2=P(2)=617\\c_1+4c_2=\dot{P}(2)=1044\\2c_2=\ddot{P}(2)=1344\end{cases}\quad\rightarrow\quad c_0=-4159,\quad c_1=-1644,\quad c_2=672$$

بنابراین داریم،

$$R(\lambda)=672\lambda^2-1644\lambda-4159$$

و با توجه قضیه کیلی- هامیلتون می توان نوشت،

$$P(A)=672A^2-1644A-4159I=\begin{bmatrix}-4759&1044&672\\0&-4759&1044\\0&0&-4759\end{bmatrix}$$

□

۶-۲-۳- محاسبه توابع ماتریسی

گاهی در تحلیل مسائل نیاز به محاسبه برخی از توابع ماتریسی داریم. از جمله پرکاربردترین این توابع عبارتند از،

$$e^{At}, \qquad \sin(At), \qquad \cos(At), \qquad \ldots$$

برای محاسبه حاصل این توابع می توان بسط آنها بصورت یک چند جمله ای نامتناهی در نظر گرفت،

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \cdots + \frac{1}{n!}A^nt^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(At)^n}{n!} \\ \sin(At) &= At - \frac{1}{3!}A^3t^3 + \frac{1}{5!}A^5t^5 - \cdots + \frac{1}{n!}A^nt^n - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(At)^{2n+1} \\ \cos(At) &= I - \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{4!}A^4t^4 - \cdots + \frac{1}{n!}A^nt^n - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(At)^{2n} \end{aligned} \qquad (۹-۶)$$

لیکن محاسبه فرم بسته این توابع از روی سری بینهایت کار دشواری است. لذا افراد همواره به دنبال روش هایی هستند که بتواند فرم بسته ای از توابع ماتریسی را ارائه دهد. یکی از کاربردهای قضیه کیلی- هامیلتون در محاسبه پاسخ بسته توابع ماتریسی است. صورت کلی توابع ماتریسی را می توان به شکل زیر نمایش داد،

$$f(A) = I + \alpha_1(t)A + \alpha_2(t)A^2 + \alpha_3(t)A^3 + \cdots + \alpha_n(t)A^n + \alpha_{n+1}(t)A^{n+1} + \cdots$$

حال اگر از قضیه کیلی- هامیلتون برای محاسبه حاصل این توابع استفاده نماییم، نامتناهی بودن این چندجمله ای می تواند مشکل ساز گردد، لیکن در ادامه نشان می دهیم که این سری بینهایت را می توان بصورت یک چند جمله ای محدود بر حسب توان های A^0 تا A^{n-1} نمایش داد و به راحتی از قضیه کیلی- هامیلتون برای محاسبه آن استفاده نمود.

$$A^n = -c_0 I - c_1 A - \cdots - c_{n-2}A^{n-2} - c_{n-1}A^{n-1} = g(A^0, \ldots, A^{n-1})$$

$$A^{n+1} = -c_0 A - c_1 A^2 - \cdots - c_{n-2}A^{n-1} - c_{n-1}A^n = h(A^0, \ldots, A^{n-1})$$

یعنی تمام جملات مرتبه بالاتر از n را می توان برحسب توان هایی از A^0 تا A^{n-1} نمایش داد. لذا در حالت کلی می توان $f(A)$ را بصورت زیر بیان کرد،

$$f(A) = I + \beta_1(t)A + \beta_2(t)A^2 + \beta_3(t)A^3 + \cdots + \beta_{n-1}(t)A^{n-1}$$

به این ترتیب $R(A)$ هم یک چندجمله ای محدود خواهد بود و می توان نوشت،

$$f(A) = R(A)$$

مثال ۶-۸

ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 1 & -3\end{bmatrix}$$

با استفاده از قضیه کیلی- هامیلتون ماتریس A^k تابع ماتریسی $P(A)$ و فرم بسته $\sin(A)$ را بدست آورید و نشان دهید $\sin^2(A)+\cos^2(A)=I$ است.

$$P(A)=A^5+2A^3+4A+8I$$

- محاسبه ماتریس A^k،

$$f(\lambda)=\lambda^k \quad , \quad Q(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda^2+5\lambda+4$$

چندجمله ای باقیمانده تقسیم $\dfrac{f(\lambda)}{Q(\lambda)}$ از مرتبه یک می باشد.

$$R(\lambda)=c_1\lambda+c_0$$

حال مقدار c_1 و c_0 را بدست می آوریم،

$$\lambda_1=-1 \quad\rightarrow\quad R(\lambda_1)=f(\lambda_1)=c_0+c_1\lambda_1 \quad\rightarrow\quad (-1)^k=c_0-c_1$$

$$\lambda_2=-4 \quad\rightarrow\quad R(\lambda_2)=f(\lambda_2)=c_0+c_1\lambda_2 \quad\rightarrow\quad (-4)^k=c_0-4c_1$$

با حل این دستگاه معادلات مقدار $c_1=\dfrac{1}{3}((-1)^k-(-4)^k)$ و $c_0=\dfrac{1}{3}(4(-1)^k-(-4)^k)$

و با توجه قضیه کیلی- هامیلتون می توان نوشت،

$$f(A)=R(A)$$

$$f(A)=c_1A+c_0I=c_1\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 1 & -3\end{bmatrix}+c_0\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2c_1+c_0 & 2c_1\\ c_1 & -3c_1+c_0\end{bmatrix}$$

$$A^k=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}(2(-1)^k+(-4)^k) & \frac{2}{3}((-1)^k-(-4)^k)\\ \frac{1}{3}((-1)^k-(-4)^k) & \frac{1}{3}((-1)^k+2(-4)^k)\end{bmatrix}$$

- محاسبه چندجمله ای $P(A)$،

$$P(\lambda)=\lambda^5+2\lambda^3+4\lambda+8 \quad , \quad Q(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda^2+5\lambda+4$$

چندجمله ای باقیمانده تقسیم $\dfrac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}$ از مرتبه یک می باشد.

$$R(\lambda)=c_1\lambda+c_0$$

حال مقدار c_1 و c_0 را بدست می آوریم،

$$\lambda_1=-1 \quad \rightarrow \quad R(\lambda_1)=P(\lambda_1)=c_0+c_1\lambda_1 \quad \rightarrow \quad 1=c_0-c_1$$
$$\lambda_2=-4 \quad \rightarrow \quad R(\lambda_2)=P(\lambda_2)=c_0+c_1\lambda_2 \quad \rightarrow \quad -1160=c_0-4c_1$$

با حل این دستگاه معادلات مقدار $c_1=387$ و $c_0=388$ بدست می آید.

$$R(\lambda)=387\lambda+388$$

و با توجه قضیه کیلی- هامیلتون می توان نوشت،

$$P(A)=R(A)$$

$$P(A)=387A+388I=387\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 1 & -3\end{bmatrix}+388\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-386 & 774\\ 387 & -773\end{bmatrix}$$

- محاسبه تابع $\sin(A)$،

با توجه به قضیه کیلی- هامیلتون،

$$\sin(A)=R(A)=c_0I+c_1A$$
$$\lambda_1=-1 \quad \rightarrow \quad \sin(\lambda_1)=c_0+c_1\lambda_1 \quad \rightarrow \quad \sin(-1)=c_0-c_1$$
$$\lambda_2=-4 \quad \rightarrow \quad \sin(\lambda_2)=c_0+c_1\lambda_2 \quad \rightarrow \quad \sin(-4)=c_0-4c_1$$

با حل دستگاه داریم،

$$c_0=-\frac{1}{3}[\sin(-4)-4\sin(-1)], \qquad c_1=-\frac{1}{3}[\sin(-4)-\sin(-1)]$$

به این ترتیب،

$$\sin(A)=c_0I+c_1A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}\sin(-4)+2\sin(-1) & -2\sin(-4)+2\sin(-1)\\ -\sin(-4)+\sin(-1) & 2\sin(-4)+\sin(-1)\end{bmatrix}$$

- نشان دهید $\sin^2(A)+\cos^2(A)=I$،

با توجه به قضیه کیلی- هامیلتون،

$$\cos(A)=R(A)=c_0I+c_1A$$
$$\lambda_1=-1 \quad \rightarrow \quad \cos(\lambda_1)=c_0+c_1\lambda_1 \quad \rightarrow \quad \cos(-1)=c_0-c_1$$
$$\lambda_2=-4 \quad \rightarrow \quad \cos(\lambda_2)=c_0+c_1\lambda_2 \quad \rightarrow \quad \cos(-4)=c_0-4c_1$$

با حل دستگاه داریم،

$$c_0=-\frac{1}{3}[\cos(-4)-4\cos(-1)], \qquad c_1=-\frac{1}{3}[\cos(-4)-\cos(-1)]$$

به این ترتیب،

$$\cos(A)=c_0I+c_1A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}\cos(-4)+2\cos(-1) & -2\cos(-4)+2\cos(-1)\\ -\cos(-4)+\cos(-1) & 2\cos(-4)+\cos(-1)\end{bmatrix}$$

حال مقدار $\sin^2(A)+\cos^2(A)$ را بدست می آوریم،

$$\sin^2(A)=\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3\sin^2(-4)+6\sin^2(-1) & -6\sin^2(-4)+6\sin^2(-1) \\ -3\sin^2(-4)+3\sin^2(-1) & 6\sin^2(-4)+3\sin^2(-1) \end{bmatrix}$$

$$\cos^2(A)=\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3\cos^2(-4)+6\cos^2(-1) & -6\cos^2(-4)+6\cos^2(-1) \\ -3\cos^2(-4)+3\cos^2(-1) & 6\cos^2(-4)+\cos^2(-1) \end{bmatrix}$$

لذا $\sin^2(A)+\cos^2(A)=I$ خواهد بود.

در نرم افزار MATLAB از دستور F = funm(A,'fun') برای محاسبه توابع ماتریس استفاده می شود. در این دستور به جای عبارت fun نام تابع نوشته می شود. بطور مثال برای محاسبه تابع ماتریسی $\sin(A)$ می نوایسیم F = funm(A,'sin') همچنین برای توابع نمایی، لگاریتم طبیعی و ریشه دوم دستورهای خاص expm(A) ، logm(A) و sqrtm(A) وجود دارد.

به اجرای دستور توجه نمایید،

```
A =[-2 2;1 -3];
Fs = funm(A,'sin')
Fs =
   -0.3087   -1.0655
   -0.5328    0.2240
Fc = funm(A,'cos')
Fc =
    0.1423    0.7960
    0.3980   -0.2557
Fs^2+Fc^2
ans =
    1.0000    0.0000
    0.0000    1.0000
```

□

مثال ۶-۹

اگر ماتریس سیستمی بشکل زیر باشد،

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$$

ماتریس e^A و $\ln(A)$ را با روش کیلی- هامیلتون بیابید.

$$Q(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\0&\lambda-2&-1\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^3=0\quad\rightarrow\quad\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$$

بدین ترتیب چندجمله ای مشخصه و مقادیر ویژه ماتریس حالت را بدست می آوریم، که یک مقدار ویژه تکراری با مرتبه سه دارد. با توجه اینکه چندجمله ای مشخصه مرتبه سه است، باقیمانده حاصل از تقسیم بسط تابع کلی $f(A)$ بر $Q(\lambda)$ مرتبه دو خواهد بود،

$$R(\lambda)=c_2\lambda^2+c_1\lambda+c_0$$

حال مقدار c_2، c_1 و c_0 را بدست می آوریم،

$$\lambda_1=2\rightarrow R(\lambda_1)=f(\lambda_1)=c_0+c_1\lambda_1+c_2\lambda_1^2\rightarrow f(2)=c_0+2c_1+4c_2$$

از آنجاییکه مقادیر ویژه تکراری هستند لذا برای بدست آوردن معادلات دیگر از مشتقات $R(\lambda)$ استفاده می نماییم.

$$\dot{R}(\lambda)+2c_2\lambda+c_1\rightarrow\dot{R}(\lambda_1)=2c_2\lambda_1+c_1\rightarrow\dot{f}(2)=4c_2+c_1$$

$$\ddot{R}(\lambda)+2c_2\rightarrow\ddot{R}(\lambda_1)=2c_2\rightarrow\ddot{f}(2)=2c_2$$

لذا دستگاه معادلات بصورت زیر بدست می آید که با حل این دستگاه معادلات مقدار c_2، c_1 و c_0 بصورت زیر خواهد بود،

$$\begin{cases}f(2)=c_0+2c_1+4c_2\\\dot{f}(2)=4c_2+c_1\\\ddot{f}(2)=2c_2\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}c_0=f(2)-2\dot{f}(2)+2\ddot{f}(2)\\c_1=\dot{f}(2)-2\ddot{f}(2)\\c_2=\frac{1}{2}\ddot{f}(2)\end{cases}$$

با توجه قضیه کیلی- هامیلتون می توان نوشت،

$$f(A)=c_0I+c_1A+c_2A^2=\begin{bmatrix}c_0&0&0\\0&c_0&0\\0&0&c_0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2c_1&c_1&0\\0&2c_1&c_1\\0&0&2c_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4c_2&4c_2&c_2\\0&4c_2&4c_2\\0&0&4c_2\end{bmatrix}$$

$$f(A)=\begin{bmatrix} f(2) & \dot{f}(2) & \frac{1}{2}\ddot{f}(2) \\ 0 & f(2) & \dot{f}(2) \\ 0 & 0 & f(2) \end{bmatrix}$$

حال که صورت کلی ماتریس $f(A)$ را بدست آوردیم می توانیم تک تک توابع ماتریسی خواسته شده را به راحتی محاسبه نماییم،

$$f(A)=e^{A}=\begin{bmatrix} e^{2} & e^{2} & \frac{1}{2}e^{2} \\ 0 & e^{2} & e^{2} \\ 0 & 0 & e^{2} \end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB می توان صحت جواب را بررسی نمود،

```
A =[2 1 0;0 2 1;0 0 2];
expm(A)
ans =
    7.3891    7.3891    3.6945
         0    7.3891    7.3891
         0         0    7.3891
```

$$f(A)=\ln(A)=\begin{bmatrix} \ln(2) & \frac{1}{2} & \frac{-1}{8} \\ 0 & \ln(2) & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \ln(2) \end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[2 1 0;0 2 1;0 0 2];
logm(A)
ans =
    0.6931    0.5000   -0.1250
    0.0000    0.6931    0.5000
    0.0000   -0.0000    0.6931
```

لازم به ذکر است استفاده از دستور F = funm(A,'fun') در مواردی که ریشه تکراری وجود دارد ممکن است پاسخ دستی ارائه ندهد.

□

مثال ۶-۱۰

ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 1 & 8\end{bmatrix}$$

با استفاده از قضیه کیلی- هامیلتون توابع ماتریسی $\sin(At)$ و e^{At} را بدست آورید،

ابتدا معادله مشخصه ماتریس را بدست می آوریم،

$$Q(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda^2-6\lambda-16$$

- محاسبه تابع $\sin(At)$،

با توجه به قضیه کیلی- هامیلتون،

$$\sin(At)=R(A)=c_0I+c_1A$$

$$\lambda_1=8 \quad\rightarrow\quad \sin(\lambda_1 t)=c_0+c_1\lambda_1 \quad\rightarrow\quad \sin(8t)=c_0+8c_1$$

$$\lambda_2=-2 \quad\rightarrow\quad \sin(\lambda_2 t)=c_0+c_1\lambda_2 \quad\rightarrow\quad \sin(-2t)=c_0-2c_1$$

با حل دستگاه داریم،

$$c_0=\frac{1}{5}[\sin(8t)+4\sin(-2t)],\qquad c_1=\frac{1}{10}[\sin(8t)-\sin(-2t)]$$

به این ترتیب،

$$\sin(At)=c_0I+c_1A=\begin{bmatrix}\sin(-2t) & 0\\ \frac{1}{10}[\sin(8t)-\sin(-2t)] & \sin(8t)\end{bmatrix}$$

- محاسبه تابع e^{At}،

با توجه به قضیه کیلی- هامیلتون،

$$e^{At}=R(A)=c_0I+c_1A$$

$$\lambda_1=8 \quad\rightarrow\quad e^{\lambda_1 t}=c_0+c_1\lambda_1 \quad\rightarrow\quad e^{8t}=c_0+8c_1$$

$$\lambda_2=-2 \quad\rightarrow\quad e^{\lambda_2 t}=c_0+c_1\lambda_2 \quad\rightarrow\quad e^{-2t}=c_0-2c_1$$

با حل دستگاه داریم،

$$c_0=\frac{1}{5}[e^{8t}+4e^{-2t}],\qquad c_1=\frac{1}{10}[e^{8t}-e^{-2t}]$$

به این ترتیب،

$$e^{At}=c_0I+c_1A=\begin{bmatrix}e^{-2t} & 0\\ \frac{1}{10}[e^{8t}-e^{-2t}] & e^{8t}\end{bmatrix}$$

در نرم افزار MATLAB برای محاسبه تابع نمایی ماتریسی از دستور expm استفاده می شود و برای بدست آوردن فرم پارامتری e^{At} می توان بصورت زیر عمل کرد،

```
A =[-2 0;1 8];
t=sym('t');
expm(A*t)
ans =
[                    exp(-2*t),                0]
[ 1/10*exp(8*t)-1/10*exp(-2*t),        exp(8*t)]
```

لازم به ذکر است استفاده از دستور F = funm(A,'fun') برای متغیرهای از نوع sym مجاز نیست.

□

مثال ۶-۱۱

ماتریس زیر را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}$$

ماتریس e^{At} را با استفاده از روش کیلی- هامیلتون بدست آورید.

برای این منظور ابتدا معادله مشخصه سیستم را بدست آورده و مقادیر ویژه را تعیین می کنیم،

$$Q(\lambda)=|\lambda I_n-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 6 & 11 & \lambda+6\end{vmatrix}=\lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6=0$$

لذا ماتریس A سه مقدار ویژه متمایز $\lambda_1=-1$، $\lambda_2=-2$ و $\lambda_3=-3$ دارد. از آنجائیکه ماتریس A مرتبه سوم است، لذا چند جمله ای باقیمانده $R(\lambda)$ در این حالت درجه دو خواهد بود،

$$R(\lambda)=c_0+c_1\lambda+c_2\lambda^2$$

حال می دانیم برای یک مقدار ویژه مانند λ_i می توان نوشت،

$$f(\lambda_i)=R(\lambda_i)=c_0+c_1\lambda_i+c_2\lambda_i^{\,2}$$

با جایگذاری $f(\lambda_i)=\exp[\lambda_i t]$ و سه تا مقادیر ویژه $\lambda_1=-1$، $\lambda_2=-2$ و $\lambda_3=-3$ در معادله اخیر یک دستگاه معادلات سه معادله سه مجهول بدست می آید،

$$e^{-t}=c_0-c_1+c_2$$
$$e^{-2t}=c_0-2c_1+4c_2$$
$$e^{-3t}=c_0-3c_1+9c_2$$

با حل این معادلات ضرایب c_kها بدست می آیند،

$$c_0 = 3e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{-3t}$$
$$c_1 = \tfrac{5}{2}e^{-t} - 4e^{-2t} + \tfrac{3}{2}e^{-3t}$$
$$c_2 = \tfrac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + \tfrac{1}{2}e^{-3t}$$

حال می توان ماتریس e^{At} را بصورت زیر بدست آورد،

$$\exp[At] = c_0 I + c_1 A + c_2 A^2$$
$$= \begin{bmatrix} c_0 & 0 & 0 \\ 0 & c_0 & 0 \\ 0 & 0 & c_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \\ -6c_1 & -11c_1 & -6c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_2 \\ -6c_2 & -11c_2 & -6c_2 \\ 36c_2 & 60c_2 & 25c_2 \end{bmatrix}$$

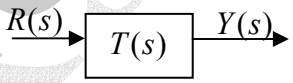
لذا داریم،

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 3e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{-3t} & \tfrac{3}{2}e^{-3t} - 4e^{-2t} + \tfrac{5}{2}e^{-t} & \tfrac{1}{2}e^{-3t} - e^{-2t} + \tfrac{1}{2}e^{-t} \\ -3e^{-3t} + 6e^{-2t} - 3e^{-t} & -\tfrac{5}{2}e^{-t} + 8e^{-2t} - \tfrac{9}{2}e^{-3t} & -\tfrac{3}{2}e^{-3t} + 2e^{-2t} - \tfrac{1}{2}e^{-t} \\ -12e^{-2t} + 3e^{-t} + 9e^{-3t} & \tfrac{27}{2}e^{-3t} - 16e^{-2t} + \tfrac{5}{2}e^{-t} & \tfrac{1}{2}e^{-t} + \tfrac{9}{2}e^{-3t} - 4e^{-2t} \end{bmatrix}$$

□

۶-۳ مدلسازی فضای حالت سیستمهای خطی

در روش های مبتنی بر کنترل کلاسیک، مدلسازی و تحلیل سیستم ها بر اساس **تابع تبدیل**[۱] سیستم صورت می گیرد. تابع تبدیل ارتباط بین ورودی و خروجی سیستم را بیان می دارد. سیستم یک ورودی- یک خروجی زیر را در نظر بگیرید،



تابع تبدیل این سیستم بصورت زیر بیان می گردد،

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} \qquad (۱۰-۶)$$

برای بدست آوردن نمایش تابع تبدیل می توان از معادلات دیفرانسیل سیستم استفاده کرد. اگر معادله دیفرانسیل سیستمی به فرم زیر باشد،

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_{n-1}u^{(n-1)}(t) + b_{n-2}u^{(n-2)}(t) + \cdots + b_1\dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

با تبدیل لاپلاس گرفتن از طرفین این معادله می توان تابع تبدیل آن را بصورت زیر بدست آورد،

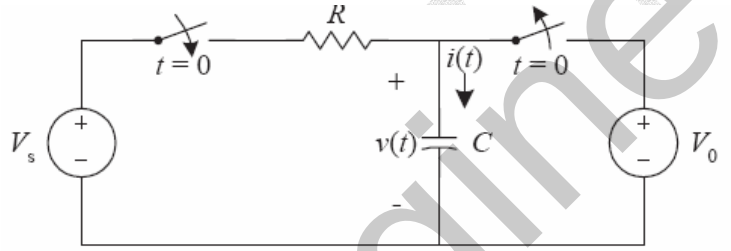
[۱] Transfer Function

$$T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{b_{n-1}s^{n-1}+b_{n-2}s^{n-2}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0} \qquad (۱۱-۶)$$

در تحلیل سیستم ها چندجمله ای مخرج تابع تبدیل را **معادله مشخصه سیستم** و ریشه های چندجمله ای مشخصه را **قطب های سیستم**[۱] و ریشه های چند جمله ای صورت تابع تبدیل را **صفرهای سیستم**[۲] می نامند.

مثال۶-۱۲

در مدار الکتریکی زیر اگر برای زمان های $t\le 0$ ولتاژ دو سر خازن $v(t)=V_0$ باشد، و در لحظه $t=0$ کلید سمت راست باز شده و کلید سمت چپ بسته شود ، ولتاژ دو سر خازن و تابع تبدیل سیستم را برای $t>0$ بدست آورید.



با اعمال قوانین مدارهای الکتریکی معادلات دیفرانسیل مربوطه را بدست می آوریم،

$$V_S-v(t)=Ri(t) \quad\rightarrow\quad V_S-v(t)=RC\frac{dv(t)}{dt}$$

$$\frac{dv(t)}{dt}=-\frac{1}{RC}v(t)+\frac{1}{RC}V_S \quad\rightarrow\quad v(t)=\begin{cases}(V_0-V_S)e^{-t/RC}+V_S & t>0\\ V_0 & t\le 0\end{cases}$$

در این مثال برای بدست آوردن ولتاژ دو سر خازن نیاز به حل یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول غیر همگن داریم. تابع تبدیل سیستم با توجه به ورودی خروجی تعیین شده بصورت زیر بدست می آید،

$$\dot{v}(t)=-\frac{1}{RC}v(t)+\frac{1}{RC}V_S\rightarrow \qquad sV(s)-v(0)=-\frac{1}{RC}V(s)+\frac{1}{RC}V_S(s)$$

با صرفنظر از شرایط اولیه تابع تبدیل بصورت زیر بدست می آید،

$$\frac{V(s)}{V_S(s)}=\frac{1}{RCs+1}$$

□

[۱] System Poles
[۲] System Zeros

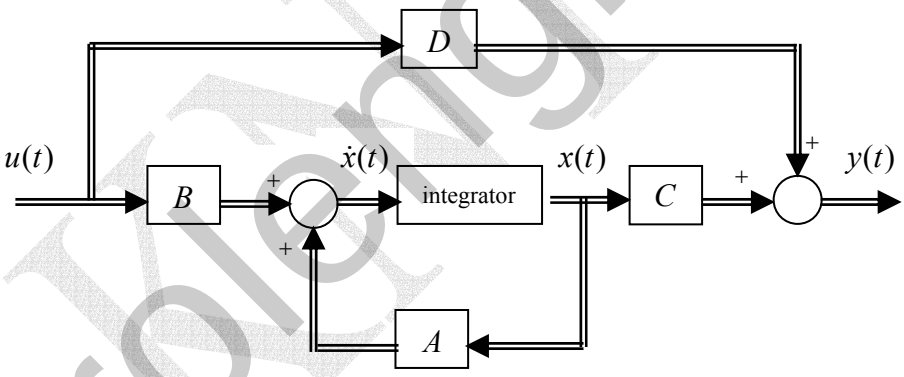
در روش های مبتنی بر کنترل مدرن، مدلسازی سیستم برپایه **فضای حالت**[۱] می باشد، از جمله مزایای این روش مدلسازی، قابلیت استفاده از آن برای سیستم های چند ورودی- چند خروجی و سیستم های خطی، غیر خطی و متغیر با زمان می باشد. صورت کلی معادلات فضای حالت بشکل زیر است،

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= f\left[\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t\right]\\ \mathbf{y}(t) &= g\left[\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t\right]\end{aligned} \qquad (۱۲-۶)$$

که در آن $\mathbf{x}_{n\times 1}(t)$ بردار حالت است و عناصر آن، $x_1,\ldots,x_n$ را متغیرهای حالت می نامند. $\mathbf{u}_{m\times 1}(t)$ بردار ورودی و $\mathbf{y}_{k\times 1}(t)$ بردار خروجی هستند. در حالت کلی f و g نیز توابع غیر خطی متغیر با زمان هستند که نحوه ارتباط بردارهای حالت، ورودی و خروجی را نشان می دهند. برای سیستم های خطی تغییر ناپذیر با زمان معادلات بصورت زیر قابل ساده سازی هستند،

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t)+B\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t)+D\mathbf{u}(t)\end{aligned} \qquad (۱۳-۶)$$

که در آن، $A_{n\times n}$ ماتریس حالت، $B_{n\times m}$ ماتریس ورودی، $C_{k\times n}$ ماتریس خروجی و $D_{k\times m}$ ماتریسی است که ارتباط مستقیم بین ورودی و خروجی را نشان می دهد. نمودار بلوکی نمایش یک سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان بوسیله فضای حالت در شکل زیر نشان داده شده است،



شکل(۶-۱) - نمودار بلوکی سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان با نمایش فضای حالت

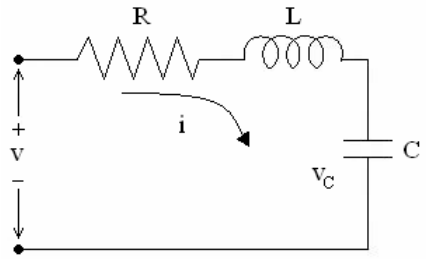
متغیرهای حالت می تواند تعبیر فیزیکی داشته باشد و قابل اندازه گیری با حسگر باشد، مانند ولتاژ، جریان، دما، سرعت، فشار و جابجایی و نیز می تواند کاملاً ریاضی باشد و تعبیر فیزیکی نداشته باشد و علت استفاده از آنها فقط برای ساده سازی محاسبات ریاضی است. از آنجاییکه نمایش فضای حالت بستگی به انتخاب متغیرهای حالت انتخاب شده دارد، لذا بر خلاف تابع تبدیل که یک نمایش منحصربفرد از یک سیستم است، نمایش های فضای حالت متعددی برای یک سیستم می توان بدست آورد.

[۱] State Space

مثال۶-۱۳

مدار الکتریکی زیر را در نظر بگیرید، معادلات دیفرانسیل این سیستم بصورت زیر است،

$$V = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + V_C(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt$$



جریان سلف $i(t)$ و ولتاژ خازن $V_C(t)$ را به عنوان متغیرهای حالت انتخاب می کنیم. معادله دیفرانسیل مرتبه دوم بالا را می توان بصورت دو معادله دیفرانسیل مرتبه اول تفکیک نمود،

$$\begin{cases} L\dfrac{di(t)}{dt} + Ri(t) + V_C(t) = V \\ C\dfrac{dV_C(t)}{dt} = i(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{di(t)}{dt} = -\dfrac{R}{L}i(t) - \dfrac{1}{L}V_C(t) + V \\ \dfrac{dV_C(t)}{dt} = \dfrac{1}{C}i(t) \end{cases}$$

لذا نمایش فضای حالت سیستم بصورت زیر خواهد بود،

$$\begin{bmatrix} \dot{i}(t) \\ \dot{V}_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i(t) \\ V_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}V(t)$$

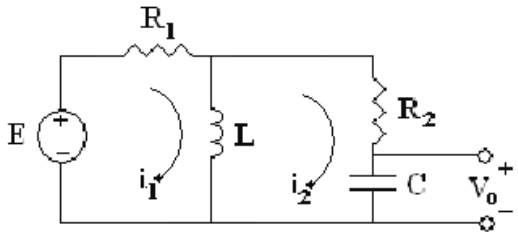
اگر ولتاژ دو سر خازن را به عنوان خروجی در نظر بگیریم، معادله خروجی نیز بصورت زیر نوشته می شود،

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i(t) \\ V_C(t) \end{bmatrix}$$

□

مثال۶-۱۴

اگر متغیرهای حالت را بصورت $x_1(t)$ جریان سلف و $x_2(t)$ ولتاژ دو سر خازن در نظر بگیریم، معادلات فضای حالت سیستم زیر را بدست آورید.



ابتدا معادلات حاکم بر مدار را می نویسیم،

$$\begin{cases} E = R_1 i_1 + L\dfrac{di_L}{dt} = R_1(i_L + i_2) + L\dot{i}_L \\ R_2 i_2 + V_C - L\dfrac{di_L}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad i_2 = -\dfrac{1}{R_2}V_C + \dfrac{L}{R_2}\dot{i}_L \\ i_2 = C\dfrac{dV_C}{dt} = C\dot{V}_C \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{i}_L = \dfrac{-R_1R_2}{L(R_1+R_2)}i_L + \dfrac{R_1}{L(R_1+R_2)}V_C + \dfrac{R_2}{L(R_1+R_2)}E \\ \dot{V}_C = \dfrac{-R_1}{C(R_1+R_2)}i_L + \dfrac{-1}{C(R_1+R_2)}V_C + \dfrac{1}{C(R_1+R_2)}E \\ V_O = V_C \end{cases}$$

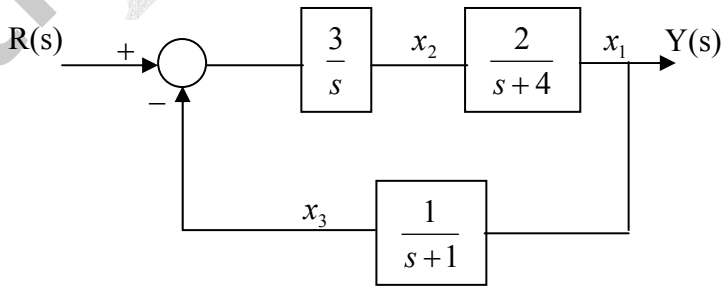
متغیرهای حالت $x_1(t) = i_L(t)$ جریان سلف و $x_2(t) = V_C(t)$ ولتاژ خازن هستند،

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{-R_1R_2}{L(R_1+R_2)} & \dfrac{R_1}{L(R_1+R_2)} \\ \dfrac{-R_1}{C(R_1+R_2)} & \dfrac{-1}{C(R_1+R_2)} \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \dfrac{R_2}{L(R_1+R_2)} \\ \dfrac{1}{C(R_1+R_2)} \end{bmatrix}E \\ \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

□

مثال ۶-۱۵

با توجه به متغیرهای حالت x_1, x_2, x_3، یک تحقق فضای حالت برای سیستم زیر بدست آورید.



با توجه به نمایش بلوکی سیستم داده شده می توان معادلات زیر را استخراج نمود،

$$\frac{X_1(s)}{X_2(s)}=\frac{2}{s+4} \quad\rightarrow\quad sX_1(s)+4X_1(s)=2X_2(2) \quad\rightarrow\quad \dot{x}_1(t)=-4x_1(t)+2x_2(t)$$

$$\frac{X_3(s)}{X_1(s)}=\frac{1}{s+1} \quad\rightarrow\quad sX_3(s)+X_3(s)=X_1(s) \quad\rightarrow\quad \dot{x}_3(t)=x_1(t)-x_3(t)$$

$$\frac{X_2(s)}{R(s)-X_3(s)}=\frac{3}{s} \quad\rightarrow\quad sX_2(s)=3R(s)-3X_3(s) \quad\rightarrow\quad \dot{x}_2(t)=-3x_3(t)+3r(t)$$

حال با توجه به متغیرهای حالت تعریف شده، معادلات حاصل را به فرم معادلات فضای حالت مرتب می نماییم،

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t)+B\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t)=C\mathbf{x}(t)+D\mathbf{u}(t)\end{cases} \quad\rightarrow\quad \begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -3\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 3\\ 0\end{bmatrix}r(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}\end{cases}$$

□

در حالت کلی معادلات فضای حالت سیستم را می توان از روی معادلات دیفرانسیل سیستم بدست آورد. معادله دیفرانسیل یک سیستم تک ورودی- تک خروجی را در نظر بگیرید،

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1\dot{y}(t)+a_0y(t)=b_0u(t) \qquad (۱۴\text{-}۶)$$

حال می توان با تعریف n متغیر جدید این معادله دیفرانسیل را به n معادله دیفرانسیل مرتبه اول ساده تبدیل نمود،

$$\begin{cases}x_1(t)=y(t)\\ x_2(t)=\dot{y}(t)\\ x_3(t)=\ddot{y}(t)\\ \vdots\\ x_{n-1}(t)=y^{(n-2)}(t)\\ x_n(t)=y^{(n-1)}(t)\end{cases} \quad\rightarrow\quad \begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=x_3(t)\\ \dot{x}_3(t)=x_4(t)\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-1}(t)=x_n(t)\\ \dot{x}_n(t)=y^{(n)}(t)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_n(t)=y^{(n)}(t)&=-a_{n-1}y^{(n-1)}(t)-\cdots-a_1\dot{y}(t)-a_0y(t)+b_0u(t)\\ &=-a_{n-1}x_n(t)-\cdots-a_1x_2(t)-a_0x_1(t)+b_0u(t)\end{aligned}$$

در اینجا تعداد n معادله دیفرانسیل مرتبه اول داریم که می توان آنها را به فرم معادلات فضای حالت نمایش داد،

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} \end{cases} \tag{۱۵-۶}$$

به چنین طرز نمایشی **فرم همبسته**[۱] گویند و متغیرهای حالت $x_1,\ldots,x_n$ را **متغیرهای فاز**[۲] می نامند. در صورتیکه متغیرهای فاز را عکس این حالت در نظر بگیریم، معادلات فضای حالت حاصل به فرم زیر بدست می آید،

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} \end{cases} \tag{۱۶-۶}$$

[۱] Companion Form
[۲] Phase Variables

مثال ۶-۱۶

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید،

$$\ddot{y}(t)+2\dot{y}(t)-3y(t)=u(t)$$

با تعریف متغیرهای فاز فرم همبسته آن را بدست آورید.

واضح است که در اینجا دو متغیر فاز خواهیم داشت،

$$\begin{cases} x_1(t)=y(t)\rightarrow \dot{x}_1(t)=\dot{y}(t) \\ x_2(t)=\dot{y}(t)\rightarrow \dot{x}_2(t)=\ddot{y}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t)=x_2(t) \\ \dot{x}_2(t)=3x_1(t)-2x_2(t)+u(t) \end{cases}$$

حال معادلات فضای حالت سیستم بصورت زیر بدست می آید،

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t) \\ y(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

□

مثال ۶-۱۷

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید،

$$T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{1}{s^2+3s+3}$$

نمایش فضای حالت سیستم را به فرم همبسته بدست آورید.

معادلات دیفرانسیل چنین سیستمی بصورت زیر بدست می آید،

$$s^2Y(s)+3sY(s)+3Y(s)=R(s) \quad \rightarrow \quad \ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+3y(t)=r(t)$$

حال با انتخاب متغیرهای فاز فرم ماتریسی معادلات را بدست می آوریم،

$$\begin{cases} x_1(t)=y(t)\rightarrow \dot{x}_1(t)=\dot{y}(t) \\ x_2(t)=\dot{y}(t)\rightarrow \dot{x}_2(t)=\ddot{y}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t)=x_2(t) \\ \dot{x}_2(t)=-3x_1(t)-3x_2(t)+r(t) \end{cases}$$

نمایش فضای حالت چنین خواهد بود،

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}r(t)$$

با توجه به ارتباط خروجی سیستم با متغیرهای فاز می توان چنین رابطه ای را بدست آورد،

$$y(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

توانستیم معادلات فضای حالت سیستم مذکور را از روی تابع تبدیل آن بدست آوریم. حال اگـر مقـادیر ویژه ماتریس A را بدست آوریم خواهیم دید که مقادیر ویژه بدست آمده همان قطب های تابع تبـدیل سیستم مذکور است.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 3 & \lambda+3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 3 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-3}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

مشخص است قطب های این سیستم بصورت زیر بدست می آیند،

$$s^2 + 3s + 3 = 0 \rightarrow s = \frac{-3}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

در نرم افزار MATLAB می توان با استفاده از دستور tf(num,den) فرم تابع تبدیل را مشاهده کردnum و den ضرایب چندجمله ای های صورت و مخرج تابع تبدیل هستند.

از دستور [A,B,C,D] = tf2ss(num,den) برای تبدیل نمایش تابع تبدیل به نمایش فضای حالت استفاده می شود. به اجرای این دستورها توجه نمایید،

```
num =[1];
den =[1 3 3];
tf(num,den)

Transfer function:
      1
-------------
s^2 + 3 s + 3
[A,B,C,D]= tf2ss(num,den)
A =
    -3    -3
     1     0
B =
     1
     0
C =
     0     1
D =
     0
```

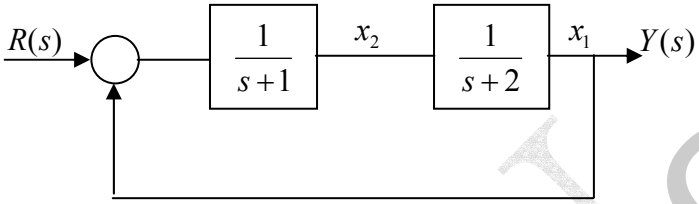
□

مثال۶-۱۸

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید،

$$T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{1}{s^2+3s+3}$$

نمایش بلوکی سیستم بصورت زیر است،



با توجه به متغیرهای حالت تعریف شده یک نمایش فضای حالت جدید برای سیستم مذکور بیابید.

$$\frac{X_1(s)}{X_2(s)}=\frac{1}{s+2}\quad,\quad\frac{X_2(s)}{R(s)-X_1(s)}=\frac{1}{s+1}$$

با فرض اینکه شرایط اولیه صفر است،

$$\begin{cases}sX_1(s)+2X_1(s)=X_2(s)\\ sX_2(s)+X_2(s)=R(s)-X_1(s)\\ Y(s)=X_1(s)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\dot{x}_1(t)=-2x_1(t)+x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=-x_1(t)-x_2(t)+r(t)\\ y(t)=x_1(t)\end{cases}$$

نمایش معادلات حالت بصورت زیر بدست می آید،

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}r(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}\end{cases}$$

حال اگر مقادیر ویژه ماتریس حالت را بدست آوریم همانند قبل خواهد بود،

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+2 & -1\\ 1 & \lambda+1\end{vmatrix}=0\rightarrow\lambda^2+3\lambda+3=0\rightarrow\lambda=\frac{-3}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

مشخص است که نمایش بدست آمده با مثال قبل تفاوت دارد، لیکن هر دو نمایش متعلق به یک سیستم واحد هستند، لذا این دو نمایش هم مرتبه و معادل هستند، لذا قابل تبدیل به یکدیگر هستند و برای تبدیل آنها به یکدیگر می توان از تبدیل های همانندی استفاده نمود.

□

از روی نمایش های فضای حالت بدست آمده می توان به راحتی تابع تبدیل سیستم را بدست آورد. برای این منظور بصورت زیر عمل می کنیم،

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t)+B\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t)=C\mathbf{x}(t)+D\mathbf{u}(t)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}sX(s)=AX(s)+BU(s)\\ Y(s)=CX(s)+DU(s)\end{cases}$$

با توجه معادلات بدست آمده داریم،

$$(sI-A)X(s)=BU(s)\rightarrow X(s)=(sI-A)^{-1}BU(s)$$
$$Y(s)=C(sI-A)^{-1}BU(s)+DU(s)$$

لذا تابع تبدیل سیستم بصورت زیر بدست می آید،

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=C(sI-A)^{-1}B+D \qquad (۱۷-۶)$$

بدست آوردن تابع تبدیل از روی تحقق فضای حالت سیستم را **بازسازی** می گویند.

مثال ۶-۱۹

تابع تبدیل سیستمی با نمایش فضای حالت زیر را بیابید.

الف)
$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & -3\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)\end{cases}$$

$$sI-A=\begin{bmatrix}s & 2\\ -1 & s+3\end{bmatrix}\rightarrow (sI-A)^{-1}=\frac{Adj(sI-A)}{|sI-A|}=\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix}s+3 & -2\\ 1 & s\end{bmatrix}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=C(sI-A)^{-1}B=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{s+3}{s^2+3s+2} & \frac{-2}{s^2+3s+2}\\ \frac{1}{s^2+3s+2} & \frac{s}{s^2+3s+2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

در نرم افزار MATLAB برای بدست آوردن ضرایب تابع تبدیل از روی تحقق فضای حالت می توان از دستور $[\text{num},\text{den}]=\text{ss2tf}(\text{A},\text{B},\text{C},\text{D})$ استفاده نمود،

```
A =[0 -2;1 -3];
B =[1;0];
C =[1 0];
D = 0;
```

```
[num,den]= ss2tf(A,B,C,D)
num =
     0     1     3
den =
     1     3     2
tf(num,den)

Transfer function:
    s + 3
-------------
s^2 + 3 s + 2
```

ب)

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} \rightarrow \quad (sI-A)^{-1} = \frac{Adj(sI-A)}{|sI-A|} = \frac{1}{s^2+3s+3} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s^2+3s+3} & \frac{1}{s^2+3s+3} \\ \frac{-1}{s^2+3s+3} & \frac{s+2}{s^2+3s+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2+3s+3}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[-2 1;-1 -1];
B =[0;1];
C =[1 0];
D = 0;
```

```
[num,den]= ss2tf(A,B,C,D)
num =
     0     0     1
den =
     1     3     3
tf(num,den)

Transfer function:
      1
-------------
s^2 + 3 s + 3
```

□

۶-۳-۱- تبدیل های همانندی و تحقق های فضای حالت

فرض کنید معادلات زیر دو تحقق فضای حالت هم مرتبه از تابع تبدیل $T(s)$ باشند،

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{z}}(t)=A_2\mathbf{z}(t)+B_2\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t)=C_2\mathbf{z}(t)+D_2\mathbf{u}(t)\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=A_1\mathbf{x}(t)+B_1\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t)=C_1\mathbf{x}(t)+D_1\mathbf{u}(t)\end{cases}$$

می توان نشان داد که ماتریس حالت در این دو تحقق بوسیله تبدیل همانندی به یکدیگر قابل تبدیل هستند. فرض کنید متغیرهای حالت $\mathbf{x}(t)$ را تحت تبدیل همانندی T به متغیرهای حالت $\mathbf{z}(t)$ تبدیل نماییم،

$$\mathbf{x}(t)=T\mathbf{z}(t) \tag{۱۸-۶}$$

با اعمال این تبدیل در معادلات اول تحقق اول داریم،

$$\begin{cases}T\dot{\mathbf{z}}(t)=A_1T\mathbf{z}(t)+B_1\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t)=C_1T\mathbf{z}(t)+D_1\mathbf{u}(t)\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\dot{\mathbf{z}}(t)=T^{-1}A_1T\mathbf{z}(t)+T^{-1}B_1\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t)=C_1T\mathbf{z}(t)+D_1\mathbf{u}(t)\end{cases} \tag{۱۹-۶}$$

حال با مقایسه معادلات بدست آمده با معادلات تحقق دوم می توان به تساوی های زیر دست یافت،

$$\begin{aligned}A_2&=T^{-1}A_1T\\ B_2&=T^{-1}B_1\\ C_2&=C_1T\\ D_2&=D_1\end{aligned} \tag{۲۰-۶}$$

بنابراین همواره می توان تحقق هم مرتبه و معادل را با استفاده از یک تبدیل همانندی به هم مرتبط نمود. حال نشان می دهیم که تابع تبدیل سیستم تحت این تبدیل همانندی بدون تغییر باقی می ماند. تابع تبدیل تحقق دوم بصورت زیر بدست می آید،

$$T_2(s) = C_2(sI - A_2)^{-1}B_2 + D_2$$

حال تبدیل همانندی را اعمال می نماییم،

$$\begin{aligned}
T_2(s) &= (C_1T)(sI - T^{-1}A_1T)^{-1}(T^{-1}B_1) + D_1 \\
&= (C_1T)(sT^{-1}T - T^{-1}A_1T)^{-1}(T^{-1}B_1) + D_1 \\
&= (C_1T)(T^{-1}(sI - A_1)T)^{-1}(T^{-1}B_1) + D_1 \\
&= (C_1T)T^{-1}(sI - A_1)^{-1}T(T^{-1}B_1) + D_1 \\
&= C_1(sI - A_1)^{-1}B_1 + D_1 \\
&= T_1(s)
\end{aligned}$$

لذا تابع تبدیل دو سیستم که با تبدیل همانندی به هم مرتبط باشند یکسان است و از آنجاییکه تبدیل های همانندی معادله مشخصه سیستم را تغییر نمی دهند داریم،

$$\lambda I - A_1 = \lambda I - A_2$$

لذا مقادیر مشخصه ماتریس های حالت و نتیجتاً قطب های تابع تغییر نمی یابند و چون خود تابع تبدیل نیز ثابت است، لذا صفرها نیز بدون تغییر باقی می مانند.

مثال ۶-۲۰

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید،

$$T(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 3}$$

دو تحقق هم مرتبه برای این تابع تبدیل بدست آمده است،

$$(1)\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{r}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \text{و} \quad (2)\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{z}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{r}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{z}(t) \end{cases}$$

یک تبدیل همانندی بین این دو تحقق بصورت $\mathbf{x}(t) = T\mathbf{z}(t)$ بدست آورید.

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ z_1(t) &= y(t) \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad x_1(t) = z_1(t)$$

$$z_2(t) = \dot{z}_1(t) = \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + x_2(t) \rightarrow \quad x_2(t) = 2z_1(t) + z_2(t)$$

لذا ارتباط بین متغیرهای حالت بصورت زیر بدست می آید،

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

به راحتی می توان نشان داد که $C_2 = C_1T, B_2 = T^{-1}B_1, A_2 = T^{-1}A_1T$ است.

□

مثال ۶-۲۱

معادلات دینامیکی سیستمی بصورت زیر می باشد،

$$\dddot{y}(t)+3\ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+y(t)=u(t)$$

الف) با فرض اینکه $x_1(t)=y(t)$ و $x_2(t)=\dot{y}(t)$ و $x_3(t)=\ddot{y}(t)$ باشد، فرم معادلات را بصورت $\dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t)+B\mathbf{u}(t)$ بنویسید.

ب) اگر $z_1(t)=y(t)$ و $z_2(t)=\dot{y}(t)+y(t)$ و $z_3(t)=\ddot{y}(t)$ باشد، فرم معادلات را بصورت $\dot{\mathbf{z}}(t)=G\mathbf{z}(t)+H\mathbf{u}(t)$ بنویسید.

ج) یک تبدیل همانندی $\mathbf{x}=T\mathbf{z}$ بین نمایش $\dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t)+B\mathbf{u}(t)$ و $\dot{\mathbf{z}}(t)=G\mathbf{z}(t)+H\mathbf{u}(t)$ بیابید.

الف) با متغیرهای حالت $x_1(t)=y(t)$ و $x_2(t)=\dot{y}(t)$ و $x_3(t)=\ddot{y}(t)$ معادلات حالت به فرم همبسته زیر بدست می آید،

$$\begin{cases} x_1(t)=y(t)\rightarrow \dot{x}_1(t)=\dot{y}(t) \\ x_2(t)=\dot{y}(t)\rightarrow \dot{x}_2(t)=\ddot{y}(t) \\ x_3(t)=\ddot{y}(t)\rightarrow \dot{x}_3(t)=\dddot{y}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t)=x_2(t) \\ \dot{x}_2(t)=x_3(t) \\ \dot{x}_3(t)=-x_1(t)-3x_2(t)-3x_3(t)+u(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t)+B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t)=C\mathbf{x}(t)+D\mathbf{u}(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

ب) با متغیرهای حالت $z_1(t)=y(t)$ و $z_2(t)=\dot{y}(t)+y(t)$ و $z_3(t)=\ddot{y}(t)$ معادلات حالت به فرم زیر بدست می آید،

$$\begin{cases} z_1(t)=y(t)\rightarrow \dot{z}_1(t)=\dot{y}(t) \\ z_2(t)=\dot{y}(t)+y(t)\rightarrow \dot{z}_2(t)=\ddot{y}(t)+\dot{y}(t) \\ z_3(t)=\ddot{y}(t)\rightarrow \dot{z}_3(t)=\dddot{y}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{z}_1(t)=z_2(t)-z_1(t) \\ \dot{z}_2(t)=z_3(t)+z_2(t)-z_1(t) \\ \dot{z}_3(t)=2z_1(t)-3z_2(t)-3z_3(t)+u(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=G\mathbf{x}(t)+H\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t)=E\mathbf{x}(t)+F\mathbf{u}(t)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\\ \dot{z}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-1&1&1\\2&-3&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}\end{cases}$$

ج) با مقایسه ارتباط بین متغیرهای حالت $\mathbf{x}$ و $\mathbf{z}$ می توان به راحتی ماتریس تبدیل همانندی T را بدست آورد.

$$\left.\begin{matrix}y(t)=x_1(t)\\ y(t)=z_1(t)\end{matrix}\right\}\rightarrow x_1(t)=z_1(t)$$

$$x_2(t)=\dot{y}(t)=\dot{z}_1(t)=z_2(t)-z_1(t)\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}$$

$$x_3(t)=\ddot{y}(t)=z_3(t)$$

به راحتی می توان نشان داد که $E=CT, H=T^{-1}B, G=T^{-1}AT$ است.

□

مثال ۶-۲۲

تحقق های فضای حالت زیر را بازسازی نمایید.

الف) $\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}-5&-1\\3&-1\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)\end{cases}$

ب) $\begin{cases}\dot{\mathbf{z}}(t)=\begin{bmatrix}0&1\\-8&-6\end{bmatrix}\mathbf{z}(t)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix}59&12\end{bmatrix}\mathbf{z}(t)\end{cases}$

آیا می توان یک تبدیل همانندی بین این دو نمایش بدست آورد؟

الف) ابتدا تابع تبدیل سیستم اول را بدست می آوریم،

$$sI-A_1=\begin{bmatrix}s+5&1\\-3&s+1\end{bmatrix}$$

$$(sI-A_1)^{-1}=\frac{Adj(sI-A_1)}{|sI-A_1|}=\frac{1}{s^2+6s+8}\begin{bmatrix}s+1&-1\\3&s+5\end{bmatrix}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=C_1(sI-A_1)^{-1}B_1=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{s+1}{s^2+6s+8} & \frac{-1}{s^2+6s+8}\\ \frac{3}{s^2+6s+8} & \frac{s+5}{s^2+6s+8}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}=\frac{12s+59}{s^2+6s+8}$$

ب) حال تابع تبدیل سیستم دوم را بدست می آوریم،

$$sI-A_2=\begin{bmatrix}s & -1\\ 8 & s+6\end{bmatrix}$$

$$(sI-A_2)^{-1}=\frac{Adj(sI-A_2)}{|sI-A_2|}=\frac{1}{s^2+6s+8}\begin{bmatrix}s+6 & 1\\ -8 & s\end{bmatrix}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=C_2(sI-A_2)^{-1}B_2=\begin{bmatrix}59 & 12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{s+6}{s^2+6s+8} & \frac{1}{s^2+6s+8}\\ \frac{-8}{s^2+6s+8} & \frac{s}{s^2+6s+8}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\frac{12s+59}{s^2+6s+8}$$

از آنجاییکه هر دو تحقق مربوط به یک تابع تبدیل و هم مرتبه هستند، لذا می توان یک تبدیل همانندی بین این دو بدست آورد. با توجه به ارتباط بین متغیرهای حالت چنین ماتریس تبدیلی بدست می آید،

$$\left.\begin{aligned}y&=x_1+2x_2\\ y&=59z_1+12z_2\end{aligned}\right\}\rightarrow\quad x_1+2x_2=59z_1+12z_2\qquad(1)$$

از طرفین رابطه (1) مشتق می گیریم و به جای مشتقات از معادلات فضای حالت مربوطه جایگذاری می کنیم،

$$\dot{x}_1+2\dot{x}_2=59\dot{z}_1+12\dot{z}_2$$

$$(-5x_1-x_2+2u)+2(3x_1-x_2+5u)=59(z_2)+12(-8z_1-6z_2+u)$$

$$x_1-3x_2=-96z_1-13z_2\qquad(2)$$

حال از روی رابطه (1) و (2) می توان ماتریس تبدیل همانندی را بدست آورد،

$$\left.\begin{aligned}x_1&=-3z_1+2z_2\\ x_2&=31z_1+5z_2\end{aligned}\right\}\quad\rightarrow\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 31 & 5\end{bmatrix}\mathbf{z}\quad\rightarrow\quad T=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 31 & 5\end{bmatrix}$$

صحت ماتریس بدست آمده را می توان بصورت زیر بررسی نمود،

$$A_2=T^{-1}A_1T\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}0 & 1\\ -8 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 31 & 5\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-5 & -1\\ 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 31 & 5\end{bmatrix}$$

$$B_2 = T^{-1}B_1 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3 & 2\\31 & 5\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$$

$$C_2 = TC_1 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix}59 & 12\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 2\\31 & 5\end{bmatrix}$$

□

۶-۳-۲- حل معادلات فضای حالت

صورت کلی معادلات فضای حالت را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t)\end{cases}$$

برای حل این معادلات لازم است تا بردار $\mathbf{x}(t)$ را از معادله اول بدست آورد و با جایگذاری آنها در معادله دوم خروجی سیستم، $\mathbf{y}(t)$ را محاسبه نمود. معادله اول را در نظر بگیرید،

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$$

پاسخ کلی چنین معادله ای بصورت زیر بدست می آید،

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \mathrm{e}^{At}\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \qquad (۲۱-۶)$$

e^{At} تابع نمایی ماتریسی است که به آن **ماتریس انتقال حالت**[۱] می گویند و با نماد $\Phi(t)$ نیز نمایش می دهند،

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t-t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t}\Phi(t-\tau)B\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

در صورتیکه معادلات را بصورت همگن در نظر بگیریم،

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$$

در اینصورت جواب معادله همگن به شکل زیر خواهد بود،

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) = \Phi(t-t_0)\mathbf{x}(t_0) \qquad (۲۲-۶)$$

ماتریس انتقال حالت در واقع بیان کننده پاسخ طبیعی یا بدون ورودی سیستم می باشد. برخی از خواص ماتریس انتقال حالت عبارتند از،

۱- $\Phi(0) = I$

$$\Phi(0) = \mathrm{e}^{A\times 0} = I$$

۲- برای هر مقدار t_0، t_1 و t_2 داریم، $\Phi(t_2-t_1)\Phi(t_1-t_0) = \Phi(t_2-t_0)$

$$\mathrm{e}^{A(t_2-t_1)}\mathrm{e}^{A(t_1-t_0)} = \mathrm{e}^{At_2}\mathrm{e}^{-At_1}\mathrm{e}^{At_1}\mathrm{e}^{-At_0} = \mathrm{e}^{At_2}\mathrm{e}^{-At_0} = \mathrm{e}^{A(t_2-t_0)}$$

[۱] State Transition Matrix

۳- اگر α یک عدد صحیح باشد، $\Phi(t)\Phi(t)\cdots\Phi(t)=\Phi^{\alpha}(t)=\Phi(\alpha t)$

$$e^{At}e^{At}\cdots e^{At}=(e^{At})^{\alpha}=e^{A(\alpha t)}$$

۴- ماتریس انتقال حالت برای کلیه مقادیر محدود t یک ماتریس غیرمنفرد، لذا معکوس پذیر است،

$$\Phi^{-1}(t)=\Phi(-t) \quad \text{یا} \quad (e^{At})^{-1}=e^{A(-t)}$$

مثال۶-۲۳

کدامیک از ماتریس های زیر می تواند یک ماتریس انتقال حالت باشد؟

الف) $\begin{bmatrix}-e^{-t} & 0\\ 0 & 1-e^{-t}\end{bmatrix}$

خواص ماتریس انتقال حالت را بررسی می نماییم،

۱- $e^{A\times 0}=I$

$$\begin{bmatrix}-e^{-t} & 0\\ 0 & 1-e^{-t}\end{bmatrix}\xrightarrow{t=0}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\neq I$$

در شرط اول صدق نمی کند، لذا ماتریس انتقال حالت نیست.

ب) $\begin{bmatrix}e^{-2t} & te^{-2t} & t^2e^{-2t}/2\\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t}\\ 0 & 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}$

خواص ماتریس انتقال حالت را بررسی می نماییم،

۱- $\Phi(0)=I$

$$\begin{bmatrix}e^{-2t} & te^{-2t} & t^2e^{-2t}/2\\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t}\\ 0 & 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}\xrightarrow{t=0}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

۲- $\Phi(t_2-t_1)\Phi(t_1-t_0)=\Phi(t_2-t_0)$

$$\begin{bmatrix}e^{-2(t_2-t_1)} & (t_2-t_1)e^{-2(t_2-t_1)} & (t_2-t_1)^2e^{-2(t_2-t_1)}/2\\ 0 & e^{-2(t_2-t_1)} & (t_2-t_1)e^{-2(t_2-t_1)}\\ 0 & 0 & e^{-2(t_2-t_1)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-2(t_1-t_0)} & (t_1-t_0)e^{-2(t_1-t_0)} & (t_1-t_0)^2e^{-2(t_1-t_0)}/2\\ 0 & e^{-2(t_1-t_0)} & (t_1-t_0)e^{-2(t_1-t_0)}\\ 0 & 0 & e^{-2(t_1-t_0)}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} e^{-2(t_2-t_0)} & (t_2-t_0)e^{-2(t_2-t_0)} & (t_2-t_0)^2 e^{-2(t_2-t_0)}/2 \\ 0 & e^{-2(t_2-t_0)} & (t_2-t_0)e^{-2(t_2-t_0)} \\ 0 & 0 & e^{-2(t_2-t_0)} \end{bmatrix}$$

۳- $\Phi(t)\Phi(t)\cdots\Phi(t)=\Phi^{\alpha}(t)=\Phi(\alpha t)$

$$\alpha=2 \quad \rightarrow \quad \Phi(2t)=\begin{bmatrix} e^{-4t} & 2te^{-4t} & 2t^2e^{-4t} \\ 0 & e^{-4t} & 2te^{-4t} \\ 0 & 0 & e^{-4t} \end{bmatrix}$$

$$\Phi^2(t)=\begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & t^2e^{-2t}/2 \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & t^2e^{-2t}/2 \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} e^{-4t} & 2te^{-4t} & 2t^2e^{-4t} \\ 0 & e^{-4t} & 2te^{-4t} \\ 0 & 0 & e^{-4t} \end{bmatrix}=\Phi(2t)$$

$$\alpha=3 \quad \rightarrow \quad \Phi(3t)=\begin{bmatrix} e^{-6t} & 3te^{-6t} & 9t^2e^{-6t}/2 \\ 0 & e^{-6t} & 3te^{-6t} \\ 0 & 0 & e^{-6t} \end{bmatrix}$$

$$\Phi^3(t)=\begin{bmatrix} e^{-4t} & 2te^{-4t} & 2t^2e^{-4t} \\ 0 & e^{-4t} & 2te^{-4t} \\ 0 & 0 & e^{-4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & t^2e^{-2t}/2 \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} e^{-6t} & 3te^{-6t} & 9t^2e^{-6t}/2 \\ 0 & e^{-6t} & 3te^{-6t} \\ 0 & 0 & e^{-6t} \end{bmatrix}=\Phi(3t)$$

به همین ترتیب برای سایر αها نیز قابل اثبات است.

۴- $\Phi^{-1}(t)=\Phi(-t)$

$$\Phi(-t)=\begin{bmatrix} e^{2t} & -te^{2t} & t^2e^{2t}/2 \\ 0 & e^{2t} & -te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\Phi^{-1}(t)=\begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & t^2e^{-2t}/2 \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{e^{-6t}}\begin{bmatrix} e^{-4t} & -te^{-4t} & t^2e^{-4t}/2 \\ 0 & e^{-4t} & -te^{-4t} \\ 0 & 0 & e^{-4t} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} e^{2t} & -te^{2t} & t^2e^{2t}/2 \\ 0 & e^{2t} & -te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} = \Phi(-t)$$

بنابراین این ماتریس می تواند یک ماتریس انتقال حالت باشد.

ج) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{2t}+1 & e^{2t}-1 \\ e^{2t}-1 & e^{2t}+1 \end{bmatrix}$

خواص ماتریس انتقال حالت را بررسی می نماییم،

۱- $\Phi(0)=I$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{2t}+1 & e^{3t}-1 \\ e^{t}-1 & e^{5t}+1 \end{bmatrix} \xrightarrow{t=0} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

۲- $\Phi(t_2-t_1)\Phi(t_1-t_0)=\Phi(t_2-t_0)$

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} e^{2(t_2-t_1)}+1 & e^{3(t_2-t_1)}-1 \\ e^{(t_2-t_1)}-1 & e^{5(t_2-t_1)}+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2(t_1-t_0)}+1 & e^{3(t_1-t_0)}-1 \\ e^{(t_1-t_0)}-1 & e^{5(t_1-t_0)}+1 \end{bmatrix} \neq \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{2(t_2-t_0)}+1 & e^{3(t_2-t_0)}-1 \\ e^{(t_2-t_0)}-1 & e^{5(t_2-t_0)}+1 \end{bmatrix}$$

در شرط دوم صدق نمی کند، لذا ماتریس انتقال حالت نیست.

□

مثال ۶-۲۴

اگر سری تابع ماتریسی e^{At} به شکل زیر باشد،

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \cdots$$

مقدار $\frac{d}{dt}\left[e^{At}\right]$ و $\int_0^t e^{A\tau}d\tau$ را بدست آورید.

$$\frac{d}{dt}\left[e^{At}\right] = A + \frac{2A^2t}{2!} + \frac{3A^3t^2}{3!} + \cdots$$

$$= A(I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \cdots) = (I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \cdots)A = Ae^{At} = e^{At}A$$

قابل ذکر است که ماتریس A را هم از سمت راست و هم از سمت چپ می توان فاکتورگیری کرد.

$$\int_0^t e^{A\tau}d\tau = \int_0^t Id\tau + A\int_0^t \tau d\tau + \frac{A^2}{2!}\int_0^t \tau^2 d\tau + \cdots = It + \frac{At^2}{2} + \frac{A^2t^3}{3!} + \cdots$$

بنابراین با ضرب A از سمت چپ در رابطه بالا داریم،

$$A\int_0^t e^{A\tau}d\tau + I = e^{At}$$

و در صورتیکه A^{-1} وجود داشته باشد،

$$\int_0^t e^{A\tau} d\tau = A^{-1}[e^{At} - I] = [e^{At} - I]A^{-1}$$

□

۶-۳-۳- روش های محاسبه ماتریس انتقال حالت

روشهای زیادی برای محاسبه فرم بسته ماتریس انتقال حالت معرفی شده است که متداول ترین آنها عبارتند از، روش سری ها، روش کیلی- هامیلتون، روش تبدیل لاپلاس و روش قطری سازی. در ادامه به شرح این روش ها می پردازیم.

۶-۳-۳-۱- روش سری ها[۱]

در این روش از تعریف سری e^{At} برای محاسبه استفاده می شود،

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(At)^n \qquad (۲۳-۶)$$

این روش با وجود سادگی، برای ماتریس هایی با ابعاد بزرگ نیازمند حجم محاسبات دستی بسیار بالایی است و در نهایت بدست آوردن فرم بسته ماتریس کار دشواری است. از این روش می توان برای برنامه نویسی کامپیوتری استفاده نمود.

مثال ۶-۲۵

برای ماتریس های زیر ماتریس e^{At} را با استفاده از روش سری ها بدست آورید.

الف) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

با توجه تعریف داریم،

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t & 0 & t \\ 0 & -2t & 0 \\ 0 & t & 2t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t^2/2 & t^2/2 & t^2/2 \\ 0 & 2t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2t^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t^3/6 & -t^3/6 & t^3/2 \\ 0 & -4t^3/3 & 0 \\ 0 & 2t^3/3 & 4t^3/3 \end{bmatrix} + \cdots$$

لذا،

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 - t + t^2/2 - t^3/6 + \cdots & t^2/2 - t^3/6 + \cdots & t + t^2/2 + t^3/2 + \cdots \\ 0 & 1 - 2t + 2t^2 - 4t^3/3 + \cdots & 0 \\ 0 & t + 2t^3/3 + \cdots & 1 + 2t + 2t^2 + 4t^3/3 + \cdots \end{bmatrix}$$

[۱] Series Method

بدست آوردن صورت بسته ماتریس انتقال حالت در این روش کار پیچیده ای است. لذا این روش به غیر از موارد خاص برای محاسبات دستی توصیه نمی شود.

ب) $A=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$

$$e^{At}=I+At+\frac{1}{2!}(At)^2+\frac{1}{3!}(At)^3+\cdots$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&t&t\\0&0&t\\0&0&0\end{bmatrix}+\frac{1}{2!}\begin{bmatrix}0&0&t^2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}+\frac{1}{3!}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix}1&t&\frac{t^2}{2!}+t\\0&1&t\\0&0&1\end{bmatrix}$$

در این مثال به علت سادگی ماتریس فرم بسته ماتریس انتقال حالت به راحتی بدست آمد.

□

۶-۳-۳-۲- روش کیلی – هامیلتون

در این روش از کاربرد قضیه کیلی- هامیلتون در محاسبه توابع ماتریسی استفاده کرده و ماتریس انتقال حالت را بدست می آوریم.

مثال ۶-۲۶

برای ماتریس زیر ماتریس انتقال حالت را با روش کیلی- هامیلتون بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$$

ابتدا مقادیر ویژه ماتریس را محاسبه می کنیم،

$$Q(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 0\\ 0 & \lambda-2 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^3=0 \quad\rightarrow\quad \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$$

این ماتریس یک مقدار ویژه تکراری با مرتبه سه دارد. با توجه اینکه چندجمله ای مشخصه مرتبه سه است، باقیمانده حاصل از تقسیم بسط e^{At} بر $Q(\lambda)$ مرتبه دو خواهد بود،

$$R(\lambda)=c_2\lambda^2+c_1\lambda+c_0$$

حال مقدار c_2، c_1 و c_0 را بدست می آوریم،

$$\lambda_1=-1\rightarrow R(\lambda_1)=P(\lambda_1)=c_0+c_1\lambda_1+c_2\lambda_1^2\rightarrow e^{2t}=c_0+2c_1+4c_2$$

از آنجاییکه مقادیر ویژه تکراری هستند، لذا برای بدست آوردن معادلات دیگر از مشتقات $R(\lambda)$ استفاده می نماییم.

$$\dot{R}(\lambda)=2c_2\lambda+c_1\rightarrow\dot{R}(\lambda_1)=2c_2\lambda_1+c_1\rightarrow te^{2t}=4c_2+c_1$$
$$\ddot{R}(\lambda)=2c_2\rightarrow\ddot{R}(\lambda_1)=2c_2\rightarrow t^2e^{2t}=2c_2$$

لذا دستگاه معادلات بصورت زیر بدست می آید که با حل این دستگاه معادلات مقدار c_2، c_1 و c_0 بصورت زیر خواهد بود،

$$\begin{cases}e^{2t}=c_0+2c_1+4c_2\\ te^{2t}=c_1+4c_2\\ t^2e^{2t}=2c_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_0=e^{2t}-2te^{2t}+2t^2e^{2t}\\ c_1=te^{2t}-2t^2e^{2t}\\ c_2=\frac{1}{2}t^2e^{2t}\end{cases}$$

با توجه قضیه کیلی- هامیلتون می توان نوشت،

$$\mathbf{e}^{At}=c_0I+c_1A+c_2A^2=\begin{bmatrix}c_0 & 0 & 0\\ 0 & c_0 & 0\\ 0 & 0 & c_0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2c_1 & c_1 & 0\\ 0 & 2c_1 & c_1\\ 0 & 0 & 2c_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4c_2 & 4c_2 & c_2\\ 0 & 4c_2 & 4c_2\\ 0 & 0 & 4c_2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}^{At}=\begin{bmatrix}e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t}\\ 0 & e^{2t} & te^{2t}\\ 0 & 0 & e^{2t}\end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB می توان صحت جواب را بررسی نمود،

```
A =[2 1 0;0 2 1;0 0 2];
t = sym('t');
expm(A*t)
ans =
[        exp(2*t),        t*exp(2*t),   1/2*t^2*exp(2*t)]
[               0,          exp(2*t),          t*exp(2*t)]
[               0,                 0,            exp(2*t)]
```

□

مثال۶-۲۷

سیستم زیر را در نظر بگیرید،

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}-2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -3 & -4\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$$

ماتریس انتقال حالت را با استفاده از روشهای کیلی- همیلتون بدست آورید. پاسخ سیستم ها را بر حسب شرایط اولیه $x_1(0)$، $x_1(0)$ و $x_1(0)$ محاسبه کنید.

معادله مشخصه و مقادیر ویژه را بدست می آوریم،

$$Q(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+2 & 2 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 0 & 3 & \lambda+4\end{vmatrix}=0 \quad\rightarrow\quad \lambda_1=-1,\lambda_2=-2,\lambda_3=-3$$

لذا سه مقدار ویژه حقیقی و متمایز داریم. چندجمله ای مشخصه مرتبه سه است، پس چند جمله ای باقیمانده $R(\lambda)$ درجه دو خواهد بود،

$$R(\lambda)=c_0+c_1\lambda+c_2\lambda^2$$

$$N(\lambda_i)=R(\lambda_i)=c_0+c_1\lambda_i+c_2\lambda_i^{\,2} \quad\rightarrow\quad \begin{cases}\mathrm{e}^{-t}=c_0-c_1+c_2\\ \mathrm{e}^{-2t}=c_0-2c_1+4c_2\\ \mathrm{e}^{-3t}=c_0-3c_1+9c_2\end{cases}$$

با حل دستگاه معادلات بالا مقدار ضرایب c_0، c_1 و c_2 بدست می آید،

$$c_0=3\mathrm{e}^{-t}-3\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-3t}$$
$$c_1=\tfrac{5}{2}\mathrm{e}^{-t}-4\mathrm{e}^{-2t}+\tfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-3t}$$
$$c_2=\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}+\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}$$

ماتریس انتقال حالت بصورت زیر بدست می آید،

$$\Phi(t)=\exp[At]=c_0I+c_1A+c_2A^2$$

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix} c_0 & 0 & 0\\ 0 & c_0 & 0\\ 0 & 0 & c_0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -2c_1 & -2c_1 & 0\\ 0 & 0 & c_1\\ 0 & -3c_1 & -4c_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4c_2 & 4c_2 & -2c_2\\ 0 & -3c_2 & -4c_2\\ 0 & 12c_2 & 13c_2\end{bmatrix}$$

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix} e^{-2t} & -e^{-3t}+4e^{-2t}-3e^{-t} & -e^{-3t}+2e^{-2t}-e^{-t}\\ 0 & \frac{-1}{2}e^{-3t}+\frac{3}{2}e^{-t} & \frac{-1}{2}e^{-3t}+\frac{1}{2}e^{-t}\\ 0 & \frac{3}{2}e^{-3t}-\frac{3}{2}e^{-t} & \frac{3}{2}e^{-3t}-\frac{1}{2}e^{-t}\end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A=[-2-2 0;0 0 1;0-3-4];
t=sym('t');
expm(A*t)
ans=
[exp(-2*t),-exp(-3*t)+4*exp(-2*t)-3*exp(-t),-exp(-t)+exp(-3*t)+2*exp(-2*t)]
[        0,       -1/2*exp(-3*t)+3/2*exp(-t),     1/2*exp(-t)-1/2*exp(-3*t)]
[        0,        3/2*exp(-3*t)-3/2*exp(-t),    -1/2*exp(-t)+3/2*exp(-3*t)]
```

- پاسخ سیستم بر حسب شرایط اولیه $x_1(0)$، $x_1(0)$ و $x_1(0)$ بصورت زیر بدست می آید،

$$\mathbf{x}(t)=e^{At}\mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix} e^{-2t} & -e^{-3t}+4e^{-2t}-3e^{-t} & -e^{-3t}+2e^{-2t}-e^{-t}\\ 0 & \frac{-1}{2}e^{-3t}+\frac{3}{2}e^{-t} & \frac{-1}{2}e^{-3t}+\frac{1}{2}e^{-t}\\ 0 & \frac{3}{2}e^{-3t}-\frac{3}{2}e^{-t} & \frac{3}{2}e^{-3t}-\frac{1}{2}e^{-t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0)\\ x_2(0)\\ x_3(0)\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(0)[e^{-2t}]+x_2(0)[-e^{-3t}+4e^{-2t}-3e^{-t}]+x_3(0)[-e^{-3t}+2e^{-2t}-e^{-t}]\\ x_2(0)[\frac{-1}{2}e^{-3t}+\frac{3}{2}e^{-t}]+x_3(0)[\frac{-1}{2}e^{-3t}+\frac{1}{2}e^{-t}]\\ x_2(0)[\frac{3}{2}e^{-3t}-\frac{3}{2}e^{-t}]+x_3(0)[\frac{3}{2}e^{-3t}-\frac{1}{2}e^{-t}]\end{bmatrix}$$

□

مثال ۶-۲۸

معادلات سیستمی بصورت زیر می باشد،

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$$

اگر $\mathbf{u}(t)$ پله واحد و $\mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ باشند، $\mathbf{x}(t)$ و $\mathbf{y}(t)$ را بدست آورید.

ابتدا با استفاده از روش کیلی- هامیلتون ماتریس انتقال حالت سیستم را پیدا می کنیم،

$$Q(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 3 & \lambda+4\end{vmatrix}=\lambda^2+4\lambda+3=0 \quad\rightarrow\quad \lambda_1=-1,\lambda_2=-3$$

بدین ترتیب چندجمله ای مشخصه و مقادیر ویژه ماتریس حالت را بدست می آوریم، که دو مقدار ویژه متمایز و حقیقی دارد. با توجه اینکه چندجمله ای مشخصه مرتبه دو است، باقیمانده حاصل از تقسیم بسط $\Phi(t)=\mathrm{e}^{At}$ بر $Q(\lambda)$ مرتبه یک خواهد بود،

$$R(\lambda)=c_1\lambda+c_0$$

حال مقدار c_1 و c_0 را بدست می آوریم،

$$\lambda_1=-1\rightarrow R(\lambda_1)=P(\lambda_1)=c_0+c_1\lambda_1\rightarrow e^{-t}=c_0-c_1$$
$$\lambda_2=-3\rightarrow R(\lambda_2)=P(\lambda_2)=c_0+c_1\lambda_2\rightarrow e^{-3t}=c_0-3c_1$$

لذا با حل این دستگاه معادلات مقدار $c_1=\frac{1}{2}(e^{-t}-e^{-3t})$ و $c_0=\frac{1}{2}(3e^{-t}-e^{-3t})$ بدست می آید. با توجه قضیه کیلی- هامیلتون می توان نوشت،

$$P(A)=R(A)$$

$$\Phi(t)=\mathrm{e}^{At}=c_0I+c_1A=\begin{bmatrix}c_0 & 0\\ 0 & c_0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & c_1\\ -3c_1 & -4c_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_0 & c_1\\ -3c_1 & c_0-4c_1\end{bmatrix}$$

$$\Phi(t)=\mathrm{e}^{At}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3e^{-t}-e^{-3t} & e^{-t}-e^{-3t}\\ -3e^{-t}+3e^{-3t} & -e^{-t}+3e^{-3t}\end{bmatrix}$$

حال مقدار $\mathbf{x}(t)$ و $\mathbf{y}(t)$ را بدست می آوریم،

$$\mathrm{e}^{A(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0)=\mathrm{e}^{At}\mathbf{x}(0)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4e^{-t}-2e^{-3t}\\ -4e^{-t}+6e^{-3t}\end{bmatrix}$$

$$\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-A\tau}B\mathbf{u}(\tau)d\tau=\int_0^t\frac{1}{2}\begin{bmatrix}e^{\tau}-e^{3\tau}\\ -e^{\tau}+3e^{3\tau}\end{bmatrix}d\tau=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\frac{-2}{3}+e^{t}-\frac{1}{3}e^{3t}\\ -e^{t}+e^{3t}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t)=\mathrm{e}^{At}\mathbf{x}(0)+\mathrm{e}^{At}\int_0^t \mathrm{e}^{-A\tau}B\mathbf{u}(\tau)d\tau=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}+\frac{3}{2}e^{-t}-\frac{5}{6}e^{-3t}\\ \frac{-3}{2}e^{-t}+\frac{5}{2}e^{-3t}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)=\frac{1}{3}+\frac{3}{2}e^{-t}-\frac{5}{6}e^{-3t}$$

□

۶-۳-۳-۳- روش تبدیل لاپلاس

این روش مناسبی است که برای ماتریس هایی با مقادیر ویژه متمایز و مکرر، حقیقی و مختلط کاربرد دارد. معادله فضای حالت را در نظر بگیرید،

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t)+B\mathbf{u}(t)$$

با تبدیل لاپلاس گرفتن از طرفین آن معادله زیر بدست می آید،

$$s\mathbf{X}(s)-\mathbf{x}(0)=A\mathbf{X}(s)+B\mathbf{U}(s)$$

اگر معادله اخیر را برای $\mathbf{X}(s)$ حل کنیم و از طرفین عکس لاپلاس بگیریم داریم،

$$\mathbf{X}(s)=(sI-A)^{-1}\mathbf{x}(0)+(sI-A)^{-1}B\mathbf{U}(s) \qquad (۲۴-۶)$$

$$\mathbf{X}(s)=\Phi(s)\mathbf{x}(0)+\Phi(s)B\mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{x}(t)=\mathrm{L}^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\mathbf{x}(0)\right]+\mathrm{L}^{-1}\left[(sI-A)^{-1}B\mathbf{U}(s)\right] \qquad (۲۵-۶)$$

با شرط $t_0=0$ می توان نوشت،

$$\Phi(t)=\mathbf{e}^{At}=\mathrm{L}^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right] \qquad (۲۶-۶)$$

در رابطه بالا ماتریس $\Phi(s)=(sI-A)^{-1}$ یک ماتریس $n\times n$ است که عناصر آن توابعی از اپراتور لاپلاس s می باشند. لازم به ذکر است که $(sI-A)^{-1}$ همواره وجود دارد، چون $sI-A$ در حوزه ماتریس های چند جمله ای است و sI همیشه رتبه کامل است، پس مستقل از A ماتریس $sI-A$ همیشه معکوس پذیر است.

مثال ۶-۲۹

ماتریس زیر را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix}$$

ماتریس انتقال حالت آن را با استفاده از روش تبدیل لاپلاس بدست آورید.

نخست $(sI-A)^{-1}$ را بدست می آوریم،

$$(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}s & -1\\ 3 & s+4\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{s(s+4)+3}\begin{bmatrix}s+4 & 1\\ -3 & s\end{bmatrix}$$

برای محاسبه $\mathbf{e}^{At}$ باید عکس تبدیل لاپلاس هر یک از عناصر ماتریس اخیر را بدست آوریم،
لذا ماتریس انتقال حالت بدست می آید،

$$\mathrm{e}^{At}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t} & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}\\ \frac{-3}{2}\mathrm{e}^{-t}+\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-3t} & \frac{-1}{2}\mathrm{e}^{-t}+\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-3t}\end{bmatrix}$$

□

مثال۶-۳۰

سیستم زیر را در نظر بگیرید،

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 4\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$$

ابتدا ماتریس انتقال حالت را با استفاده از روش تبدیل لاپلاس بدست آورید، سپس پاسخ سیستم را برحسب شرایط اولیه $x_1(0)$، $x_1(0)$ و $x_1(0)$ محاسبه کنید.

- نخست $(sI-A)^{-1}$ را بدست می آوریم،

$$(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}s+1 & 0 & 0\\ 0 & s+4 & -4\\ 0 & 1 & s\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{1}{(s+1)(s+2)^2}\begin{bmatrix}(s+2)^2 & 0 & 0\\ 0 & s(s+1) & 4(s+1)\\ 0 & -(s+1) & (s+4)(s+1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{(s+2)}+\frac{-2}{(s+2)^2} & \frac{4}{(s+2)^2}\\ 0 & \frac{-1}{(s+2)^2} & \frac{1}{(s+2)}+\frac{2}{(s+2)^2}\end{bmatrix}$$

برای محاسبه $\mathbf{e}^{At}$ باید عکس تبدیل لاپلاس هر یک از عناصر ماتریس $(sI-A)^{-1}$ را بدست آوریم،

$$\mathrm{e}^{At}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t} & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-2t}-2t\mathrm{e}^{-2t} & 4t\mathrm{e}^{-2t}\\ 0 & -t\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-2t}+2t\mathrm{e}^{-2t}\end{bmatrix}$$

- پاسخ سیستم را بر حسب شرایط اولیه $x_1(0)$، $x_1(0)$ و $x_1(0)$ بصورت زیر بدست می آید،

$$\mathbf{x}(t)=\mathrm{e}^{At}\mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t} & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-2t}-2t\mathrm{e}^{-2t} & 4t\mathrm{e}^{-2t}\\ 0 & -t\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-2t}+2t\mathrm{e}^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\\ x_3(0)\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}x_1(0)\mathrm{e}^{-t}\\ x_2(0)[\mathrm{e}^{-2t}-2t\mathrm{e}^{-2t}]+4x_3(0)t\mathrm{e}^{-2t}\\ -x_2(0)t\mathrm{e}^{-2t}+x_3(0)[\mathrm{e}^{-2t}+2t\mathrm{e}^{-2t}]\end{bmatrix}$$

□

۶-۳-۳-۴- روش قطری سازی

در این روش از ایده قطری سازی ماتریس A استفاده می شود. برای تبدیل یک ماتریس به فرم قطری روش هایی مبتنی بر تبدیل های همانندی استفاده می گردد. همانطور که بیان گردید تبدیل های همانندی تابع تبدیل، قطب ها و صفرهای سیستم را تغییر نمی دهند، لذا باید به دنبال ماتریس تبدیلی بود که بتواند ماتریس حالت را به فرم قطری تبدیل نمایدو این همان **ماتریس مُدال** خواهد بود.

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t)+B\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t)=C\mathbf{x}(t)+D\mathbf{u}(t)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\dot{\mathbf{z}}(t)=\Lambda\mathbf{z}(t)+B_n\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t)=C_n\mathbf{z}(t)+D\mathbf{u}(t)\end{cases}\qquad(۲۷-۶)$$

$$\Lambda=T^{-1}AT$$
$$B_n=T^{-1}B$$
$$C_n=CT$$

طریقه بدست آوردن ماتریس مُدال در فصل قبل به تفصیل توضیح داده شده است.

حال با استفاده از روش قطری سازی ماتریس انتقال حالت بصورت زیر محاسبه می شود،

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{At}&=I+At+\frac{1}{2!}(At)^2+\frac{1}{3!}(At)^3+\cdots\\ &=I+(T\Lambda T^{-1})t+(T\Lambda T^{-1})(T\Lambda T^{-1})\frac{t^2}{2!}+(T\Lambda T^{-1})(T\Lambda T^{-1})(T\Lambda T^{-1})\frac{t^3}{3!}+\cdots\\ &=T(I+\Lambda t+\Lambda^2\frac{t^2}{2!}+\Lambda^3\frac{t^3}{3!}+\cdots)T^{-1}=T\mathrm{e}^{\Lambda t}T^{-1}\end{aligned}\qquad(۲۸-۶)$$

لذا ابتدا ماتریس مُدال T را بدست آمده سپس به ترتیب ماتریس های Λ، $e^{\Lambda t}$ و e^{At} محاسبه می گردد.

- ماتریس با مقادیر ویژه متمایز و حقیقی

اگر مقادیر ویژه یک ماتریس $A_{n\times n}$ متمایز باشند، بردارهای ویژه $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ مستقل خطی هستند. در اینصورت ماتریس مُدال T را بصورت زیر تعریف می کنیم،

$$T=[\mathbf{v}_1\,|\,\mathbf{v}_2\,|\cdots|\,\mathbf{v}_n]$$

و فرم قطری سازی شده ماتریس $A_{n\times n}$ بصورت زیر نمایش داده می شود،

$$\Lambda=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

لذا ماتریس $e^{\Lambda t}$ بصورت زیر بدست می آید،

$$\mathrm{e}^{\Lambda t}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\lambda_1 t} & & & 0\\ & \mathrm{e}^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathrm{e}^{\lambda_n t}\end{bmatrix} \qquad (۲۹\text{-}۶)$$

مثال۶-۳۱

ماتریس انتقال حالت را با استفاده از روش قطری سازی بدست آورید،

$$A=\begin{bmatrix}4 & 0 & 1\\ -1 & -6 & -2\\ 5 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

معادله مشخصه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I_3-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & 0 & -1\\ 1 & \lambda+6 & 2\\ -5 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=0 \quad\rightarrow\quad \lambda^3+2\lambda^2-29\lambda-30=0$$

با حل معادله مشخصه مقادیر ویژه بصورت زیر بدست می آیند،

$$\lambda^3+2\lambda^2-29\lambda-30=(\lambda+6)(\lambda+1)(\lambda-5)=0\rightarrow \quad \lambda_1=-6,\lambda_2=-1,\lambda_3=5$$

لذا ماتریس A سه مقدار ویژه متمایز و حقیقی دارد. حال می توان سه بردار ویژه مستقل خطی متناظر با هر یک از مقادیر ویژه بدست آورد.

$$\lambda_1=-6\rightarrow A\mathbf{v}_1=\lambda_1\mathbf{v}_1\rightarrow\begin{bmatrix}4&0&1\\-1&-6&-2\\5&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{21}\\v_{31}\end{bmatrix}=-6\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{21}\\v_{31}\end{bmatrix}\rightarrow\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=-1\rightarrow A\mathbf{v}_2=\lambda_2\mathbf{v}_2\rightarrow\begin{bmatrix}4&0&1\\-1&-6&-2\\5&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{12}\\v_{22}\\v_{32}\end{bmatrix}=-1\begin{bmatrix}v_{12}\\v_{22}\\v_{32}\end{bmatrix}\rightarrow\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}\frac{-1}{5}\\\frac{-9}{25}\\1\end{bmatrix}$$

$$\lambda_3=5\rightarrow A\mathbf{v}_3=\lambda_3\mathbf{v}_3\rightarrow\begin{bmatrix}4&0&1\\-1&-6&-2\\5&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{13}\\v_{23}\\v_{33}\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}v_{13}\\v_{23}\\v_{33}\end{bmatrix}\rightarrow\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}1\\\frac{-3}{11}\\1\end{bmatrix}$$

توجه کنید، از آنجائیکه $A(\alpha\mathbf{v}_i)=\lambda_i(\alpha\mathbf{v}_i)$ می باشد، یعنی مضارب اسکالر یک بردار ویژه نیز خود یک بردار ویژه است، لذا می توان مقدار α را چنان انتخاب کرد که ماتریس مُدال T حدالامکان ساده باشد. لذا ماتریس مُدال T بصورت زیر بدست می آید،

$$T=[\mathbf{v}_1\,|\,\mathbf{v}_2\,|\,\mathbf{v}_3]=\begin{bmatrix}0&\frac{-1}{5}&1\\1&\frac{-9}{25}&\frac{-3}{11}\\0&1&1\end{bmatrix}$$

حال می توان ماتریس قطری سازی شده را بدست آورد.

$$\Lambda=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}\frac{-4}{55}&1&\frac{19}{55}\\\frac{-5}{6}&0&\frac{5}{6}\\\frac{5}{6}&0&\frac{1}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&0&1\\-1&-6&-2\\5&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\frac{-1}{5}&1\\1&\frac{-9}{25}&\frac{-3}{11}\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6&0&0\\0&-1&0\\0&0&5\end{bmatrix}$$

همانطور که دیده می شود عناصر قطری ماتریس همان مقادیر ویژه ماتریس A هستند.

لذا ماتریس انتقال حالت بصورت زیر بدست می آید،

$$e^{At}=Te^{\Lambda t}T^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{5}&0&1\\\frac{-9}{25}&1&\frac{-3}{11}\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t}&0&0\\0&e^{-6t}&0\\0&0&e^{5t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{-5}{6}&0&\frac{5}{6}\\\frac{-4}{55}&1&\frac{19}{55}\\\frac{5}{6}&0&\frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}e^{-t}+\frac{5}{6}e^{5t}&0&\frac{1}{6}e^{5t}-\frac{1}{6}e^{-t}\\\frac{-4}{55}e^{-6t}+\frac{3}{10}e^{-t}-\frac{5}{22}e^{5t}&e^{-6t}&\frac{-1}{22}e^{5t}+\frac{19}{55}e^{-6t}-\frac{3}{10}e^{-t}\\\frac{-5}{6}e^{-t}+\frac{5}{6}e^{5t}&0&\frac{5}{6}e^{-t}+\frac{1}{6}e^{5t}\end{bmatrix}$$

□

مثال ۶-۳۲

ماتریس زیر را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}4 & 0 & 1\\ -1 & -6 & -2\\ 5 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

ماتریس انتقال حالت آن را با استفاده از روش قطری سازی بدست آورید.

مقادیر ویژه ماتریس A عبارتند از $\lambda_1=-6$، $\lambda_2=-1$ و $\lambda_3=5$. حال ماتریس مُدال را بدست می آوریم،

$$\lambda_1=-1\rightarrow A\mathbf{v}_1=\lambda_1\mathbf{v}_1\rightarrow\begin{bmatrix}4 & 0 & 1\\ -1 & -6 & -2\\ 5 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{21}\\ v_{31}\end{bmatrix}=-1\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{21}\\ v_{31}\end{bmatrix}\rightarrow\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}\frac{-1}{5}\\ \frac{-9}{25}\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=-6\rightarrow A\mathbf{v}_2=\lambda_2\mathbf{v}_2\rightarrow\begin{bmatrix}4 & 0 & 1\\ -1 & -6 & -2\\ 5 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{12}\\ v_{22}\\ v_{32}\end{bmatrix}=-6\begin{bmatrix}v_{12}\\ v_{22}\\ v_{32}\end{bmatrix}\rightarrow\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\lambda_3=5\rightarrow A\mathbf{v}_3=\lambda_3\mathbf{v}_3\rightarrow\begin{bmatrix}4 & 0 & 1\\ -1 & -6 & -2\\ 5 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{13}\\ v_{23}\\ v_{33}\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}v_{13}\\ v_{23}\\ v_{33}\end{bmatrix}\rightarrow\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}1\\ \frac{-3}{11}\\ 1\end{bmatrix}$$

لذا ماتریس مُدال T بصورت زیر بدست می آید،

$$T=[\mathbf{v}_1\,|\,\mathbf{v}_2\,|\,\mathbf{v}_3]=\begin{bmatrix}\frac{-1}{5} & 0 & 1\\ \frac{-9}{25} & 1 & \frac{-3}{11}\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

فرم قطری سازی شده ماتریس A بصورت زیر می باشد،

$$\Lambda=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}\frac{-5}{6} & 0 & \frac{5}{6}\\ \frac{-4}{55} & 1 & \frac{19}{55}\\ \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 0 & 1\\ -1 & -6 & -2\\ 5 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{-1}{5} & 0 & 1\\ \frac{-9}{25} & 1 & \frac{-3}{11}\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

لذا ماتریس انتقال حالت بصورت زیر بدست می آید،

$$e^{At}=Te^{\Lambda t}T^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{5} & 0 & 1\\ \frac{-9}{25} & 1 & \frac{-3}{11}\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t} & 0 & 0\\ 0 & e^{-6t} & 0\\ 0 & 0 & e^{5t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{-5}{6} & 0 & \frac{5}{6}\\ \frac{-4}{55} & 1 & \frac{19}{55}\\ \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix} \frac{1}{6}e^{-t}+\frac{5}{6}e^{5t} & 0 & \frac{1}{6}e^{5t}-\frac{1}{6}e^{-t} \\ \frac{-4}{55}e^{-6t}+\frac{3}{10}e^{-t}-\frac{5}{22}e^{5t} & e^{-6t} & \frac{-1}{22}e^{5t}+\frac{19}{55}e^{-6t}-\frac{3}{10}e^{-t} \\ \frac{-5}{6}e^{-t}+\frac{5}{6}e^{5t} & 0 & \frac{5}{6}e^{-t}+\frac{1}{6}e^{5t} \end{bmatrix}$$

□

مثال ۶-۳۳

سیستم نمایش داده شده با معادلات حالت زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -18 & -27 & -10 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t) \\ y(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

الف) معادله مشخصه و مقادیر ویژه ماتریس حالت آن را بدست آورید.

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 8 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 18 & 27 & \lambda+10 \end{vmatrix}=0 \quad \rightarrow \quad \lambda^3+10\lambda^2+27\lambda+18=0$$

مقادیر ویژه عبارتند از، $\lambda_1=-1$ و $\lambda_2=-3$ و $\lambda_3=-6$ ماتریس سه مقدار ویژه حقیقی و متمایز دارد پس می توان ماتریس حالت را بصورت قطری کامل تبدیل کرد.

ب) فرم قطری سازی شده معادلات حالت را بدست آورید.

برای قطری سازی باید ماتریس مدال را بدست آوریم، از آنجاییکه ماتریس حالت فرم همبسته دارد، لذا ماتریس مُدال به فرم وندرمند است،

$$T=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -6 \\ 1 & 9 & 36 \end{bmatrix}$$

فرم قطری سازی شده ماتریس حالت A بصورت زیر می باشد،

$$\Lambda=T^{-1}AT$$

$$\Lambda=\frac{-1}{30}\begin{bmatrix} -54 & -27 & -3 \\ 30 & 35 & 5 \\ -6 & -8 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -18 & -27 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -6 \\ 1 & 9 & 36 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

حال فرم قطری سازی شده معادلات حالت را بدست می آوریم،

$$B_n = T^{-1}B = \frac{-1}{30}\begin{bmatrix} -54 & -27 & -3 \\ 30 & 35 & 5 \\ -6 & -8 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{-1}{30}\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$C_n = CT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -6 \\ 1 & 9 & 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

معادلات قطری سازی شده به فرم زیر می باشد،

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = \Lambda \mathbf{z}(t) + B_n \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C_n \mathbf{z}(t) \end{cases}$$

د) ماتریس انتقال حالت e^{At} را محاسبه کنید.

ماتریس انتقال حالت با استفاده از فرم قطری سازی شده به شکل زیر بدست می آید.

$$e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -6 \\ 1 & 9 & 36 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-6t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -6 \\ 1 & 9 & 36 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{9}{5}e^{-t} - e^{-3t} + \frac{1}{5}e^{-6t} & \frac{9}{10}e^{-t} - \frac{7}{6}e^{-3t} + \frac{4}{15}e^{-6t} & \frac{1}{10}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t} + \frac{1}{15}e^{-6t} \\ \frac{-9}{5}e^{-t} + 3e^{-3t} - \frac{6}{5}e^{-6t} & \frac{-9}{10}e^{-t} + \frac{7}{2}e^{-3t} + \frac{-8}{5}e^{-6t} & \frac{-1}{10}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{-2}{5}e^{-6t} \\ \frac{9}{5}e^{-t} - 9e^{-3t} + \frac{36}{5}e^{-6t} & \frac{9}{10}e^{-t} - \frac{21}{2}e^{-3t} + \frac{48}{5}e^{-6t} & \frac{1}{10}e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-3t} + \frac{12}{5}e^{-6t} \end{bmatrix}$$

□

- ماتریس با مقادیر ویژه متمایز و مختلط مزدوج

برای ماتریس $A_{n\times n}$ با مقادیر ویژه متمایز و مختلط ماتریس تبدیل T و فرم قطری سازی شده بصورت زیر بدست می آید،

$$\mathrm{T} = [\mathrm{Re}\{\mathbf{v}_1\} \,|\, \mathrm{Im}\{\mathbf{v}_1\} \,|\, \mathrm{Re}\{\mathbf{v}_3\} \,|\, \mathrm{Im}\{\mathbf{v}_3\} \,|\, \cdots \,|\, \mathrm{Re}\{\mathbf{v}_m\} \,|\, \mathrm{Im}\{\mathbf{v}_m\} \,|\, \mathbf{v}_{m+2} \,|\, \cdots \,|\, \mathbf{v}_n]$$

$$\Lambda = T^{-1}AT$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \omega_1 \\ -\omega_1 & \sigma_1 \end{bmatrix} & & & & & \\ & \begin{bmatrix} \sigma_3 & \omega_3 \\ -\omega_3 & \sigma_3 \end{bmatrix} & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \begin{bmatrix} \sigma_m & \omega_m \\ -\omega_m & \sigma_m \end{bmatrix} & & \\ & 0 & & & \lambda_{m+2} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

در اینصورت ماتریس $e^{\Lambda t}$ بصورت زیر بدست می آید،

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\begin{bmatrix} \sigma_1 & \omega_1 \\ -\omega_1 & \sigma_1 \end{bmatrix} t} & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & e^{\begin{bmatrix} \sigma_1 & \omega_1 \\ -\omega_1 & \sigma_1 \end{bmatrix} t} & & & \\ & & & e^{\lambda_{m+2} t} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \qquad (۳۰-۶)$$

مثال ۶-۳۴

برای ماتریس های زیر ماتریس تبدیل قطری سازی و ماتریس انتقال حالت را بدست آورید،

الف) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

معادله مشخصه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 1 \\ 0 & \lambda+2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda^3 + 5\lambda^2 + 9\lambda + 6 = 0$$

پس از حل معادله مشخصه مقادیر ویژه بصورت زیر بدست می آیند،

$$\lambda^3+5\lambda^2+9\lambda+6=(\lambda+2)(\lambda^2+3\lambda+3)=0 \quad\rightarrow\quad \lambda_1=-2,\lambda_{2,3}=\tfrac{-3}{2}\pm j\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین ماتریس A یک مقدار ویژه حقیقی و دو مقدار ویژه مختلط مزدوج دارد. بردارهای ویژه متناظر با این مقادیر ویژه را بدست می آوریم،

$$\lambda_1=-2\rightarrow A\mathbf{v}_1=\lambda_1\mathbf{v}_1\rightarrow\begin{bmatrix}-1&2&-1\\0&-2&0\\1&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{21}\\v_{31}\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{21}\\v_{31}\end{bmatrix}\rightarrow\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=\tfrac{-3}{2}+j\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A\mathbf{v}_2=\lambda_2\mathbf{v}_2\rightarrow\begin{bmatrix}-1&2&-1\\0&-2&0\\1&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{12}\\v_{22}\\v_{32}\end{bmatrix}=(\tfrac{-3}{2}+j\tfrac{\sqrt{3}}{2})\begin{bmatrix}v_{12}\\v_{22}\\v_{32}\end{bmatrix}\rightarrow\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$$

$$\lambda_3=\tfrac{-3}{2}-j\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A\mathbf{v}_3=\lambda_3\mathbf{v}_3\rightarrow\begin{bmatrix}-1&2&-1\\0&-2&0\\1&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{13}\\v_{23}\\v_{33}\end{bmatrix}=(\tfrac{-3}{2}-j\tfrac{\sqrt{3}}{2})\begin{bmatrix}v_{13}\\v_{23}\\v_{33}\end{bmatrix}\rightarrow\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$$

لذا ماتریس تبدیل T بصورت زیر بدست می آید،

$$\mathrm{T}=[\mathbf{v}_1\,|\,\mathrm{Re}\{\mathbf{v}_2\}\,|\,\mathrm{Im}\{\mathbf{v}_2\}]=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\2&\frac{1}{2}&\frac{-\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$$

حال ماتریس قطری- بلوکی شده Λ را بدست می آوریم،

$$\Lambda=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{4}{\sqrt{3}}&\frac{-2}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&2&-1\\0&-2&0\\1&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\2&\frac{1}{2}&\frac{-\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|cc}-2&0&0\\\hline 0&\frac{-3}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&\frac{-\sqrt{3}}{2}&\frac{-3}{2}\end{array}\right]$$

حال باید ماتریس انتقال حالت را بیابیم،

$$\Lambda=T^{-1}AT=\left[\begin{array}{c|cc}-2&0&0\\\hline 0&\frac{-3}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&\frac{-\sqrt{3}}{2}&\frac{-3}{2}\end{array}\right]\quad\rightarrow\quad e^{\Lambda t}=\left[\begin{array}{c|c}e^{-2t}&0\\\hline 0&e^{\begin{bmatrix}\frac{-3}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{-\sqrt{3}}{2}&\frac{-3}{2}\end{bmatrix}t}\end{array}\right]$$

برای محاسبه $e^{\begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix} t}$ می توان از روش تبدیل لاپلاس استفاده نمود،

$$\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} s+\frac{3}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & s+\frac{3}{2} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}} \begin{bmatrix} s+\frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & s+\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

حال از یک یک درایه ها معکوس لاپلاس می گیریم،

$$L^{-1}\left(\begin{bmatrix} \frac{s+\frac{3}{2}}{(s+\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}} & \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}} \\ \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}} & \frac{s+\frac{3}{2}}{(s+\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} e^{\frac{-3}{2}t}\cos(\frac{3}{2}t) & e^{\frac{-3}{2}t}\sin(\frac{3}{2}t) \\ -e^{\frac{-3}{2}t}\sin(\frac{3}{2}t) & e^{\frac{-3}{2}t}\cos(\frac{3}{2}t) \end{bmatrix}$$

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{-3}{2}t}\cos(\frac{3}{2}t) & e^{\frac{-3}{2}t}\sin(\frac{3}{2}t) \\ 0 & -e^{\frac{-3}{2}t}\sin(\frac{3}{2}t) & e^{\frac{-3}{2}t}\cos(\frac{3}{2}t) \end{bmatrix}$$

نهایتاً مقدار e^{At} بدست می آید،

$$e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{-3}{2}t}\cos(\frac{3}{2}t) & e^{\frac{-3}{2}t}\sin(\frac{3}{2}t) \\ 0 & -e^{\frac{-3}{2}t}\sin(\frac{3}{2}t) & e^{\frac{-3}{2}t}\cos(\frac{3}{2}t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\frac{-3}{2}t}\cos(\frac{3}{2}t)+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{-3}{2}t}\sin(\frac{3}{2}t) & \frac{4}{\sqrt{3}}e^{\frac{-3}{2}t}\sin(\frac{3}{2}t) & \frac{-2}{\sqrt{3}}e^{\frac{-3}{2}t}\sin(\frac{3}{2}t) \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{\frac{-3}{2}t}\sin(\frac{3}{2}t) & 2e^{-2t}+\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{-3}{2}t}\sin(\frac{3}{2}t)-2e^{\frac{-3}{2}t}\cos(\frac{3}{2}t) & \frac{-1}{\sqrt{3}}e^{\frac{-3}{2}t}\sin(\frac{3}{2}t)+e^{\frac{-3}{2}t}\cos(\frac{3}{2}t) \end{bmatrix}$$

ب) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

ابتدا مقادیر ویژه، بردارهای ویژه و سپس فرم قطری سازی شده ماتریس A را بدست می آوریم،

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-4 & 2 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-6 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 12\lambda^2 + 46\lambda - 60 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 6, \lambda_{2,3} = 3 \pm j$$

از آنجاییکه یک مقدار ویژه حقیقی و دو مقدار ویژه مختلط مزدوج دارد، باید به فرم قطری بلوکی تبدیل گردد. فرم قطری بلوکی به صورت زیر است،

$$\Lambda = \left[\begin{array}{c|cc} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \sigma_2 & \omega_2 \\ 0 & -\omega_2 & \sigma_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} 6 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

حال ماتریس تبدیل همانندی را می یابیم که رابطه $\Lambda = T^{-1}AT$ را برآورده سازد. برای این منظور بردارهای ویژه نظیر هر یک از مقادیر ویژه را بدست می آوریم،

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda-4 & 2 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-6 \end{bmatrix} \mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 6 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3 + j \rightarrow \begin{bmatrix} -1+j & 2 & 0 \\ -1 & 1+j & 0 \\ 0 & 0 & -3+j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1+j \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 3 - j \rightarrow \begin{bmatrix} -1-j & 2 & 0 \\ -1 & 1-j & 0 \\ 0 & 0 & -3-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1-j \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

لذا ماتریس تبدیل T به شکل زیر خواهد بود،

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathrm{Re}\{\mathbf{v}_2\} & \mathrm{Im}\{\mathbf{v}_2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حال ماتریس انتقال حالت را بدست می آوریم،

$$\Lambda = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \quad e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{6t} & 0 \\ 0 & e^{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} t} \end{bmatrix}$$

برای محاسبه $e^{\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}t}$ می توان از روش تبدیل لاپلاس استفاده نمود،

$$\left(\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}s-3 & -1\\ 1 & s-3\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{(s-3)^2+1}\begin{bmatrix}s-3 & 1\\ -1 & s-3\end{bmatrix}$$

حال از یک یک درایه ها معکوس لاپلاس می گیریم،

$$L^{-1}\left(\begin{bmatrix}\dfrac{s-3}{(s-3)^2+1} & \dfrac{1}{(s-3)^2+1}\\ \dfrac{-1}{(s-3)^2+1} & \dfrac{s-3}{(s-3)^2+1}\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}e^{3t}\cos(t) & e^{3t}\sin(t)\\ -e^{3t}\sin(t) & e^{3t}\cos(t)\end{bmatrix}$$

$$e^{\Lambda t}=\begin{bmatrix}e^{6t} & 0 & 0\\ 0 & e^{3t}\cos(t) & e^{3t}\sin(t)\\ 0 & -e^{3t}\sin(t) & e^{3t}\cos(t)\end{bmatrix}$$

نهایتاً مقدار e^{At} بدست می آید،

$$e^{At}=Te^{\Lambda t}T^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{6t} & 0 & 0\\ 0 & e^{3t}\cos(t) & e^{3t}\sin(t)\\ 0 & -e^{3t}\sin(t) & e^{3t}\cos(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix}e^{3t}\cos(t)+e^{3t}\sin(t) & -2e^{3t}\sin(t) & 0\\ e^{3t}\sin(t) & e^{3t}\cos(t)-e^{3t}\sin(t) & 0\\ 0 & 0 & e^{6t}\end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A = [4  -2  0;1  2  0;0  0  6];
t = sym('t');
expm(A*t)
ans =
[ exp(3*t)*cos(t)+exp(3*t)*sin(t),                -2*exp(3*t)*sin(t),    0]
[                exp(3*t)*sin(t), exp(3*t)*cos(t)-exp(3*t)*sin(t),      0]
[                              0,                                 0,   exp(6*t)]
```

□

- ماتریس با مقادیر ویژه تکراری

زمانیکه ماتریس $A_{n\times n}$ دارای k مقدار ویژه تکراری باشد، برای بدست آوردن ماتریس تبدیل نیاز به بردارهای ویژه تعمیم یافته وجود دارد. با استفاده از این روش ماتریس به فرم کانونیکال جردن تبدیل می گردد،

$$J_{k\times k}=\begin{bmatrix} J_{P1} & & & & & & \\ & J_{P2} & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & J_{Pm} & & & \\ & & & & \lambda_{k+1} & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

که هر یک از J_{P_i}ها بلوک های جردن به فرم زیر هستند،

$$J_{P_i}=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}_{P_i\times P_i}$$

در اینصورت ماتریس انتقال حالت سیستم به شکل زیر محاسبه می شود،

$$e^{At}=Te^{Jt}T^{-1}$$

$$e^{Jt}=\left[\begin{array}{cccc:ccc} e^{J_{P1}t} & & & 0 & & & \\ & e^{J_{P2}t} & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & \\ 0 & & & e^{J_{P\alpha}t} & & & \\ \hdashline & & & & e^{\lambda_{k+1}t} & & 0 \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & 0 & & e^{\lambda_n t} \end{array}\right] \qquad (۳۱-۶)$$

و هر یک از $e^{J_{Pi}t}$ها بصورت زیر محاسبه می شوند،

$$e^{J_{P_i}t} = e^{\lambda_i t}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{Pi-1}}{(P_i-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{Pi-2}}{(P_i-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad (۳۲-۶)$$

مثال۶-۳۵

ماتریس زیر را در نظر بگیرید،

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

ماتریس انتقال حالت آن را با استفاده از روش قطری سازی بدست آورید.

مقادیر ویژه ماتریس A عبارتند از $\lambda_{1,2,3} = -1, \lambda_4 = 0$ و فرم کانونیکال جردن آن بصورت زیر است،

$$J = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حال می توان ماتریس انتقال حالت را بدست آورد،

$$e^{At} = Te^{Jt}T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-t} & -2+2e^{-t}+2te^{-t} & 1-e^{-t}+2te^{-t} \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t}+te^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & -te^{-t} & e^{-t}-te^{-t} \end{bmatrix}$$

در نرم افزار MATLAB داریم،

```
A = [0 1 0 3;0 - 1 1 1;0 0 0 1;0 0 - 1 - 2];
t = sym('t');
expm(A * t)
ans =
[ 1,      - exp(-t)+1,   2 * t * exp(-t)+ 2 * exp(-t)- 2,   2 * t * exp(-t)- exp(-t)+ 1]
[ 0,          exp(-t),                   t * exp(-t),                    t * exp(-t)]
[ 0,                0,           t * exp(-t)+ exp(-t),                    t * exp(-t)]
[ 0,                0,                 - t * exp(-t),       - t * exp(-t)+ exp(-t)]
```

□

مثال ۶-۳۶

ماتریس زیر را در نظر بگیرید،

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

ماتریس انتقال حالت آن را با استفاده از روش قطری سازی بدست آورید.

ابتدا مقادیر ویژه، بردارهای ویژه و سپس فرم قطری سازی شده ماتریس A را بدست می آوریم،

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -2 & -1 \\ 0 & \lambda-6 & -1 \\ 0 & 4 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-4)^3 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2,3} = 4$$

ماتریس یک مقدار ویژه حقیقی تکراری مرتبه سه دارد، باید به فرم قطری بلوکی جردن تبدیل گردد.

حال باید بدانیم چند تا بلوک جردن داریم،

$$\nu(\lambda_1 I - A) = n - \text{rank}(\lambda_1 I - A) = 3 - \text{rank}\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2$$

بعد فضای پوچی $(\lambda_1 I - A)$ برابر با ۲ است، پس دو بردار ویژه مستقل خطی متناظر با مقدار ویژه تکراری $\lambda_{1,2,3} = 4$ داریم. پس دو بلوک جردن در فرم قطری بلوکی جردن خواهیم داشت که به صورت زیر است،

$$J = \left[\begin{array}{cc:c} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \lambda_1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc:c} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

حال ماتریس تبدیل همانندی را می یابیم که رابطه $J = T^{-1}AT$ را برآورده سازد. لذا باید دو بردار ویژه مستقل خطی و یک بردار ویژه تعمیم یافته برای مقدار ویژه تکراری $\lambda_{1,2,3} = 4$ بدست آوریم،

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda-4 & -2 & -1 \\ 0 & \lambda-6 & -1 \\ 0 & 4 & \lambda-2 \end{bmatrix} \mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ابتدا دو بردار ویژه مستقل خطی $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ را بدست می آوریم،

$$\lambda_{1,2,3} = 4 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

سپس بردار ویژه تعمیم یافته φ_1 را محاسبه می کنیم،

$$(A - \lambda_1 I)\varphi_1 = \mathbf{v}_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \varphi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

لذا ماتریس تبدیل T به شکل زیر خواهد بود،

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \varphi_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس انتقال حالت با استفاده از فرم قطری بلوکی به شکل زیر بدست می آید،

$$e^{At} = Te^{Jt}T^{-1}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{4t} & te^{4t} & 0 \\ 0 & e^{4t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{4t} & 2te^{4t} & te^{4t} \\ 0 & 2te^{4t} + e^{4t} & te^{4t} \\ 0 & -4te^{4t} & -2te^{4t} + e^{4t} \end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[4 2 1;0 6 1;0 -4 2];
t = sym('t');
expm(A*t)
ans =
[ exp(4*t),          2*t*exp(4*t),            t*exp(4*t)]
[        0,  2*t*exp(4*t)+exp(4*t),            t*exp(4*t)]
[        0,         -4*t*exp(4*t), -2*t*exp(4*t)+exp(4*t)]
```

□

مسائل

۶-۱- برای ماتریس های زیر A^{-1}، $\sin(A)$ و e^{A} را با استفاده از قضیه کیلی- هامیلتون بیابید.

الف) $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ ب) $A=\begin{bmatrix}5 & 1\\ -2 & 2\end{bmatrix}$

۶-۲- نشان دهید که یک تحقق فضای حالت برای تابع تبدیل داده شده بصورت زیر است،

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_{n-1}s^{n-1}+b_{n-2}s^{n-2}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix}b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1}\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)\end{cases}$$

حال با استفاده از این تحقق یک نمایش فضای حالت برای توابع تبدیل زیر بدست آورید.

الف) $\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{s^2+1}{s^3+6s^2+11s+5}$ ب) $\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{s^2+3s+4}{s^4+s^2+2}$

۶-۳- برای ماتریس های زیر e^{At} را بدست آورید.

الف) $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}$ ب) $A=\begin{bmatrix}0 & -3 & 0\\ 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$

ج) $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ د) $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{bmatrix}$

۶-۴- پاسخ زمانی سیستم زیر را به دست آورید،

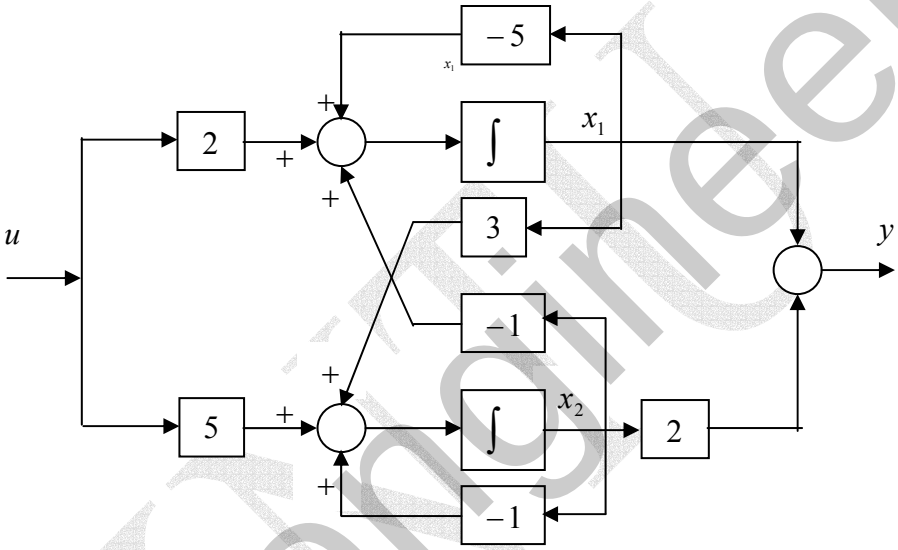
$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\mathbf{u}(t)$$

که در آن $u(t)$ تابع پله واحد است.

۶-۵- تابع تبدیل سیستمی زیر را بدست آورید،

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}-5 & -1\\ 3 & -1\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}2\\ 5\end{bmatrix}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$$

۶-۶- برای نمودار بلوکی زیر ابتدا با توجه به متغیرهای حالت تعریف شده معادلات فضای حالت سیستم را بیابید، سپس تابع سیستم را بدست آورید.



۶-۸- ماتریس انتقال حالت سیستم زیر را بدست آورید.

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0 & 3\\ 0 & -3 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -4\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$$

۶-۹- با استفاده از روش کیلی- هامیلتون حاصل چند جمله ای $P(A)$ را برای ماتریس A بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{bmatrix}$$
$$P(A)=A^4+2A^3+A^2-A+3I$$

۶-۷- نمایش فضای حالت سیستم های زیر را بدست آورید،

$$\dddot{y}(t)+3\ddot{y}(t)+4\dot{y}(t)+2y(t)=7u(t)$$

$$3\dddot{y}(t)+\ddot{y}(t)+\dot{y}(t)+2y(t)=6\dot{u}(t)+9u(t)$$

فصل هفتم

تجزیه مقادیر منفرد

۷-۱ مقدمه

این فصل به طور اختصاصی به تجزیه مقادیر منفرد ماتریس ها می پردازد. در ابتدای فصل تعریفی از مقادیر منفرد و نحوه محاسبه تجزیه مقادیر منفرد یک ماتریس و نگاشت حاصل از این تجزیه بررسی می گردد. سپس در رابطه با کاربردهای تجزیه مقادیر منفرد در محاسبه شبه معکوس و حل مسئله حداقل مربعات مثال های کاربردی و کدنویسی های مربوطه در MATLAB بیان می شود. در انتهای این فصل در مورد کاربرد تجزیه مقادیر ویژه در حذف نویز سیگنال ها و فشرده سازی داده های تصویری مثال های کاربردی آورده شده است.

۷-۲ مقادیر منفرد

برای ماتریس مختلط $A_{m\times n}$ ماتریس A^*A و AA^* یک ماتریس هرمیتی و مثبت معین است. اگر $m<n$ باشد، جذر مقادیر ویژه AA^* و اگر $m>n$ باشد جذر مقادیر ویژه A^*A را **مقادیر منفرد**[۱] ماتریس A می نامند. برای ماتریس حقیقی $A_{m\times n}$ جذر مقادیر ویژه ماتریس های متقارن A^TA و AA^T در نظر گرفته می شود.

مثال۷-۱

مقادیر منفرد ماتریس A را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ -1 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

از آنجائیکه ماتریس A حقیقی است، لذا مقادیر منفرد بصورت جذر مقادیر ویژه ماتریس AA^T تعریف می شود.

$$AA^T=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ -1 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & 1\\ 1 & 11\end{bmatrix}$$

حال مقادیر ویژه ماتریس AA^T را بدست می آوریم،

$$\left|\lambda I-AA^T\right|=\begin{vmatrix}\lambda-11 & -1\\ -1 & \lambda-11\end{vmatrix}=(\lambda-10)(\lambda-12)$$

لذا مقادیر ویژه ماتریس AA^T عبارتند از،

$$\lambda_1=12,\qquad \lambda_2=10$$

از این رو مقادیر منفرد برای ماتریس A بصورت زیر بدست می آیند،

$$\sigma_1=\sqrt{12},\qquad \sigma_2=\sqrt{10}$$

در نرم افزار MATLAB از دستور svd(A) برای محاسبه مقادیر منفرد ماتریس استفاده می شود،

```
A =[3 1 1;-1 3 1];
svd(A)
ans =
    3.4641
    3.1623
```

[۱] Singular Value

علاوه بر دستور svd(A) در نرم افزار MATLAB دستور های زیر نیز وجود دارند که هر یک عملکرد خاصی دارند،

svds(A) : حداکثر شش مقدار منفرد بزرگ ماتریس را ارائه می دهد.

svds(A,k) : k تا بزرگترین مقادیر منفرد ماتریس را می دهد.

svds(A,k,0) : k تا کوچکترین مقادیر منفرد ماتریس را می دهد.

به کاربرد دستور ها توجه نمایید،

```
A = magic(10);
svd(A)
ans =
  505.0000
  254.8589
  122.9542
   36.8347
   30.5167
   23.3508
   20.5153
    0.0000
    0.0000
    0.0000

svds(A)
ans =
  505.0000
  254.8589
  122.9542
   36.8347
   30.5167
   23.3508
```

```
svds(A,3)
ans =
  505.0000
  254.8589
  122.9542

svds(A,3,0)
ans =
  1.0e-013 *
    0.1470
    0.0527
    0.0166
```

□

۷-۲-۱- تعیین رتبه ماتریس

از جمله کاربردهای مقادیر منفرد تعیین رتبه ماتریس است. رتبه یک ماتریس برابر با تعداد مقادیر منفرد غیر صفر آن ماتریس است.

مثال ۷-۲

با توجه به مقادیر منفرد هر ماتریس رتبه آن را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

- برای ماتریس A داریم،

$$\left|\lambda I-A^T A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-6 & -1\\ -1 & \lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-7)(\lambda-5)\rightarrow \lambda_1=7, \qquad \lambda_2=5$$

مقادیر منفرد برای ماتریس A عبارتند از، $\sigma_1=\sqrt{7},\sigma_2=\sqrt{5}$ لذا رتبه ماتریس A دو است.

- برای ماتریس B داریم،

$$\left|\lambda I-B^T B\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -3\\ 0 & -4 & \lambda-1\end{vmatrix} \quad\rightarrow\quad \lambda_1=18, \quad \lambda_2=8, \quad \lambda_3=1$$

مقادیر منفرد ماتریس B عبارتند از، $\sigma_1=\sqrt{18},\sigma_2=\sqrt{8},\sigma_3=1$ لذا رتبه ماتریس B سه است.

□

۷-۲-۲- محاسبه نُرم دو و عدد حالت ماتریس

با توجه به مطالب فصل اول و دوم، نُرم دو و عدد حالت یک ماتریس بصورت زیر بدست می آیند،

$$\|A\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|A\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}}$$

که در آن $\lambda_{\max}$ بزرگترین مقدار عددی است، که سبب می شود ماتریس $A^T A - \lambda I$ منفرد گردد. در واقع $\lambda_{\max}$ همان بزرگترین مقدار ویژه ماتریس $A^T A$ است، لذا جذر آن بزرگترین مقدار منفرد ماتریس A خواهد بود. پس داریم،

$$\|A\|_2 = \sigma_{\max} \qquad (۱-۷)$$

از طرفی در تعریف عدد حالت یک ماتریس داریم،

$$\kappa = \|A\|\|A^{-1}\| \quad , \quad \kappa \geq 1$$

لذا عدد حالت را می توان بصورت زیر نیز بیان نمود،

$$\kappa = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} \quad , \quad \kappa \geq 1 \qquad (۲-۷)$$

می دانیم اگر عدد حالت مقدار خیلی بزرگی باشد بیانگر آن است که ماتریس نزدیک به منفرد شدن است، لذا آن ماتریس را بد حالت می نامند و خطای محاسباتی در معکوس کردن ماتریس A زیاد است.

مثال ۷-۳

عدد حالت ماتریس زیر را بیابید و بد حالت بودن آن را بررسی نمایید.

$$A = \begin{bmatrix} 93.477 & 10.202 & -28.832 \\ 1.963 & 32.816 & 62.414 \\ 26.821 & 36.816 & 57.234 \end{bmatrix}$$

ابتدا مقادیر منفرد ماتریس را بدست می آوریم،

$$\sigma_1 = 100.0004, \quad \sigma_2 = 100.0000, \quad \sigma_3 = 0.0002$$

حال عدد حالت را حساب می کنیم،

$$\kappa_A = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{100.0004}{0.0002} = 5.2164 \times 10^5 >> 1$$

عدد شرطی مقدار بسیار بزرگی است، لذا ماتریس A بد حالت و نزدیک به منفرد شدن است.

□

مثال ۷-۴

با محاسبه عدد حالت، ماتریس های زیر را براساس درجه ill conditioning مرتب کنید.

$$A=\begin{bmatrix}100 & 0 & -100\\ 0 & 100 & -100\\ -100 & -100 & 300\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1 & 8 & -1\\ -9 & -71 & 11\\ 1 & 17 & 18\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1 & 22 & -42\\ 0 & 1 & -45\\ -45 & -948 & 1\end{bmatrix}$$

برای ماتریس A داریم،

$$\sigma_1=373.2051 \quad , \quad \sigma_2=100.0000 \quad , \quad \sigma_3=26.7949$$

$$\kappa_A=\frac{\sigma_1}{\sigma_3}=\frac{373.2051}{26.7949}=13.9282$$

ماتریس A خوش حالت یا well condition است.

برای ماتریس B داریم،

$$\sigma_1=74.3164 \quad , \quad \sigma_2=20.0016 \quad , \quad \sigma_3=0.0007$$

$$\kappa_B=\frac{\sigma_1}{\sigma_3}=\frac{74.3164}{0.0007}=1.1047\times10^5>>1$$

برای ماتریس C داریم،

$$\sigma_1=949.3256 \quad , \quad \sigma_2=61.5297 \quad , \quad \sigma_3=0.00000017$$

$$\kappa_C=\frac{\sigma_1}{\sigma_3}=\frac{949.3256}{0.00000017}=5.5452\times10^7>>1$$

با توجه به عدد حالت بدست آمده هر یک از ماتریس های C و B به شدت بد حالت هستند.

□

مثال ۷-۵

ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 4\\ -4 & 0 & 3\\ 0 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

الف) اگر برای ماتریس A نگاشت $A\mathbf{x}=\mathbf{y}$ را در نظر بگیریم، رابطه ای بین مؤلفه های بردار $\mathbf{x}$ بیابید که $\frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\|}=\sqrt{17}$ گردد.

ب) آیا می توان بردار $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ بدست آورد که $\frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\|}=\sqrt{50}$ گردد؟ چرا؟

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} \quad \rightarrow \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 + 4x_3 \\ -4x_1 + 3x_3 \\ 3x_2 \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{y}\| = \sqrt{(3x_1 + 4x_3)^2 + (-4x_1 + 3x_3)^2 + (3x_2)^2}$$

$$\frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\sqrt{(3x_1 + 4x_3)^2 + (-4x_1 + 3x_3)^2 + (3x_2)^2}}{\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2}} = \sqrt{17}$$

$$25x_1^2 + 25x_2^2 + 9x_3^2 = 17x_1^2 + 17x_2^2 + 17x_3^2 \quad \rightarrow \quad x_1^2 + x_3^2 = x_2^2$$

بنابراین رابطه بین مؤلفه های بردار $\mathbf{x}$ بدست می آید.

- با توجه به مقدار مقادیر منفرد ماتریس A رابطه زیر را داریم،

$$\sigma_3 \le \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le \sigma_1 \quad \rightarrow \quad 3 \le \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le 5$$

لذا حداکثر بزرگنمایی نگاشت $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ برابر با $\sigma_1 = 5$ است و $\sqrt{50} > 5$ می باشد، پس رابطه $\frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \sqrt{50}$ برقرار نمی باشد.

□

مثال ۷-۶

ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الف) نشان دهید به ازای $\varepsilon = 0$ ماتریس A یک ماتریس منفرد است.

به ازای $\varepsilon = 0$ رتبه ماتریس A را بررسی می نماییم،

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{rank}(A) = 2$$

لذا با توجه به نقص رتبه، ماتریس A به ازای $\varepsilon = 0$ یک ماتریس منفرد است.

ب) برای $\varepsilon = 1$ مقدار A^{-1} و κ را بدست آورید و نشان دهید $\kappa = \|A\| \ \|A^{-1}\|$ است.

به ازای $\varepsilon = 1$ ماتریس معکوس را بدست می آوریم،

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{rank}(A) = 3, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

برای محاسبه عدد حالت مقادیر منفرد ماتریس A را بدست می آوریم،

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I - A^T A\right| = \begin{vmatrix} \lambda - 6 & -1 & -5 \\ -1 & \lambda - 2 & -2 \\ -5 & -2 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = 11.0101, \lambda_2 = 1.9432, \lambda_3 = 0.0467$$

$$\sigma_1 = \sqrt{11.0101} \quad , \quad \sigma_2 = \sqrt{1.9432} \quad , \quad \sigma_3 = \sqrt{0.0467}$$

$$\kappa_A = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{\sqrt{11.0101}}{\sqrt{0.0467}} = 15.3478$$

با توجه به تعریفی که برای نُرم داشتیم بصورت زیر می توان نوشت،

$$\|A\| = \sigma_1 , \quad \|A^{-1}\| = \frac{1}{\sigma_3} \quad \rightarrow \quad \kappa_A = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \|A\| \|A^{-1}\|$$

ج) نشان دهید که به ازای مقادیر بسیار کوچک(غیر صفر) ε، مثلاً $\varepsilon = 0.0001$ معادله $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ یک سیستم بد حالت است. برای این منظور جواب معادله را برای بردار $\mathbf{b} = [1.1 \quad 1 \quad 1]^T$ بررسی کنید.

به ازای $\varepsilon = 0.0001$ عدد حالت ماتریس A را بدست می آوریم،

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1.0001 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0001 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.0002 & 0.0001 & 3.0002 \\ 0.0001 & 2 & 2 \\ 3.0002 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I - A^T A\right| = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 7.6460, \lambda_2 = 2.3542, \lambda_3 = 0.00000000055555$$

$$\sigma_1 = 2.7651 \quad , \quad \sigma_2 = 1.5343 \quad , \quad \sigma_3 = 0.00002357$$

$$\kappa_A = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{2.7651}{0.00002357} = 1.1732 \times 10^5 >> 1$$

با توجه به عدد حالت بزرگی که ماتریس A دارد، معادله $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ یک سیستم بد حالت است.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1.0001 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1.0001 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1000.0 \\ 999.0 \\ -999.0 \end{bmatrix}$$

مشخص است سیستم به دلیل بد حالت بودن نسبت به تغییرات هر چند کوچک در بردار $\mathbf{b}$ بسیار حساس است.

□

۷-۳ تجزیه ماتریس ها بر اساس مقادیر منفرد

یکی از مهمترین روشهای تجزیه ماتریس ها **تجزیه بر اساس مقادیر منفرد**[۱] است. در این روش یک ماتریس مانند $A_{m\times n}$ با رتبه k را می توان بصورت زیر تجزیه کرد،

$$A = U\Sigma V^T \tag{۷-۳}$$

که در آن $U_{m\times m} = [\mathbf{u}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_m]$ و $V_{n\times n} = [\mathbf{v}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n]$ ماتریس های متعامد هستند.

ستون های ماتریس $U_{m\times m}$ از بردارهای ویژه یکامتعامد ماتریس AA^T و ستون های ماتریس $V_{n\times n}$ از بردارهای ویژه یکامتعامد ماتریس A^TA تشکیل می شوند و $\Sigma_{m\times n}$ یک ماتریس قطری است که عناصر روی قطر آن مقادیر منفرد غیر صفر ماتریس AA^T یا A^TA می باشند،

$$\begin{aligned} &\Sigma_{m\times n} = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_p) \quad , \quad p = \min\{m, n\} \\ &\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_k > 0 \quad , \quad \sigma_{k+1} = \cdots = \sigma_p = 0 \end{aligned} \tag{۷-۴}$$

در اینجا σ_1 و σ_k به ترتیب بزرگترین و کوچکترین مقادیر منفرد غیرصفر ماتریس A هستند.

[۱] Singular Value Decomposition (SVD)

مثال۷-۷

ماتریس A داده شده را توسط مقادیر منفرد تجزیه نمایید.

$$A_{2\times 3}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ -1 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

باید ماتریس $A_{2\times 3}$ را بصورت $A=U\Sigma V^T$ تجزیه کنیم. برای بدست آوردن ماتریس $U_{2\times 2}$ باید بردارهای ویژه یکامتعامد ماتریس AA^T را بیابیم.

$$A^T=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}\rightarrow AA^T=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ -1 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & 1\\ 1 & 11\end{bmatrix}$$

ابتدا مقادیر ویژه ماتریس AA^T را بدست می آوریم،

$$\left|\lambda I_2-AA^T\right|=\begin{vmatrix}\lambda-11 & -1\\ -1 & \lambda-11\end{vmatrix}=(\lambda-12)(\lambda-10)$$

لذا مقادیر ویژه ماتریس AA^T عبارتند از،

$$\lambda_1=12,\qquad \lambda_2=10$$

ماتریس AA^T دو مقدار ویژه حقیقی و متمایز دارد. حال بردارهای ویژه متناظر با هر یک از آنها را بدست می آوریم،

$$(AA^T-\lambda_1 I_2)\mathbf{u}_1=\mathbf{0}\rightarrow\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11}\\ u_{21}\end{bmatrix}=\mathbf{0}\rightarrow\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$(AA^T-\lambda_2 I_2)\mathbf{u}_2=\mathbf{0}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{12}\\ u_{22}\end{bmatrix}=\mathbf{0}\rightarrow\mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

می توان با اعمال فرآیند گرام- اشمیت این دو بردار را بصورت یکامتعامد تبدیل کرد. لذا ماتریس $U_{2\times 2}$ بشکل زیر بدست می آید،

$$U=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

ماتریس $V_{3\times 3}$ نیز باید از بردارهای ویژه یکامتعامد ماتریس A^TA بدست آید. مقادیر ویژه ماتریس A^TA عبارتند از،

$$\lambda_1=12,\qquad \lambda_2=10,\qquad \lambda_3=0$$

ماتریس $A^T A$ سه مقدار ویژه حقیقی و متمایز دارد. حال بردارهای ویژه متناظر با هر یک از آنها را بدست می آوریم،

$$(A^T A-\lambda_1 I_3)\mathbf{v}_1=\mathbf{0}\rightarrow\begin{bmatrix}-2&0&2\\0&-2&4\\2&4&-10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{21}\\v_{31}\end{bmatrix}=\mathbf{0}\rightarrow\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$$

$$(A^T A-\lambda_2 I_3)\mathbf{v}_2=\mathbf{0}\rightarrow\begin{bmatrix}0&0&2\\0&0&4\\2&4&-8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{12}\\v_{22}\\v_{32}\end{bmatrix}=\mathbf{0}\rightarrow\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}$$

$$(A^T A-\lambda_3 I_3)\mathbf{v}_3=\mathbf{0}\rightarrow\begin{bmatrix}10&0&2\\0&10&4\\2&4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{13}\\v_{23}\\v_{33}\end{bmatrix}=\mathbf{0}\rightarrow\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}1\\2\\-5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1&\mathbf{v}_2&\mathbf{v}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&-1&2\\1&0&-5\end{bmatrix}$$

با اعمال فرآیند یکامتعامد سازی گرام- اشمیت بردارهای ویژه یکامتعامد را می توان بدست آورد. لذا، ماتریس $V_{3\times3}$ بصورت زیر بدست می آید،

$$V=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt6}&\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt{30}}\\\frac{2}{\sqrt6}&\frac{-1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt{30}}\\\frac{1}{\sqrt6}&0&\frac{-5}{\sqrt{30}}\end{bmatrix}$$

نهایتاً ماتریس $\Sigma_{2\times3}$ با استفاده از مقادیر منفرد محاسبه شده بصورت زیر بدست می آید،

$$\Sigma_{2\times3}=\begin{bmatrix}\sigma_1&0&0\\0&\sigma_2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{12}&0&0\\0&\sqrt{10}&0\end{bmatrix}$$

بنابراین، تجزیه به مقادیر منفرد ماتریس A بشکل زیر بدست می آید،

$$A=U\Sigma V^T=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{-1}{\sqrt2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{12}&0&0\\0&\sqrt{10}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt6}&\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{2}{\sqrt5}&\frac{-1}{\sqrt5}&0\\\frac{1}{\sqrt{30}}&\frac{2}{\sqrt{30}}&\frac{-5}{\sqrt{30}}\end{bmatrix}$$

در نرم افزار MATLAB از دستور [U,S,V]=svd(A) برای بدست آوردن ماتریس های تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A استفاده می شود. به اجرای دستور توجه نمایید،

```
A =[3 1 1;-1 3 1];
[U,S,V]= svd(A)
U =
    0.7071    0.7071
    0.7071   -0.7071
S =
    3.4641         0         0
         0    3.1623         0
V =
    0.4082    0.8944    0.1826
    0.8165   -0.4472    0.3651
    0.4082   -0.0000   -0.9129
```

□

مثال ۷-۸

ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}3&0&4\\-4&0&3\\0&3&0\end{bmatrix}$$

تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A را بیابید.

- ابتدا ماتریس U را بدست می آوریم،

$$AA^T=\begin{bmatrix}3&0&4\\-4&0&3\\0&3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-4&0\\0&0&3\\4&3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25&0&0\\0&25&0\\0&0&9\end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I-AA^T\right|=\begin{vmatrix}\lambda-25&0&0\\0&\lambda-25&0\\0&0&\lambda-9\end{vmatrix}=0\quad\rightarrow\quad\lambda_{1,2}=25,\lambda_3=9$$

ماتریس AA^T دو مقدار ویژه حقیقی تکراری و یک مقدار ویژه حقیقی متمایز دارد. ابتدا بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه تکراری را بدست می آوریم.

از آنجاییکه $n-\text{rank}(AA^T-\lambda_1 I)=3-1=2$ است، لذا برای مقدار ویژه تکراری $\lambda_{1,2}=25$ دو بردار ویژه مستقل خطی داریم و نیازی به بدست آوردن بردار ویژه تعمیم یافته نیست،

$$(AA^T-\lambda_1 I)\mathbf{u}_1=\mathbf{0}\rightarrow\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11}\\u_{21}\\u_{31}\end{bmatrix}=\mathbf{0}\rightarrow\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$(AA^T-\lambda_3 I)\mathbf{u}_3=\mathbf{0}\rightarrow\begin{bmatrix}16&0&0\\0&16&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{13}\\u_{23}\\u_{33}\end{bmatrix}=\mathbf{0}\rightarrow\mathbf{u}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

چون نُرم بردارهای ویژه یک است، لذا نیازی به یکامتعامد سازی نداریم. بنابراین ماتریس $U_{3\times3}$ بصورت زیر بدست می آید،

$$U=\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1&\mathbf{u}_2&\mathbf{u}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

- حال ماتریس V را بدست می آوریم،

$$A^TA=\begin{bmatrix}3&-4&0\\0&0&3\\4&3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0&4\\-4&0&3\\0&3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25&0&0\\0&9&0\\0&0&25\end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I-A^TA\right|=\begin{vmatrix}\lambda-25&0&0\\0&\lambda-9&0\\0&0&\lambda-25\end{vmatrix}=0\quad\rightarrow\quad\lambda_{1,2}=25,\lambda_3=9$$

ماتریس A^TA دو مقدار ویژه حقیقی تکراری و یک مقدار ویژه حقیقی متمایز دارد. ابتدا بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه تکراری را بدست می آوریم.

از آنجاییکه $n-\text{rank}(A^TA-\lambda_1 I)=3-1=2$ است، لذا برای مقدار ویژه تکراری $\lambda_{1,2}=25$ دو بردار ویژه مستقل خطی داریم و نیازی به بدست آوردن بردار ویژه تعمیم یافته نیست،

$$(A^TA-\lambda_1 I)\mathbf{v}_1=\mathbf{0}\rightarrow\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-16&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{21}\\v_{31}\end{bmatrix}=\mathbf{0}\rightarrow\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}0.6\\0\\0.8\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}-0.8\\0\\0.6\end{bmatrix}$$

$$(A^TA-\lambda_3 I)\mathbf{v}_3=\mathbf{0}\rightarrow\begin{bmatrix}16&0&0\\0&0&0\\0&0&16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{13}\\v_{23}\\v_{33}\end{bmatrix}=\mathbf{0}\rightarrow\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس $V_{3\times3}$ بصورت زیر بدست می آید و باز هم نیازی به یکامتعامد سازی نداریم،

$$V=\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.6 & -0.8 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0.8 & 0.6 & 0\end{bmatrix}$$

لذا تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A به شکل زیر بدست می آید،

$$A=U\Sigma V^T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.6 & 0 & 0.8\\ -0.8 & 0 & 0.6\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

زمانیکه ماتریس A^TA یک ماتریس قطری باشد، می توان روش ساده تری بصورت زیر در نظر گرفت،

$$A^TA=\begin{bmatrix}3 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 3\\ 4 & 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0 & 4\\ -4 & 0 & 3\\ 0 & 3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 25\end{bmatrix}$$

$$\sigma_1=5 \quad , \quad \sigma_2=3 \quad , \quad \sigma_3=5$$

چون A^TA یک ماتریس قطری است، می توان $V=I$ انتخاب کرد، با این کار فقط محاسبه ماتریس U را داریم که آن هم بسیار ساده است،

$$A=U\Sigma V^T \quad\rightarrow\quad AV=U\Sigma \quad\rightarrow\quad AV\Sigma^{-1}=U \quad\rightarrow\quad A\mathbf{v}_i\frac{1}{\sigma_i}=\mathbf{u}_i$$

$$\begin{cases}\mathbf{u}_1=\dfrac{1}{\sigma_1}A\mathbf{v}_1=\dfrac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & 0 & 4\\ -4 & 0 & 3\\ 0 & 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.6\\-0.8\\0\end{bmatrix}\\[2ex] \mathbf{u}_2=\dfrac{1}{\sigma_2}A\mathbf{v}_2=\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}3 & 0 & 4\\ -4 & 0 & 3\\ 0 & 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad U=\begin{bmatrix}0.6 & 0 & 0.8\\ -0.8 & 0 & 0.6\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\\[2ex] \mathbf{u}_3=\dfrac{1}{\sigma_3}A\mathbf{v}_3=\dfrac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & 0 & 4\\ -4 & 0 & 3\\ 0 & 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.8\\0.6\\0\end{bmatrix}\end{cases}$$

لذا تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A با رعایت چینش مقادیر منفرد از بزرگترین مقدار تا کوچکترین مقدار به شکل زیر بدست می آید،

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 \\ -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[3 0 4;-4 0 3;0 3 0];
[U,S,V]= svd(A)
U =
    0.6000    0.8000         0
   -0.8000    0.6000         0
         0         0    1.0000
S =
     5     0     0
     0     5     0
     0     0     3
V =
     1     0     0
     0     0     1
     0     1     0
```

□

۷-۳-۱- تعیین زیر فضاهای اساسی ماتریس

فرم گسترده تجزیه مقادیر منفرد بصورت زیر می باشد،

$$AV = U\Sigma \quad \rightarrow \quad A\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i \qquad (۵-۷)$$

یعنی هر بردار $\mathbf{v}_i$ به یک بردار متناظر مانند $\mathbf{u}_i$ نگاشت می شود، که اندازه این نگاشت برابر با σ_i است.

$$\mathbf{v}_i \longrightarrow \boxed{A} \longrightarrow \sigma_i \mathbf{u}_i$$

$\mathbf{u}_i$ و $\mathbf{v}_i$ به ترتیب **بردارهای منفرد چپ و راست**[۱] نامیده می شود. با در نظر گرفتن مقادیر منفرد صفر ماتریس $A_{m\times n}$، تجزیه مقادیر ویژه را می توان بصورت زیر نمایش داد،

$$A = U\Sigma V^T$$

[۱] Left and Right Singular Vectors

$$A=\left[\underbrace{u_1 \quad \cdots \quad u_k}_{Basis\ for\ R(A)} \,\middle|\, \underbrace{u_{k+1} \quad \cdots \quad u_m}_{Basis\ for\ N(A^T)}\right]\left[\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \sigma_k & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right]\left[\underbrace{v_1 \quad \cdots \quad v_k}_{Basis\ for\ R(A^T)} \,\middle|\, \underbrace{v_{k+1} \quad \cdots \quad v_n}_{Basis\ for\ N(A)}\right]^T$$

بر روی تجزیه حاصل بردارهای پایه هر یک از چهار زیر فضای اصلی ماتریس مشخص شده اند. این موضوع را می توان بصورت زیر ثابت کرد،

$$A=\mathbf{u}_i\sigma_i\mathbf{v}_i^T$$

- برای $i=1,\ldots,k$ داریم،

$$A\mathbf{v}_i=\mathbf{u}_i\sigma_i\neq\mathbf{0} \quad\rightarrow\quad \mathbf{u}_i\in R(A)$$
$$\mathbf{u}_i^T A=\sigma_i\mathbf{v}_i^T\neq\mathbf{0}\rightarrow A^T\mathbf{u}_i=\sigma_i\mathbf{v}_i\neq\mathbf{0} \quad\rightarrow\quad \mathbf{v}_i\in R(A^T)$$

- برای $i=k+1,\ldots,m$ داریم،

$$\mathbf{u}_i^T A=\sigma_i\mathbf{v}_i^T=\mathbf{0}\rightarrow A^T\mathbf{u}_i=\mathbf{0} \quad\rightarrow\quad \mathbf{u}_i\in N(A^T)$$
$$A\mathbf{v}_i=\mathbf{u}_i\sigma_i=\mathbf{0} \quad\rightarrow\quad \mathbf{v}_i\in N(A)$$

ماتریس A به مانند تبدیلی است که فضای سطرها $R(A^T)$ را به فضای ستون ها $R(A)$ و فضای پوچی $N(A)$ را به فضای پوچی چپ $N(A^T)$ می نگارد.

مثال ۷-۹

با استفاده از تجزیه مقادیر منفرد پایه های چهار زیر فضای اساسی ماتریس A را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & -7 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & -9 & 5 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

تجزیه مقادیر منفرد ماتریس بصورت زیر است،

$$A=U\Sigma V^T$$

$$U=\left[\begin{array}{ccc|c} 0.1815 & -0.8445 & 0.2953 & 0.4082 \\ 0.4784 & -0.2043 & 0.2504 & -0.8165 \\ 0.7753 & 0.4359 & 0.2055 & 0.4082 \\ \underbrace{0.3701 \quad -0.2347 \quad -0.8988}_{R(A)} & & & \underbrace{0.0000}_{N(A^T)} \end{array}\right]$$

$$\Sigma = \left[\begin{array}{ccc|cc} 18.2244 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8.3717 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8875 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0.0000 & 0 \end{array}\right]$$

$$V = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0.0788 & -0.0732 & 0.8463 & -0.5050 & 0.1313 \\ 0.4085 & -0.2240 & 0.2457 & 0.6504 & 0.5473 \\ -0.7383 & 0.3748 & 0.3548 & 0.4331 & 0.0307 \\ 0.3421 & 0.0302 & 0.3110 & 0.3596 & -0.8100 \\ \underbrace{-0.4059 \quad -0.8961 \quad 0.0283}_{R(A^T)} & & & \underbrace{0.0719 \quad -0.1620}_{N(A)} & \end{array}\right]$$

دقت کنید در اینجا ماتریس V را داریم، اگر ماتریس V^T را داشتیم بردارهای پایه را بصورت زیر باید انتخاب می کردیم و ترانهاده بردارهای سطری هر بخش را در نظر می گرفتیم.

$$V^T = \left[\begin{array}{ccccc} 0.0788 & 0.4085 & -0.7383 & 0.3421 & -0.4059 \\ -0.0732 & -0.2240 & 0.3748 & 0.0302 & -0.8961 \\ 0.8463 & 0.2457 & 0.3548 & 0.3110 & 0.0283 \\ \hline -0.5050 & 0.6504 & 0.4331 & 0.3596 & 0.0719 \\ 0.1313 & 0.5473 & 0.0307 & -0.8100 & -0.1620 \end{array}\right]$$

لذا چهار زیرفضای اساسی ماتریس را بصورت زیر می توان بیان نمود،

$$R(A) = sp\left\{\begin{bmatrix} 0.1815 \\ 0.4784 \\ 0.7753 \\ 0.3701 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.8445 \\ -0.2043 \\ 0.4359 \\ -0.2347 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.2953 \\ 0.2504 \\ 0.2055 \\ -0.8988 \end{bmatrix}\right\}, \quad N(A^T) = sp\left\{\begin{bmatrix} 0.4082 \\ -0.8165 \\ 0.4082 \\ 0.0000 \end{bmatrix}\right\}$$

$$R(A^T) = sp\left\{\begin{bmatrix} 0.0788 \\ 0.4085 \\ -0.7383 \\ 0.3421 \\ -0.4059 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.0732 \\ -0.2240 \\ 0.3748 \\ 0.0302 \\ -0.8961 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.8463 \\ 0.2457 \\ 0.3548 \\ 0.3110 \\ 0.0283 \end{bmatrix}\right\}, \quad N(A) = sp\left\{\begin{bmatrix} -0.5050 \\ 0.6504 \\ 0.4331 \\ 0.3596 \\ 0.0719 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.1313 \\ 0.5473 \\ 0.0307 \\ -0.8100 \\ -0.1620 \end{bmatrix}\right\}$$

□

مثال ۷-۱۰

تجزیه SVD ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$A = U\Sigma V^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.61 & -0.34 & 0.27 & 0.54 \\ 0.31 & 0.87 & 0.15 & -0.00 \\ 0.08 & -0.17 & 0.74 & -0.54 \\ 0.63 & -0.17 & -0.56 & -0.54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15.28 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11.35 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.77 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.00 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.10 & 0.42 & 0.85 & 0.04 & 0.27 \\ -0.66 & -0.23 & -0.02 & -0.04 & 0.71 \\ 0.37 & -0.62 & 0.16 & 0.63 & 0.19 \\ -0.29 & -0.56 & 0.48 & -0.36 & -0.46 \\ 0.56 & -0.22 & -0.05 & -0.67 & 0.40 \end{bmatrix}$$

الف) مقادیر منفرد ماتریس را تعیین کنید. رتبه و نُرم دو ماتریس A چند است؟

$$\sigma_1 = 15.28, \quad \sigma_2 = 11.35, \quad \sigma_3 = 1.77, \quad \sigma_4 = 0.00$$

از آنجاییکه سه مقدار منفرد غیر صفر دارد، لذا رتبه ماتریس سه است.

$$\|A\|_2 = \sigma_{\max} = 15.28$$

ب) پایه های یکامتعامد زیرفضاهای $R(A), N(A), R(A^T), N(A^T)$ را تعیین کنید.

باید دقت شود که در اینجا ماتریس V^T داده شده است.

$$R(A) = sp\left\{ \begin{bmatrix} 0.61 \\ 0.31 \\ 0.08 \\ 0.63 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.34 \\ 0.87 \\ -0.17 \\ -0.17 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.27 \\ 0.15 \\ 0.74 \\ -0.56 \end{bmatrix} \right\}, N(A^T) = sp\left\{ \begin{bmatrix} 0.54 \\ -0.00 \\ -0.54 \\ -0.54 \end{bmatrix} \right\}$$

$$R(A^T) = sp\left\{ \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.42 \\ 0.85 \\ 0.04 \\ 0.27 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.66 \\ -0.23 \\ -0.02 \\ -0.04 \\ 0.71 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.37 \\ -0.62 \\ 0.16 \\ 0.63 \\ 0.19 \end{bmatrix} \right\}, N(A) = sp\left\{ \begin{bmatrix} -0.29 \\ -0.56 \\ 0.48 \\ -0.36 \\ -0.46 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.56 \\ -0.22 \\ -0.05 \\ -0.67 \\ 0.40 \end{bmatrix} \right\}$$

ج) عدد حالت ماتریس A را بدست آورید. آیا ماتریس A یک ماتریس بد حالت است؟

$$\kappa = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} = \frac{15.28}{0.00} = \infty$$

با توجه به عدد حالت بسیار بزرگ ماتریس، این ماتریس بد حالت است.

□

۷-۳-۲- محاسبه دترمینان و معکوس ماتریس

از تجزیه مقادیر منفرد یک ماتریس می توان برای محاسبه دترمینان و معکوس آن ماتریس استفاده نمود. برای یک ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ دترمینان بصورت زیر بدست می آید،

$$|A| = \pm\prod_{i=1}^{n}\sigma_i \qquad (۶-۷)$$

با توجه به اینکه ماتریس های U و V متعامد هستند داریم،

$$|A| = |U\Sigma V^T| = |U|\ |\Sigma|\ |V^T| = (\pm 1)|\Sigma|(\pm 1) = \pm|\Sigma| = \pm\prod_{i=1}^{n}\sigma_i$$

برای ماتریس مربعی و رتبه کامل $A_{n\times n}$ معکوس ماتریس بصورت زیر تعریف می شود،

$$A^{-1} = (U\Sigma V^T)^{-1} = (V^T)^{-1}\Sigma^{-1}U^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T \qquad (۷-۷)$$

که در آن $\Sigma^{-1} = \mathrm{diag}(1/\sigma_1, 1/\sigma_2, \ldots, 1/\sigma_n)$ می باشد.

مثال ۷-۱۱

با استفاده از تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A دترمینان و معکوس آن را محاسبه نمایید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

مقادیر منفرد ماتریس A بصورت زیر هستند،

$$\sigma_1 = 3.9577, \quad \sigma_2 = 1.1345, \quad \sigma_3 = 0.2227$$

لذا داریم،

$$|A| = \prod_{i=1}^{3}\sigma_i = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 3.9577\times 1.1345\times 0.2227 = 1$$

تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$A = U\Sigma V^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.2253 & -0.9674 & 0.1156 \\ 0.9095 & 0.1662 & -0.3810 \\ 0.3493 & 0.1910 & 0.9173 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.9577 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1345 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2227 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0569 & -0.8527 & 0.5192 \\ 0.8346 & -0.2448 & -0.4935 \\ 0.5479 & 0.4614 & 0.6978 \end{bmatrix}^T$$

با توجه به تعریف معکوس ماتریس بصورت زیر بدست می آید،

$$A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0569 & -0.8527 & 0.5192 \\ 0.8346 & -0.2448 & -0.4935 \\ 0.5479 & 0.4614 & 0.6978 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3.9577 & 0 & 0 \\ 0 & 1/1.1345 & 0 \\ 0 & 0 & 1/0.2227 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2253 & -0.9674 & 0.1156 \\ 0.9095 & 0.1662 & -0.3810 \\ 0.3493 & 0.1910 & 0.9173 \end{bmatrix}^T$$

بنابراین داریم،

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1.0000 & -1.0000 & 2.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & -2.0000 \\ -0.0000 & -1.0000 & 3.0000 \end{bmatrix}$$

□

۴-۷ ماتریس شبه معکوس و حل مسئله حداقل مربعات

در مسئله حداقل مربعات هدف یافتن بهترین پاسخ $\hat{\mathbf{x}}$ برای دستگاه معادلات ناسازگار $A_{m\times n}\mathbf{x}_{n\times 1} = \mathbf{b}_{m\times 1}$ است، بطوریکه $\|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|$ حداقل گردد. همانطور که در فصول قبلی صحبت شد زمانیکه ماتریس A رتبه کامل داشته باشد، می توان بوسیله حل مستقیم معادلات نرمال و یا با استفاده از تجزیه QR و تجزیه چالسکی پاسخ مسئله حداقل مربعات را بدست آورد. لیکن روش های یاد شده در مواقعی که ماتریس A نقص رتبه دارد و یا زمانیکه ماتریس $A^T A$ یک ماتریس بد حالت باشد قابل استفاده نیستند. در چنین مواقعی می توان از روشی مبتنی بر تجزیه مقادیر منفرد ماتریس استفاده نمود.

برای ماتریس $A_{m\times n}$ با رتبه k ماتریس **شبه معکوس**[۱] $A^{\#}$ بصورت زیر تعریف نمود،

$$A_{m\times n} = U\Sigma V^T \quad \rightarrow \quad A^{\#}_{n\times m} = V\Sigma^{\#}U^T \qquad (۸-۷)$$

که در آن داریم،

$$\Sigma^{\#}_{n\times m} = \mathrm{diag}(1/\sigma_1, 1/\sigma_2, \ldots, 1/\sigma_k, 0, \ldots, 0) \quad , \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_k > 0$$

ماتریس شبه معکوس تعریف شده دارای شرایط زیر است،

۱- $AA^{\#}A = A$

۲- $A^{\#}AA^{\#} = A^{\#}$

۳- $(AA^{\#})^T = AA^{\#}$

۴- $(A^{\#}A)^T = A^{\#}A$

این چهار شرط را **شرایط مور- پِنرُس**[۱] می نامند. علاوه بر این برخی از خواص ماتریس شبه معکوس عبارتند از،

[۱] Pseudo - Inverse

- برای ماتریس $A_{m\times n}$ شبه معکوس $A^{\#}_{n\times m}$ منحصر بفرد است.
- $(A^{\#})^{\#} = A$ و $(A^T)^{\#} = (A^{\#})^T$.
- $A^{\#} = (A^T A)^{\#} A^T = A^T (AA^T)^{\#}$.
- ماتریس های $I - AA^{\#}$,$I - A^{\#}A$,$A^{\#}A, AA^{\#}$ متقارن هستند.

از ماتریس شبه معکوس برای حل مسئله حداقل مربعات استفاده می شود،

نکته۱: اگر ماتریس $A^T A$ منفرد یا بد حالت باشد، $\hat{\mathbf{x}} = A^{\#}\mathbf{b}$ جواب مسئله حداقل مربعات است.

نکته۲: اگر ماتریس $A_{m\times n}$ رتبه کامل داشته باشد، $A^{\#} = (A^T A)^{-1} A^T$ معکوس چپ است.

نکته۳: اگر ماتریس $A_{n\times n}$ رتبه کامل داشته باشد، $A^{\#} = A^{-1}$ است.

حال ثابت می کنیم که اگر شبه معکوس بصورت $A^{\#} = V\Sigma^{\#}U^T$ معرفی گردد، $\mathbf{x} = A^{\#}\mathbf{b}$ جواب مسئله حداقل مربعات برای دستگاه معادلات ناسازگار $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ است.

اثبات: برای ماتریس $A_{m\times n}$ با رتبه k می توان نوشت،

$$\begin{aligned}\|A\mathbf{x}-\mathbf{b}\| &= \|U\Sigma V^T\mathbf{x}-\mathbf{b}\| = \|U^T\|\|U\Sigma V^T\mathbf{x}-\mathbf{b}\| \\ &= \|U^T U\Sigma V^T\mathbf{x} - U^T\mathbf{b}\| = \|\Sigma V^T\mathbf{x} - U^T\mathbf{b}\| \\ &= \|\Sigma\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}_0\|\end{aligned}$$

که در آن $\mathbf{b}_0 = U^T\mathbf{b}$ و $\mathbf{x}_0 = V^T\mathbf{x}$ تعریف شده است.

حال می توان نوشت،

$$\min\|A\mathbf{x}-\mathbf{b}\| = \min\|\Sigma\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}_0\|$$

$$\Sigma\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}_0 = \left[\begin{array}{ccc:c} \sigma_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \sigma_k & \\ \hdashline & 0 & & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \vdots \\ x_{0n}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{01} \\ b_{02} \\ \vdots \\ b_{0m}\end{bmatrix}$$

$$\|\Sigma\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}_0\| = \sqrt{|\sigma_1 x_{01} - b_{01}|^2 + |\sigma_2 x_{02} - b_{02}|^2 + \cdots + |\sigma_k x_{0k} - b_{0k}|^2 + |-b_{0(k+1)}|^2 + \cdots + |-b_{0m}|^2}$$

مشخص است که $\min\|\Sigma\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}_0\|$ زمانی بدست می آید که بردار $\mathbf{x}_0$ بصورت زیر تعریف گردد،

[1] Moore - Penrose Conditions

$$\mathbf{x}_0=\begin{bmatrix}x_{01}\\x_{02}\\\vdots\\x_{0n}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc:c}1/\sigma_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0\\ 0 & & 1/\sigma_k & \\ \hdashline & 0 & & 0\end{array}\right]\begin{bmatrix}b_{01}\\b_{02}\\\vdots\\b_{0m}\end{bmatrix}=\Sigma^{\#}\mathbf{b}_0$$

بنابراین $\mathbf{x}_0=\Sigma^{\#}\mathbf{b}_0$ برداری است که مقدار $\|\Sigma\mathbf{x}_0-\mathbf{b}_0\|$ به ازای آن حداقل می شود.

با توجه به اینکه $\mathbf{b}_0=U^T\mathbf{b}$ و $\mathbf{x}_0=V^T\mathbf{x}$ است و $\min\|A\mathbf{x}-\mathbf{b}\|=\min\|\Sigma\mathbf{x}_0-\mathbf{b}_0\|$ است، می توان جواب حداقل مربعات برای $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ را هم بدست آورد،

$$\mathbf{x}_0=\Sigma^{\#}\mathbf{b}_0 \quad\rightarrow\quad V^T\mathbf{x}=\Sigma^{\#}U^T\mathbf{b} \quad\rightarrow\quad \mathbf{x}=V\Sigma^{\#}U^T\mathbf{b}$$

لذا $\mathbf{x}=V\Sigma^{\#}U^T\mathbf{b}$ جواب حداقل مربعات برای $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ می باشد و $A^{\#}=V\Sigma^{\#}U^T$ همان شبه معکوس ماتریس A است.

□

مثال ۷-۱۲

ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\end{bmatrix},\qquad R=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\\1&-1\end{bmatrix}$$

با استفاده از شرایط مور-پِنرُس شبه معکوس بودن ماتریس R را بررسی نمایید.

به ترتیب شرایط مور- پِنرُس را بررسی می نماییم،

1. $$ARA=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\end{bmatrix}\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\end{bmatrix}=A$$

2. $$RAR=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\end{bmatrix}\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\\1&-1\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\\1&-1\end{bmatrix}=R$$

3. $$(AR)^T=\left(\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\end{bmatrix}\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\\1&-1\end{bmatrix}\right)^T=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}=AR$$

4. $$(RA)^T = \left(\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right)^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = RA$$

لذا ماتریس R یک شبه معکوس برای ماتریس A می باشد.

□

مثال ۷-۱۳

با استفاده از روش تجزیه مقادیر منفرد، یک شبه معکوس برای ماتریس A بیابید و نشان دهید $AA^{\#}$ یک ماتریس متقارن است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A بصورت زیر می باشد،

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} 0.5774 & 0.7071 & -0.4082 \\ -0.5774 & 0.7071 & 0.4082 \\ -0.5774 & 0 & -0.8165 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.4495 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.5774 & 0.1066 & -0.8095 \\ -0.5774 & 0.5774 & 0.3515 & 0.4581 \\ -0.5774 & 0 & -0.8095 & -0.1066 \\ -0.5774 & -0.5774 & 0.4581 & -0.3515 \end{bmatrix}^T$$

لذا $\text{rank}(A) = 2$ است، بنابراین $\Sigma^{\#}$ و $A^{\#}$ بصورت زیر بدست می آیند،

$$\Sigma^{\#} = \begin{bmatrix} 0.3333 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4082 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad A^{\#} = \begin{bmatrix} 0.1667 & 0.1667 & 0 \\ 0.0556 & 0.2778 & 0.1111 \\ -0.1111 & 0.1111 & 0.1111 \\ -0.2778 & -0.0556 & 0.1111 \end{bmatrix}$$

حال می توان نشان داد که $AA^{\#}$ یک ماتریس متقارن است،

$$AA^{\#}=\begin{bmatrix}1&0&-1&-2\\1&2&1&0\\0&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.1667&0.1667&0\\0.0556&0.2778&0.1111\\-0.1111&0.1111&0.1111\\-0.2778&-0.0556&0.1111\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.8333&0.1667&-0.3333\\0.1667&0.8333&0.3333\\-0.3333&0.3333&0.3333\end{bmatrix}$$

در نرم افزار MATLAB از دستور pinv(A) برای محاسبه شبه معکوس یک ماتریس استفاده می شود،

```
A =[1 0 -1 -2;1 2 1 0;0 1 1 1];
pinv(A)
ans =
    0.1667    0.1667   -0.0000
    0.0556    0.2778    0.1111
   -0.1111    0.1111    0.1111
   -0.2778   -0.0556    0.1111
```

□

مثال ۷-۱۴

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\0&1&1\end{bmatrix}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

ابتدا سازگار یا ناسازگار بودن دستگاه را بررسی نمایید، سپس جواب حداقل مربعات را با استفاده از تجزیه مقادیر منفرد بدست آورید و نُرم خطا را بررسی نمایید.

- ابتدا سازگار یا ناسازگار بودن سیستم را بررسی می نماییم. از آنجاییکه $\text{rank}(A)=2$ و $\text{rank}(A\,|\,\mathbf{b})=3$ است، لذا سیستم ناسازگار است و باید جواب حداقل مربعات را برای آن بدست آورد. از آنجاییکه ماتریس A نقص رتبه دارد، نمی توان جواب حداقل مربعات را با استفاده از معادله نُرمال بصورت $\hat{\mathbf{x}}=(A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}$ بدست آورد، لذا در چنین مواقعی از شبه معکوس مور- پِنرُز و تجزیه مقادیر منفرد برای حل مسئله حداقل مربعات استفاده می نماییم.

- تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A بصورت زیر می باشد،

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} -0.0849 & 0.9089 & 0.4082 \\ 0.8736 & 0.2650 & -0.4082 \\ 0.4792 & -0.3220 & 0.8165 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.7651 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5344 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.2852 & 0.7651 & 0.5774 \\ 0.8052 & 0.1355 & -0.5774 \\ 0.5199 & -0.6295 & 0.5774 \end{bmatrix}^T$$

- حال شبه معکوس را بدست می آوریم،

$$A^{\#} = V\Sigma^{\#}U^T$$

$$\Sigma^{\#} = \begin{bmatrix} 1/2.7651 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5344 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad A^{\#} = \begin{bmatrix} 0.4444 & 0.2222 & -0.1111 \\ 0.0556 & 0.2778 & 0.1111 \\ -0.3889 & 0.0556 & 0.2222 \end{bmatrix}$$

لذا جواب حداقل مربعات بصورت زیر بدست می آید،

$$\hat{\mathbf{x}} = A^{\#}\mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0.5556 \\ 0.4444 \\ -0.1111 \end{bmatrix}$$

حل مسئله حداقل مربعات با استفاده از تجزیه مقادیر منفرد روشی با محاسبات بالا ولی پایداری بسیار خوب است و در مواقعی که ماتریس A نقص رتبه دارد یا $A^T A$ بد حالت است کارایی خوبی دارد.

- حال نُرم خطا را محاسبه می کنیم،

$$\|\varepsilon\| = \|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\| \quad \rightarrow \quad \|\varepsilon\| = \left\| \begin{bmatrix} -0.3333 \\ 0.3333 \\ -0.6667 \end{bmatrix} \right\| = 0.8165$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[1 0 -1;1 2 1;0 1 1];
b =[1;1;1];
x = pinv(A)* b
x =
    0.5556
    0.4444
   -0.1111
```

```
norm_e = norm(A * x - b)
norm_e =
    0.8165
```

□

مثال ۷-۱۵

برای دستگاه معادلات ناسازگار زیر جواب حداقل مربعات را بدست آورید،

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 5 \\ -2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 = 4 \end{cases}$$

- ابتدا سازگار یا ناسازگار بودن سیستم را بررسی می نماییم.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

از آنجاییکه $\text{rank}(A) = 1$ و $\text{rank}(A \mid \mathbf{b}) = 2$ است، لذا سیستم ناسازگار است و باید جواب حداقل مربعات را برای آن بدست آورد. با توجه به رتبه کامل نبودن ماتریس A برای حل مسئله حداقل مربعات باید از شبه معکوس استفاده کرد.

- مقادیر منفرد ماتریس A برابر با جذر مقادیر ویژه ماتریس $A^T A$ است،

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -28 \\ -28 & 56 \end{bmatrix}$$

$$\left| \lambda I - A^T A \right| = \begin{vmatrix} \lambda - 14 & 28 \\ 28 & \lambda - 56 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 70) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 70, \lambda_2 = 0$$

پس مقادیر منفرد ماتریس A برابر است با،

$$\sigma_1 = \sqrt{70}, \qquad \sigma_2 = 0$$

- حال تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A را بدست می آوریم،

$$A = U \Sigma V^T$$

ستون های ماتریس U بردارهای ویژه یکامتعامد ماتریس AA^T هستند. برای محاسبه ماتریس U به شکل زیر عمل می نماییم،

$$AA^T=\begin{bmatrix}1&-2\\-2&4\\3&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&3\\-2&4&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-10&15\\-10&20&-30\\15&-30&45\end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I-AA^T\right|=\begin{vmatrix}\lambda-5&10&-15\\10&\lambda-20&30\\-15&30&\lambda-45\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-70)=0\rightarrow\lambda_1=70,\lambda_2=0,\lambda_3=0$$

ماتریس AA^T یک مقدار ویژه حقیقی متمایز و یک مقدار ویژه حقیقی تکراری مرتبه دو دارد.

ابتدا بردار ویژه متناظر با مقدار حقیقی متمایز را بدست می آوریم،

$$\lambda_1=70\rightarrow(\lambda_1 I-AA^T)\mathbf{u}_1=\mathbf{0}\rightarrow\begin{bmatrix}65&10&-15\\10&50&30\\-15&30&25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11}\\u_{21}\\u_{31}\end{bmatrix}=\mathbf{0}\rightarrow\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}$$

برای مقدار ویژه تکراری $n-\text{rank}(\lambda_2 I-AA^T)=3-1=2$ است لذا دو بردار ویژه مستقل خطی داریم و نیازی به محاسبه بردار ویژه تعمیم یافته نیست.

$$\lambda_2=0\rightarrow(\lambda_2 I-AA^T)\mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}-5&10&-15\\10&-20&30\\-15&30&-45\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{12}\\u_{22}\\u_{32}\end{bmatrix}=\mathbf{0}\rightarrow\mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\mathbf{u}_3=\begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس $U_{3\times3}$ با یکامتعامد سازی بصورت زیر بدست می آید،

$$\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1&\mathbf{u}_2&\mathbf{u}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&3\\-2&2&3\\3&1&1\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad U=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{14}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{3}{\sqrt{19}}\\\frac{-2}{\sqrt{14}}&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{3}{\sqrt{19}}\\\frac{3}{\sqrt{14}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{19}}\end{bmatrix}$$

حال ماتریس V را بدست می آوریم، ستون های ماتریس V بردارهای ویژه ماتریس A^TA است،

$$A^TA=\begin{bmatrix}1&-2&3\\-2&4&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\-2&4\\3&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14&-28\\-28&56\end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I-A^TA\right|=\begin{vmatrix}\lambda-14&28\\28&\lambda-56\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-70)=0\quad\rightarrow\quad\lambda_1=70,\lambda_2=0$$

ماتریس A^TA دو مقدار ویژه حقیقی و متمایز دارد و بردارهای ویژه متناظر با هر یک از آنها را بدست می آوریم،

$$\lambda_1=70\rightarrow(\lambda_1 I-A^TA)\mathbf{v}_1=\mathbf{0}\rightarrow\begin{bmatrix}56&28\\28&14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{21}\end{bmatrix}=\mathbf{0}\rightarrow\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 0 \rightarrow (\lambda_2 I - A^T A)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} -14 & 28 \\ 28 & -56 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس $V_{2\times 2}$ بایکا متعامد سازی بصورت زیر بدست می آید،

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

- لذا تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A به شکل زیر بدست می آید،

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{19}} \\ \frac{-2}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{19}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{19}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{70} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}^T$$

حال ماتریس شبه معکوس را بدست می آوریم،

$$A^{\#} = V\Sigma^{\#}U^T$$

$$\Sigma^{\#} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{70}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{\#} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{70}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{19}} \\ \frac{-2}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{19}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{19}} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{70} & \frac{-2}{70} & \frac{3}{70} \\ \frac{-2}{70} & \frac{4}{70} & \frac{-6}{70} \end{bmatrix}$$

لذا جواب حداقل مربعات بصورت زیر بدست می آید،

$$\hat{\mathbf{x}} = A^{\#}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{70} & \frac{-2}{70} & \frac{3}{70} \\ \frac{-2}{70} & \frac{4}{70} & \frac{-6}{70} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{17}{70} \\ \frac{-34}{70} \end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[1 -2;-2 4;3 -6];
b =[5;0;4];
x = pinv(A)* b
x =
    0.2429
   -0.4857
```

□

مثال ۷-۱۶

در جدول زیر آمار جمعیت کشوری هر ۱۰ سال یکبار آورده شده است.

سال (x)	۱۹۰۰	۱۹۱۰	۱۹۲۰	۱۹۳۰	۱۹۴۰	۱۹۵۰	۱۹۶۰	۱۹۷۰	۱۹۸۰
جمعیت (y) میلیون	۷۶ / ۰	۹۲ / ۰	۱۰۵ / ۷	۱۲۳ / ۲	۱۳۱ / ۷	۱۵۰ / ۷	۱۷۹ / ۳	۲۰۳ / ۲	۲۲۶ / ۵

الف) با محاسبه شبه معکوس یک مدل مرتبه دوم بصورت $y = ax^2 + bx + c$ بر اساس روش حداقل مربعات برای افزایش جمعیت بدست آورید.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} (1900)^2 & 1900 & 1 \\ (1910)^2 & 1910 & 1 \\ (1920)^2 & 1920 & 1 \\ (1930)^2 & 1930 & 1 \\ (1940)^2 & 1940 & 1 \\ (1950)^2 & 1950 & 1 \\ (1960)^2 & 1960 & 1 \\ (1970)^2 & 1970 & 1 \\ (1980)^2 & 1980 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 76.0 \\ 92.0 \\ 105.7 \\ 123.2 \\ 131.7 \\ 150.7 \\ 179.3 \\ 203.2 \\ 226.5 \end{bmatrix}$$

بدیهی است که دستگاه معادلات بدست آمده ناسازگار است و جواب مسئله حداقل مربعات با استفاده از شبه معکوس بصورت زیر بدست می آید،

$$\hat{\mathbf{x}} = A^{\#}\mathbf{y} \quad , \quad A^{\#} = V\Sigma^{\#}U^T$$

لذا ابتدا تجزیه SVD ماتریس A را بدست می آوریم،

$$A = U\Sigma V^T$$

$$U = \begin{bmatrix} 0.3196 & 0.5188 & 0.5379 & -0.0168 & 0.0408 & 0.0198 & -0.0796 & -0.2576 & -0.5141 \\ 0.3229 & 0.3945 & 0.1375 & 0.0359 & 0.1864 & 0.3061 & 0.3949 & 0.4529 & 0.4800 \\ 0.3263 & 0.2687 & -0.1489 & -0.4555 & -0.4854 & -0.4221 & -0.2655 & -0.0157 & 0.3273 \\ 0.3297 & 0.1417 & -0.3213 & 0.8342 & -0.1712 & -0.1558 & -0.1196 & -0.0627 & 0.0149 \\ 0.3332 & 0.0133 & -0.3798 & -0.1910 & 0.7871 & -0.2078 & -0.1757 & -0.1166 & -0.0305 \\ 0.3366 & -0.1164 & -0.3243 & -0.1757 & -0.2091 & 0.7807 & -0.2064 & -0.1703 & -0.1110 \\ 0.3401 & -0.2474 & -0.1549 & -0.1200 & -0.1597 & -0.1902 & 0.7885 & -0.2236 & -0.2266 \\ 0.3435 & -0.3798 & 0.1285 & -0.0239 & -0.0647 & -0.1205 & -0.1912 & 0.7233 & -0.3772 \\ 0.3470 & -0.5135 & 0.5258 & 0.1128 & 0.0758 & -0.0102 & -0.1454 & -0.3296 & 0.4371 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11296800.2191956 & 0 & 0 \\ 0 & 77.4101337 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0004664 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.0005 & 0.0000 \\ 0.0005 & 1.0000 & -0.0010 \\ 0.0000 & 0.0010 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

حال ماتریس $\Sigma^{\#}$ را بدست می آوریم،

$$\Sigma^{\#} = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sigma 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (11296800.2191956)^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (77.4101337)^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (0.0004664)^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و جواب مسئله حداقل مربعات بصورت زیر بدست می آید،

$$\hat{\mathbf{x}} = A^{\#}\mathbf{y} = V\Sigma^{\#}U^T\mathbf{y}$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0104556277 \\ -38.7173354979 \\ 35897.0044588966 \end{bmatrix}$$

بنابراین ضرایب منحنی مرتبه دوم $y = ax^2 + bx + c$ بدست می آید. مدل بدست آمده به شکل زیر است،

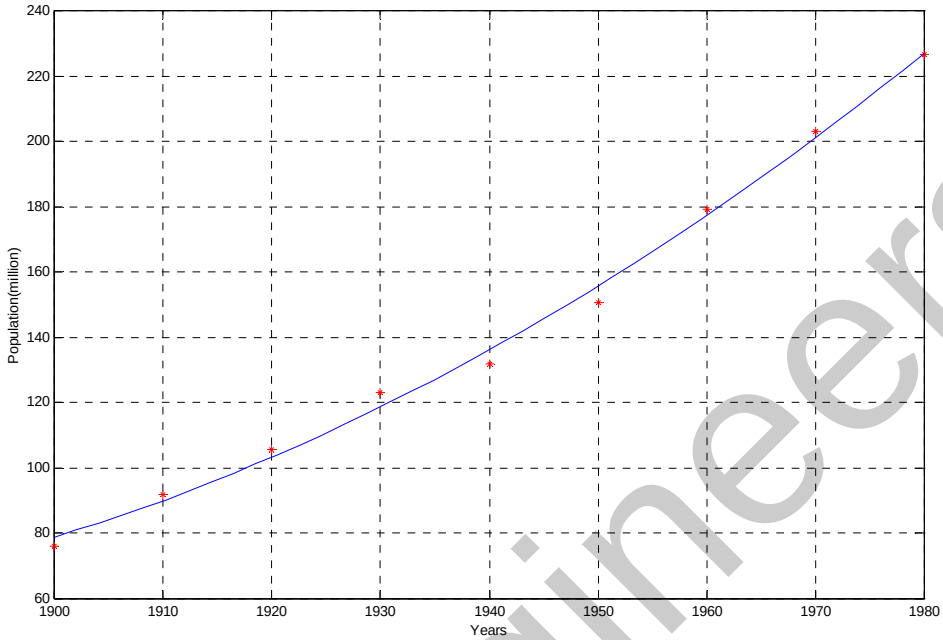
$$y = 0.0104556277x^2 - 38.7173354979x + 35897.0044588966$$

ب) بر اساس مدل بدست آمده میزان جمعیت را در سال ۱۹۹۰ تخمین بزنید.

$$y = 0.0104556277 \times (1990)^2 - 38.7173354979 \times 1900 + 35897.0044588966$$

$$y = 254.838 \ \ million$$

منحنی بدست آمده همراه با نقاط داده شده در شکل زیر رسم شده است،



شکل(۵-۱) نمودار نرخ تغییرات جمعیت بر حسب سال

برنامه مربوطه در نرم افزار MATLAB بصورت زیر است،

```
x = [1900 1910 1920 1930 1940 1950 1960 1970 1980];
y = [76.0 92.0 105.7 123.2 131.7 150.7 179.3 203.2 226.5];
NA = size(x,2);
A = zeros(NA,3);
for i = 1:NA
   A(i,:)=[x(i)^2 x(i) 1];
end
z = pinv(A)*y'
plot(x,y,'r*'),grid on
hold on
xx = linspace(1900,1980,40);
yy = (xx.^2)*z(1)+xx.*z(2)+z(3);
plot(xx,yy),grid on,xlabel('Years'),ylabel('Population(million)')
```

نتیجه اجرای برنامه بصورت زیر است،

```
z =
  1.0e+004 *
   0.00000104556277
  -0.00387173354979
   3.58970044588966
```

□

۷-۵ تقریب رتبه پایین ماتریس ها[۱]

یکی از کاربردهای تجزیه مقادیر منفی در تقریب یک ماتریس با یک ماتریس رتبه پایین تر می باشد. تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A با رتبه r را در نظر بگیرید،

$$A = U\Sigma V^T$$

$$A = [U_1 \mid U_2]\left[\begin{array}{ccc:c} \sigma_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \sigma_r & \\ \hdashline & 0 & & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} V_1^T \\ \hline V_2^T \end{array}\right], \qquad \operatorname{rank}(A) = r \tag{۷-۹}$$

مسئله، یافتن ماتریس B با رتبه $k < r$ است، بطوریکه $\|A-B\|_2$ مقدار کوچکی گردد، تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A را می توان بصورت زیر نمایش داد،

$$A = \mathbf{u}_1\sigma_1\mathbf{v}_1^T + \mathbf{u}_2\sigma_2\mathbf{v}_2^T + \cdots + \mathbf{u}_r\sigma_r\mathbf{v}_r^T \qquad , \qquad \sigma_1 > \sigma_2 > \cdots > \sigma_r$$

برای یافتن پاسخ این مسئله ماتریس A را بصورت زیر بیان می کنیم،

$$A = [U_{1a} \mid U_{1b} \mid U_2]\left[\begin{array}{ccc:ccc:c} \sigma_1 & & 0 & & & & \\ & \ddots & & & 0 & & 0 \\ 0 & & \sigma_k & & & & \\ \hdashline & & & \sigma_{k+1} & & 0 & \\ & 0 & & & \ddots & & 0 \\ & & & 0 & & \sigma_r & \\ \hdashline & 0 & & & 0 & & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} V_{1a}^T \\ \hline V_{1b}^T \\ \hline V_2^T \end{array}\right] \tag{۷-۱۰}$$

و یا بصورت زیر می توان بیان کرد،

$$A = \mathbf{u}_1\sigma_1\mathbf{v}_1^T + \mathbf{u}_2\sigma_2\mathbf{v}_2^T + \cdots + \mathbf{u}_k\sigma_k\mathbf{v}_k^T + \mathbf{u}_{k+1}\sigma_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}^T + \cdots + \mathbf{u}_r\sigma_r\mathbf{v}_r^T$$

[۱] Low Rank Approximation

از آنجاییکه $\sigma_1 > \sigma_2 > \cdots > \sigma_r$ است، جملاتی که شامل مقادیر منفرد غالب تری هستند نقش بیشتری در ساختار ماتریس A دارند. حال اگر اختلاف بین σ_k و σ_{k+1} زیاد باشد، به راحتی می توان از جملات $k+1$ به بعد صرفنظر نمود و ماتریس را فقط برحسب جملات غالب تر بیان کرد. بنابراین ماتریس B را می توان بصورت زیر انتخاب نمود،

$$B = \mathbf{u}_1\sigma_1\mathbf{v}_1^T + \mathbf{u}_2\sigma_2\mathbf{v}_2^T + \cdots + \mathbf{u}_k\sigma_k\mathbf{v}_k^T$$

$$B = \left[U_{1a} \,\middle|\, U_{1b} \,\middle|\, U_2\right] \left[\begin{array}{ccc|c|c} \sigma_1 & & 0 & & \\ & \ddots & & 0 & 0 \\ 0 & & \sigma_k & & \\ \hline & 0 & & 0 & 0 \\ \hline & 0 & & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} V_{1a}^T \\ \hline V_{1b}^T \\ \hline V_2^T \end{array}\right] \qquad (۱۱-۷)$$

بنابراین داریم،

$$B = U_{1a}\begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_k \end{bmatrix} V_{1a}^T \qquad (۱۲-۷)$$

تفاوت بین این دو ماتریس بصورت زیر بیان می شود،

$$A - B = \mathbf{u}_{k+1}\sigma_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}^T + \cdots + \mathbf{u}_r\sigma_r\mathbf{v}_r^T$$

$$A - B = U_{1b}\begin{bmatrix} \sigma_{k+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_r \end{bmatrix} V_{1b}^T \qquad (۱۳-۷)$$

رابطه بالا خود یک تجزیه مقادیر منفرد می باشد، لذا $\|A-B\|_2 \le \sigma_{k+1}$ خواهد بود و به این ترتیب خطای تقریب نیز بدست می آید،

مثال ۷-۱۷

ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix} 11.0800 & 6.8200 & 1.7600 & -6.8200 \\ 2.5000 & -1.0100 & -2.6000 & 1.1900 \\ -4.8800 & -5.0700 & -3.2100 & 5.2000 \\ -0.4900 & 1.5200 & 2.0700 & -1.6600 \\ -14.0400 & -12.4000 & -6.6600 & 12.6500 \\ 0.2700 & -8.5100 & -10.1900 & 9.1500 \\ 9.5300 & -9.8400 & -17.0000 & 11.0000 \\ -12.0100 & 3.6400 & 11.1000 & -4.4800 \end{bmatrix}$$

تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A بصورت زیر است،

$$V=\begin{bmatrix} 0.0356 & 0.9208 & 0.1392 & -0.3627 \\ 0.5382 & 0.1662 & 0.4922 & 0.6637 \\ 0.6143 & -0.3260 & 0.3116 & -0.6476 \\ -0.5760 & -0.1354 & 0.8008 & -0.0929 \end{bmatrix}$$

$$U=\begin{bmatrix} 0.2464 & 0.4454 & -0.6206 & 0.3274 & 0.4099 & -0.1105 & -0.2439 & 0.0943 \\ -0.0743 & 0.1075 & -0.2834 & -0.7780 & -0.0872 & 0.2922 & -0.4377 & 0.1125 \\ -0.2137 & -0.1903 & -0.4949 & 0.1104 & -0.5595 & -0.3406 & -0.1220 & -0.4659 \\ 0.0822 & -0.0247 & -0.2006 & 0.0615 & 0.1320 & 0.7188 & 0.3088 & -0.5649 \\ -0.5038 & -0.5538 & -0.1374 & -0.0235 & 0.6265 & -0.0990 & -0.1235 & -0.0500 \\ -0.4372 & 0.0350 & 0.0550 & 0.5017 & -0.2648 & 0.4844 & -0.3881 & 0.3123 \\ -0.5902 & 0.4266 & -0.2108 & -0.1367 & -0.0236 & -0.0597 & 0.6012 & 0.2025 \\ 0.2968 & -0.5132 & -0.4279 & 0.0232 & -0.1751 & 0.1472 & 0.3336 & 0.5489 \end{bmatrix}$$

$$S=\begin{bmatrix} 36.8258 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 26.2369 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0220 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0051 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

با توجه به مقادیر منفرد ماتریس A رتبه ماتریس چهار است

$$\sigma_1 = 36.8258, \quad \sigma_2 = 26.2369, \quad \sigma_3 = 0.0220, \quad \sigma_4 = 0.0051$$

حال می خواهیم یک تقریب رتبه پایین از ماتریس A بدست آوریم. مشخص است که مقادیر منفرد اول و دوم غالب هستند و به راحتی می توان از بقیه مقادیر منفرد صرفنظر نموده و یک تقریب رتبه دو برای ماتری A بدست آورد،

$$B = \begin{bmatrix} 0.2464 & 0.4454 \\ -0.0743 & 0.1075 \\ -0.2137 & -0.1903 \\ 0.0822 & -0.0247 \\ -0.5038 & -0.5538 \\ -0.4372 & 0.0350 \\ -0.5902 & 0.4266 \\ 0.2968 & -0.5132 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 36.8258 & 0 \\ 0 & 26.2369 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0356 & 0.5382 & 0.6143 & -0.5760 \\ 0.9208 & 0.1662 & -0.3260 & -0.1354 \end{bmatrix}$$

اندازه خطای تقریب در این مثال بصورت زیر بدست می آید،

$$\|A - B\|_2 \le \sigma_3 \approx 0.0220$$

حال می توان ماتریس B را بدست آورده عناصر آن را با ماتریس A مقایسه نمود،

$$B = \begin{bmatrix} 11.0825 & 6.8256 & 1.7653 & -6.8089 \\ 2.4994 & -1.0043 & -2.6006 & 1.1946 \\ -4.8783 & -5.0650 & -3.2062 & 5.2088 \\ -0.4893 & 1.5220 & 2.0716 & -1.6564 \\ -14.0396 & -12.3984 & -6.6591 & 12.6524 \\ 0.2708 & -8.5123 & -10.1887 & 9.1493 \\ 9.5304 & -9.8373 & -16.9990 & 11.0037 \\ -12.0086 & 3.6446 & 11.1030 & -4.4724 \end{bmatrix}$$

□

۷-۵-۱- کاهش نویز سیگنال ها

یکی از کاربردهای تقریب رتبه پایین ماتریس ها در کاهش نویز سیگنال ها به ویژه سیگنال های صوتی و تصویری است. فرض کنید از سیگنال زمان پیوسته $X(t)$ نمونه برداری کرده و آن را بصورت بردار زیر نمایش دهیم،

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \cdots \quad x_n]$$

حال می توان نمونه ها را با یک ترتیب مناسب دسته بندی کرد و آن ها را در قالب یک ماتریس نمایش داد،

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix} x_1 & x_{m+1} & x_{2m+1} & \cdots \\ x_2 & x_{m+2} & x_{2m+2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_m & x_{2m} & x_{3m} & \cdots \end{bmatrix}$$

حال اگر مقادیر منفرد ماتریس A را بدست آوریم، خواهیم دید که برخی از آنها نسبت به دیگر مقادیر منفرد غالب تر هستند، لذا جملات آخر نقش کمتری در ایجاد ساختار ماتریس و سیگنال دارند،

$$A=\mathbf{u}_1\sigma_1\mathbf{v}_1^T+\mathbf{u}_2\sigma_2\mathbf{v}_2^T+\cdots+\mathbf{u}_k\sigma_k\mathbf{v}_k^T+\mathbf{u}_{k+1}\sigma_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}^T+\cdots+\mathbf{u}_r\sigma_r\mathbf{v}_r^T$$

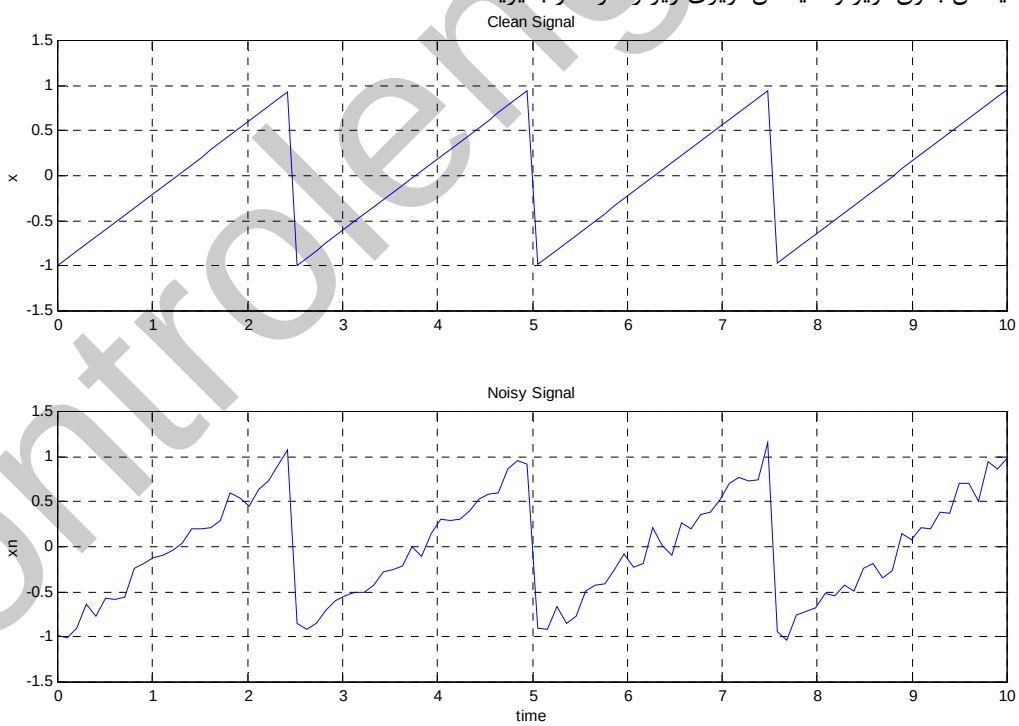
حال سیگنال نویزی زیر را در نظر بگیرید،

$$\mathbf{x}_n=\mathbf{x}+\mathbf{n}$$

نویز سبب افزایش اندازه مقادیر منفرد کوچک تر ماتریس شده و جملات آخر را پر اهمیت تر جلوه می دهد و دخالت این جملات سبب تخریب ساختار اصلی ماتریس و سیگنال می شود. حال اگر با استفاده از روش تقریب رتبه پایین ماتریس بتوان این جملات را حذف نمود به نوعی می توان نویز را کاهش داد. در این روش جهت بهتر شدن وضعیت سیگنال گاهی از روش وزن دهی برای مقادیر ویژه میانی نیز استفاده می شود.

مثال۷-۱۸

سیگنال بدون نویز و سیگنال نویزی زیر را در نظر بگیرید،



شکل(۵-۲)- سیگنال بدون نویز و سیگنال نویزی

برای ایجاد چنین سیگنال هایی در نرم افزار MATLAB از دستور زیر استفاده می نماییم،

```
t = linspace(0,10,100);
x = sawtooth(2.5*t);
xn = x + 0.1*randn(size(x));
figure(1)
subplot(211),plot(t,x)
grid on,title('Clean Signal'),ylabel('x')
subplot(212),plot(t,xn)
grid on,title('Noisy Signal'),xlabel('time'),ylabel('xn')
```

ابتدا هر یک از سیگنال ها را بصورت یک ماتریس 10×10 نمایش می دهیم، سپس مقادیر منفرد هر یک از ماتریس ها را بدست آورده مقایسه می کنیم،

```
Ax = zeros(10,10);
Axn = zeros(10,10);
j = 1;
for i=1:10:100
   Ax(:,j) = x(:,i:i+9)';
   Axn(:,j) = xn(:,i:i+9)';
   j = j+1;
end
clean_sv = svd(Ax)
noisy_sv = svd(Axn)
```

اجرای برنامه بصورت زیر است،

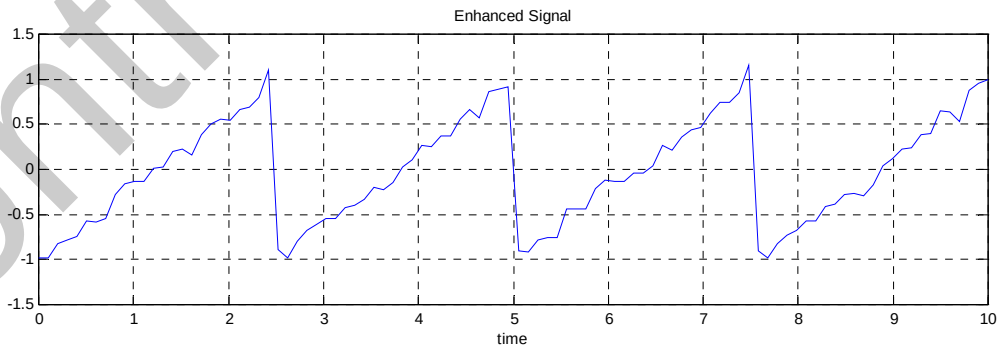
```
clean_sv =
    4.0454
    4.0000
    1.1351
    0.0000
    0.0000
    0.0000
    0.0000
    0.0000
    0.0000
    0.0000
```

```
noisy_sv =
    4.1071
    3.9563
    1.2883
    0.3958
    0.3306
    0.2784
    0.1880
    0.1264
    0.0425
    0.0069
```

رتبه ماتریس بدون نویز سه و رتبه ماتریس نویزی ده است. از مقایسه مقادیر منفرد سیگنال بدون نویز و سیگنال نویزی مشخص است که نویز بر روی مقادیر منفرد کوچک تر سیگنال تاثیر گذاشته مقدار آنها را افزایش می دهند و سبب بروز تغییرات در ساختار داده ها می شوند. حال اگر در سیگنال نویزی یک تقریب رتبه پایین ایجاد کنیم می توانیم اثر مقادیر منفرد کوچک را از بین ببریم. برای این منظور برنامه را بصورت زیر ادامه می دهیم،

```
[Un,Sn,Vn] = svd(Axn);
Axn1 = Un(:,1:3)*Sn(1:3,1:3)*Vn(:,1:3)';
xn1 = Axn1(:);
figure(2)
subplot(211),plot(t,xn1),
grid on,title('Enhanced Signal'),xlabel('time'),ylabel('xn1')
```

سیگنال حاصل بصورت زیر است،



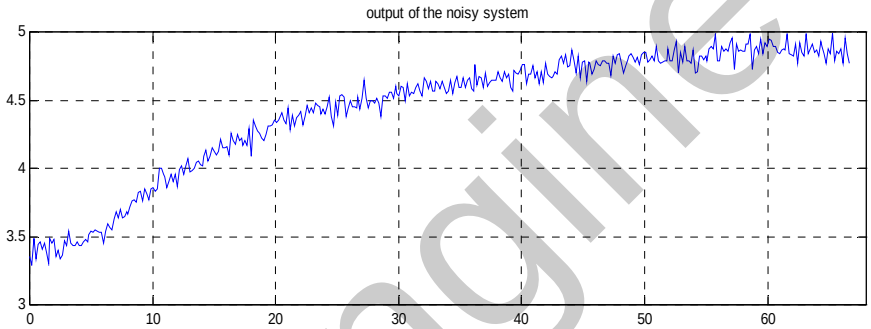
شکل(۵-۳)- سیگنال بهبود یافته

در اینجا با توجه به اینکه از مقدار منفرد چهارم به بعد مقدار مقادیر منفرد به شدت افت می کند، لذا سه مقدار منفرد اول را نگه داشته بقیه را صفر نمودیم. بهبود وضعیت سیگنال در شکل حاصل به وضوح دیده می شود.

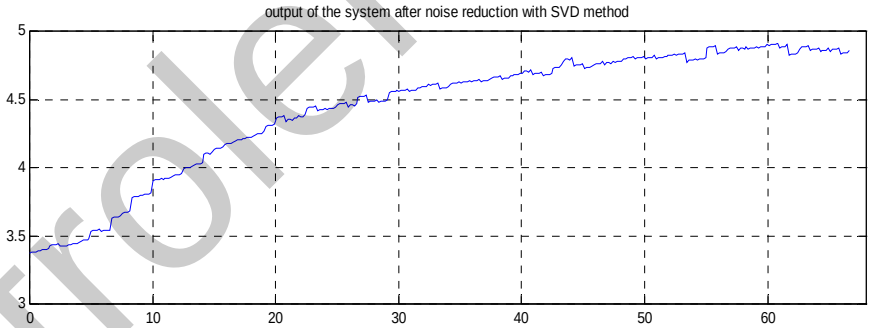
□

مثال۷-۱۹

به منظور مدلسازی یک فرایند حرارتی آزمایشگاهی پاسخ پله فرایند توسط سامانه نمونه برداری داده بدست آمده است که در شکل (الف) نمایش داده شده است. همان طور که پیداست نویز اندازه گیری سبب مخدوش شدن سیستم شده و کار شناسایی را دشوار می کند. حال می خواهیم با استفاده از روش یاد شده نویز موجود در این سیگنال را کاهش دهیم،



شکل (الف)



شکل(ب)

شکل(۵-۵)- پاسخ پله فرایند حرارتی آزمایشگاهی

برای این منظور ابتدا داده های ورودی را بصورت یک ماتریس 5×80 در نظر می گیریم. مقادیر منفرد ماتریس مذکور در زیر آورده شده است،

$$\sigma_1 = 89.1145, \quad \sigma_2 = 0.5418, \quad \sigma_3 = 0.5069, \quad \sigma_4 = 0.4875, \quad \sigma_5 = 0.3941$$

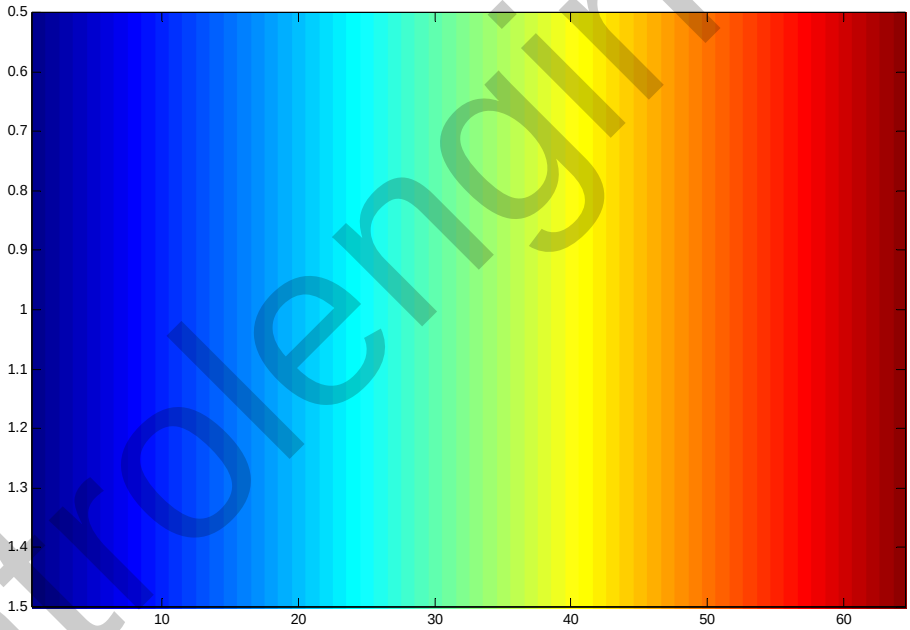
با توجه به اینکه اندازه اولین مقدار منفرد بسیار بزرگتر از بقیه می باشد، می توان از تقریب رتبه یک جهت کاهش نویز استفاده کرد، لذا نُرم خطای تقریب در اینجا 0.5418 می باشد. نتیجه حاصل در شکل(ب) رسم شده است که بیانگر موفقیت روش مذکور است.

□

۷-۵-۲- فشرده سازی داده های تصویری[1]

کاربرد دیگری از تقریب رتبه پایین ماتریس ها در فشرده سازی داده های تصویری است. در سیستم کامپیوتری هر تصویر در قالب یک ماتریس ذخیره می گردد که ابعاد این ماتریس به حجم و کیفیت تصویر بستگی دارد. برای هر یک از رنگ های طیف رنگی عددی اختصاص داده می شود. بطور نمونه در نرم افزار MATLAB با استفاده از دستور image می توان یک طیف رنگی ایجاد نمود

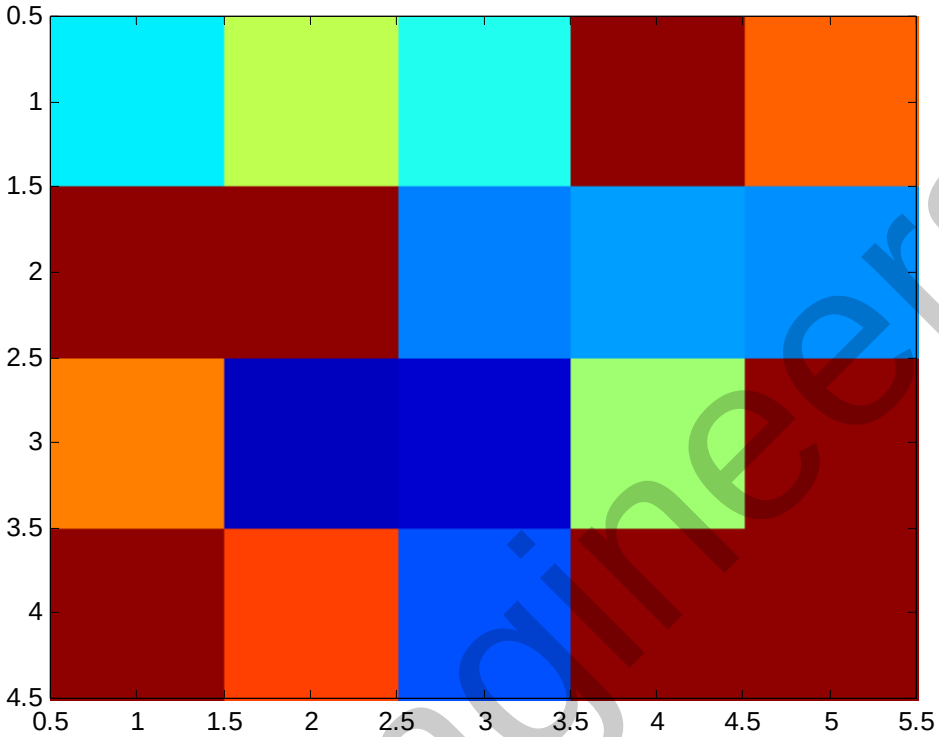
```
x = 1:64;
image(x)
```



شکل(۵-۶) - طیف رنگی ۶۴ تایی

هر چه اعداد بزرگتر از ۶۴ باشند رنگ حاصل قرمز پر رنگ یا قهوه ای و هر چه اعداد کوچکتر از یک باشند رنگ حاصل آبی پر رنگ و سورمه ای خواهد شد. بنابراین در نرم افزار MATLAB هر بردار یا ماتریس را می توان بصورت یک تصویر با خانه های رنگی ذخیره نمود. تصویر زیر را در نظر بگیرید،

[1] Data Compression



شکل(۵-۱)- تصویر حاصل از ماتریس A

این تصویر توسط ماتریسی بصورت زیر ذخیره می گردد،

```
B = rand(4,5);
A = image(100*B)
```

$$A=\begin{bmatrix} 23.3649 & 36.3295 & 26.9719 & 72.6078 & 51.1643 \\ 93.4402 & 89.2667 & 16.7493 & 18.6431 & 17.6336 \\ 49.7758 & 4.8464 & 5.4033 & 34.5255 & 67.9415 \\ 81.9026 & 53.5329 & 13.6772 & 70.2714 & 93.0307 \end{bmatrix}$$

تصاویر واقعی نیز در کامپیوتر توسط چنین ماتریس هایی ذخیره می شوند که با توجه به حجم و کیفیت این تصاویر حجم ماتریس ذخیره سازی شده بسیار بالاتر است. به عنوان نمونه تصویر نشان داده شده در شکل(۵-۷) را در نظر بگیرید. این تصویر توسط یک ماتریس 362×500 ذخیره می شود.

شکل(۵-۸)- نمونه ای از تصویر واقعی

روش تقریب رتبه پایین ماتریس این امکان را فراهم می کند تا بتوان تصاویر مذکور را با حفظ کیفیت آنها در حجم کمتری ذخیره سازی نمود. بطور مثال این موضوع بویژه در ارسال تصاویر گرفته شده توسط کاوشگرهای فضا پیما به زمین، اهمیت ویژه ای پیدا می کند زیرا تعداد تصاویر در چنین مواقعی بسیار بالا می باشد که حاکی از ارسال حجم داده های بالایی است.

مثال۷-۲۰

تصویر حاصل از ماتریس ماتریس A را در نظر بگیرید. ابتدا تجزیه مقادیر منفرد این ماتریس را بدست می آوریم،

$$A = U\Sigma V^T$$

$$U = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4063 & 0.3543 & -0.7843 & -0.3070 \\ 0.4981 & -0.8393 & -0.0371 & -0.2146 \\ 0.3649 & 0.3505 & 0.5927 & -0.6267 \\ 0.6736 & 0.2171 & 0.1795 & 0.6833 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 224.7721 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 85.0690 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 44.7287 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7.3295 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V=\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5755 & -0.4105 & 0.5009 & -0.3346 & 0.3706\\ 0.4318 & -0.5728 & -0.4321 & 0.4413 & -0.3225\\ 0.1356 & 0.0042 & -0.3604 & -0.8071 & -0.4475\\ 0.4392 & 0.4401 & -0.5492 & 0.0118 & 0.5583\\ 0.5206 & 0.5565 & 0.3617 & 0.2043 & -0.4967\end{bmatrix}$$

ماتریس A چهار مقدار منفرد غیرصفر دارد و $\text{rank}(A)=4$ است.

$$\sigma_1=224.7721,\qquad \sigma_2=85.0690,\qquad \sigma_3=44.7287,\qquad \sigma_4=7.3295$$

آیا می توان با صرفنظر کردن از برخی مقادیر منفرد رتبه ماتریس A را کاهش داده و یک تقریب رتبه پایین مناسب برای آن بدست آورد؟ برای این منظور حالت های مختلف را در نظر می گیریم.

فرض کنید فقط σ_1 را در نظر بگیریم و بقیه مقادیر منفرد صفر باشند. در اینصورت ماتریس A_1 بصورت زیر بدست می آید و تصویر حاصل از آن چنین خواهد بود،

$$A_1=\mathbf{u}_1\sigma_1\mathbf{v}_1^T$$

$$A_1=\begin{bmatrix}52.5564 & 39.4285 & 12.3849 & 40.1043 & 47.5420\\ 64.4383 & 48.3424 & 15.1849 & 49.1710 & 58.2902\\ 47.1990 & 35.4093 & 11.1225 & 36.0162 & 42.6958\\ 87.1385 & 65.3724 & 20.5342 & 66.4929 & 78.8247\end{bmatrix}$$

رتبه و مقادیر منفرد ماتریس A_1 بصورت زیر می باشد،

$$\text{rank}(A_1)=1,\qquad \sigma_1=224.7721,\qquad \sigma_2=\sigma_3=\sigma_4=0$$

اگر دو مقدار منفرد σ_1 و σ_2 را در نظر بگیریم، ماتریس A_2 بصورت زیر خواهد بود،

$$A_2=\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \sigma_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2\end{bmatrix}^T$$

$$A_2=\begin{bmatrix}40.1854 & 22.1638 & 12.5130 & 53.3675 & 64.3145\\ 93.7458 & 89.24.31 & 14.8816 & 17.7497 & 18.5555\\ 34.9594 & 18.3280 & 11.2491 & 49.1386 & 59.2901\\ 79.5569 & 54.7917 & 20.6127 & 74.6213 & 89.1037\end{bmatrix}$$

رتبه و مقادیر منفرد ماتریس A_2 بصورت زیر می باشد،

$$\text{rank}(A_2)=2,\qquad \sigma_1=224.7721,\qquad \sigma_2=85.0690,\qquad \sigma_3=\sigma_4=0$$

اگر سه مقدار منفرد σ_1، σ_2 و σ_3 را در نظر بگیریم، ماتریس A_3 بصورت زیر خواهد بود،

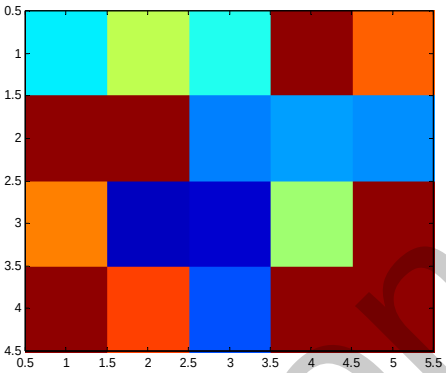
$$A_3 = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3\end{bmatrix}^T$$

$$A_3 = \begin{bmatrix}22.6119 & 37.3225 & 25.1555 & 72.6343 & 51.6239\\ 92.9140 & 89.9606 & 15.4799 & 18.6616 & 17.9548\\ 48.2388 & 48.2388 & 1.6958 & 34.5797 & 68.8797\\ 83.5784 & 83.5784 & 17.7196 & 70.2123 & 92.0078\end{bmatrix}$$

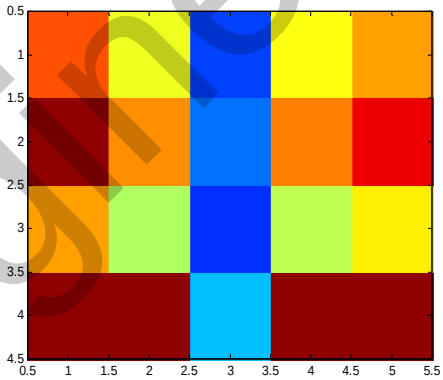
رتبه و مقادیر منفرد ماتریس A_3 بصورت زیر می باشد،

$$\text{rank}(A_3) = 3, \quad \sigma_1 = 224.7721, \quad \sigma_2 = 85.0690, \quad \sigma_3 = 44.7287, \quad \sigma_4 = 0$$

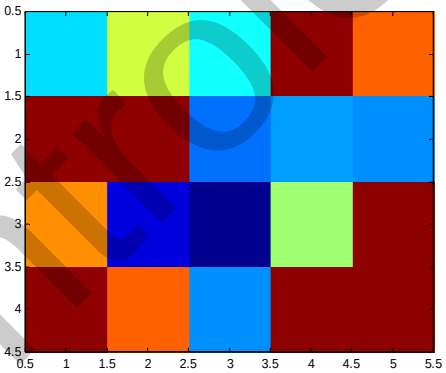
تصاویر حاصل از ماتریس های A، A_1، A_2 و A_3 در شکل زیر آورده شده است،



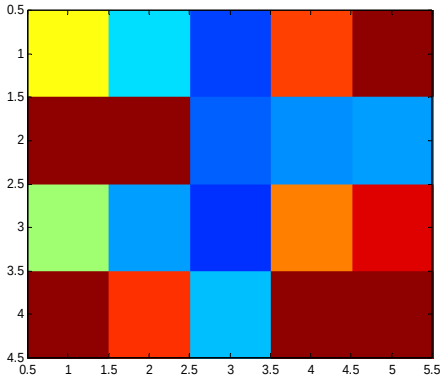
تصویر اصلی به ازای ماتریس A



تصویر با استفاده از ماتریس A_1



تصویر با استفاده از ماتریس A_3



تصویر با استفاده از ماتریس A_2

شکل(۵-۹)- تصاویر حاصل از ماتریس های A، A_1، A_2 و A_3

لذا فقط با استفاده از سه مقدار منفرد این شکل قابل بازسازی است و ماتریس A_3 بهترین تقریب با رتبه کمتر برای ماتریس A می باشد و نُرم دو خطای تقریب حداکثر برابر با $\sigma_4 = 7.3295$ است.
این مسئله برای ماتریس هایی با ابعاد بالاتر بسیار قابل توجه است.

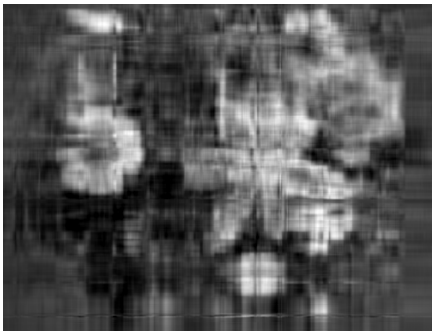
□

مثال۷-۲۱

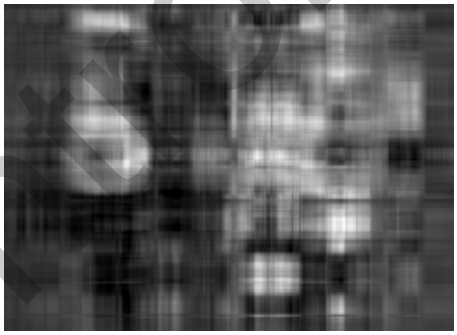
تصویر واقعی زیر را در نظر بگیرید، این تصویر توسط یک ماتریس 362×500 ذخیره می شود و دارای 362 مقدار منفرد است که بزرگترین آن $\sigma_1 = 150.2370$ و کوچکترین $\sigma_{362} = 0.1005$ می باشد.

شکل(۵-۶)- تصویر اصلی از گل

در شکلهای زیر تصاویر با درنظر گرفتن مقادیر منفرد مختلف نشان داده شده است،



$\sigma_1 = 150.2370, \ldots, \sigma_{10} = 11.2150$



$\sigma_1 = 150.2370, \ldots, \sigma_5 = 20.8949$

$\sigma_1 = 150.2370, \ldots, \sigma_{50} = 3.2094$

$\sigma_1 = 150.2370, \ldots, \sigma_{20} = 7.1647$

لذا مشاهده می شود که تنها با استفاده از 50 تا از مقادیر منفرد به راحتی می توان تصویر اصلی را به طرز قابل قبولی بازسازی کرد، البته این بستگی به کیفیت تصویر مورد نظر دارد. برای نمونه تصاویر حاصل برای 100 و 150 تا از مقادیر منفرد نیز آورده شده است،

$\sigma_1 = 150.2370, \ldots, \sigma_{150} = 1.0507$

$\sigma_1 = 150.2370, \ldots, \sigma_{100} = 1.6042$

□

مسائل

۷-۱- برای ماتریس های زیر مقادیر منفرد را بیابید و سپس آنها را توسط مقادیر منفرد تجزیه نمایید،

الف) $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 6 & 2\end{bmatrix}$ ب) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}$ ج) $A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 8\end{bmatrix}$

د) $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ ه) $A=\begin{bmatrix}1 & 10\\ 1 & 15\\ 1 & 20\end{bmatrix}$ و) $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$

۷-۲- برای هر یک از ماتریس های زیر یک شبه معکوس بیابید.

الف) $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ ب) $A=\begin{bmatrix}2 & 2 & -2\\ 4 & 1 & 2\\ -4 & 2 & 1\end{bmatrix}$ ج) $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & -2\end{bmatrix}$

۷-۳- در هر یک از حالتهای زیر با استفاده از تجزیه مقادیر منفرد، جواب حداقل مربعات معادله $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ را بیابید.

الف) $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix},\mathbf{b}=\begin{bmatrix}2\\ 8\end{bmatrix}$ ب) $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 3 & 1\end{bmatrix},\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$

ج) $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$ د) $A=\begin{bmatrix}2 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix},\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$

ه) $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix},\mathbf{b}=\begin{bmatrix}15\\ 15\\ -30\end{bmatrix}$ و) $A=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -2\end{bmatrix},\mathbf{b}=\begin{bmatrix}2\\ 3\\ -3\end{bmatrix}$

۷-۴- با استفاده از نرم افزار MATLAB هر یک از ماتریس های زیر را بصورت یک تصویر نمایش دهید. سپس با استفاده از تجزیه مقادیر منفرد سعی کنید تا حداکثر امکان تصویر را فشره سازی کنید به نحوی که کیفیت تصویر همچنان مطلوب باشد. میزان حافظه ذخیره سازی شده را با هم مقایسه کنید.

الف) $A=\begin{bmatrix} 1 & 12 & 51 & 89 & 34 & 22 \\ 23 & 65 & 9 & 37 & 46 & 14 \\ 45 & 39 & 79 & 16 & 5 & 61 \\ 63 & 80 & 12 & 35 & 54 & 2 \\ 98 & 5 & 36 & 46 & 19 & 25 \\ 13 & 29 & 65 & 38 & 64 & 9 \\ 34 & 46 & 1 & 52 & 17 & 28 \end{bmatrix}$

ب) $A=\begin{bmatrix} 13 & 50 & 33 & 42 & 29 & 65 \\ 20 & 39 & 14 & 62 & 40 & 55 \\ 70 & 18 & 21 & 39 & 51 & 47 \\ 45 & 22 & 65 & 50 & 17 & 39 \\ 2 & 60 & 28 & 39 & 57 & 44 \end{bmatrix}$

۷-۵- برای هر یک از دستگاه معادلات ناسازگار زیر جواب حداقل مربعات را بدست آورید،

الف) $\begin{cases} x_1-2x_2=5 \\ -2x_1+4x_2=0 \\ 3x_1-6x_2=4 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} x_1+x_2=15 \\ 2x_1+2x_2=15 \\ 2x_1+2x_2=-30 \end{cases}$ ج) $\begin{cases} x_1=0 \\ x_1=2 \\ x_1+x_2+x_3=2 \end{cases}$

۷-۶- ثابت کنید،

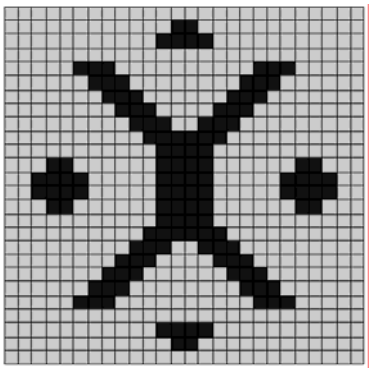
الف) زمانیکه ماتریس A غیرمنفرد باشد، $A^{\#}=A^{-1}$ است.

ب) $(A^{\#})^{\#}=A$ و $(A^{\#})^{T}=(A^{T})^{\#}$

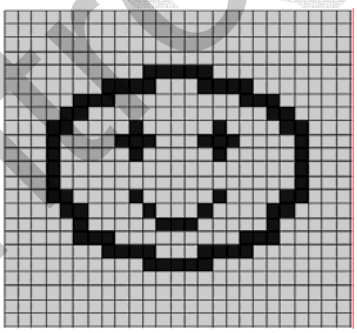
ج) $AA^{\#}A=A$ و $A^{\#}AA^{\#}=A^{\#}$

۷-۷- هر یک از تصاویر زیر را بصورت یک ماتریس نمایش دهید. سپس با استفاده از تجزیه مقادیر منفرد سعی کنید تا حداکثر امکان تصویر را فشره سازی کنید به نحوی که کیفیت تصویر همچنان مطلوب باشد.

الف)



ب)



۷-۸- ماتریس A را در نظر بگیرید،

```
A =[ 1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1;
     1  1  1  1  1  1  1 40  1  1  1 40  1  1  1  1  1  1  1;
     1  1  1  1  1  1 40  1 40  1 40  1 40  1  1  1  1  1  1;
     1  1  1  1  1 40  1  1  1 40  1  1  1 40  1  1  1  1  1;
     1  1  1  1 40  1 40  1 40  1 40  1 40  1 40  1  1  1  1;
     1  1  1  1 40  1  1 40  1  1  1 40  1  1 40  1  1  1  1;
     1  1  1 40  1 40  1 40  1  1  1 40  1 40  1 40  1  1  1;
     1  1 40  1  1  1 40  1  1  1  1  1 40  1  1  1 40  1  1;
     1  1  1 40  1 40  1  1  1  1  1  1  1 40  1 40  1  1  1;
     1  1  1  1 40  1  1  1  1  1  1  1  1  1 40  1  1  1  1;
     1  1  1  1 40  1  1  1  1  1  1  1  1  1 40  1  1  1  1;
     1  1  1 40  1 40  1  1  1  1  1  1  1 40  1 40  1  1  1;
     1  1 40  1  1  1 40  1  1  1  1  1 40  1  1  1 40  1  1;
     1  1  1 40  1 40  1 40  1  1  1 40  1 40  1 40  1  1  1;
     1  1  1  1 40  1  1 40  1  1  1 40  1  1 40  1  1  1  1;
     1  1  1  1 40  1 40  1 40  1 40  1 40  1 40  1  1  1  1;
     1  1  1  1  1 40  1  1  1 40  1  1  1 40  1  1  1  1  1;
     1  1  1  1  1  1 40  1 40  1 40  1 40  1  1  1  1  1  1;
     1  1  1  1  1  1  1 40  1  1  1 40  1  1  1  1  1  1  1;
     1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1];
```

الف) با استفاده از دستور svd(A) در نرم افزار MATLAB مقادیر منفرد ماتریس A را بیابید. رتبه ماتریس A چند است؟

ب) با توجه به مقادیر منفرد بدست آمده یک تقریب رتبه پایین مناسب برای ماتریس A بدست آورید. خطای تقریب چند است؟

ج) با استفاده از دستور image(A) در نرم افزار MATLAB طیف رنگی ماتریس A و ماتریس تقریب زنده شده را رسم نمایید.

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

تمرین اول برنامه نویسی

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

نیمسال اول ۹۰-۹۱

مهلت تحویل: **۹۰/۷/۲۷**

برای انجام تمامی تمرین های برنامه نویسی از نرم افزار MATLAB استفاده نمایید.

m فایل برنامه نویسی را پیش از اتمام مهلت تحویل آن به پست الکترونیکی درس LA@eetd.kntu.ac.ir ارسال نمایید.

پرینت متن برنامه نوشته شده و پرینت اجرای آن را همراه با توضیحات لازم شخصاً پیش از اتمام مهلت تحویل آن ارائه نمایید.

۱- با استفاده از نرم افزار MATLAB برنامه ای با نام Gauss_elim بنویسید که خصوصیات زیر را داشته باشد،

الف) ماتریس $A_{n\times n}$ و بردار $\mathbf{b}_{n\times 1}$ را به عنوان ورودی بگیرد.

ب) با محاسبه دترمینان ماتریس $A_{n\times n}$ و نمایش آن، منفرد یا غیر منفرد بودن ماتریس $A_{n\times n}$ را با پیغام های 'The matrix is singular' یا 'The matrix is nonsingular' اعلام نماید.

ج) برای دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ ماتریس افزوده $[A|\mathbf{b}]$ را نمایش دهد.

د) دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ را با استفاده از الگوریتم حذفی گوسی حل نماید. (برنامه باید بتواند در صورت نیاز عمل محورگیری را انجام دهد.)

ه) ماتریس های مقدماتی لازم برای هر یک از مراحل الگوریتم حذفی گوسی را نمایش دهد.

و) در نهایت جواب دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$، یعنی بردار $\mathbf{x}$، و فرم بالا مثلثی شده ماتریس افزوده $[A|\mathbf{b}]$ را نمایش دهد.

۲- برنامه خود را برای حل دو دستگاه معادلات زیر امتحان نمایید و نتیجه آنها را ارائه دهید.

الف)
$$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3-4x_4+3x_5=-3 \\ -2x_1-x_2+2x_3+6x_4+4x_5=19 \\ -x_2+3x_3-5x_4+x_5=-2 \\ 3x_1-4x_2+2x_3+5x_4-7x_5=-11 \\ x_1+2x_2-8x_3+6x_4+x_5=4 \end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases} 3x_1-2x_2=1 \\ -2x_1+3x_2-2x_3=-1 \\ -2x_2+\frac{2}{3}x_3-2x_4=-\frac{10}{3} \\ -2x_3+3x_4-2x_5=-1 \\ -2x_4+3x_5-2x_6=-1 \\ -2x_5+3x_6=1 \end{cases}$$

همیشه موفق باشید

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

نیمسال اول ۹۰-۹۱

تمرین دوم برنامه نویسی

مهلت تحویل: **۹۰/۹/۹**

برای انجام تمامی تمرین های برنامه نویسی از نرم افزار MATLAB استفاده نمایید.

m فایل برنامه نویسی را پیش از اتمام مهلت تحویل آن به پست الکترونیکی درس LA@eetd.kntu.ac.ir ارسال نمایید.

پرینت متن برنامه نوشته شده و پرینت اجرای آن را شخصاً پیش از اتمام مهلت تحویل آن ارائه نمایید.

بخش اول: منحنی $f(t) = 0.1t^3 - 0.2e^{-10t} + 0.1e^{-20t}$ را در نظر بگیرید،

الف) $f(t)$ را در بازه $t = [0 \quad 1]$ با $step = 0.01$ با استفاده از نرم افزار MATLAB رسم نمایید.

ب) مقدار منحنی $f(t)$ را برای زمان های زیر بدست آورید،

$$T = [0.001, \quad 0.051, \quad 0.101, \quad 0.152, \quad 0.203, \quad 0.254, \quad 0.305, \quad 0.356$$
$$0.407, \quad 0.458, \quad 0.539, \quad 0.610, \quad 0.711, \quad 0.802, \quad 0.894, \quad 1.000]$$

نقاط بدست آمده را همراه با منحنی اصلی $f(t)$ رسم نمایید.

$$y_i = f(t_i) \qquad i = 1,\ldots,16 \qquad t_i \in T$$

ج) یک چند جمله ای مرتبه پانزده به فرم $p_{15}(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots + \alpha_{15} t^{15}$ برای برازش این نقاط بدست آورید. منحنی حاصل را همراه با ۱۶ نقطه مذکور در بازه $t = [0 \quad 1]$ با $step = 0.01$ رسم کنید و دقت منحنی حاصل را نسبت به منحنی اصلی بررسی کنید.

د) با استفاده از روش حداقل مربعات یک تقریب از چند جمله ای مرتبه چهار به فرم $p_3(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \alpha_4 t^4$ برای این نقاط بدست آورید، منحنی حاصل را همراه با ۱۶ نقطه مذکور در بازه $t = [0 \quad 1]$ با $step = 0.01$ رسم کنید و دقت منحنی حاصل را نسبت به منحنی اصلی بررسی کنید.

ه) با توجه به نتایج بدست آمده از بخش (ج) و (د) کدام یک از منحنی ها تقریب بهتری برای منحنی اصلی است؟

بخش دوم: حال فرض کنید در حین محاسبه مقدار منحنی $f(t)$ در زمان های مذکور ، خطای اندازه گیری و نویز در نتایج تاثیر گذار باشد.

$$y_i = f(t_i) + n(t_i) \qquad i = 1,\ldots,16 \qquad t_i \in T$$

بردار نویز را می توان بصورت زیر در نظر گرفت،

```
n = 0.03*randn(size(T));
```

الف) نقاط نویزی جدید بدست آمده را همراه با منحنی اصلی $f(t)$ رسم نمایید.

ب) مجدداً بندهای (ج) و (د) در بخش اول را برای نقاط نویزی جدید اجرا کنید. در هر دو حالت ضرایب منحنی ها را بدست آورید و منحنی حاصل را همراه با ۱۶ نقطه نویزی مذکور در بازه $t = [0 \quad 1]$ با $step = 0.01$ رسم نمایید. سپس با مقایسه منحنی ها دقت منحنی حاصل را نسبت به منحنی اصلی بررسی کنید. کدام یک از منحنی ها تقریب بهتری برای منحنی اصلی هستند؟

از مقایسه نتایج حاصل از بخش اول و دوم چه نتیجه ای می توان گرفت؟

همیشه موفق باشید

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

پروژه رمزنگاری

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

نیمسال اول ۹۰-۹۱

مهلت تحویل: **۹۰/۸/۱۸**

در این پروژه کاربرد ماتریس ها در رمزی کردن و رمزگشایی پیام های متنی به روش HILL CIPHER بررسی می شود

۱- کُد و رمزی کردن پیام های متنی

یکی از ساده ترین روش ها برای کد کردن پیام جایگزین کردن هر یک از حرف با یک حرف دیگر با استفاده از جدولی بصورت جدول(۱) است. این روش در بسیاری از جدول ها و معماهای موجود در مجلات و روزنامه ها مورد استفاده قرار می گیرد. در این روش فاصله بین کلمات و علامت های نگارشی در نظر گرفته نشده است.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
Y	C	W	O	G	R	D	B	P	I	Z	X	K	L	N	M	T	S	E	F	H	J	A	V	U	Q

جدول(۱)

بطور مثال عبارت VECTOR SPACE با این روش بصورت JGWFNSEMYWG کد می شود. برای دیکد کردن این روش از جدولی بصورت جدول(۲) استفاده می نماییم.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
W	H	B	G	S	T	E	U	J	V	M	N	P	O	D	I	Z	F	R	Q	Y	X	C	L	A	K

جدول(۲)

بطور مثال عبارت کد شده XPLGYSYXDGCSY با استفاده از جدول(۲) بصورت LINEARALGEBRA دیکد می شود. یکی از اشکالات عمده این روش کد گذاری سهولت یافتن رمز آن است. زیرا در این روش هر یک از حروف همواره با یک حرف ثابت کد می شود و با توجه به تعداد تکرار برخی از حروف پر کاربرد در زبان انگلیسی به آسانی می توان جدول کد گذاری مربوطه را بدست آورد.

یکی دیگر از روش های کد گذاری، که در مبحث جبرخطی مطرح می گردد، استفاده از اعداد در کد کردن پیام های متنی است. در این روش با احتساب فاصله بین کلمات و دو علامت نگارشی نقطه و علامت پرسشی از جدولی به شکل زیر برای کد گذاری استفاده می شود.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	.	?	¬
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

جدول(۳)

پیام متنی SINGULAR VALUE DECOMPOSITION با استفاده از این روش با تفکیک به بردارهای سه تایی بصورت زیر کد می شود،

$$S\begin{bmatrix}18\\8\\13\end{bmatrix}\ G\begin{bmatrix}6\\20\\11\end{bmatrix}\ A\begin{bmatrix}0\\17\\28\end{bmatrix}\ V\begin{bmatrix}21\\0\\11\end{bmatrix}\ U\begin{bmatrix}20\\4\\28\end{bmatrix}\ D\begin{bmatrix}3\\4\\2\end{bmatrix}\ O\begin{bmatrix}14\\12\\15\end{bmatrix}\ O\begin{bmatrix}14\\18\\8\end{bmatrix}\ T\begin{bmatrix}19\\8\\14\end{bmatrix}\ N\begin{bmatrix}13\\13\\13\end{bmatrix}$$

لازم به ذکر است در انتهای پیام جهت تکمیل بردار نهایی می توان حرف آخر را به تعداد مورد نیاز تکرار نمود. در مورد این مثال حرف N در انتهای عبارت دو بار تکرار شده است. نهایتاً پیام حاصل را می توان بصورت ماتریس زیر نمایش داد،

$$P=\begin{bmatrix}18 & 6 & 0 & 21 & 20 & 3 & 14 & 14 & 19 & 13\\ 8 & 20 & 17 & 0 & 4 & 4 & 12 & 18 & 8 & 13\\ 13 & 11 & 28 & 11 & 28 & 2 & 15 & 8 & 14 & 13\end{bmatrix}$$

تا این مرحله توانستیم پیام متنی را با استفاده از جدول(۳) بصورت اعداد کد نماییم. حال برای رمزی کردن این پیام از یک ماتریس کلیدی (key matrix) معکوس پذیر 3×3 استفاده می نماییم،

$$A=\begin{bmatrix}3 & 10 & 20\\ 20 & 9 & 17\\ 9 & 4 & 17\end{bmatrix}$$

با ضرب ماتریس کلیدی A در ماتریس P پیام رمز شده بدست می آید،

$$AP=\begin{bmatrix}394 & 438 & 730 & 283 & 660 & 89 & 462 & 382 & 417 & 429\\ 653 & 487 & 629 & 607 & 912 & 130 & 643 & 578 & 690 & 598\\ 415 & 321 & 544 & 376 & 672 & 77 & 429 & 334 & 441 & 390\end{bmatrix}$$

برای بیان این ماتریس بصورت عبارت متنی رمز شده باید درایه های ماتریس را به اعدادی در محدوده 0 تا 28 تبدیل نماییم. برای این منظور از محاسبات ماجولار یا پیمانه ای (modular arithmetic) استفاده می نماییم. در این روش هر یک از اعداد را با باقیمانده تقسیم آن عدد بر 29 جایگزین می نماییم، بطور مثال،

$$394=29\times 13+17 \quad\rightarrow\quad 394\equiv 17 \pmod{29}$$
$$653=29\times 22+15 \quad\rightarrow\quad 653\equiv 15 \pmod{29}$$
$$415=29\times 14+9 \quad\rightarrow\quad 415\equiv 9 \pmod{29}$$
$$\vdots$$

به این ترتیب ماتریس رمز شده در $\bmod 29$ بصورت زیر بیان می شود،

$$AP=\begin{bmatrix}17 & 3 & 5 & 22 & 22 & 2 & 27 & 5 & 11 & 23\\ 15 & 23 & 20 & 27 & 13 & 14 & 5 & 27 & 23 & 18\\ 9 & 2 & 22 & 28 & 5 & 19 & 23 & 15 & 6 & 13\end{bmatrix}$$

حال با استفاده از جدول(۳) پیام رمز شده را می نویسیم،

RPJDXCFUWW? WNFCOT?FXF?PLXGXSN

مزیتی که این روش دارد آن است که پیدا کردن رمز به راحتی امکان پذیر نیست و هر حرف به چند صورت متفاوت کد شده است. بطور مثال حرف O در این پیام سه بار تکرار شده و به فرم های G و F و ? رمز شده است.

۲- رمزگشایی و دیکُد کردن پیام های رمز شده

برای رمزگشایی عبارت های رمز شده و بازیابی پیام اصلی، از معکوس ماتریس کلیدی در $\bmod 29$ استفاده می شود. برای محاسبه معکوس اعداد در $\bmod 29$ بصورت زیر عمل می کنیم،

$$2\times 15 = 30 \equiv 1 \pmod{29} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \equiv 15 \pmod{29}$$

$$3\times 10 = 30 \equiv 1 \pmod{29} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{3} \equiv 10 \pmod{29}$$

$$4\times 22 = 88 \equiv 1 \pmod{29} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{4} \equiv 22 \pmod{29}$$

$$\vdots$$

در واقع برای دو عدد a و b اگر $a\times b \equiv 1 \pmod{29}$ باشد، در اینصورت عدد b معکوس عدد a خواهد بود. حال می خواهیم معکوس ماتریس A را بدست آوریم،

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 10 & 20 \\ 20 & 9 & 17 \\ 9 & 4 & 17 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{-1635}\begin{bmatrix} 85 & -90 & -10 \\ -187 & -129 & 349 \\ -1 & 78 & -173 \end{bmatrix}$$

برای بدست آوردن A^{-1} در $\bmod 29$ بصورت زیر عمل می کنیم،

$$1635\times b \equiv 1 \pmod{29} \quad \rightarrow \quad b = 8 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{1635} \equiv 8 \pmod{29}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -680 & 720 & 80 \\ 1496 & 1032 & -2792 \\ 8 & -624 & 1384 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 16 & 24 & 22 \\ 17 & 17 & 21 \\ 8 & 14 & 21 \end{bmatrix}$$

می توان بررسی کرد که A^{-1} بدست آمده معکوس ماتریس کلیدی A در $\bmod 29$ است،

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 16 & 24 & 22 \\ 17 & 17 & 21 \\ 8 & 14 & 21 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 10 & 20 \\ 20 & 9 & 17 \\ 9 & 4 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 726 & 464 & 1102 \\ 580 & 407 & 986 \\ 493 & 290 & 755 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \pmod{29}$$

حال از ماتریس A^{-1} می توان برای رمزگشایی عبارت رمز شده استفاده کرد. پیام رمز شده بصورت زیر می باشد،

RPJDXCFUWW? WNFCOT?FXF?PLXGXSN

ابتدا آن را بصورت بردارهای ستونی سه تایی نمایش می دهیم،

$$\begin{matrix} R\begin{bmatrix}17\\15\\9\end{bmatrix} & D\begin{bmatrix}3\\23\\2\end{bmatrix} & F\begin{bmatrix}5\\20\\22\end{bmatrix} & W\begin{bmatrix}22\\27\\28\end{bmatrix} & W\begin{bmatrix}22\\13\\5\end{bmatrix} & C\begin{bmatrix}2\\14\\19\end{bmatrix} & ?\begin{bmatrix}27\\5\\23\end{bmatrix} & F\begin{bmatrix}5\\27\\15\end{bmatrix} & L\begin{bmatrix}11\\23\\6\end{bmatrix} & X\begin{bmatrix}23\\18\\13\end{bmatrix} \end{matrix}$$

لذا حاصل بصورت ماتریس زیر بدست می آید،

$$C=\begin{bmatrix}17&3&5&22&22&2&27&5&11&23\\15&23&20&27&13&14&5&27&23&18\\9&2&22&28&5&19&23&15&6&13\end{bmatrix}$$

حال $A^{-1}C$ را که همان ماتریس رمز گشایی شده است بدست می آوریم،

$$A^{-1}C=\begin{bmatrix}16&24&22\\17&17&21\\8&14&21\end{bmatrix}\begin{bmatrix}17&3&5&22&22&2&27&5&11&23\\15&23&20&27&13&14&5&27&23&18\\9&2&22&28&5&19&23&15&6&13\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}830&644&1044&1616&774&786&1058&1058&860&1086\\733&484&887&1421&700&671&1027&859&704&970\\535&388&782&1142&463&611&769&733&536&709\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}18&6&0&21&20&3&14&14&19&13\\8&20&17&0&4&4&12&18&8&13\\13&11&28&11&28&2&15&8&14&13\end{bmatrix}\pmod{29}$$

و نهایتاً با استفاده از جدول(۳) دیکُد می کنیم،

$$\begin{matrix} S\begin{bmatrix}18\\8\\13\end{bmatrix} & G\begin{bmatrix}6\\20\\11\end{bmatrix} & A\begin{bmatrix}0\\17\\28\end{bmatrix} & V\begin{bmatrix}21\\0\\11\end{bmatrix} & U\begin{bmatrix}20\\4\\28\end{bmatrix} & D\begin{bmatrix}3\\4\\2\end{bmatrix} & O\begin{bmatrix}14\\12\\15\end{bmatrix} & O\begin{bmatrix}14\\18\\8\end{bmatrix} & T\begin{bmatrix}19\\8\\14\end{bmatrix} & N\begin{bmatrix}13\\13\\13\end{bmatrix} \end{matrix}$$

SINGULAR VALUE DECOMPOSITION

لذا با داشتن ماتریس کلیدی و معکوس آن به راحتی می توان عبارت های متنی را کُد، رمزی و سپس رمزگشایی و دیکُد کرد،

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

پروژه رمزنگاری

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

نیمسال اول ۹۰-۹۱

مهلت تحویل: **۹۰/۸/۱۸**

۳- پروژه

۱- معکوس اعداد 1 تا 28 را در $\bmod 29$ و اعداد 1 تا 25 را در $\bmod 26$ بدست آورید و آنها را در دو جدول جداگانه نمایش دهید. آیا تمام اعداد در $\bmod 29$ و در $\bmod 26$ معکوس پذیر هستند؟ چه نتیجه ای می گیرید؟

۲- یک ماتریس تحت چه شرایطی در $\bmod 29$ و در $\bmod 26$ معکوس پذیر است. معکوس ماتریس A را یکبار در $\bmod 29$ و یکبار در $\bmod 26$ بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}21 & 24 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 21 & 19 & 17\end{bmatrix}$$

۳- عبارت LINEAR ALGEBRA IS FUN را با استفاده از ماتریس کلیدی A در $\bmod 29$ رمز نمایید و پیام رمز شده را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}4 & 9 & 15\\ 15 & 17 & 6\\ 24 & 0 & 17\end{bmatrix}$$

۴- ماتریس کلیدی زیر را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}11 & 20 & 20\\ 2 & 1 & 24\\ 9 & 3 & 3\end{bmatrix}$$

عبارت رمز شده زیر را با استفاده از ماتریس کلیدی A در $\bmod 26$ رمزگشایی و دیکُد کنید.

CQUIWEHMWESTAHVPDIKUJIVPIAI

۵- اگر عبارت HILLCIPHER توسط ماتریس کلیدی $A_{2\times 2}$ در $\bmod 29$ بصورت JK.M¬TWIBO رمز شده باشد، ماتریس کلیدی $A_{2\times 2}$ را برای این رمزنگاری بدست آورید.

۶- با استفاده از نرم افزار MATLAB برنامه ای بنویسید که،

الف) با دریافت عبارت متنی اصلی و ماتریس کلیدی 3×3، عبارت رمز شده حاصل در $\bmod 29$ را چاپ نماید.

ب) با دریافت متن رمز شده و ماتریس کلیدی 3×3 عبارت اصلی را در $\bmod 29$ بازسازی کرده و نمایش دهد.

m فایل برنامه نویسی را پیش از اتمام مهلت تحویل آن به پست الکترونیکی درس LA@eetd.kntu.ac.ir ارسال نمایید.

پرینت متن برنامه نوشته شده و پرینت اجرای آن را همراه با توضیحات لازم شخصاً پیش از اتمام مهلت تحویل آن ارائه نمایید. برای مطالعه بیشتر می توانید از مراجع زیر استفاده نمایید.

http://practicalcryptography.com/ciphers/hill-cipher/

http://en.wikipedia.org/wiki/Hill_cipher

همیشه موفق باشید

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

پروژه مقادیر ویژه و مقادیر منفرد

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

نیمسال اول ۹۰-۹۱

مهلت تحویل: **۹۰/۱۰/۱۴**

بخش اول: کاربرد بردارهای ویژه در رتبه بندی داده ها

جدول نتایج مسابقات ده تیم ورزشی را در نظر بگیرید، می خواهیم لیست تیم های برتر مسابقات را بدست آوریم. در هر یک از خانه های جدول نام تیم برنده نوشته شده است و در صورت تساوی از لغت مساوی استفاده شده است.

	T۱	T۲	T۳	T۴	T۵	T۶	T۷	T۸	T۹	T۱۰
T۱	×	مساوی	T۱	T۴	T۵	مساوی	T۷	T۱	مساوی	T۱۰
T۲	مساوی	×	T۳	T۲	T۵	T۲	T۲	T۸	T۹	T۱۰
T۳	T۱	T۳	×	مساوی	T۵	T۶	مساوی	T۳	T۹	مساوی
T۴	T۴	T۲	مساوی	×	T۴	مساوی	T۷	T۴	T۹	T۴
T۵	T۵	T۵	T۵	T۴	×	T۶	T۵	T۸	مساوی	T۵
T۶	مساوی	T۲	T۶	مساوی	T۶	×	T۷	مساوی	T۶	T۱۰
T۷	T۷	T۲	مساوی	T۷	T۵	T۷	×	T۸	T۹	T۷
T۸	T۱	T۸	T۳	T۴	T۸	مساوی	T۸	×	T۹	T۱۰
T۹	مساوی	T۹	T۹	T۹	مساوی	T۶	T۹	T۹	×	T۱۰
T۱۰	T۱۰	T۱۰	مساوی	T۴	T۵	T۱۰	T۷	T۱۰	T۱۰	×

اگر درجه برتری تیم iام $(i=1,\dots,10)$ را با متغیر x_i بیان کنیم، x_i متناسب خواهد بود با مجموع درجات برتری تیم هایی که توسط تیم iام شکست داده شده است،

$$\begin{aligned} x_1 &= k(x_3+x_8) \\ x_2 &= k(x_4+x_6+x_7) \\ &\vdots \\ x_{10} &= k(x_1+x_2+x_6+x_8+x_9) \end{aligned}$$

حال می توان این معادلات را بصورت معادلات ماتریس زیر نمایش داد،

$$\mathbf{x} = kA\mathbf{x} \quad , \quad x_i = k\sum_{j=1}^{10} a_{ij}x_j$$

که در آن، $\mathbf{x}=[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_{10}]^T$ بوده و ماتریس A یک ماتریس 10×10 است. لذا اگر تیم iام تیم jام را برده باشد، عنصر a_{ij} برابر با یک است، در غیر اینصورت برابر صفر خواهد بود. همان طور که مشخص است این مسئله یک مسئله مقدار ویژه-بردار ویژه است و بردار $\mathbf{x}$ که بیانگر درجه برتری تیم ها می باشد یک بردار ویژه برای ماتریس A است.

۱- با استفاده از جدول بالا ماتریس A را بدست آورید.

۲- با استفاده از نرم افزار MATLAB بردار های ویژه ماتریس A را بدست آورده و برداری را که قدر مطلق تمامی عناصر آن مثبت است را انتخاب کنید. بزرگترین عنصر در این بردار نشان دهنده برترین تیم است و به همین ترتیب اولویت های بعدی بدست می آیند.

۳- ده تیم برتر مسابقات را به ترتیب اولویت بیان کنید. آیا هوشمندی خاصی در نحوه رتبه بندی مشاهده می کنید؟

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

پروژه مقادیر ویژه و مقادیر منفرد

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

نیمسال اول ۹۰-۹۱

مهلت تحویل: **۹۰/۱۰/۱۴**

بخش دوم: کاربرد تجزیه QR در محاسبه مقادیر ویژه

محاسبه مقادیر ویژه ماتریس زمانیکه ابعاد ماتریس بیشتر از 3×3 باشد مستلزم صرف محاسبات زیادی برای محاسبه دترمینان و محاسبه ریشه های معادله مشخصه می باشد. لذا در اکثر مواقع از روش های عددی برای محاسبه مقادیر ویژه ماتریس ها استفاده می شود.

یکی از روش های بدست آوردن مقادیر ویژه استفاده تجزیه QR است. در این روش سعی می شود تا با استفاده از تجزیه QR ماتریس مذکور به یک ماتریس بالا مثلثی تبدیل گردد، که در این صورت عناصر روی قطر اصلی همان مقادیر ویژه خواهند بود. برای این منظور از الگوریتمی بصورت زیر استفاده می شود،

مرحله ۱- ماتریس A را در نظر بگیرید،

مرحله ۲- تجزیه $A = Q_0 R_0$ را بدست آورید. سپس ماتریس $A_1 = R_0 Q_0$ را محاسبه نمایید.

مرحله ۳- تجزیه $A_1 = Q_1 R_1$ را بدست آورید. سپس ماتریس $A_2 = R_2 Q_2$ را محاسبه نمایید.

مرحله ۴- به همین ترتیب تا m مرحله ادامه دهید.

مرحله ۵- الگوریتم زمانی پایان می یابد که عناصر زیر قطر اصلی ماتریس A_m به صفر نزدیک شده باشند.

مرحله ۶- حال عناصر روی قطر اصلی ماتریس A_m همان مقادیر ویژه ماتریس A خواهند بود.

۱- با استفاده از الگوریتم بالا موارد زیر را ثابت کنید و حل دستی را ارائه دهید،

الف) $A = Q_0 A_1 Q_0^T$

ب) $A = (Q_0 Q_1) A_2 (Q_0 Q_1)^T$

ج) ماتریس $Q_0 Q_1$ یک ماتریس متعامد است.

د) ماتریس های A_1, A و A_2 مقادیر ویژه یکسانی دارند.

۲- برنامه ای با نرم افزار MATLAB بنویسید که با استفاده از الگوریتم بالا مقادیر ویژه ماتریس ورودی را تخمین بزند. برنامه خود را برای ماتریس های زیر امتحان کنید و نتایج آن را ارائه دهید.

سپس با استفاده از دستور eig در نرم افزار MATLAB مقادیر ویژه ماتریس های مذکور را بیابید و نتیجه را با محاسبات برنامه خود مقایسه کنید.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 7 & -7 & 6 \\ 5 & 7 & -8 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 & -7 \\ 1 & 2 & 6 & 8 \\ 8 & 5 & 1 & -5 \\ -5 & 8 & -5 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -3 & 4 & -9 \\ -1 & 7 & -4 & -3 & -7 \\ -6 & -6 & -1 & 6 & 5 \\ 9 & 2 & 6 & 2 & -8 \\ -7 & -8 & 6 & -9 & -1 \end{bmatrix}$$

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

پروژه مقادیر ویژه و مقادیر منفرد

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

نیمسال اول ۹۰-۹۱

مهلت تحویل: **۹۰/۱۰/۱۴**

بخش سوم: تعبیر هندسی تجزیه مقادیر منفرد

در این بخش تعبیر هندسی تجزیه مقادیر منفرد و اثر آن بر مکان های هندسی با شکل خاص بررسی می گردد. حال نگاشت حاصل از $A_{n\times n}\mathbf{x}_{n\times 1}=\mathbf{y}_{n\times 1}$ را در نظر بگیرید،

$$\mathbf{x} \longrightarrow \boxed{A} \longrightarrow A\mathbf{x}$$

۱- با استفاده از تجزیه مقادیر منفرد ثابت کنید، در فضای دو بعدی، اگر $\|\mathbf{x}\|\le 1$ باشد، مکان هندسی $\mathbf{y}$ یک بیضی بصورت زیر خواهد بود،

$$\frac{y_1^2}{\sigma_1^2}+\frac{y_2^2}{\sigma_2^2}\le 1$$

که در آن σ_1 و σ_2 مقادیر منفرد ماتریس A هستند.

۲- با استفاده از نرم افزار MATLAB برنامه ای بنویسید که ماتریس $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}$ را به عنوان ورودی بگیرد،

الف) با استفاده از دستور svd تجزیه مقادیر منفرد ماتریس را نمایش دهد.

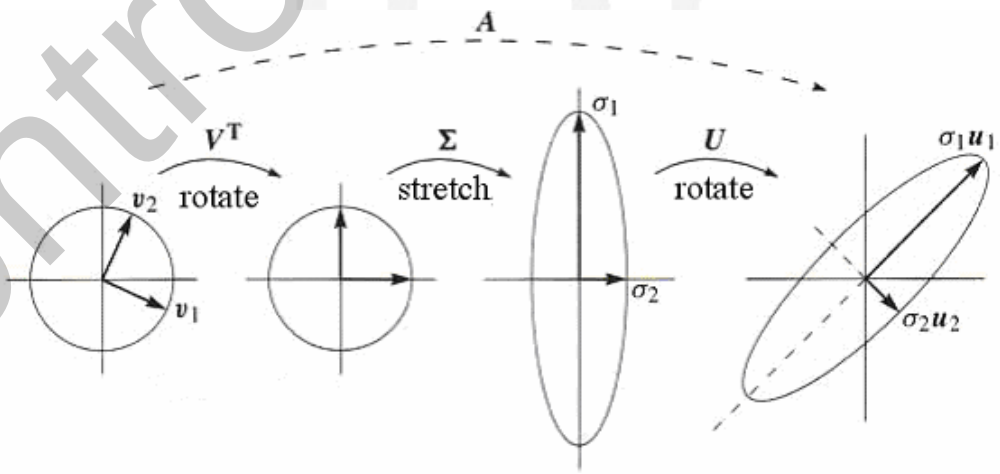
$$A=\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \sigma_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2\end{bmatrix}^T$$

ب) اگر مکان هندسی نقاط درون و روی دایره واحد را با استفاده از این ماتریس تبدیل نماییم، مکان هندسی حاصل چه خواهد شد؟

ج) دایره واحد را همراه با بردارهای $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ در یک صفحه رسم نماید.

د) مکان هندسی حاصل از تبدیل را همراه با بردارهای تبدیل یافته $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ توسط ماتریس A را در صفحه دیگر رسم نمایید.

ه) با توجه به نتایج بدست آمده چه تعبیری از شکل زیر دارید؟



بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

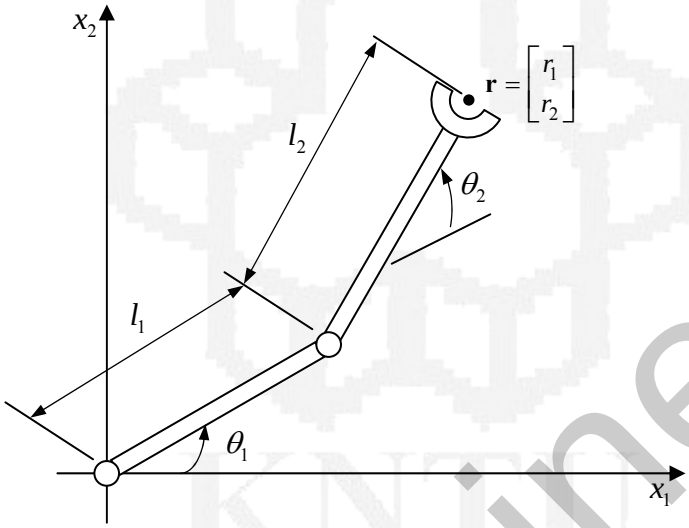
پروژه مقادیر ویژه و مقادیر منفرد

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

نیمسال اول ۹۰-۹۱

مهلت تحویل: **۹۰/۱۰/۱۴**

۳- شکل زیر یک بازوی ربات با دو محور حرکتی را در صفحه x_1x_2 نشان می دهد.



الف) موقعیت مکانی انتهایی بازو $\mathbf{r} \in \Re^2$ را بصورت تابعی از بردار زاویه $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \quad \theta_2]^T$ نشان دهید.

ب) رابطه بین سرعت انتهای بازو $\dot{\mathbf{r}}$ با سرعت زاویه ای $\dot{\theta}_1$ و $\dot{\theta}_2$ بصورت زیر است، آن را محاسبه نمایید،

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}$$

که در آن $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\theta}}$ ماتریس ژاکوبین می باشد.

ج) حال اگر $l_1 = l_2 = 1$ و $\theta_1 = \theta_2 = 30^\circ$ باشند، ماتریس ژاکوبین مذکور را محاسبه نموده و تجزیه مقادیر منفرد آن را بدست آورید.

د) با توجه به تعبیر هندسی تجزیه مقادیر منفرد، تعیین کنید اگر مکان هندسی $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ بصورت $\|\dot{\boldsymbol{\theta}}\| \le 1$ باشد، مکان هندسی $\dot{\mathbf{r}}$ به چه صورت خواهد بود؟

همیشه موفق باشید

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

حل تمرین های سری اول

نیمسال اول ۹۰-۹۱
۹۰/۶/۳۰

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

حل تمرین شماره ۱

برای بردارهای حقیقی $\mathbf{u}_{n\times1}$ و $\mathbf{v}_{n\times1}$،

$$\boxed{(\mathbf{u}+\mathbf{v})^T(\mathbf{u}-\mathbf{v})=\|\mathbf{u}\|^2-\|\mathbf{v}\|^2}$$

برای این منظور می توان نوشت،

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})^T(\mathbf{u}-\mathbf{v})=(\mathbf{u}^T+\mathbf{v}^T)(\mathbf{u}-\mathbf{v})=\mathbf{u}^T\mathbf{u}+\mathbf{v}^T\mathbf{u}-\mathbf{u}^T\mathbf{v}-\mathbf{v}^T\mathbf{v}=\mathbf{u}^T\mathbf{u}-\mathbf{v}^T\mathbf{v}=\|\mathbf{u}\|^2-\|\mathbf{v}\|^2$$

توجه کنید از آنجاییکه بردارها حقیقی هستند، $\mathbf{v}^T\mathbf{u}=\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle=\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=\mathbf{u}^T\mathbf{v}$ است.

* * *

حل تمرین شماره ۲

اگر ماتریس های A، B و $A+B$ غیر منفرد باشند،

$$\boxed{A(A+B)^{-1}B=B(A+B)^{-1}A=(A^{-1}+B^{-1})^{-1}}$$

برای این منظور با توجه به اینکه ماتریس های A، B و $A+B$ غیر منفرد هستند، ابتدا از طرفین تساوی ها معکوس می گیریم،

$$\begin{aligned}
&\left[A(A+B)^{-1}B\right]^{-1}=\left[B(A+B)^{-1}A\right]^{-1}=\left[(A^{-1}+B^{-1})^{-1}\right]^{-1}\\
&B^{-1}(A+B)A^{-1}=A^{-1}(A+B)B^{-1}=A^{-1}+B^{-1}\\
&(B^{-1}A+B^{-1}B)A^{-1}=(A^{-1}A+A^{-1}B)B^{-1}=A^{-1}+B^{-1}\\
&(B^{-1}A+I)A^{-1}=(I+A^{-1}B)B^{-1}=A^{-1}+B^{-1}\\
&B^{-1}AA^{-1}+IA^{-1}=IB^{-1}+A^{-1}BB^{-1}=A^{-1}+B^{-1}\\
&B^{-1}I+A^{-1}=B^{-1}+A^{-1}I=A^{-1}+B^{-1}\\
&B^{-1}+A^{-1}=B^{-1}+A^{-1}=A^{-1}+B^{-1}
\end{aligned}$$

بنابراین صحت تساوی برآورده می شود.

* * *

حل تمرین شماره ۳

اگر $P^{-1}AP=B$ باشد، آنگاه $P^{-1}A^nP=B^n$ است ($n\ge1$)

برای این منظور می توان نوشت،

$$P^{-1}AP=B\quad\rightarrow\quad B^n=(P^{-1}AP)^n=\underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)}_{\downarrow}=P^{-1}A^nP$$

n مرتبه

* * *

حل تمرین شماره ۴

$$A=\begin{bmatrix}0&1&2\\3&0&0\\0&5&7\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\5&0&3\end{bmatrix}$$

می دانیم هر ماتریس مربعی حقیقی را می توان بصورت زیر تجزیه نمود،

$$A=U+V\quad,\quad U=\frac{1}{2}(A+A^T)\quad,\quad V=\frac{1}{2}(A-A^T)$$

که در آن U یک ماتریس متقارن و V یک ماتریس شبه متقارن است.

$$A=U+V\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}0&1&2\\3&0&0\\0&5&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2&1\\2&0&2.5\\1&2.5&7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&0&-2.5\\-1&2.5&0\end{bmatrix}$$

$$B=U+V\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\5&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&4\\2&3&2\\4&2&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&2\\1&-2&0\end{bmatrix}$$

****

حل تمرین شماره ۵

$$A=\begin{bmatrix}3&0&8&1&2\\2&1&8&1&2\\4&0&17&2&4\\6&0&24&4&6\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}=I_5+\begin{bmatrix}1\\1\\2\\3\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&8&1&2\end{bmatrix}$$

برای محاسبه $|A|$ از رابطه زیر استفاده می نماییم،

$$|I_n+AB|=1+BA\quad,\quad A_{n\times1},B_{1\times n}$$

لذا داریم،

$$|A|=|I_5+GH|=1+HG=1+\begin{bmatrix}2&0&8&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\2\\3\\0\end{bmatrix}=22$$

****

حل تمرین شماره ۶

برای ماتریس های $A_{n\times n}$، $B_{n\times m}$، $C_{m\times n}$ و $D_{m\times m}$ روابط زیر برقرار هستند،

الف) اگر $|A|\neq 0$ و $|D-CA^{-1}B|\neq 0$ باشند،

$$\boxed{\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1}+A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}}$$

برای نشان دادن صحت تساوی بصورت زیر عمل می کنیم،

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1}+A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A^{-1}+A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1})A-A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}C & (A^{-1}+A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1})B-A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}D \\ -(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}A+(D-CA^{-1}B)^{-1}C & -(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}B+(D-CA^{-1}B)^{-1}D \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n+A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}C-A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}C & A^{-1}B+A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}B-A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}D \\ -(D-CA^{-1}B)^{-1}C+(D-CA^{-1}B)^{-1}C & (D-CA^{-1}B)^{-1}(-CA^{-1}B+D) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & A^{-1}B+A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}(CA^{-1}B-D) \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & A^{-1}B-A^{-1}B \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

ب) اگر $|D|\neq 0$ و $|A-BD^{-1}C|\neq 0$ باشند، آنگاه،

$$\boxed{\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1} & -(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1}+D^{-1} \end{bmatrix}}$$

برای نشان دادن صحت تساوی بصورت زیر عمل می کنیم،

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1} & -(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1}+D^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1}A-(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1}C & (A-BD^{-1}C)^{-1}B-(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1}D \\ -D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1}A+D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1}C+D^{-1}C & -D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1}B+D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1}D+D^{-1}D \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1}(A-BD^{-1}C) & (A-BD^{-1}C)^{-1}B-(A-BD^{-1}C)^{-1}B \\ -D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1}(A-BD^{-1}C)+D^{-1}C & -D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1}B+D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1}B+I_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -D^{-1}C+D^{-1}C & I_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

****

حل تمرین شماره ۷

معادله زیر به معادله لیاپانوف معروف است، که در آن $A_{n\times n}$ ماتریس دلخواه، $Q_{n\times n}$ ماتریس متقارن و $P_{n\times n}$ یک ماتریس مجهول می باشد.

$$A^T P + PA = -Q$$

الف) نشان دهید ماتریس مجهول $P_{n\times n}$ یک ماتریس متقارن است.

از آنجاییکه $Q_{n\times n}$ ماتریس متقارن است می توان نوشت،

$$\begin{aligned}
&-Q=-Q^T \\
&A^T P+PA=(A^T P+PA)^T \\
&A^T P+PA=(A^T P)^T+(PA)^T \\
&A^T P+PA=P^T A+A^T P^T \\
&A^T P-A^T P^T=P^T A-PA \\
&A^T(P-P^T)=(P^T-P)A \\
&A^T(P-P^T)+(P-P^T)A=0
\end{aligned}$$

مشخص است که، اگر $P=P^T$ باشد، معادله اخیر برآورده می شود. لذا ماتریس P متقارن است.

ب) اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ و $Q=I$ باشد، ماتریس مجهول P را بدست آورید.

$$A^T P+PA=-Q \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2p_{11}+2p_{21}+2p_{12} & p_{11}+4p_{12}+2p_{22} \\ p_{11}+4p_{21}+2p_{22} & p_{12}+p_{21}+6p_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

حال باید برای بدست آوردن ماتریس P دستگاه معادلات زیر را حل نماییم،

$$\begin{cases} 2p_{11}+2p_{21}+2p_{12}=-1 \\ p_{11}+4p_{21}+2p_{22}=0 \\ p_{11}+4p_{21}+2p_{22}=0 \\ p_{12}+p_{21}+6p_{22}=-1 \end{cases}$$

توجه کنید از آنجاییکه ماتریس Q متقارن است، لذا دستگاه معادلات سه معادله و چهار مجهول دارد. لذا دستگاه معادلات می تواند بیشمار جواب داشته باشد، لیکن با در نظر گرفتن اینکه ماتریس P متقارن است و $p_{12}=p_{21}$ است، می توان دستگاه را بصورت سه معادله سه مجهول خلاصه نموده و یک جواب منحصربفرد بدست آورد،

$$\begin{cases} 2p_{11}+4p_{21}=-1 \\ p_{11}+4p_{21}+2p_{22}=0 \\ 2p_{21}+6p_{22}=-1 \end{cases}$$

با حل دستگاه معادلات اخیر ماتریس متقارن P به فرم زیر بدست می آید،

$$P=\begin{bmatrix} \frac{-7}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{-9}{24} \end{bmatrix}$$

ج) با استفاده از دستور $P=\text{lyap}(A,Q)$ در نرم افزار MATLAB داریم،

```
A=[1 1;2 3];
Q=[1 0;0 1];
P=lyap(A,Q)
P =
   -1.3750    0.8750
    0.8750   -0.7500
```

توجه نمایید که نرم افزار MATLAB پاسخ معادله $AP+PA^T+Q=0$ را بدست می آورد، که در صورت متقارن بودن ماتریس Q ماتریس P نیز متقارن خواهد بود.

****

حل تمرین شماره ۸

$$\boxed{\dddot{y}(t)+3\ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+y(t)=u(t)}$$

الف) با فرض اینکه $x_1(t)=y(t)$ و $x_2(t)=\dot{y}(t)$ و $x_3(t)=\ddot{y}(t)$ باشد، فرم معادلات را بصورت $\dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t)+B\mathbf{u}(t)$ بنویسید.

$$\begin{cases} x_1(t)=y(t)\rightarrow \dot{x}_1(t)=\dot{y}(t) \\ x_2(t)=\dot{y}(t)\rightarrow \dot{x}_2(t)=\ddot{y}(t) \\ x_3(t)=\ddot{y}(t)\rightarrow \dot{x}_3(t)=\dddot{y}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t)=x_2(t) \\ \dot{x}_2(t)=x_3(t) \\ \dot{x}_3(t)=-x_1(t)-3x_2(t)-3x_3(t)+u(t) \end{cases}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&-3&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u(t)$$

ب) اگر $X(s)$ تبدیل لاپلاس $\mathbf{x}(t)$ باشد، $X(s)$ را بصورت پارامتری بدست آورید.

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t)+B\mathbf{u}(t)\rightarrow sX(s)-\mathbf{x}(0)=AX(s)+BU(s)\rightarrow(sI-A)X(s)=\mathbf{x}(0)+BU(s)$$

$$X(s)=(sI-A)^{-1}\mathbf{x}(0)+(sI-A)^{-1}BU(s)$$

حال برای سیستم مورد نظر داریم،

$$X(s)=\begin{bmatrix}s&-1&0\\0&s&-1\\1&3&s+3\end{bmatrix}^{-1}\mathbf{x}(0)+\begin{bmatrix}s&-1&0\\0&s&-1\\1&3&s+3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}U(s)$$

برای محاسبه $(sI-A)^{-1}$ می توان بصورت زیر عمل نمود،

$$(sI-A)^{-1}=\frac{adj(sI-A)}{|sI-A|}$$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{s^3+3s^2+3s+1}\begin{bmatrix}s^2+3s+3&s+3&1\\-1&s(s+3)&s\\-s&-3s-1&s^2\end{bmatrix}=\frac{1}{(s+1)^3}\begin{bmatrix}s^2+3s+3&s+3&1\\-1&s(s+3)&s\\-s&-3s-1&s^2\end{bmatrix}$$

لذا جواب نهایی را بصورت پارامتری داریم،

$$X(s)=\frac{1}{(s+1)^3}\begin{bmatrix}s^2+3s+3&s+3&1\\-1&s(s+3)&s\\-s&-3s-1&s^2\end{bmatrix}\mathbf{x}(0)+\frac{1}{(s+1)^3}\begin{bmatrix}1\\s\\s^2\end{bmatrix}U(s)$$

توجه: برای انجام محاسبات پارامتری در نرم افزار MATLAB می توان بصورت زیر عمل نمود،

```
s=sym('s');
A=[0 1 0;0 0 1;-1 -3 -3];
det(s*eye(3)-A)
ans =
          s^3+3*s^2+3*s+1
```

****

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

حل تمرین های سری اول

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۶/۳۰

حل تمرین شماره ۹

$$\boxed{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \\ k & k & 1 & 1 \\ k & k & k & 1 \end{vmatrix} = (1-k)^3}$$

برای اثبات از عملیات ستونی در دترمینان ها کمک می گیریم،

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \\ k & k & 1 & 1 \\ k & k & k & 1 \end{vmatrix} \overset{c_1-c_2\to c_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ k & 1-k & 1 & 1 \\ k & 0 & 1 & 1 \\ k & 0 & k & 1 \end{vmatrix} \overset{c_1-c_3\to c_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ k & 1-k & 1-k & 1 \\ k & 0 & 1-k & 1 \\ k & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{c_1-c_4\to c_4}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k & 1-k & 1-k & 1-k \\ k & 0 & 1-k & 1-k \\ k & 0 & 0 & 1-k \end{vmatrix}$$

حال با توجه به دترمینان ماتریس های بلوکی داریم،

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k & 1-k & 1-k & 1-k \\ k & 0 & 1-k & 1-k \\ k & 0 & 0 & 1-k \end{vmatrix} = |1| \begin{vmatrix} 1-k & 1-k & 1-k \\ 0 & 1-k & 1-k \\ 0 & 0 & 1-k \end{vmatrix} = (1-k)^3$$

به این ترتیب نتیجه به دست می آید.

$$\boxed{\begin{vmatrix} 1+k_1 & k_1 & k_1 & k_1 \\ k_2 & 1+k_2 & k_2 & k_2 \\ k_3 & k_3 & 1+k_3 & k_3 \\ k_4 & k_4 & k_4 & 1+k_4 \end{vmatrix} = 1+k_1+k_2+k_3+k_4}$$

برای اثبات ابتدا از عملیات ستونی سپس از عملیات سطری در دترمینان ها کمک می گیریم،

$$\begin{vmatrix} 1+k_1 & k_1 & k_1 & k_1 \\ k_2 & 1+k_2 & k_2 & k_2 \\ k_3 & k_3 & 1+k_3 & k_3 \\ k_4 & k_4 & k_4 & 1+k_4 \end{vmatrix} \overset{-c_1+c_2\to c_2}{=} \begin{vmatrix} 1+k_1 & -1 & k_1 & k_1 \\ k_2 & 1 & k_2 & k_2 \\ k_3 & 0 & 1+k_3 & k_3 \\ k_4 & 0 & k_4 & 1+k_4 \end{vmatrix} \overset{-c_1+c_3\to c_3}{=} \begin{vmatrix} 1+k_1 & -1 & -1 & k_1 \\ k_2 & 1 & 0 & k_2 \\ k_3 & 0 & 1 & k_3 \\ k_4 & 0 & 0 & 1+k_4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{-c_1+c_4\to c_4}{=} \begin{vmatrix} 1+k_1 & -1 & -1 & -1 \\ k_2 & 1 & 0 & 0 \\ k_3 & 0 & 1 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_2+r_1\to r_1}{=} \begin{vmatrix} 1+k_1+k_2 & 0 & -1 & -1 \\ k_2 & 1 & 0 & 0 \\ k_3 & 0 & 1 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_3+r_1\to r_1}{=} \begin{vmatrix} 1+k_1+k_2+k_3 & 0 & 0 & -1 \\ k_2 & 1 & 0 & 0 \\ k_3 & 0 & 1 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_4+r_1\to r_1}{=} \begin{vmatrix} 1+k_1+k_2+k_3+k_4 & 0 & 0 & 0 \\ k_2 & 1 & 0 & 0 \\ k_3 & 0 & 1 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

حال با توجه به دترمینان ماتریس های بلوکی داریم،

$$\left|\begin{array}{c:ccc} 1+k_1+k_2+k_3+k_4 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline k_2 & 1 & 0 & 0 \\ k_3 & 0 & 1 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| = \left|1+k_1+k_2+k_3+k_4\right| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+k_1+k_2+k_3+k_4$$

به این ترتیب نتیجه به دست می آید.

****

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

حل تمرین های سری دوم

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۶/۷

حل تمرین شماره ۱

با استفاده از روش گوس- جردن ماتریس C را چنان بیابید که $AC = B$ باشد.

$$\boxed{A=\begin{bmatrix}2&1&3\\-2&-4&2\\4&5&2\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}1&-1\\2&0\\3&1\end{bmatrix}}$$

الگوریتم گوس- جردن را می توان بصورت زیر در نظر گرفت،

$$[A|B]\quad\rightarrow\quad[I|C]$$

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|cc}2&1&3&1&-1\\-2&-4&2&2&0\\4&5&2&3&1\end{array}\right]\quad\begin{array}{c}r_1+r_2\rightarrow r_2\\-2r_1+r_3\rightarrow r_3\end{array}\quad\left[\begin{array}{ccc|cc}2&1&3&1&-1\\0&-3&5&3&-1\\0&3&-4&1&3\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c}\frac{1}{3}r_2+r_1\rightarrow r_1\\r_2+r_3\rightarrow r_3\end{array}\quad\left[\begin{array}{ccc|cc}2&0&\frac{14}{3}&2&\frac{-4}{3}\\0&-3&5&3&-1\\0&0&1&4&2\end{array}\right]\quad\begin{array}{c}\frac{-14}{3}r_3+r_1\rightarrow r_1\\-5r_3+r_2\rightarrow r_2\end{array}\quad\left[\begin{array}{ccc|cc}2&0&0&\frac{-50}{3}&\frac{-32}{3}\\0&-3&0&-17&-11\\0&0&1&4&2\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c}\frac{1}{2}r_1\rightarrow r_1\\\frac{-1}{3}r_2\rightarrow r_2\end{array}\quad\left[\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&\frac{-25}{3}&\frac{-16}{3}\\0&1&0&\frac{17}{3}&\frac{11}{3}\\0&0&1&4&2\end{array}\right]=[I|C]$$

$$C=\begin{bmatrix}\frac{-25}{3}&\frac{-16}{3}\\\frac{17}{3}&\frac{11}{3}\\4&2\end{bmatrix}$$

به این ترتیب ماتریس C بدست می آید.

****

حل تمرین شماره ۲

معکوس ماتریس ها را با استفاده از روش گوس- جردن بدست می آوریم،

$$\boxed{A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&9&12\end{bmatrix}\quad,\quad[A|I]\quad\rightarrow\quad[I|A^{-1}]}$$

$$[A|I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&3&4&0&1&0\\3&9&12&0&0&1\end{array}\right]\quad\begin{array}{c}-2r_1+r_2\rightarrow r_2\\-3r_1+r_3\rightarrow r_3\end{array}\quad\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-1&-2&-2&1&0\\0&3&3&-3&0&1\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} 2r_2+r_1\to r_1 \\ 3r_2+r_3\to r_3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & 3 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \frac{-1}{3}r_3+r_1\to r_1 \\ \frac{-2}{3}r_3+r_2\to r_2 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} \\ 0 & -1 & 0 & 4 & -1 & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & -3 & -9 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} -r_2\to r_2 \\ \frac{-1}{3}r_3\to r_3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & \frac{-1}{3} \end{array}\right] = \left[I \middle| A^{-1}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{-1}{3} \\ -4 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & -1 & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A=[1 2 3;2 3 4;3 9 12];
inv(A)
ans =
         0    1.0000   -0.3333
   -4.0000    1.0000    0.6667
    3.0000   -1.0000   -0.3333
```

****

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad , \quad [B|I] \quad \to \quad \left[I \middle| B^{-1}\right]$$

$$[B|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} r_1+r_2\to r_2 \\ r_1+r_3\to r_3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$2r_2+r_3\to r_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \frac{-1}{2}r_3+r_1\to r_1 \\ -r_3+r_2\to r_2 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & -1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\frac{1}{2}r_3\to r_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & -1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] = \left[I \middle| B^{-1}\right]$$

بنام خداوند بخشنده و مهربان

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق - گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

جبر خطی کاربردی

حل تمرین های سری دوم

نیمسال اول ۹۰-۹۱
۹۰/۶/۷

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
B=[1 0 1;-1 1 1;-1 -2 -3];
inv(B)
ans =
   -0.5000   -1.0000   -0.5000
   -2.0000   -1.0000   -1.0000
    1.5000    1.0000    0.5000
```

****

$$C=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&1&1\end{bmatrix}\quad , \quad [C|I] \rightarrow [I|C^{-1}]$$

$$[C|I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&4&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right]\ \begin{array}{c}-2r_2+r_1\rightarrow r_1\\-r_2+r_3\rightarrow r_3\end{array}\ \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-5&-1&-2&0\\0&1&4&0&1&0\\0&0&-3&0&-1&1\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c}\frac{-5}{3}r_3+r_1\rightarrow r_1\\\frac{4}{3}r_3+r_2\rightarrow r_2\end{array}\ \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&\frac{-1}{3}&\frac{-5}{3}\\0&1&0&0&\frac{-1}{3}&\frac{4}{3}\\0&0&-3&0&-1&1\end{array}\right]\ \frac{-1}{3}r_3\rightarrow r_3\ \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&\frac{-1}{3}&\frac{-5}{3}\\0&1&0&0&\frac{-1}{3}&\frac{4}{3}\\0&0&1&0&\frac{1}{3}&\frac{-1}{3}\end{array}\right]=[I|C^{-1}]$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
C=[1 2 3;0 1 4;0 1 1];
inv(C)
ans =
    1.0000   -0.3333   -1.6667
         0   -0.3333    1.3333
         0    0.3333   -0.3333
```

****

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

حل تمرین های سری دوم

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۶/۷

حل تمرین شماره ۳

الف)
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

فرم ماتریس افزوده این معادلات بصورت زیر می باشد،

$$[A|\mathbf{b}] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

حل با روش حذفی گوسی،

گام اول- حذف مجهول x_1 از معادلات دوم و سوم،

$$\left.\begin{array}{l} -2r_1 + r_2 \rightarrow r_2 \\ -r_1 + r_3 \rightarrow r_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \rightarrow E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

گام دوم- حذف مجهول x_2 از معادله سوم،

$$2r_2 + r_3 \rightarrow r_3 \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 12 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \rightarrow E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

گام سوم - اجرای الگوریتم جایگزینی پسرو برای حل معادلات،

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -2 \\ x_2 - x_3 = 4 \\ -2x_3 = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_3 = -6 \\ x_2 = 4 + x_3 = -2 \\ x_1 = \frac{1}{2}(-2 - x_2 - 3x_3) = 9 \end{cases}$$

****

حل با روش گوس- جردن،

گام اول- حذف مجهول x_1 از تمامی معادلات به جز معادله اول،

$$\left.\begin{array}{l} -2r_1 + r_2 \rightarrow r_2 \\ -r_1 + r_3 \rightarrow r_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \rightarrow E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

گام دوم- حذف مجهول x_2 از تمامی معادلات به جز معادله دوم،

$$\left.\begin{array}{l} -r_2 + r_1 \rightarrow r_1 \\ 2r_2 + r_3 \rightarrow r_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 12 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \rightarrow E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

گام سوم - حذف مجهول x_3 از تمامی معادلات به جز معادله سوم،

$$\left.\begin{array}{l} 2r_3+r_1\to r_1 \\ \frac{-1}{2}r_3+r_2\to r_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 12 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \to E_5=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_6=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

گام چهارم- تبدیل عناصر قطری به عدد یک و بدست آوردن جوابها،

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}r_1\to r_1 \\ \frac{-1}{2}r_3\to r_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right] \to \begin{cases} x_1=9 \\ x_2=-2 \\ x_3=-6 \end{cases} \to E_7=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

در این دستگاه معادلات متغیر آزاد نداریم.

****

ب) $\boxed{\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3=1 \\ 6x_1+5x_2+7x_3=1 \end{cases}}$

فرم ماتریس افزوده این دستگاه معادلات بصورت زیر می باشد،

$$[A|\mathbf{b}] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 1 \\ 6 & 5 & 7 & 1 \end{array}\right]$$

حل با روش حذفی گوسی،

گام اول- حذف مجهول x_1 از معادلات دوم و سوم،

$$\left.\begin{array}{l} -2r_1+r_2\to r_2 \\ -3r_1+r_3\to r_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \to E_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

گام دوم- حذف مجهول x_2 از معادله سوم،

$$-2r_2+r_3\to r_3 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \to E_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

گام سوم - اجرای الگوریتم جایگزینی پسرو برای حل معادلات،

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=1 \\ x_2-x_3=-1 \end{cases} \to \begin{cases} x_2=-1+x_3 \\ x_1=1-2x_3 \end{cases}$$

در این دستگاه معادلات x_3 متغیر آزاد است.

****

حل با روش گوس- جردن،

گام اول- حذف مجهول x_1 از تمامی معادلات به جز معادله اول،

$$\left.\begin{array}{l}-2r_1+r_2\to r_2\\ -3r_1+r_3\to r_3\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}2&1&3&1\\0&1&-1&-1\\0&2&-2&-2\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\to E_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},E_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{bmatrix}$$

گام دوم- حذف مجهول x_2 از تمامی معادلات به جز معادله دوم،

$$\left.\begin{array}{l}-r_2+r_1\to r_1\\ -2r_2+r_3\to r_3\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}2&0&4&2\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\to E_4=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},E_5=\begin{bmatrix}1&&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{bmatrix}$$

از آنجاییکه عنصر $a_{33}=0$ است و آخرین سطر می باشد، لذا ماتریس به فرم سطری پلکانی کاهش یافته تبدیل می شود و x_3 متغیر آزاد خواهد بود.

گام سوم- تبدیل عناصر قطری به عدد یک و بدست آوردن جوابها،

$$\tfrac{1}{2}r_1\to r_1\}\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&2&1\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right]\to\begin{cases}x_1=1-2x_3\\x_2=-1+x_3\end{cases}\to E_7=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

****

حل تمرین شماره ۴

الف) $\boxed{\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3-4x_4=2\\2x_1+4x_2+3x_3+x_4=5\end{cases}}$

این دستگاه یک سیستم فرو معین (underdetermined) است، فرم ماتریس افزوده این معادلات بصورت زیر می باشد،

$$[A|\mathbf{b}]\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&3&-4&2\\2&4&3&1&5\end{array}\right]$$

حل به فرم سطری پلکانی،

گام اول- ضریب x_1 در معادله اول یک است، لذا مجهول x_1 را از معادله دوم حذف می کنیم،

$$-2r_1+r_2\to r_2\quad\Rightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&3&-4&2\\0&0&-3&9&1\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$$

گام دوم- از آنجاییکه ضریب x_2 در معادله دوم صفر است، سراغ ضریب x_3 می رویم و آن را به یک تبدیل می کنیم،

$$\tfrac{-1}{3}r_2 \to r_2 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \frac{-1}{3} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

همانطور که پیداست سیستم سازگار بوده و دستگاه معادلات بیشمار جواب دارد.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2 \\ x_3 - 3x_4 = \dfrac{-1}{3} \end{array}\right\} \quad \to \quad x_1 = 3 - 2x_2 - 5x_4 , \qquad x_3 = \frac{-1}{3} + 3x_4$$

در این دستگاه معادلات با توجه به محل عناصر محوری x_2 و x_4 متغیرهای آزاد هستند.

****

حل به فرم سطری پلکانی کاهش یافته،

گام اول- ضریب x_1 در معادله اول یک است، لذا مجهول x_1 را از معادله دوم حذف می کنیم،

$$-2r_1 + r_2 \to r_2 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

گام دوم- از آنجاییکه ضریب x_2 در معادله دوم صفر است، سراغ ضریب x_3 می رویم و آن را به یک تبدیل می کنیم،

$$\tfrac{-1}{3}r_2 \to r_2 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \frac{-1}{3} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

در فرم سطری پلکانی کاهش یافته عناصر بالای عنصر محوری صفر است، لذا داریم،

$$-3r_2 + r_1 \to r_1 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \frac{-1}{3} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات بیشمار جواب دارد.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 3 \\ x_3 - 3x_4 = \dfrac{-1}{3} \end{array}\right\} \quad \to \quad x_1 = 3 - 2x_2 - 5x_4 , \qquad x_3 = \frac{-1}{3} + 3x_4$$

****

بررسی صحت عملکرد با استفاده از دستور rref در نرم افزار MATLAB،

```
A =[1 2 3 -4;2 4 3 1];
b =[2;5];
rref([A  b])
ans =
    1.0000    2.0000         0    5.0000    3.0000
         0         0    1.0000   -3.0000   -0.3333
```

****

ب) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 = 2 \\ x_1 + 8x_2 = 5 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \end{cases}$

این دستگاه یک سیستم فرامعین (overdetermined) است، فرم ماتریس افزوده این معادلات بصورت زیر می باشد،

$$[A|\mathbf{b}] \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 2 \\ 1 & 8 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

حل به فرم سطری پلکانی،

گام اول- ضریب x_1 در معادله اول یک است، لذا مجهول x_1 را از معادلات دوم و سوم حذف می کنیم،

$$\left.\begin{array}{l} -r_1 + r_2 \rightarrow r_2 \\ -r_1 + r_3 \rightarrow r_3 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 12 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

گام دوم- از آنجاییکه ضریب x_2 در معادله دوم یک نیست داریم،

$$\frac{1}{12} r_2 \rightarrow r_2 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 6 & -3 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

حذف مجهول x_2 از معادله سوم،

$$-6r_2 + r_3 \rightarrow r_3 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{-9}{2} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

با توجه به سطر آخر ماتریس سطری پلکانی دستگاه معادلات ناسازگار است، لذا جواب ندارد.

****

حل به فرم سطری پلکانی کاهش یافته،

گام اول- ضریب x_1 در معادله اول یک است، لذا مجهول x_1 را از معادلات دوم و سوم حذف می کنیم،

$$\left.\begin{array}{l} -r_1+r_2\to r_2 \\ -r_1+r_3\to r_3 \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 12 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

گام دوم- از آنجاییکه ضریب x_2 در معادله دوم یک نیست داریم،

$$\frac{1}{12}r_2\to r_2 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 6 & -3 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

حذف مجهول x_2 از معادله اول و سوم،

$$\left.\begin{array}{l} 4r_2+r_1\to r_1 \\ -6r_2+r_3\to r_3 \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{-9}{2} \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

با توجه به سطر آخر ماتریس سطری پلکانی کاهش یافته، دستگاه معادلات ناسازگار است، لذا جواب ندارد.

****

بررسی صحت عملکرد با استفاده از دستور rref در نرم افزار MATLAB،

```
A =[1 -4;1 8;1 2];
b =[2;5;-1];
rref([A  b])
ans =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1
```

****

حل تمرین شماره ۵

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ماتریس های مقدماتی بصورت زیر بدست می آیند،

- ماتریس مقدماتی لازم برای خذف متغیر x_1 از معادله دوم،

$$E_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\ \frac{1}{2}&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad E_1A=\begin{bmatrix}2&-1&0&0\\ 0&\frac{3}{2}&-1&0\\ 0&-1&2&-1\\ 0&0&-1&2\end{bmatrix}$$

- ماتریس مقدماتی لازم برای خذف متغیر x_2 از معادله سوم،

$$E_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&\frac{2}{3}&1&0\\ 0&0&0&1\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad E_2E_1A=\begin{bmatrix}2&-1&0&0\\ 0&\frac{3}{2}&-1&0\\ 0&0&\frac{4}{3}&-1\\ 0&0&-1&2\end{bmatrix}$$

- ماتریس های مقدماتی لازم برای خذف متغیر x_3 از معادله چهارم،

$$E_3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&\frac{3}{4}&1\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad E_3E_2E_1A=\begin{bmatrix}2&-1&0&0\\ 0&\frac{3}{2}&-1&0\\ 0&0&\frac{4}{3}&-1\\ 0&0&0&\frac{5}{4}\end{bmatrix}$$

به این ترتیب با اعمال سه ماتریس مقدماتی، ماتریس A' به فرم بالا مثلثی تبدیل می شود.

****

حل تمرین شماره ۶

الف) $\boxed{\begin{cases}x_2-x_3=2\\ x_1-x_2=2\\ x_1-x_3=2\end{cases}}$

برای بررسی سازگار یا ناسازگار بودن سیستم از روش حذفی گوسی استفاده می کنیم،

$$\left[\begin{array}{ccc|c}0&1&-1&2\\ 1&-1&0&2\\ 1&0&-1&2\end{array}\right]\quad r_1\leftrightarrow r_3\quad\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&2\\ 1&-1&0&2\\ 0&1&-1&2\end{array}\right]\quad -r_1+r_2\rightarrow r_2\quad\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&2\\ 0&-1&1&0\\ 0&1&-1&2\end{array}\right]$$

$$r_2+r_3\rightarrow r_3\quad\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&2\\ 0&-1&1&0\\ 0&0&0&2\end{array}\right]$$

با توجه به سطر آخر مشخص است که سیستم ناسازگار است، زیرا معادله ای بصورت $0x_1+0x_2+0x_3=2$ جواب ندارد.

ب) $\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$

برای بررسی سازگار یا ناسازگار بودن سیستم از روش حذفی گوسی استفاده می کنیم،

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \quad r_1 \leftrightarrow r_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \quad -r_1 + r_2 \to r_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$r_2 + r_3 \to r_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad -r_2 \to r_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

با توجه به اینکه دستگاه معادلات همگن است، حتماً سیستم سازگار است و یک جواب بردار صفر را دارد، لیکن با توجه به اینکه برای سیستم سه مجهولی دو تا عنصر محوری بدست آمده است، علاوه بر بردار صفر بیشمار جواب دیگر هم دارد.

$$x_1 = x_3 \quad , \quad x_2 = x_3$$

x_3 در اینجا متغیر آزاد است.

ج) $\begin{cases} x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$

برای بررسی سازگار یا ناسازگار بودن سیستم از روش حذفی گوسی استفاده می کنیم،

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad r_1 \leftrightarrow r_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad -r_1 + r_2 \to r_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$-r_2 + r_3 \to r_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \quad \tfrac{1}{2} r_3 \to r_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

با توجه به فرم سطری پلکانی سیستم سازگار است و چون سه تا عنصر محوری بدست آمده دستگاه معادلات پاسخ منحصربفرد دارد.

$$\begin{cases} x_3 = \frac{1}{2} \\ x_2 - x_3 = 0 \to x_2 = \frac{1}{2} \\ x_1 + x_3 = 1 \to x_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

****

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

حل تمرین های سری دوم

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۶/۷

حل تمرین شماره ۷

$$\begin{cases} x_1+\lambda x_2-x_3=1 \\ 2x_1+x_2+2x_3=5\lambda+1 \\ x_1-x_2+3x_3=4\lambda+2 \\ x_1-2\lambda x_2+7x_3=10\lambda-1 \end{cases}$$

الف) فرم ماتریس افزوده دستگاه معادلات بصورت زیر است،

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 5\lambda+1 \\ 1 & -1 & 3 & 4\lambda+2 \\ 1 & -2\lambda & 7 & 10\lambda-1 \end{array}\right]$$

حال فرم سطری پلکانی آن را بدست می آوریم،

$$\begin{array}{l} -2r_1+r_2\to r_2 \\ -r_1+r_3\to r_3 \\ -r_1+r_4\to r_4 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1-2\lambda & 4 & 5\lambda-1 \\ 0 & -1-\lambda & 4 & 4\lambda+1 \\ 0 & -3\lambda & 8 & 10\lambda-2 \end{array}\right] \quad \frac{1}{1-2\lambda}r_2\to r_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{1-2\lambda} & \frac{5\lambda-1}{1-2\lambda} \\ 0 & -1-\lambda & 4 & 4\lambda+1 \\ 0 & -3\lambda & 8 & 10\lambda-2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} (1+\lambda)r_2+r_3\to r_3 \\ 3\lambda r_2+r_4\to r_4 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{1-2\lambda} & \frac{5\lambda-1}{1-2\lambda} \\ 0 & 0 & \frac{8-4\lambda}{1-2\lambda} & \frac{\lambda(6-3\lambda)}{1-2\lambda} \\ 0 & 0 & \frac{8-4\lambda}{1-2\lambda} & \frac{-9\lambda^3-2\lambda^2+14\lambda-2}{1-2\lambda} \end{array}\right] \quad \frac{1-2\lambda}{8-4\lambda}r_3\to r_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{1-2\lambda} & \frac{5\lambda-1}{1-2\lambda} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\lambda(6-3\lambda)}{8-4\lambda} \\ 0 & 0 & \frac{8-4\lambda}{1-2\lambda} & \frac{-9\lambda^3-2\lambda^2+14\lambda-2}{1-2\lambda} \end{array}\right]$$

$$-\frac{8-4\lambda}{1-2\lambda}r_3+r_4\to r_4 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{1-2\lambda} & \frac{5\lambda-1}{1-2\lambda} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\lambda(6-3\lambda)}{8-4\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-9\lambda^3+\lambda^2+8\lambda-2}{1-2\lambda} \end{array}\right]$$

لذا فرم سطری پلکانی بدست می آید.

ب) برای سازگار بودن این سیستم باید شرایط زیر برقرار گردد.

$$1-2\lambda\neq 0\to \quad \lambda\neq\frac{1}{2}$$

$$8-4\lambda\neq 0\to \quad \lambda\neq 2$$

$$-9\lambda^3+\lambda^2+8\lambda-2=0\to \quad \lambda=-1,\ \frac{1530}{1801},\ \frac{271}{1036}$$

ج) با توجه به اینکه برای سیستم سه تا عنصر محوری بدست آمده است، لذا سیستم در صورت سازگار بودن، پاسخ منحصربفرد دارد. حال پاسخ سیستم را به ازای $\lambda = -1$ که یکی از شرایط سازگاری سیستم است بدست می آوریم.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \rightarrow x_1 = \frac{-3}{4} \\ x_2 + \frac{4}{3}x_3 = -2 \rightarrow x_2 = -1 \\ x_3 = \frac{-3}{4} \end{cases}$$

****

حل تمرین شماره ۸

$$\boxed{\mathbf{x} = (I + A^{-1} + A^{-2} + A^{-3})\mathbf{b} \quad , \quad A_{n\times n} \, , \quad b_{n\times 1}}$$

تعداد محاسبات برای معکوس گیری ماتریس را در صورت کلی k در نظر بگیرید.

الف) اگر عبارت را بصورت $B = A^{-1} + A^{-2} + A^{-3}$ و $C = I + B$ و $\mathbf{x} = C\mathbf{b}$ در نظر بگیریم،

$A^{-1} \leftarrow$ یک معکوس گیری $\leftarrow k$ flops

$A^{-2} = (A^2)^{-1} \leftarrow$ ضرب دو ماتریس $n\times n$ و یک معکوس گیری $\leftarrow (2n-1)n^2 + k$ flops

$A^{-3} = (A^3)^{-1} \leftarrow$ ضرب سه ماتریس $n\times n$ و یک معکوس گیری $\leftarrow 2(2n-1)n^2 + k$ flops

$A^{-1} + A^{-2} + A^{-3} \leftarrow$ جمع سه ماتریس $n\times n$ $\leftarrow 2n^2$ flops

$I + (A^{-1} + A^{-2} + A^{-3}) \leftarrow$ جمع یک ماتریس $n\times n$ با یک ماتریس قطری $n\times n$ $\leftarrow n$ flops

$(I + A^{-1} + A^{-2} + A^{-3})\mathbf{b} \leftarrow$ ضرب یک ماتریس $n\times n$ در یک بردار $n\times 1$ $\leftarrow (2n-1)n$ flops

کل محاسبات جبری

$$\boxed{[(2n-1)n] + [n] + [2n^2] + [2(2n-1)n^2 + k] + [(2n-1)n^2 + k] + [k] = 6n^3 + n^2 + 3k \text{ flops}}$$

ب) اگر عبارت را بصورت $\mathbf{x} = (I + A^{-1}(I + A^{-1}(I + A^{-1})))\mathbf{b}$ درنظر بگیریم،

$A^{-1} \leftarrow$ یک معکوس گیری $\leftarrow k$ flops

$I + A^{-1} \leftarrow$ جمع یک ماتریس $n\times n$ با یک ماتریس قطری $n\times n$ $\leftarrow n$ flops

$A^{-1}(I + A^{-1}) \leftarrow$ ضرب دو ماتریس $n\times n$ $\leftarrow (2n-1)n^2$ flops

$I + A^{-1}(I + A^{-1}) \leftarrow$ جمع یک ماتریس $n\times n$ با یک ماتریس قطری $n\times n$ $\leftarrow n$ flops

$A^{-1}(I + A^{-1}(I + A^{-1})) \leftarrow$ ضرب دو ماتریس $n\times n$ $\leftarrow (2n-1)n^2$ flops

$I+A^{-1}(I+A^{-1}(I+A^{-1}))$ ← جمع یک ماتریس $n\times n$ با یک ماتریس قطری $n\times n$ ← n flops

$(I+A^{-1}(I+A^{-1}(I+A^{-1})))\mathbf{b}$ ← ضرب یک ماتریس $n\times n$ در یک بردار $n\times 1$ ← $(2n-1)n$ flops

کل محاسبات جبری

$$\boxed{[(2n-1)n]+[n]+[(2n-1)n^2]+[n]+[(2n-1)n^2]+[n]+[k]=4n^3+2n^2+k \text{ flops}}$$

ج) اگر عبارت را بصورت $\mathbf{x}=I\mathbf{b}+A^{-1}\mathbf{b}+A^{-2}\mathbf{b}+A^{-3}\mathbf{b}$ در نظر بگیریم،

$I\mathbf{b}$ ← ضرب یک ماتریس قطری $n\times n$ در یک بردار $n\times 1$ ← n flops
A^{-1} ← یک معکوس گیری ← k flops
$A^{-1}\mathbf{b}$ ← ضرب یک ماتریس $n\times n$ در یک بردار $n\times 1$ ← $(2n-1)n$ flops
$A^{-2}=(A^2)^{-1}$ ← ضرب دو ماتریس $n\times n$ و یک معکوس گیری ← $(2n-1)n^2+k$ flops
$A^{-2}\mathbf{b}$ ← ضرب یک ماتریس $n\times n$ در یک بردار $n\times 1$ ← $(2n-1)n$ flops
$A^{-3}=(A^3)^{-1}$ ← ضرب سه ماتریس $n\times n$ و یک معکوس گیری ← $2(2n-1)n^2+k$ flops
$A^{-3}\mathbf{b}$ ← ضرب یک ماتریس $n\times n$ در یک بردار $n\times 1$ ← $(2n-1)n$ flops
$A^{-1}\mathbf{b}+A^{-2}\mathbf{b}+A^{-3}\mathbf{b}$ ← جمع سه ماتریس $n\times n$ ← $2n^2$ flops
$I\mathbf{b}+(A^{-1}\mathbf{b}+A^{-2}\mathbf{b}+A^{-3}\mathbf{b})$ ← جمع یک ماتریس $n\times n$ با یک ماتریس قطری $n\times n$ ← n flops

کل محاسبات جبری

$$\boxed{\begin{aligned}&[n]+[2n^2]+[(2n-1)n]+[2(2n-1)n^2+k]+[(2n-1)n]+[(2n-1)n^2+k]+[(2n-1)n]+[k]\\&=6n^3+3n^2-n+3k \text{ flops}\end{aligned}}$$

همانطور که مشخص است تعداد محاسبات در روش (ب) کمتر است ، بخصوص اینکه عملیات معکوس گیری نیز فقط یکبار انجام می شود. برای عملیات معکوس گیری می توان یکی از روشهای ماتریس الحاقی یا گوس- جردن را بکار برد که استفاده از ماتریس الحاقی به دلیل حجم بالای محاسبات توصیه نمی گردد.

* * *

حل تمرین شماره ۹

$$\boxed{A=\begin{bmatrix} a & 2 & 3 \\ a & a & 4 \\ a & a & a \end{bmatrix}}$$

الگوریتم حذفی گوسی را اجرا می کنیم،

$$A=\begin{bmatrix} a & 2 & 3 \\ a & a & 4 \\ a & a & a \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} -r_1+r_2\to r_2 \\ -r_1+r_3\to r_3 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} a & 2 & 3 \\ 0 & a-2 & 1 \\ 0 & a-2 & a-3 \end{bmatrix} \quad -r_2+r_3\to r \quad \begin{bmatrix} a & 2 & 3 \\ 0 & a-2 & 1 \\ 0 & 0 & a-4 \end{bmatrix}$$

برای داشتن سه تا عنصر محوری باید $a\neq 0$ و $a\neq 2$ و $a\neq 4$ باشد.

****

حل تمرین شماره ۱۰

$$\boxed{[A|\mathbf{b}]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 4 & 5 & b \\ 0 & 0 & d & c \end{array}\right]}$$

معادله مربوط به سطر آخر ماتریس افزوده به فرم $0x_1+0x_2+dx_3=c$ است.

- سیستمی جواب ندارد که ناسازگار باشد. برای ناسازگار بودن باید شرط زیر را داشته باشیم،

$$\boxed{d=0 \quad , \quad c\neq 0}$$

- سیستمی بیشمار جواب دارد که سازگار بوده و متغیر آزاد داشته باشد. برای این منظور باید شرط زیر را داشته باشیم،

$$\boxed{d=0 \quad , \quad c=0}$$

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

حل تمرین های سری سوم

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق - گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۷/۲۰

حل تمرین شماره ۱

$$\boxed{A=\begin{bmatrix}1&4&5\\4&18&26\\3&16&30\end{bmatrix}}$$

الف) ماتریس های مقدماتی E_1، E_2 و E_3 را با اعمال الگوریتم حذفی گوسی می توان بدست آورد

گام اول- حذف مجهول x_1 از معادلات دوم و سوم،

$$-4r_1+r_2\to r_2 \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}1&4&5\\0&2&6\\3&16&30\end{bmatrix} \quad\to\quad E_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$-3r_1+r_3\to r_3 \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}1&4&5\\0&2&6\\0&4&15\end{bmatrix} \quad\to\quad E_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{bmatrix}$$

گام دوم- حذف مجهول x_2 از معادله سوم،

$$-2r_2+r_3\to r_3 \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}1&4&5\\0&2&6\\0&0&3\end{bmatrix} \quad\to\quad E_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{bmatrix}$$

به این ترتیب ماتریس بالا مثلثی U بصورت زیر بدست می آید،

$$E_3E_2E_1A=U \quad\to\quad U=\begin{bmatrix}1&4&5\\0&2&6\\0&0&3\end{bmatrix}$$

برای بدست آوردن تجزیه $A=LU$ بصورت زیر عمل می کنیم. ماتریس پایین مثلثی L نیز بشکل زیر قابل محاسبه است،

$$E_3E_2E_1A=U \quad\to\quad A=E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}U=LU$$

$$E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&0\\3&2&1\end{bmatrix}=L$$

لذا تجزیه $A=LU$ بشکل زیر بدست می آید،

$$A=LU \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}1&4&5\\4&18&26\\3&16&30\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&0\\3&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4&5\\0&2&6\\0&0&3\end{bmatrix}$$

****

بنام خداوند بخشنده و مهربان

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

جبر خطی کاربردی

حل تمرین های سری سوم

نیمسال اول ۹۰-۹۱
۹۰/۷/۲۰

ب) حل دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}_1$ و $A\mathbf{x}=\mathbf{b}_2$

$$\boxed{\mathbf{b}_1=\begin{bmatrix}6\\0\\-6\end{bmatrix},\qquad \mathbf{b}_2=\begin{bmatrix}6\\6\\12\end{bmatrix}}$$

$$\boxed{A\mathbf{x}=\mathbf{b}\quad\rightarrow\quad LU\mathbf{x}=\mathbf{b}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}L\mathbf{y}=\mathbf{b}\\U\mathbf{x}=\mathbf{y}\end{cases}}$$

ابتدا مجهول $\mathbf{y}$ و سپس مجهول $\mathbf{x}$ را بدست می آوریم،

برای بردار $\mathbf{b}_1$:

$$L\mathbf{y}=\mathbf{b}_1\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&0\\3&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\0\\-6\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad y_1=6,\quad y_2=-24,\quad y_3=24$$

$$U\mathbf{x}=\mathbf{y}\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}1&4&5\\0&2&6\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-24\\24\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad x_1=110,\quad x_2=-36,\quad x_3=8$$

برای بردار $\mathbf{b}_2$:

$$L\mathbf{y}=\mathbf{b}_2\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&0\\3&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\6\\12\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad y_1=6,\quad y_2=-18,\quad y_3=30$$

$$U\mathbf{x}=\mathbf{y}\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}1&4&5\\0&2&6\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-24\\24\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad x_1=112,\quad x_2=-39,\quad x_3=10$$

****

ج) برای حل دستگاه $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ با روش حذفی گوسی باید هر بار الگوریتم حذفی گوسی و بعد الگوریتم جایگزینی پسرو را اجرا نماییم،

تعداد محاسبات با روش حذفی گوسی برای یک ماتریس $n\times n$:

$$\left.\begin{array}{lll}A\mathbf{x}=\mathbf{b}_1 & \rightarrow & (\frac{2n^3}{3})+(n^2)\\ A\mathbf{x}=\mathbf{b}_2 & \rightarrow & (\frac{2n^3}{3})+(n^2)\\ \vdots & & \vdots\\ A\mathbf{x}=\mathbf{b}_n & \rightarrow & (\frac{2n^3}{3})+(n^2)\end{array}\right\}\quad\rightarrow\quad n(\frac{2n^3}{3}+n^2)$$

اگر $n=100$ باشد، حجم محاسبات برابر است با: $100(\frac{2}{3}10^6+10^4)\approx 10^8$

ولی با استفاده از روش تجزیه LU کافی است که فقط یکبار تجزیه را انجام دهیم و در مراحل بعدی فقط الگوریتم های جایگزینی پسرو و پیشرو را تکرار نماییم

تعداد محاسبات با روش تجزیه LU برای یک ماتریس $n\times n$:

$$\left.\begin{array}{lcc} A=LU & \rightarrow & (\frac{2n^3}{3}) \\ A\mathbf{x}=\mathbf{b}_1 & \rightarrow & (n^2) \\ A\mathbf{x}=\mathbf{b}_2 & \rightarrow & (n^2) \\ \vdots & & \vdots \\ A\mathbf{x}=\mathbf{b}_n & \rightarrow & (n^2) \end{array}\right\} \rightarrow \frac{2n^3}{3}+n(n^2)$$

اگر $n=100$ باشد، حجم محاسبات برابر است با: $\frac{2}{3}10^6+100(10^4)\approx 10^6$

لذا اگر بخواهیم معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}_k$ را برای $k=1,\ldots,n$ مکرراً حل نماییم روش تجزیه LU به لحاظ تعداد محاسبات کمتر از روش حذفی گوسی است.

****

حل تمرین شماره ۲

$$\boxed{L=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix},\quad U=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{y}=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}}$$

$$A^{-1}\mathbf{x}+A^{-2}\mathbf{y}=A^{-1}(\mathbf{x}+A^{-1}\mathbf{y})$$

ابتدا حاصل عبارت $A^{-1}\mathbf{y}$ را بدست می آوریم. این کار معادل است با حل دستگاه معادلاتی به فرم $A\mathbf{v}=\mathbf{y}$ و بدست آوردن بردار $\mathbf{v}$ لذا می توان این کار را با استفاده از تجزیه LU ماتریس A انجام داد.

$$\boxed{A\mathbf{v}=\mathbf{y} \quad\rightarrow\quad LU\mathbf{v}=\mathbf{y} \quad\rightarrow\quad \begin{cases}L\mathbf{w}=\mathbf{y}\\ U\mathbf{v}=\mathbf{w}\end{cases}}$$

$$L\mathbf{w}=\mathbf{y} \quad\rightarrow\quad \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad w_1=-1,\ \ w_2=2,\ \ w_3=-1$$

$$U\mathbf{v}=\mathbf{w} \quad\rightarrow\quad \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad v_1=0,\ \ v_2=3,\ \ v_3=-1$$

$$\mathbf{v}=A^{-1}\mathbf{y} \quad\rightarrow\quad A^{-1}\mathbf{y}=\begin{bmatrix}0\\3\\-1\end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad \mathbf{x}+A^{-1}\mathbf{y}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}=\mathbf{s}$$

بدست آوردن جواب عبارت $A^{-1}(\mathbf{x}+A^{-1}\mathbf{y})$ معادل است با حل دستگاه معادلات $A\mathbf{t}=\mathbf{s}$ و بدست آوردن بردار $\mathbf{t}$ لذا همانند بالا برای این کار از تجزیه LU ماتریس A استفاده می نماییم،

$$\boxed{A\mathbf{t}=\mathbf{s} \quad \rightarrow \quad LU\mathbf{t}=\mathbf{s} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} L\mathbf{r}=\mathbf{s} \\ U\mathbf{t}=\mathbf{r} \end{cases}}$$

$$L\mathbf{r}=\mathbf{s} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad r_1=1,\ \ r_2=2,\ \ r_3=-2$$

$$U\mathbf{t}=\mathbf{r} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad t_1=3,\ \ t_2=4,\ \ t_3=-2$$

$$t=A^{-1}(\mathbf{x}+A^{-1}\mathbf{y}) \quad \rightarrow \quad A^{-1}(\mathbf{x}+A^{-1}\mathbf{y})=\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

****

حل تمرین شماره ۳

الف)
$$\boxed{A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}}$$

- صورت درجه دوم به شکل زیر است

$$V(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T A\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$$

- برای تعیین علامت ابتدا علامت کهادهای اصلی مقدم را بررسی نماییم،

$$2>0 \quad , \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3>0 \quad , \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=4>0$$

با توجه به معیار سیلوستر ماتریس A مثبت معین می باشد.

- ماتریس مثبت معین است پس می توان تجزیه چالسکی $A=LL^T$ آن را بدست آورد،

$$A=\left[\begin{array}{c:cc} 2 & 1 & 1 \\ \hdashline 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:cc} l_{11} & 0 & 0 \\ \hdashline l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{array}\right]\begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

$$l_{11}=\sqrt{a_{11}}\rightarrow l_{11}=\sqrt{2}$$

$$L_{21}=\frac{1}{l_{11}}A_{21}\rightarrow L_{21}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\rightarrow l_{21}=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad l_{31}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$A_{22}-L_{21}L_{21}^T=L_{22}L_{22}^T$$

$$\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_{22}&0\\l_{32}&l_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}l_{22}&l_{32}\\0&l_{33}\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3&1\\1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_{22}^2&l_{22}l_{32}\\l_{22}l_{32}&l_{32}^2+l_{33}^2\end{bmatrix}\rightarrow l_{22}=\sqrt{\frac{3}{2}},\qquad l_{32}=\frac{1}{\sqrt{6}},\qquad l_{33}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\sqrt{\frac{3}{2}}&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{2}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\sqrt{\frac{3}{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&0&\frac{2}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

- بررسی با نرم افزار MATLAB،

```
A =[2 1 1;1 2 1;1 1 2];
chol(A)
ans =
    1.4142    0.7071    0.7071
         0    1.2247    0.4082
         0         0    1.1547
```

****

ب) $A=\begin{bmatrix}4&2&-6\\2&10&9\\-6&9&26\end{bmatrix}$

- صورت درجه دوم به شکل زیر است

$$V(\mathbf{x})=\mathbf{x}^TA\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1&x_2&x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&2&-6\\2&10&9\\-6&9&26\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=4x_1^2+10x_2^2+26x_3^2+4x_1x_2+18x_2x_3-12x_1x_3$$

- برای تعیین علامت ابتدا علامت کهادهای اصلی مقدم را بررسی نماییم،

$$4>0 \quad , \quad \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 36 > 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 10 & 9 \\ -6 & 9 & 26 \end{vmatrix} = 36 > 0$$

با توجه به معیار سیلوستر ماتریس A مثبت معین می باشد.

- ماتریس مثبت معین است، پس می توان تجزیه چالسکی $A = LL^T$ آن را بدست آورد،

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} 4 & 2 & -6 \\ \hline 2 & 10 & 9 \\ -6 & 9 & 26 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} l_{11} & 0 & 0 \\ \hline l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{array}\right] \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} \rightarrow l_{11} = 2$$

$$L_{21} = \frac{1}{l_{11}} A_{21} \rightarrow L_{21} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \rightarrow l_{21} = 1, \quad l_{31} = -3$$

$$A_{22} - L_{21}L_{21}^T = L_{22}L_{22}^T$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 9 & 26 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{22} & 0 \\ l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_{22} & l_{32} \\ 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{22}^2 & l_{22}l_{32} \\ l_{22}l_{32} & l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{bmatrix} \rightarrow l_{22} = 3, \quad l_{32} = 4, \quad l_{33} = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 10 & 9 \\ -6 & 9 & 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- بررسی با نرم افزار MATLAB،

```
A =[4  2 -6;2  10  9;-6  9  26];
chol(A)
ans =
     2     1    -3
     0     3     4
     0     0     1
```

****

ج) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

- صورت درجه دوم به شکل زیر است

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_2 + 10x_2x_3$$

- حال علامت کهادهای اصلی مقدم را بررسی نماییم،

$$1 > 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -25 < 0$$

با توجه به معیار سیلوستر ماتریس A مثبت معین نمی باشد. لذا تجزیه چالسکی آن را نمی توان بدست آورد.

- بررسی با نرم افزار MATLAB،

```
A =[1 2 0;2 4 5;0 5 6];
chol(A)
??? Error using ==> chol
Matrix must be positive definite.
```

****

د) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

- صورت درجه دوم به شکل زیر است

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$$

- ابتدا علامت کهادهای اصلی مقدم را بررسی نماییم،

$$2 > 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

با توجه به معیار سیلوستر ماتریس A مثبت معین می باشد.

- ماتریس مثبت معین است پس می توان تجزیه چالسکی $A = LL^T$ آن را بدست آورد،

$$A=\left[\begin{array}{c:cc} 2 & -1 & 0 \\ \hdashline -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:cc} l_{11} & 0 & 0 \\ \hdashline l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{array}\right]\begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

$$l_{11}=\sqrt{a_{11}}\rightarrow l_{11}=\sqrt{2}$$

$$L_{21}=\frac{1}{l_{11}}A_{21}\rightarrow L_{21}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix}\rightarrow l_{21}=\frac{-1}{\sqrt{2}},\qquad l_{31}=0$$

$$A_{22}-L_{21}L_{21}^{T}=L_{22}L_{22}^{T}$$

$$\begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_{22} & 0\\ l_{32} & l_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}l_{22} & l_{32}\\0 & l_{33}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_{22}^{2} & l_{22}l_{32}\\ l_{22}l_{32} & l_{32}^{2}+l_{33}^{2}\end{bmatrix}\rightarrow l_{22}=\sqrt{\frac{3}{2}},\qquad l_{32}=-\sqrt{\frac{2}{3}},\qquad l_{33}=\sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\-1 & 2 & -1\\0 & -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 0 & 0\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0\\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{4}{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{2}{3}}\\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{4}{3}}\end{bmatrix}$$

- بررسی با نرم افزار MATLAB،

```
A =[2  -1  0;-1  2  -1;0  -1  2];
chol(a)
ans =
    1.4142   -0.7071         0
         0    1.2247   -0.8165
         0         0    1.1547
```

****

حل تمرین شماره ۴

الف) $$A=\begin{bmatrix}k & -4 & -4\\-4 & k & -4\\-4 & -4 & k\end{bmatrix}$$

از معیار سیلوستر برای جواب استفاده می کنیم و ابتدا علامت کهادهای اصلی مقدم را برای مثبت معین بودن ماتریس بررسی نماییم،

$$k > 0 \qquad (1)$$

$$\begin{vmatrix} k & -4 \\ -4 & k \end{vmatrix} = k^2 - 16 > 0 \rightarrow \qquad k < -4,\ \ k > 4 \qquad (2)$$

$$\begin{vmatrix} k & -4 & -4 \\ -4 & k & -4 \\ -4 & -4 & k \end{vmatrix} = k^3 - 48k - 128 = (k-8)(k+4)^2 > 0 \rightarrow \qquad k > 8 \qquad (3)$$

از مقایسه محدوده های (1)، (2) و (3) نتیجه می شود که برا ی مثبت معین بودن ماتریس A باید $k > 8$ باشد.

****

ب) $\boxed{A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & k \\ -1 & 2 & -1 \\ k & -1 & 2 \end{bmatrix}}$

از معیار سیلوستر برای جواب استفاده می کنیم و ابتدا علامت کهادهای اصلی مقدم را برای مثبت معین بودن ماتریس بررسی نماییم،

$$2 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & k \\ -1 & 2 & -1 \\ k & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2k^2 + 2k + 4 = -2(k-2)(k+1) > 0 \rightarrow \qquad -1 < k < 2$$

لذا نتیجه می شود که برا ی مثبت معین بودن ماتریس A باید $-1 < k < 2$ باشد.

****

ج) $\boxed{A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & k & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}}$

از معیار سیلوستر برای جواب استفاده می کنیم و ابتدا علامت کهادهای اصلی مقدم را برای مثبت معین بودن ماتریس بررسی نماییم،

$$1 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix} = k - 4 > 0 \rightarrow \qquad k > 4 \qquad (1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & k & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -4k + 12 > 0 \rightarrow \qquad k < 3 \qquad (2)$$

از مقایسه محدوده های (1) و (2) نتیجه می شود که به ازای هیچ مقداری از k ماتریس A مثبت معین نخواهد بود.

****

د) $A=\begin{bmatrix}1 & k & 0\\ k & 1 & k\\ 0 & k & 1\end{bmatrix}$

از معیار سیلوستر برای جواب استفاده می کنیم و ابتدا علامت کهادهای اصلی مقدم را برای مثبت معین بودن ماتریس بررسی نماییم،

$$1>0$$

$$\begin{vmatrix}1 & k\\ k & 1\end{vmatrix}=1-k^2>0\rightarrow \qquad -1<k<1$$

$$\begin{vmatrix}1 & k & 0\\ k & 1 & k\\ 0 & k & 1\end{vmatrix}=1-2k^2>0\rightarrow \qquad \frac{-1}{\sqrt{2}}<k<\frac{1}{\sqrt{2}}$$

لذا نتیجه می شود که برا ی مثبت معین بودن ماتریس A باید $\frac{-1}{\sqrt{2}}<k<\frac{1}{\sqrt{2}}$ باشد.

****

حل تمرین شماره ۵

الف) $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 4\\ 1 & 4 & 8\end{bmatrix}$

اگر ماتریس $A=LU$ را بصورت زیر بنویسیم،

$$A=\left[\begin{array}{c|cc}1 & 1 & 1\\ \hline 1 & 4 & 4\\ 1 & 4 & 8\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|cc}1 & 0 & 0\\ \hline l_{21} & 1 & 0\\ l_{31} & l_{32} & 1\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|cc}u_{11} & u_{12} & u_{13}\\ \hline 0 & u_{22} & u_{23}\\ 0 & 0 & u_{33}\end{array}\right]$$

با توجه به روابط الگوریتم بلوکی بالا داریم،

$$u_{11}=a_{11}\rightarrow u_{11}=1$$

$$U_{12}=A_{12}\rightarrow U_{12}=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\rightarrow u_{12}=1,\qquad u_{13}=1$$

$$L_{21}=\frac{1}{a_{11}}A_{21}\rightarrow L_{21}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\rightarrow l_{21}=1,\qquad l_{31}=1$$

$$A_{22}-L_{21}U_{12}=L_{22}U_{22}$$

$$\begin{bmatrix}4 & 4\\ 4 & 8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ l_{32} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{22} & u_{23}\\ 0 & u_{33}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3 & 3\\ 3 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_{22} & u_{23}\\ l_{32}u_{22} & l_{32}u_{23}+u_{33}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}u_{22}=3\\ l_{32}u_{22}=3 \xrightarrow{u_{22}=3} l_{32}=1\\ u_{23}=3\\ l_{32}u_{23}+u_{33}=7 \rightarrow u_{33}=4\end{cases}$$

لذا تجزیه $A=LU$ بشکل زیر بدست می آید،

$$A=LU \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}1&1&1\\1&4&4\\1&4&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&3&3\\0&0&4\end{bmatrix}$$

حال تجزیه $A=LDU$ را می توان بصورت زیر بدست آورد، از آنجاییکه ماتریس L یک ماتریس پایین مثلثی با عناصر قطری واحد است، کافی است که با تقسیم هر سطر به عنصر قطری مربوطه، ماتریس U را به یک ماتریس بالا مثلثی با عناصر قطری واحد تبدیل نماییم،

$$A=LDU \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}1&1&1\\1&4&4\\1&4&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

که در آن L یک ماتریس پایین مثلثی با عناصر قطری واحد، D یک ماتریس قطری و U یک ماتریس بالا مثلثی با عناصر قطری واحد است.

****

ب) $\boxed{A=\begin{bmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{bmatrix}}$

در اینجا از روش حذفی گوسی برای تجزیه $A=LU$ استفاده می نماییم. ابتدا ماتریس های مقدماتی E_1، E_2 و E_3 را با اعمال الگوریتم حذفی گوسی بدست می آوریم.

گام اول- حذف مجهول x_1 از معادلات دوم و سوم،

$$\tfrac{-1}{3}r_1+r_2\to r_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}3&1&1\\0&\frac{8}{3}&\frac{2}{3}\\1&1&3\end{bmatrix} \quad \to \quad E_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{-1}{3}&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\tfrac{-1}{3}r_1+r_3\to r_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}3&1&1\\0&\frac{8}{3}&\frac{2}{3}\\0&\frac{2}{3}&\frac{8}{3}\end{bmatrix} \quad \to \quad E_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\frac{-1}{3}&0&1\end{bmatrix}$$

گام دوم- حذف مجهول x_2 از معادله سوم،

$$\tfrac{-1}{4}r_2+r_3\to r_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}3&1&1\\0&\frac{8}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&\frac{15}{6}\end{bmatrix} \quad \to \quad E_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&\frac{-1}{4}&1\end{bmatrix}$$

به این ترتیب ماتریس بالا مثلثی U بصورت زیر بدست می آید،

$$E_3E_2E_1A=U \quad \to \quad U=\begin{bmatrix}3&1&1\\0&\frac{8}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&\frac{15}{6}\end{bmatrix}$$

برای بدست آوردن تجزیه $A=LU$ بصورت زیر عمل می کنیم. ماتریس پایین مثلثی L نیز بشکل زیر قابل محاسبه است،

$$E_3E_2E_1A=U \quad \rightarrow \quad A=E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}U=LU$$

$$E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\ \frac{1}{3}&1&0\\ 0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\ 0&1&0\\ \frac{1}{3}&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&\frac{1}{4}&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\ \frac{1}{3}&1&0\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{4}&1\end{bmatrix}=L$$

لذا تجزیه $A=LU$ بشکل زیر بدست می آید،

$$A=LU \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}3&1&1\\ 1&3&1\\ 1&1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\ \frac{1}{3}&1&0\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{4}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1&1\\ 0&\frac{8}{3}&\frac{2}{3}\\ 0&0&\frac{15}{6}\end{bmatrix}$$

حال تجزیه $A=LDU$ را می توان بصورت زیر بدست آورد، از آنجاییکه ماتریس L یک ماتریس پایین مثلثی با عناصر قطری واحد است، کافی است که با تقسیم هر سطر به عنصر قطری مربوطه، ماتریس U را به یک ماتریس بالا مثلثی با عناصر قطری واحد تبدیل نماییم،

$$A=LDU \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}3&1&1\\ 1&3&1\\ 1&1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\ \frac{1}{3}&1&0\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{4}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0&0\\ 0&\frac{8}{3}&0\\ 0&0&\frac{15}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\ 0&1&\frac{1}{4}\\ 0&0&1\end{bmatrix}$$

که در آن L یک ماتریس پایین مثلثی با عناصر قطری واحد، D یک ماتریس قطری و U یک ماتریس بالا مثلثی با عناصر قطری واحد است.

****

ج) $A=\begin{bmatrix}0&1&1\\ 1&0&1\\ 2&3&4\end{bmatrix}$

در اینجا از روش حذفی گوسی برای تجزیه $A=LU$ استفاده می نماییم. ابتدا ماتریس های مقدماتی E_1، E_2 و E_3 را با اعمال الگوریتم حذفی گوسی بدست می آوریم.

گام اول- جابجایی سطر اول با سوم و حذف مجهول x_1 از معادله دوم،

$$r_1 \leftrightarrow r_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}2&3&4\\ 1&0&1\\ 0&1&1\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad E_1=\begin{bmatrix}0&0&1\\ 0&1&0\\ 1&0&0\end{bmatrix}$$

$$\tfrac{-1}{2}r_1+r_2 \rightarrow r_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}2&3&4\\ 0&\frac{-3}{2}&-1\\ 0&1&1\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad E_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\ \frac{-1}{2}&1&0\\ 0&0&1\end{bmatrix}$$

گام دوم- حذف مجهول x_2 از معادله سوم،

$$\tfrac{2}{3}r_2 + r_3 \to r_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{-3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \to \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

به این ترتیب ماتریس بالا مثلثی U بصورت زیر بدست می آید،

$$E_3E_2E_1A = U \quad \to \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{-3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

برای بدست آوردن تجزیه $A = LU$ بصورت زیر عمل می کنیم. ماتریس پایین مثلثی L نیز بشکل زیر قابل محاسبه است،

$$E_3E_2E_1A = U \quad \to \quad A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}U = LU$$

$$E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-2}{3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-2}{3} & 1 \end{bmatrix} = PL$$

لذا تجزیه $A = PLU$ بشکل زیر بدست می آید،

$$A = PLU \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-2}{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{-3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

حال تجزیه $A = PLDU$ را می توان بصورت زیر بدست آورد، از آنجاییکه ماتریس L یک ماتریس پایین مثلثی با عناصر قطری واحد است، کافی است که با تقسیم هر سطر به عنصر قطری مربوطه، ماتریس U را به یک ماتریس بالا مثلثی با عناصر قطری واحد تبدیل نماییم،

$$A = PLDU \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-2}{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

که در آن P ماتریس جایگشت، L یک ماتریس پایین مثلثی با عناصر قطری واحد، D یک ماتریس قطری و U یک ماتریس بالا مثلثی با عناصر قطری واحد است.

****

حل تمرین شماره ۶

الف)
$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4 & 17\\ 3 & 6 & -12 & 3\\ 2 & 3 & -3 & 2\\ 0 & 2 & -2 & 6\end{bmatrix}$$

ابتدا ماتریس $A=LU$ را بصورت زیر می نویسیم،

$$A=\left[\begin{array}{c|ccc}1 & 2 & 4 & 17\\ \hline 3 & 6 & -12 & 3\\ 2 & 3 & -3 & 2\\ 0 & 2 & -2 & 6\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|ccc}1 & 0 & 0 & 0\\ \hline l_{21} & 1 & 0 & 0\\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0\\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|ccc}u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14}\\ \hline 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24}\\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34}\\ 0 & 0 & 0 & u_{44}\end{array}\right]$$

حال تجزیه LU را برای ماتریس A بدست می آوریم،

$$A=LU \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix}a_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ L_{21} & L_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11} & U_{12}\\ 0 & U_{22}\end{bmatrix}$$

$$u_{11}=a_{11}\rightarrow u_{11}=1$$
$$U_{12}=A_{12}\rightarrow U_{12}=\begin{bmatrix}2 & 4 & 17\end{bmatrix}\rightarrow u_{12}=2,\quad u_{13}=4,\quad u_{14}=17$$
$$L_{21}=\frac{1}{a_{11}}A_{21}\rightarrow L_{21}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}3\\ 2\\ 0\end{bmatrix}\rightarrow l_{21}=3,\quad l_{31}=2,\quad l_{41}=0$$
$$A_{22}-L_{21}U_{12}=L_{22}U_{22}$$
$$\begin{bmatrix}6 & -12 & 3\\ 3 & -3 & 2\\ 2 & -2 & 6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\ 2\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 4 & 17\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ l_{32} & 1 & 0\\ l_{42} & l_{43} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{22} & u_{23} & u_{24}\\ 0 & u_{33} & u_{34}\\ 0 & 0 & u_{44}\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}0 & -24 & -48\\ -1 & -11 & -32\\ 2 & -2 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ l_{32} & 1 & 0\\ l_{42} & l_{43} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{22} & u_{23} & u_{24}\\ 0 & u_{33} & u_{34}\\ 0 & 0 & u_{44}\end{bmatrix}$$

تساوی اخیر خود تجزیه LU یک ماتریس 3×3 می باشد که باید انجام گیرد.

$$B=\left[\begin{array}{c|cc}0 & -24 & -48\\ \hline -1 & -11 & -32\\ 2 & -2 & 6\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|cc}1 & 0 & 0\\ \hline l_{32} & 1 & 0\\ l_{42} & l_{43} & 1\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|cc}u_{22} & u_{23} & u_{24}\\ \hline 0 & u_{33} & u_{34}\\ 0 & 0 & u_{44}\end{array}\right]$$

عنصر (۱،۱) صفر است، لذا نیاز به یک جایگشت دیگر داریم،

$$\tilde{B} = P_1 B \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \\ -1 & -11 & -32 \\ 0 & -24 & -48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -24 & -48 \\ -1 & -11 & -32 \\ 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

حال تجزیه LU را برای ماتریس $\tilde{B}$ ادامه می دهیم،

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{11} & \tilde{B}_{12} \\ \tilde{B}_{21} & \tilde{B}_{22} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{c|cc} 2 & -2 & 6 \\ \hline -1 & -11 & -32 \\ 0 & -24 & -48 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline l_{32} & 1 & 0 \\ l_{42} & l_{43} & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|cc} u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ \hline 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & u_{44} \end{array}\right]$$

$$u_{22} = \tilde{b}_{11} \rightarrow u_{22} = 2$$
$$U_{12} = \tilde{B}_{12} \rightarrow U_{12} = \begin{bmatrix} -2 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow u_{23} = -2, \quad u_{24} = 6$$
$$L_{21} = \frac{1}{\tilde{b}_{11}} \tilde{B}_{21} \rightarrow L_{21} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow l_{32} = \frac{-1}{2}, \quad l_{42} = 0$$

$$\tilde{B}_{22} - L_{21} U_{12} = L_{22} U_{22}$$
$$\begin{bmatrix} -11 & -32 \\ -24 & -48 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{33} & u_{34} \\ 0 & u_{44} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -12 & -29 \\ -24 & -48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{33} & u_{34} \\ l_{43} u_{33} & l_{43} u_{34} + u_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} u_{33} = -12 \\ l_{43} u_{33} = -24 \quad \xrightarrow{u_{33} = -12} \quad l_{43} = 2 \\ u_{34} = -29 \\ l_{43} u_{34} + u_{44} = -48 \quad \rightarrow \quad u_{44} = 10 \end{cases}$$

لذا تجزیه $A = PLU$ بشکل زیر بدست می آید،

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{a_{11}} P_1^T A_{21} & L_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U=\begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 17 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -12 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A=PLU \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 17 \\ 3 & 6 & -12 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 17 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -12 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

- تجزیه LU با استفاده از دستور [L,U,P]=lu(A) در نرم افزار MATLAB

```
A = [1 2 4 17;3 6 -12 3;2 3 -3 2;0 2 -2 6];
[L,U,P] = lu(A)
L =
    1.0000         0         0         0
         0    1.0000         0         0
    0.3333         0    1.0000         0
    0.6667   -0.5000    0.5000    1.0000
U =
    3     6   -12     3
    0     2    -2     6
    0     0     8    16
    0     0     0    -5
P =
    0     1     0     0
    0     0     0     1
    1     0     0     0
    0     0     1     0
```

****

ب) $A=\begin{bmatrix}0&5&5\\2&3&0\\6&9&8\end{bmatrix}$

ابتدا ماتریس $A=LU$ را بصورت زیر می نویسیم،

$$A=\left[\begin{array}{c:cc}0&5&5\\ \hdashline 2&3&0\\6&9&8\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:cc}1&0&0\\ \hdashline l_{21}&1&0\\l_{31}&l_{32}&1\end{array}\right]\left[\begin{array}{c:cc}u_{11}&u_{12}&u_{13}\\ \hdashline 0&u_{22}&u_{23}\\0&0&u_{33}\end{array}\right]$$

از آنجاییکه $a_{11}=0$ می باشد، از ابتدا یک ماتریس جایگشت P_1 را در نظر می گیریم،

$$\tilde{A}=P_1A\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}6&9&8\\2&3&0\\0&5&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&5&5\\2&3&0\\6&9&8\end{bmatrix}$$

حال تجزیه LU را برای ماتریس $\tilde{A}$ بدست می آوریم،

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}\tilde{a}_{11}&\tilde{A}_{12}\\\tilde{A}_{21}&\tilde{A}_{22}\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad\left[\begin{array}{c:cc}6&9&8\\ \hdashline 2&3&0\\0&5&5\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:cc}1&0&0\\ \hdashline l_{21}&1&0\\l_{31}&l_{32}&1\end{array}\right]\left[\begin{array}{c:cc}u_{11}&u_{12}&u_{13}\\ \hdashline 0&u_{22}&u_{23}\\0&0&u_{33}\end{array}\right]$$

$$u_{11}=\tilde{a}_{11}\rightarrow u_{11}=6$$

$$U_{12}=\tilde{A}_{12}\rightarrow U_{12}=\begin{bmatrix}9&8\end{bmatrix}\rightarrow u_{12}=9,\qquad u_{13}=8$$

$$L_{21}=\frac{1}{\tilde{a}_{11}}\tilde{A}_{21}\rightarrow L_{21}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\rightarrow l_{21}=\frac{1}{3},\qquad l_{31}=0$$

$$\tilde{A}_{22}-L_{21}U_{12}=L_{22}U_{22}$$

$$\begin{bmatrix}3&0\\5&5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\l_{32}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{22}&u_{23}\\0&u_{33}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0&\frac{-8}{3}\\5&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_{22}&u_{23}\\l_{32}u_{22}&l_{32}u_{23}+u_{33}\end{bmatrix}$$

عنصر (۱،۱) صفر است، لذا نیاز به یک جایگشت دیگر داریم،

$$\tilde{\tilde{A}}=P_2\begin{bmatrix}0&\frac{-8}{3}\\5&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\frac{-8}{3}\\5&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&5\\0&\frac{-8}{3}\end{bmatrix}$$

حال تجزیه LU را برای ماتریس $\tilde{\tilde{A}}$ ادامه می دهیم،

$$\tilde{\tilde{A}}=L_{22}U_{22}\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}5&5\\0&\frac{-8}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\l_{32}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{22}&u_{23}\\0&u_{33}\end{bmatrix}$$

$$\tilde{\tilde{A}}=L_{22}\begin{bmatrix}5&5\\0&\frac{-8}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_{22}&u_{23}\\l_{32}u_{22}&l_{32}u_{23}+u_{33}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}u_{22}=5\\l_{32}u_{22}=0\quad\xrightarrow{u_{22}=5}\quad l_{32}=0\\u_{23}=5\\l_{32}u_{32}+u_{33}=\dfrac{-8}{3}\quad\rightarrow\quad u_{33}=\dfrac{-8}{3}\end{cases}$$

لذا تجزیه $A = PLU$ بشکل زیر بدست می آید،

$$P = P_1\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & P_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{\tilde{a}_{11}}P_2^T\tilde{A}_{21} & L_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{3} & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix}\tilde{a}_{11} & \tilde{A}_{12}\\ 0 & U_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6 & 9 & 8\\ 0 & 5 & 5\\ 0 & 0 & \frac{-8}{3}\end{bmatrix}$$

$$A = PLU \Rightarrow \begin{bmatrix}0 & 5 & 5\\ 2 & 3 & 0\\ 6 & 9 & 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{3} & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 9 & 8\\ 0 & 5 & 5\\ 0 & 0 & \frac{-8}{3}\end{bmatrix}$$

- تجزیه LU با استفاده از دستور [L,U,P]=lu(A) در نرم افزار MATLAB

```
A =[0 5 5;2 3 0;6 9 8];

[L,U,P]= lu(A)

L =

    1.0000         0         0
         0    1.0000         0
    0.3333         0    1.0000

U =

    6.0000    9.0000    8.0000
         0    5.0000    5.0000
         0         0   -2.6667

P =

     0     0     1
     1     0     0
     0     1     0
```

****

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق - گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

ج)
$$A=\begin{bmatrix}-3 & 2 & 0 & 3\\ 6 & -6 & 0 & -12\\ -3 & 6 & -1 & 16\\ 12 & -14 & -2 & -25\end{bmatrix}$$

ابتدا ماتریس $A=LU$ را بصورت زیر می نویسیم،

$$A=\left[\begin{array}{c|ccc}-3 & 2 & 0 & 3\\ \hline 6 & -6 & 0 & -12\\ -3 & 6 & -1 & 16\\ 12 & -14 & -2 & -25\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|ccc}1 & 0 & 0 & 0\\ \hline l_{21} & 1 & 0 & 0\\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0\\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|ccc}u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14}\\ \hline 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24}\\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34}\\ 0 & 0 & 0 & u_{44}\end{array}\right]$$

حال تجزیه LU را برای ماتریس A بدست می آوریم،

$$A=LU \quad\rightarrow\quad \begin{bmatrix}a_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ L_{21} & L_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11} & U_{12}\\ 0 & U_{22}\end{bmatrix}$$

$$u_{11}=a_{11}\rightarrow u_{11}=-3$$

$$U_{12}=A_{12}\rightarrow U_{12}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 3\end{bmatrix}\rightarrow u_{12}=2,\qquad u_{13}=0,\qquad u_{14}=3$$

$$L_{21}=\frac{1}{a_{11}}A_{21}\rightarrow L_{21}=\frac{1}{-3}\begin{bmatrix}6\\ -3\\ 12\end{bmatrix}\rightarrow l_{21}=-2,\qquad l_{31}=1,\qquad l_{41}=-4$$

$$A_{22}-L_{21}U_{12}=L_{22}U_{22}$$

$$\begin{bmatrix}-6 & 0 & -12\\ 6 & -1 & 16\\ -14 & -2 & -25\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ l_{32} & 1 & 0\\ l_{42} & l_{43} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{22} & u_{23} & u_{24}\\ 0 & u_{33} & u_{34}\\ 0 & 0 & u_{44}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-2 & 0 & -6\\ 4 & -1 & 13\\ -6 & -2 & -13\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ l_{32} & 1 & 0\\ l_{42} & l_{43} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{22} & u_{23} & u_{24}\\ 0 & u_{33} & u_{34}\\ 0 & 0 & u_{44}\end{bmatrix}$$

تساوی اخیر خود تجزیه LU یک ماتریس 3×3 می باشد که باید انجام گیرد.

$$B=\begin{bmatrix}b_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|cc}-2 & 0 & -6\\ \hline 4 & -1 & 13\\ -6 & -2 & -13\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|cc}1 & 0 & 0\\ \hline l_{32} & 1 & 0\\ l_{42} & l_{43} & 1\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|cc}u_{22} & u_{23} & u_{24}\\ \hline 0 & u_{33} & u_{34}\\ 0 & 0 & u_{44}\end{array}\right]$$

$$u_{22}=b_{11}\rightarrow u_{22}=-2$$

$$U_{12}=B_{12}\rightarrow U_{12}=\begin{bmatrix}0 & -6\end{bmatrix}\rightarrow u_{23}=0,\qquad u_{24}=-6$$

$$L_{21}=\frac{1}{b_{11}}B_{21}\rightarrow L_{21}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}4\\ -6\end{bmatrix}\rightarrow l_{32}=-2,\qquad l_{42}=3$$

$$B_{22}-L_{21}U_{12}=L_{22}U_{22}$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 13\\ -2 & -13\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2\\ 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ l_{43} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{33} & u_{34}\\ 0 & u_{44}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_{33} & u_{34}\\ l_{43}u_{33} & l_{43}u_{34}+u_{44}\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}u_{33}=-1\\ l_{43}u_{33}=-2 \quad \xrightarrow{u_{33}=-1} \quad l_{43}=2\\ u_{34}=1\\ l_{43}u_{34}+u_{44}=5 \quad \rightarrow \quad u_{44}=3\end{cases}$$

لذا تجزیه $A=LU$ بشکل زیر بدست می آید،

$$A=LU\rightarrow\begin{bmatrix}-3 & 2 & 0 & 3\\ 6 & -6 & 0 & -12\\ -3 & 6 & -1 & 16\\ 12 & -14 & -2 & -25\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 2 & 0 & 3\\ 0 & -2 & 0 & -6\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

- تجزیه LU با استفاده از دستور [L,U,P]=lu(A) در نرم افزار MATLAB

```
A =[-3 2 0 3;6 -6 0 -12;-3 6 -1 16;12 -14 -2 -25];
[L,U,P]= lu(A)
L =
    1.0000         0         0         0
   -0.2500    1.0000         0         0
    0.5000    0.4000    1.0000         0
   -0.2500   -0.6000   -0.8750    1.0000
U =
   12.0000  -14.0000   -2.0000  -25.0000
         0    2.5000   -1.5000    9.7500
         0         0    1.6000   -3.4000
         0         0         0   -0.3750
P =
     0     0     0     1
     0     0     1     0
     0     1     0     0
     1     0     0     0
```

****

حل تمرین شماره ۷

$$A = LDU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

الف) برای غیرمنفرد بودن باید $|A| \neq 0$ باشد،

$$|A| = |LDU| = |L||D||U| = (1)\times(d_1 d_2 d_3)\times(1) \neq 0 \quad \rightarrow \quad d_1 \neq 0, d_2 \neq 0, d_3 \neq 0$$

ب) با استفاده از تجزیه بالا دستگاه معادلات $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ زیر را حل کنید.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \rightarrow \quad LDU\mathbf{x} = \mathbf{b} \rightarrow \quad \begin{cases} L\mathbf{y} = \mathbf{b} \\ D\mathbf{z} = \mathbf{y} \\ U\mathbf{x} = \mathbf{z} \end{cases}$$

به این ترتیب باید سه دستگاه معادلات ساده را حل نماییم تا پاسخ نهایی بدست آید،

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 1 \end{matrix}$$

$$D\mathbf{z} = \mathbf{y} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} z_1 = 0 \\ z_2 = 0 \\ z_3 = \frac{1}{d_3} \end{matrix}$$

$$U\mathbf{x} = \mathbf{z} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{d_3} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} x_1 = \frac{1}{d_3} \\ x_2 = \frac{1}{d_3} \\ x_3 = \frac{1}{d_3} \end{matrix}$$

****

حل تمرین شماره ۸

الف)
$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

برای استفاده از تجزیه چالسکی باید ماتریس مثبت معین باشد. پس ابتدا مثبت معین بودن ماتریس A را بررسی می نماییم،

$$1>0 \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

با توجه به معیار سیلوستر ماتریس A مثبت معین است، لذا می توان از روش تجزیه چالسکی دستگاه را حل نمود. حال تجزیه چالسکی ماتریس A را بدست می آوریم،

$$A = \left[\begin{array}{c:cc} 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:cc} l_{11} & 0 & 0 \\ \hdashline l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{array}\right] \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} \rightarrow l_{11} = 1$$

$$L_{21} = \frac{1}{l_{11}} A_{21} \rightarrow L_{21} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow l_{21} = 0, \quad l_{31} = 0$$

$$A_{22} - L_{21}L_{21}^T = L_{22}L_{22}^T$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{22} & 0 \\ l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_{22} & l_{32} \\ 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{22}^2 & l_{22}l_{32} \\ l_{22}l_{32} & l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{bmatrix} \rightarrow l_{22} = 1, \quad l_{32} = 2, \quad l_{33} = 2$$

بنابراین تجزیه چالسکی ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = LL^T$$

دستگاه معادلات حاصل را بصورت زیر حل می کنیم،

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad LL^T\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} L\mathbf{y} = \mathbf{b} \\ L^T\mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}$$

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad y_1 = 1, \quad y_2 = -1, \quad y_3 = 1$$

$$L^T\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = \frac{1}{2}$$

****

ب) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 = -1 \end{cases}$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

برای استفاده از تجزیه چالسکی باید ماتریس مثبت معین باشد. پس ابتدا مثبت معین بودن ماتریس A را بررسی می نماییم،

$$1 > 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 5 > 0$$

با توجه به معیار سیلوستر ماتریس A مثبت معین است، لذا می توان از روش تجزیه چالسکی دستگاه را حل نمود. حال تجزیه چالسکی ماتریس A را بدست می آوریم،

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} l_{11} & 0 & 0 \\ \hline l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{array}\right] \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} \rightarrow l_{11} = 1$$

$$L_{21} = \frac{1}{l_{11}} A_{21} \rightarrow L_{21} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow l_{21} = 1, \quad l_{31} = 1$$

$$A_{22} - L_{21} L_{21}^T = L_{22} L_{22}^T$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{22} & 0 \\ l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{22} & l_{32} \\ 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{22}^2 & l_{22} l_{32} \\ l_{22} l_{32} & l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{bmatrix} \rightarrow l_{22} = 1, \quad l_{32} = 1, \quad l_{33} = \sqrt{5}$$

بنابراین تجزیه چالسکی ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} = LL^T$$

دستگاه معادلات حاصل را بصورت زیر حل می کنیم،

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b} \quad \rightarrow \quad LL^T\mathbf{x}=\mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} L\mathbf{y}=\mathbf{b} \\ L^T\mathbf{x}=\mathbf{y} \end{cases}$$

$$L\mathbf{y}=\mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \sqrt{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad y_1=2,\ \ y_2=-1,\ \ y_3=-\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$L^T\mathbf{x}=\mathbf{y} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad x_1=3,\ \ x_2=-\frac{3}{5},\ \ x_3=-\frac{2}{5}$$

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

حل تمرین های سری چهارم

نیمسال اول ۹۰-۹۱
۹۰/۷/۲۷

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

حل تمرین شماره ۱

الف)
$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}-1\\ \lambda\\ -1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{v}=\begin{bmatrix}\lambda\\ -1\\ -1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{w}=\begin{bmatrix}-1\\ -1,\\ \lambda\end{bmatrix}$$

شرط استقلال خطی را بررسی می نماییم،

$$c_1\mathbf{u}+c_2\mathbf{v}+c_3\mathbf{w}=\mathbf{0}\quad\rightarrow\quad c_1\begin{bmatrix}-1\\ \lambda\\ -1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}\lambda\\ -1\\ -1\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ \lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات حاصل بصورت زیر بدست می آید، که برای مستقل خطی بودن دترمینان ماتریس ضرایب باید مخالف صفر باشد،

$$\begin{cases}-c_1+\lambda c_2-c_3=0\\ \lambda c_1-c_2-c_3=0\\ -c_1-c_2+\lambda c_3=0\end{cases}\quad\rightarrow\quad\begin{vmatrix}-1 & \lambda & -1\\ \lambda & -1 & -1\\ -1 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)^2(\lambda-2)$$

لذا برای مستقل خطی بودن باید $\lambda\neq-1$ و $\lambda\neq2$ باشد.

* * *

ب)
$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}1-\lambda\\ 2+\lambda\end{bmatrix},\qquad \mathbf{v}=\begin{bmatrix}2+\lambda\\ 1-\lambda\end{bmatrix}$$

شرط استقلال خطی را بررسی می نماییم،

$$c_1\mathbf{u}+c_2\mathbf{v}=\mathbf{0}\quad\rightarrow\quad c_1\begin{bmatrix}1-\lambda\\ 2+\lambda\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2+\lambda\\ 1-\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات حاصل بصورت زیر بدست می آید،

$$\begin{cases}(1-\lambda)c_1+(2+\lambda)c_2=0\\ (2+\lambda)c_1+(1-\lambda)c_2=0\end{cases}\quad\rightarrow\quad\begin{vmatrix}1-\lambda & 2+\lambda\\ 2+\lambda & 1-\lambda\end{vmatrix}=-3-6\lambda$$

برای مستقل خطی بودن باید $\lambda\neq\frac{-1}{2}$ باشد.

* * *

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

حل تمرین شماره ۲

الف)
$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}4\\4\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}=\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix},\quad \mathbf{w}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$$

شرط اسپن کردن را بررسی می نماییم،

$$c_1\mathbf{u}+c_2\mathbf{v}+c_3\mathbf{w}=\mathbf{r}\quad\rightarrow\quad c_1\begin{bmatrix}4\\4\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات حاصل بصورت زیر بدست می آید، برای اینکه این دستگاه همواره جواب داشته باشد باید دترمینان ماتریس ضرایب آن مخالف صفر گردد،

$$\begin{cases}4c_1+2c_2+c_3=r_1\\4c_1+2c_3=r_2\\-c_2+c_3=r_3\end{cases}\quad\rightarrow\quad\begin{vmatrix}4&2&1\\4&0&2\\0&-1&1\end{vmatrix}=-4\neq 0$$

لذا هر بردار کلی بصورت $[r_1,r_2,r_3]\in\Re^3$ انتخاب کنیم می توان بصورت ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ نوشت، لذا این سه بردار فضای $\Re^3$ را اسپن می کنند.

****

ب)
$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}=\begin{bmatrix}3\\-1\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{w}=\begin{bmatrix}-3\\8\\-5\end{bmatrix}$$

شرط اسپن کردن را بررسی می نماییم،

$$c_1\mathbf{u}+c_2\mathbf{v}+c_3\mathbf{w}=\mathbf{r}\quad\rightarrow\quad c_1\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}3\\-1\\1\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}-3\\8\\-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات حاصل بصورت زیر بدست می آید، همانند بخش (الف) دترمینان ماتریس ضرایب را بررسی می کنیم،

$$\begin{cases}c_1+3c_2-3c_3=r_1\\2c_1-c_2+8c_3=r_2\\-c_1+c_2-5c_3=r_3\end{cases}\quad\rightarrow\quad\begin{vmatrix}1&3&-3\\2&-1&8\\-1&1&-5\end{vmatrix}=0$$

نمی توان تمامی بردارهای $[r_1,r_2,r_3]\in\Re^3$ را بصورت ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ نوشت، لذا این سه بردار فضای $\Re^3$ را اسپن نمی کنند.

****

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق - گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

حل تمرین های سری چهارم

نیمسال اول ۹۰-۹۱
۹۰/۷/۲۷

ج) $$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{w}=\begin{bmatrix}2\\2\\4\end{bmatrix},\quad \mathbf{z}=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}$$

شرط اسپن کردن را بررسی می نماییم،

$$c_1\mathbf{u}+c_2\mathbf{v}+c_3\mathbf{w}+c_4\mathbf{z}=\mathbf{r}\quad\rightarrow\quad c_1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}2\\2\\4\end{bmatrix}+c_4\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات حاصل و فرم سطری پلکانی کاهش یافته آن بصورت زیر بدست می آید،

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&2&2&r_1\\0&1&2&-1&r_2\\1&1&4&0&r_3\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&2&0&-r_1-2r_2+2r_3\\0&1&2&0&r_1+2r_2-r_3\\0&0&0&1&r_1+r_2-r_3\end{array}\right]$$

با توجه به محل عناصر محوری c_3 متغیر آزاد و c_1,c_2,c_4 متغیرهای وابسته هستند. لذا دستگاه معادلات بیشمار جواب دارد و هر بردار کلی بصورت $[r_1,r_2,r_3]\in\Re^3$ انتخاب کنیم می توان بصورت ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{u,v,w,z}$ نوشت، لذا این چهار بردار فضای $\Re^3$ را اسپن می کنند.

* * *

د) $$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

شرط اسپن کردن را بررسی می نماییم،

$$c_1\mathbf{u}+c_2\mathbf{v}=\mathbf{r}\quad\rightarrow\quad c_1\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات حاصل و فرم سطری پلکانی کاهش یافته آن بصورت زیر بدست می آید،

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&1&r_1\\2&1&r_2\\-1&1&r_3\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cc|c}1&0&-r_1+r_2\\0&1&2r_1-r_2\\0&0&-3r_1+2r_2+r_3\end{array}\right]$$

با توجه به سطر آخر ماتریس سطری پلکانی کاهش یافته دستگاه معادلات حاصل زمانی سازگار است که $-3r_1+2r_2+r_3\neq 0$ باشد لذا نمی توان تمامی بردارهای $[r_1,r_2,r_3]\in\Re^3$ را بصورت ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{u,v}$ نوشت. این دو بردار فضای $\Re^3$ را اسپن نمی کنند.

* * *

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

حل تمرین شماره ۳

الف) $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}-1\\2\\-2\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}-1\\4\\-4\end{bmatrix}$ (برای فضای برداری $\Re^3$)

- ابتدا شرط استقلال خطی را بررسی می نماییم،

$$c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3=\mathbf{0}\quad\rightarrow\quad c_1\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\2\\-2\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}-1\\4\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}c_1-c_2-c_3=0\\-c_1+2c_2+4c_3=0\\c_1-2c_2-4c_3=0\end{cases}\rightarrow\begin{vmatrix}1&-1&-1\\-1&2&4\\1&-2&-4\end{vmatrix}=0$$

لذا بردارهای $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ مستقل خطی نیستند و نمی توانند برای فضای برداری $\Re^3$ تشکیل پایه دهند،

****

ب) $\mathbf{p}_1=x-3,\quad \mathbf{p}_2=x^2+2x,\quad \mathbf{p}_3=x^2+1$ (فضای برداری P_2)

- ابتدا شرط استقلال خطی را بررسی می نماییم،

$$c_1\mathbf{p}_1+c_2\mathbf{p}_2+c_3\mathbf{p}_3=0\quad\rightarrow\quad c_1(x-3)+c_2(x^2+2x)+c_3(x^2+1)=0$$

$$(c_2+c_3)x^2+(c_1+2c_2)x+(-3c_1+c_3)=0x^2+0x+0$$

$$\begin{cases}c_2+c_3=0\\c_1+2c_2=0\\-3c_1+c_3=0\end{cases}\rightarrow\begin{vmatrix}0&1&1\\1&2&0\\-3&0&1\end{vmatrix}=5\neq0$$

بنابراین چندجمله ای های $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3$ مستقل خطی هستند.

- حال شرط اسپن کردن فضای برداری P_2 را بررسی می کنیم،

$$c_1\mathbf{p}_1+c_2\mathbf{p}_2+c_3\mathbf{p}_3=r_1x^2+r_2x+r_3\quad\rightarrow\quad c_1(x-3)+c_2(x^2+2x)+c_3(x^2+1)=r_1x^2+r_2x+r_3$$

$$(c_2+c_3)x^2+(c_1+2c_2)x+(-3c_1+c_3)=r_1x^2+r_2x+r_3$$

$$\begin{cases}c_2+c_3=r_1\\c_1+2c_2=r_2\\-3c_1+c_3=r_3\end{cases}\rightarrow\begin{vmatrix}0&1&1\\1&2&0\\-3&0&1\end{vmatrix}=5\neq0$$

لذا هر چندجمله ای مرتبه دوم بصورت $r_1x^2+r_2x+r_3$ را می توان بصورت ترکیب خطی از چندجمله ای های $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3$ نوشت، پس چندجمله ای های $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3$ برای فضای برداری P_2 تشکیل پایه می دهند.

****

ج) $\mathbf{p}_1 = x^4, \quad \mathbf{p}_2 = 2x^3, \quad \mathbf{p}_3 = 1-x^2, \quad \mathbf{p}_4 = 3x-1, \quad \mathbf{p}_5 = 2x$ (برای فضای برداری $P_4(\Re)$)

- ابتدا شرط استقلال خطی را بررسی می نماییم،

$$c_1\mathbf{p}_1 + c_2\mathbf{p}_2 + c_3\mathbf{p}_3 + c_4\mathbf{p}_4 + c_5\mathbf{p}_5 = 0 \quad \rightarrow \quad c_1(x^4) + c_2(2x^3) + c_3(1-x^2) + c_4(3x-1) + c_5(2x) = 0$$

$$c_1x^4 + 2c_2x^3 - c_3x^2 + (3c_4 + 2c_5)x + c_3 - c_4 = 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$$

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ 2c_2 = 0 \\ -c_3 = 0 \\ 3c_4 + 2c_5 = 0 \\ c_3 - c_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

بنابراین چندجمله ای های $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_5$ مستقل خطی هستند.

- حال شرط اسپن کردن فضای برداری P_4 را بررسی می کنیم،

$$c_1\mathbf{p}_1 + c_2\mathbf{p}_2 + c_3\mathbf{p}_3 + c_4\mathbf{p}_4 + c_5\mathbf{p}_5 = r_1x^4 + r_2x^3 + r_3x^2 + r_4x + r_5$$

$$c_1(x^4) + c_2(2x^3) + c_3(1-x^2) + c_4(3x-1) + c_5(2x) = r_1x^4 + r_2x^3 + r_3x^2 + r_4x + r_5$$

$$c_1x^4 + 2c_2x^3 - c_3x^2 + (3c_4 + 2c_5)x + c_3 - c_4 = r_1x^4 + r_2x^3 + r_3x^2 + r_4x + r_5$$

$$\begin{cases} c_1 = r_1 \\ 2c_2 = r_2 \\ -c_3 = r_3 \\ 3c_4 + 2c_5 = r_4 \\ c_3 - c_4 = r_5 \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

لذا هر چندجمله ای مرتبه چهارم بصورت $r_1x^4 + r_2x^3 + r_3x^2 + r_4x + r$ را می توان بصورت ترکیب خطی از چندجمله ای های $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_5$ نوشت، پس چندجمله ای های $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_5$ برای فضای برداری P_4 تشکیل پایه می دهند.

****

د) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ (برای فضای برداری $M_{2\times 2}$)

- ابتدا شرط استقلال خطی را بررسی می نماییم،

$$c_1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_4\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 & c_2 + c_3 + c_4 \\ c_3 + c_4 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1+c_2+c_3+c_4=0 \\ c_2+c_3+c_4=0 \\ c_3+c_4=0 \\ c_4=0 \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

لذا عناصر این مجموعه مستقل خطی هستند.

- حال شرط اسپن کردن فضای برداری $\mathrm{M}_{2\times 2}$ را بررسی می کنیم،

$$c_1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_4\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1+c_2+c_3+c_4 & c_2+c_3+c_4 \\ c_3+c_4 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1+c_2+c_3+c_4=r_{11} \\ c_2+c_3+c_4=r_{12} \\ c_3+c_4=r_{21} \\ c_4=r_{22} \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

لذا هر ماتریس 2×2 را می توان بصورت ترکیب خطی از این چهار ماتریس نمایش داد، بنابراین این مجموعه ماتریس ها برای فضای برداری $\mathrm{M}_{2\times 2}$ تشکیل پایه می دهند.

****

حل تمرین شماره ۴

$$\boxed{A=\begin{bmatrix} -2 & 3 & 7 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 2 & -3 \\ 4 & -6 & -8 & 4 & 2 \end{bmatrix}}$$

الف) برای بررسی استقلال خطی ستون های ماتریس A بصورت زیر عمل می کنیم،

$$c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3+c_4\mathbf{v}_4+c_5\mathbf{v}_5=\mathbf{0} \quad \rightarrow \quad c_1\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ -8 \end{bmatrix} + c_4\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + c_5\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2c_1+3c_2+7c_3-4c_4=0 \\ -2c_1+3c_2-2c_3+2c_4-3c_5=0 \\ 4c_1-6c_2-8c_3+4c_4+2c_5=0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 3 & 7 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 2 & -3 \\ 4 & -6 & -8 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

با دستور rref فرم سطری پلکانی کاهش یافته را بدست می آوریم،

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 0 & -0.3333 & 1.1667 \\ 0 & 0 & 1 & -0.6667 & 0.3333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

با توجه به ماتریس بدست آمده سیستم سازگار است و متغیرهای c_2، c_4 و c_5 متغیرهای آزاد هستند لذا سیستم بیشمار جواب دارد و ستون های ماتریس A استقلال خطی ندارند.

****

ب) $\boxed{\mathbf{b}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{b}_2=\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{b}_3=\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}}$

حال سازگار بودن دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ را برای بردارهای داده شده بررسی می کنیم. برای این کار از دستور rref استفاده می نماییم،

$$[A|\mathbf{b}_1]=\left[\begin{array}{ccccc|c} -2 & 3 & 7 & -4 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 2 & -3 & -2 \\ 4 & -6 & -8 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1.5 & 0 & -0.3333 & 1.1667 & 0.6667 \\ 0 & 0 & 1 & -0.6667 & 0.3333 & 0.3333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

سیستم سازگار است.

$$[A|\mathbf{b}_2]=\left[\begin{array}{ccccc|c} -2 & 3 & 7 & -4 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & -2 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -6 & -8 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1.5 & 0 & -0.3333 & 1.1667 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.6667 & 0.3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

سیستم ناسازگار است.

$$[A|\mathbf{b}_3]=\left[\begin{array}{ccccc|c} -2 & 3 & 7 & -4 & 0 & -5 \\ -2 & 3 & -2 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -6 & -8 & 4 & 2 & 6 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1.5 & 0 & -0.3333 & 1.1667 & 0.1667 \\ 0 & 0 & 1 & -0.6667 & 0.3333 & -0.667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

سیستم سازگار است.

****

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

حل تمرین های سری چهارم

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۷/۲۷

حل تمرین شماره ۵

فضای ستون های یک ماتریس یک زیرفضای برداری است که توسط ستون های آن ماتریس اسپن می شود.

الف) $A=\begin{bmatrix}1&2\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$

فضای ستون های ماتریس A زیر فضایی از $\Re^3$ بوده و شامل تمامی ترکیب خطی های ممکن ستون های ماتریس A است.

$$C(A)=\left\{\mathbf{b}\in\Re^3\,|\,\mathbf{b}=c_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$$

از آنجاییکه ستون های ماتریس A وابسته خطی هستند، لذا می توان نمایش فضای ستون های ماتریس A را بصورت زیر خلاصه کرد،

$$C(A)=\left\{\mathbf{b}\in\Re^3\,|\,\mathbf{b}=\alpha\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}\qquad \text{یا}\qquad C(A)=\mathrm{sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$$

به لحاظ هندسی $C(A)$ خطی است در $\Re^3$ که شامل بردار $\begin{bmatrix}\alpha\\0\\0\end{bmatrix}$ است، که همان محور x ها خواهد بود.

****

ب) $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\\0&0\end{bmatrix}$

فضای ستون های ماتریس A زیر فضایی از $\Re^3$ بوده و شامل تمامی ترکیب خطی های ممکن ستون های ماتریس A است. از آنجاییکه ستون های ماتریس A مستقل خطی هستند، $C(A)$ را می توان به شکل زیر نمایش داد.

$$C(A)=\left\{\mathbf{b}\in\Re^3\,|\,\mathbf{b}=c_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}\right\}\qquad \text{یا}\qquad C(A)=\mathrm{sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}\right\}$$

به لحاظ هندسی $C(A)$ صفحه ای در $\Re^3$ است که شامل دو بردار $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}$ و تمامی ترکیب خطی آن دو است، که همان صفحه xy خواهد بود.

****

ج) $A=\begin{bmatrix}1&0\\2&0\\0&0\end{bmatrix}$

فضای ستون های ماتریس A زیر فضایی از $\Re^3$ بوده و شامل تمامی ترکیب خطی های ممکن ستون های ماتریس A است.

$$C(A)=\left\{\mathbf{b}\in\Re^3\,|\,\mathbf{b}=c_1\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$$

از آنجاییکه ستون های ماتریس A وابسته خطی هستند، لذا می توان نمایش فضای ستون های ماتریس A را بصورت زیر خلاصه کرد،

$$C(A)=\left\{\mathbf{b}\in\Re^3\,|\,\mathbf{b}=\alpha\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\right\}\quad \text{یا}\quad C(A)=\mathrm{sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\right\}$$

به لحاظ هندسی $C(A)$ خطی در $\Re^3$ است که شامل بردار $\begin{bmatrix}\alpha\\2\alpha\\0\end{bmatrix}$ است.

****

د) $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&8\\2&4\\6&16\end{bmatrix}$

فضای ستون های ماتریس A زیر فضایی از $\Re^4$ بوده و شامل تمامی ترکیب خطی های ممکن ستون های ماتریس A است. از آنجاییکه ستون های ماتریس A مستقل خطی هستند، $C(A)$ را می توان به شکل زیر نمایش داد.

$$C(A)=\left\{\mathbf{b}\in\Re^4\,|\,\mathbf{b}=c_1\begin{bmatrix}1\\3\\2\\6\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2\\8\\4\\16\end{bmatrix}\right\}\quad \text{یا}\quad C(A)=\mathrm{sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\3\\2\\6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\8\\4\\16\end{bmatrix}\right\}$$

****

ه) $A=\begin{bmatrix}1&0\\4&3\\2&3\end{bmatrix}$

فضای ستون های ماتریس A زیر فضایی از $\Re^3$ بوده و شامل تمامی ترکیب خطی های ممکن ستون های ماتریس A است. از آنجاییکه ستون های ماتریس A مستقل خطی هستند، $C(A)$ را می توان به شکل زیر نمایش داد.

$$C(A)=\left\{\mathbf{b}\in\Re^3 \mid \mathbf{b}=c_1\begin{bmatrix}1\\4\\2\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\3\\3\end{bmatrix}\right\} \quad \text{یا} \quad C(A)=\mathrm{sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\4\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\3\\3\end{bmatrix}\right\}$$

به لحاظ هندسی $C(A)$ صفحه ای در $\Re^3$ است که شامل دو بردار $\begin{bmatrix}1\\4\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\3\\3\end{bmatrix}$ و تمامی ترکیب خطی های آن دو است.

****

و) $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}$

فضای ستون های ماتریس A زیر فضایی از $\Re^2$ بوده و شامل تمامی ترکیب خطی های ممکن ستون های ماتریس A است.

$$C(A)=\left\{\mathbf{b}\in\Re^2 \mid \mathbf{b}=c_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}\right\}$$

از آنجاییکه ستون های ماتریس A وابسته خطی هستند، لذا می توان نمایش فضای ستون های ماتریس A را بصورت زیر خلاصه کرد،

$$C(A)=\left\{\mathbf{b}\in\Re^2 \mid \mathbf{b}=\alpha\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\} \quad \text{یا} \quad C(A)=\mathrm{sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}$$

به لحاظ هندسی $C(A)$ خطی در $\Re^2$ است که شامل بردار $\begin{bmatrix}\alpha\\2\alpha\end{bmatrix}$ است.

****

ز) $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&0&4\end{bmatrix}$

فضای ستون های ماتریس A زیر فضایی از $\Re^2$ بوده و شامل تمامی ترکیب خطی های ممکن ستون های ماتریس A است.

$$C(A)=\left\{\mathbf{b}\in\Re^2 \mid \mathbf{b}=c_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\right\}$$

از آنجاییکه ستون اول و دوم ماتریس A وابسته خطی هستند، می توان نمایش فضای ستون های ماتریس A را بصورت زیر خلاصه کرد،

$$C(A)=\left\{\mathbf{b}\in\Re^2 \mid \mathbf{b}=\alpha\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\right\} \quad \text{یا} \quad C(A)=\mathrm{sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\right\}$$

به لحاظ هندسی $C(A)$ صفحه ای در $\Re^2$ است که توسط دو بردار $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ اسپن می شود که در واقع تمامی فضای $\Re^2$ خواهد بود.

****

ج) $\boxed{A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}$

فضای ستون های ماتریس A زیر فضایی از $\Re^2$ بوده و شامل تمامی ترکیب خطی های ممکن ستون های ماتریس A است.

$$C(A)=\left\{\mathbf{b}\in\Re^2 \mid \mathbf{b}=c_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\} \qquad \text{یا} \qquad C(A)=\text{sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

به لحاظ هندسی $C(A)$ صفحه ای در $\Re^2$ است که توسط دو بردار $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ اسپن می شود که در واقع تمامی فضای $\Re^2$ خواهد بود.

****

حل تمرین شماره ۶

فضای پوچی یک ماتریس یک زیرفضای برداری است و شامل تمامی بردارهای $\mathbf{x}$ است که برای آنها $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ گردد.

$$N(A_{m\times n})=\{\mathbf{x}\in\Re^n \mid A\mathbf{x}=\mathbf{0}\}$$

الف) $\boxed{A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}}$

حال باید مجموعه بردارهایی را بیابیم که شرط $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ را برآورده سازد.

$$A\mathbf{x}=\mathbf{0} \quad\rightarrow\quad \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0 \quad\rightarrow\quad x_1+2x_2+3x_3=0$$

لذا فضای پوچی ماتریس A یک زیرفضا از $\Re^3$ است که شرط زیر را داشته باشد،

$$N(A)=\{\mathbf{x}\in\Re^3 \mid x_1+2x_2+3x_3=0\}$$

در این معادله x_2 و x_3 متغیرهای آزاد هستند. یکی از جواب های مستقل خطی ممکن برای این مجموعه، بردارهای $\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$ هستند.

لذا می توان فضای پوچی ماتریس A را بصورت زیر نیز نمایش داد.

$$N(A)=sp\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

****

ب) $\boxed{A=\begin{bmatrix}1 & 5 & 7\\ 0 & 0 & 9\end{bmatrix}}$

حال باید مجموعه بردارهایی را بیابیم که شرط $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ را برآورده سازد.

$$A\mathbf{x}=\mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix}1 & 5 & 7\\ 0 & 0 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases}x_1+5x_2+7x_3=0\\ 9x_3=0\end{cases}$$

برای بدست آوردن مجموعه جواب این معادلات بصورت زیر عمل می کنیم،

$$\begin{bmatrix}1 & 5 & 7\\ 0 & 0 & 9\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix}1 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases}x_1=-5x_2\\ x_3=0\end{cases}$$

با توجه به فرم سطری پلکانی کاهش یافته x_2 متغیر آزاد است. یکی از جواب های ممکن برای این دستگاه معادلات بردار $\begin{bmatrix}-5\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$ است.

لذا فضای پوچی ماتریس A یک زیرفضا از $\Re^3$ است که شرط زیر را داشته باشد،

$$N(A)=\left\{\mathbf{x}\in\Re^3 \mid \begin{cases}x_1=-5x_2\\ x_3=0\end{cases}\right\} \qquad \text{یا} \qquad N(A)=sp\left\{\begin{bmatrix}-5\\ 1\\ 0\end{bmatrix}\right\}$$

****

ج) $\boxed{A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 4\\ 3 & 8 & 6 & 16\end{bmatrix}}$

حال باید مجموعه بردارهایی را بیابیم که شرط $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ را برآورده سازد.

$$A\mathbf{x}=\mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 4\\ 3 & 8 & 6 & 16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases}x_1+2x_2+2x_3+4x_4=0\\ 3x_1+8x_2+6x_3+16x_4=0\end{cases}$$

برای بدست آوردن مجموعه جواب این معادلات بصورت زیر عمل می کنیم،

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 4\\ 3 & 8 & 6 & 16\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases}x_1+2x_3=0\\ x_2+2x_4=0\end{cases}$$

با توجه به فرم سطری پلکانی کاهش یافته x_3 و x_4 متغیرهای آزاد هستند. برای این دستگاه معادلات دو بردار مستقل خطی برای جواب وجود دارد بطور مثال بردارهای $\begin{bmatrix}0\\ -2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}-2\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$. لذا فضای پوچی ماتریس A یک زیرفضا از $\Re^4$ است که شرط زیر را داشته باشد،

$$N(A)=\left\{\mathbf{x}\in\Re^4 \mid \begin{cases}x_1+2x_3=0\\ x_2+2x_4=0\end{cases}\right\} \qquad \text{یا} \qquad N(A)=sp\left\{\begin{bmatrix}0\\ -2\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}\right\}$$

****

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

د) $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&8\\2&4\\6&16\end{bmatrix}$

حال باید مجموعه بردارهایی را بیابیم که شرط $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ را برآورده سازد.

$$A\mathbf{x}=\mathbf{0}\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}1&2\\3&8\\2&4\\6&16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}x_1+2x_2=0\\3x_1+8x_2=0\\2x_1+4x_2=0\\6x_1+16x_2=0\end{cases}$$

برای بدست آوردن مجموعه جواب این معادلات بصورت زیر عمل می کنیم،

$$\begin{bmatrix}1&2\\3&8\\2&4\\6&16\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\end{cases}$$

با توجه به فرم سطری پلکانی کاهش یافته تنها جواب این دستگاه معادلات بردار $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ است. لذا $N(A)$ تهی است.

****

ه) $A=\begin{bmatrix}1&3&3&2\\2&6&9&5\\-1&-3&3&0\end{bmatrix}$

حال باید مجموعه بردارهایی را بیابیم که شرط $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ را برآورده سازد.

$$A\mathbf{x}=\mathbf{0}\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}1&3&3&2\\2&6&9&5\\-1&-3&3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}x_1+3x_2+3x_3+2x_4=0\\2x_1+6x_2+9x_3+5x_4=0\\-x_1-3x_2+3x_3=0\end{cases}$$

برای بدست آوردن مجموعه جواب این معادلات بصورت زیر عمل می کنیم،

$$\begin{bmatrix}1&3&3&2\\2&6&9&5\\-1&-3&3&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&3&0&1\\0&0&1&\frac{1}{3}\\0&0&0&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}x_1+3x_2+x_4=0\\x_3+\frac{1}{3}x_4=0\end{cases}$$

با توجه به فرم سطری پلکانی کاهش یافته x_2 و x_4 متغیرهای آزاد هستند. برای این دستگاه معادلات دو بردار مستقل خطی برای جواب وجود دارد بطور مثال بردارهای $\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\0\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}0\\-1\\-1\\3\end{bmatrix}$. لذا فضای پوچی ماتریس A یک زیرفضا از $\Re^4$ است که شرط زیر را داشته باشد،

$$N(A)=\left\{\mathbf{x}\in\Re^3 \mid \begin{cases}x_1+3x_2+x_4=0\\ x_3+\tfrac{1}{3}x_4=0\end{cases}\right\} \quad \text{یا} \quad N(A)=sp\left\{\begin{bmatrix}0\\-1\\-1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$$

* * *

و) $\boxed{A=\begin{bmatrix}1&2\\3&8\end{bmatrix}}$

حال باید مجموعه بردارهایی را بیابیم که شرط $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ را برآورده سازد.

$$A\mathbf{x}=\mathbf{0} \quad\rightarrow\quad \begin{bmatrix}1&2\\3&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad \begin{cases}x_1+2x_2=0\\3x_1+8x_2=0\end{cases}$$

برای بدست آوردن مجموعه جواب این معادلات بصورت زیر عمل می کنیم،

$$\begin{bmatrix}1&2\\3&8\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\end{cases}$$

با توجه به فرم سطری پلکانی کاهش یافته تنها جواب این دستگاه معادلات بردار $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ است. لذا $N(A)$ تهی است.

* * *

ز) $\boxed{A=\begin{bmatrix}1&2\\3&6\end{bmatrix}}$

حال باید مجموعه بردارهایی را بیابیم که شرط $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ را برآورده سازد.

$$A\mathbf{x}=\mathbf{0} \quad\rightarrow\quad \begin{bmatrix}1&2\\3&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad \begin{cases}x_1+2x_2=0\\3x_1+6x_2=0\end{cases}$$

برای بدست آوردن مجموعه جواب این معادلات بصورت زیر عمل می کنیم،

$$\begin{bmatrix}1&2\\3&6\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad x_1+2x_2=0$$

با توجه به فرم سطری پلکانی کاهش یافته x_2 متغیر آزاد است. یکی از جواب های ممکن برای این دستگاه معادلات بردار $\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$ است.

لذا فضای پوچی ماتریس A یک زیرفضا از $\Re^2$ است که شرط زیر را داشته باشد،

$$N(A)=\{\mathbf{x}\in\Re^2 \mid x_1+2x_2=0\} \quad \text{یا} \quad N(A)=sp\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}\right\}$$

* * *

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

حل تمرین های سری چهارم

نیمسال اول ۹۰-۹۱
۹۰/۷/۲۷

ج) $A=\begin{bmatrix}1&1&2&3\\2&2&8&10\\3&3&10&13\end{bmatrix}$

حال باید مجموعه بردارهایی را بیابیم که شرط $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ را برآورده سازد.

$$A\mathbf{x}=\mathbf{0}\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}1&1&2&3\\2&2&8&10\\3&3&10&13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+3x_4=0\\2x_1+2x_2+8x_3+10x_4=0\\3x_1+3x_2+10x_3+13x_4=0\end{cases}$$

برای بدست آوردن مجموعه جواب این معادلات بصورت زیر عمل می کنیم،

$$\begin{bmatrix}1&1&2&3\\2&2&8&10\\3&3&10&13\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}x_1+x_2+x_4=0\\x_3+x_4=0\end{cases}$$

با توجه به فرم سطری پلکانی کاهش یافته x_2 و x_4 متغیرهای آزاد هستند. برای این دستگاه معادلات دو بردار مستقل خطی برای جواب وجود دارد بطور مثال بردارهای $\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}0\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$. لذا فضای پوچی ماتریس A یک زیرفضا از $\Re^4$ است که شرط زیر را داشته باشد،

$$N(A)=\left\{\mathbf{x}\in\Re^3\ \middle|\ \begin{cases}x_1+x_2+x_4=0\\x_3+x_4=0\end{cases}\right\}\qquad\text{یا}\qquad N(A)=sp\left\{\begin{bmatrix}0\\-1\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$$

****

حل تمرین شماره ۷

الف) تمامی ماتریس های 2×2 بالا مثلثی به فرم $\begin{bmatrix}a&b\\0&d\end{bmatrix}$ (برای فضای برداری $(M_{2\times2}(\Re))$

برای زیر فضا بودن باید شرایط زیر را داشته باشد،

$$1.\quad \forall A_1,A_2\in S\quad\rightarrow\quad A_1+A_2\in S$$

$$A_1+A_2=\begin{bmatrix}a_1&b_1\\0&c_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_2&b_2\\0&c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1+a_2&b_1+b_2\\0&c_1+c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha&\beta\\0&\gamma\end{bmatrix}\in S$$

$$2.\quad \forall\alpha\in\Re,\quad\forall A\in S\quad\rightarrow\quad\alpha A\in S$$

$$\alpha A=\alpha\begin{bmatrix}a_1&b_1\\0&c_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha a_1&\alpha b_1\\0&\alpha c_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha&\beta\\0&\gamma\end{bmatrix}\in S$$

لذا شرایط زیرفضا بودن را برآورده می کند.

****

ب) مجموعه $S=\{[x,y,z]\in\Re^3 \mid 2x-y+z=\mathbf{0}\}$ (برای فضای برداری $\Re^3$)

برای زیر فضا بودن باشد شرایط زیر را داشته باشد،

$$1.\quad \left.\begin{array}{l}(x,y,z)\in S\rightarrow 2x-y+z=0\\(u,v,w)\in S\rightarrow 2u-v+w=0\end{array}\right\}\rightarrow\quad 2(x+u)-(y+v)+(z+w)=0\rightarrow\quad (x+u,y+v,z+w)\in S$$

$$2.\quad (x,y,z)\in S\rightarrow\quad 2x-y+z=0\rightarrow\quad 2(cx)-(cy)+(cz)=0\rightarrow\quad (cx,cy,cz)\in S$$

لذا شرایط زیرفضا بودن را برآورده می کند.

****

ج) مجموعه $S=\left\{\begin{bmatrix}x & y\\0 & z\end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix}1 & -\frac{4}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & y\\0 & z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}=0\right\}$ (برای فضای برداری $M_{2\times2}(\Re)$)

مجموعه S را میتوان بصورت زیر بیان کرد،

$$S=\left\{\begin{bmatrix}x & y\\0 & z\end{bmatrix} \mid 2x-3y+4z=0\right\}$$

برای زیر فضا بودن باشد شرایط زیر را داشته باشد،

$$1.\quad \left.\begin{array}{l}(x,y,z)\in S\rightarrow 2x-3y+4z=0\\(u,v,w)\in S\rightarrow 2u-3v+4w=0\end{array}\right\}\rightarrow\quad 2(x+u)-3(y+v)+4(z+w)=0\rightarrow\quad (x+u,y+v,z+w)\in S$$

$$2.\quad (x,y,z)\in S\rightarrow\quad 2x-3y+4z=0\rightarrow\quad 2(cx)-3(cy)+4(cz)=0\rightarrow\quad (cx,cy,cz)\in S$$

لذا شرایط زیرفضا بودن را برآورده می کند.

****

حل تمرین شماره ۸

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2&3&1&4\\2&4&5&5&4&9\\3&6&7&8&5&13\end{bmatrix}$$

الف) فضای ستون های ماتریس A را بدست آورید.

فضای ستون های ماتریس A زیر فضایی از $\Re^3$ بوده و شامل تمامی ترکیب خطی های ممکن ستون های ماتریس A است.

$$C(A)=\left\{\mathbf{b}\in\Re^3 \mid \mathbf{b}=c_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}2\\5\\7\end{bmatrix}+c_4\begin{bmatrix}3\\5\\8\end{bmatrix}+c_5\begin{bmatrix}1\\4\\5\end{bmatrix}+c_6\begin{bmatrix}4\\9\\13\end{bmatrix}\right\}$$

مشخص است که تمامی ستون های ماتریس A مستقل خطی نیستند. برای بدست آوردن ستون های مستقل خطی ابتدا فرم سطری پلکانی کاهش یافته ماتریس A را بدست می آوریم،

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2&3&1&4\\2&4&5&5&4&9\\3&6&7&8&5&13\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&0&5&-3&2\\0&0&1&-1&2&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

با توجه به محل عناصر محوری ستون های اول و سوم مستقل خطی هستند و بقیه وابسته خطی لذا نمایش فضای ستون های ماتریس A را می توان بصورت زیر نمایش داد.

$$C(A)=\left\{\mathbf{b}\in\Re^3\,|\,\mathbf{b}=c_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}2\\5\\7\end{bmatrix}\right\}\quad \text{یا}\quad C(A)=\text{sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\5\\7\end{bmatrix}\right\}$$

****

ب) آیا دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ به ازای تمام بردارهای $\mathbf{b}\in\Re^3$ سازگار است؟

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&2&3&1&4\\2&4&5&5&4&9\\3&6&7&8&5&13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&0&5&-3&2\\0&0&1&-1&2&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5b_1-2b_2\\-2b_1+b_2\\-b_1-b_2+b_3\end{bmatrix}$$

شرط سازگار بودن سیستم آن است که $b_3=b_1+b_2$ باشد.

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

حل تمرین های سری پنجم

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۸/۴

حل تمرین شماره ۱

الف)
$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

برای بدست آوردن رتبه و فضای گستره باید ستون های مستقل خطی ماتریس را بیابیم. ابتدا ماتریس A را به فرم سطری پلکانی کاهش یافته تبدیل می کنیم،

$$\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

با توجه به محل عناصر محوری ستون های اول و سوم مستقل خطی هستند و فضای گستره ماتریس A فضایی است که توسط این دو ستون اسپن می شود. چون دو بردار مستقل خطی دارد، لذا رتبه ماتریس A که همان بُعد فضای گستره می باشد دو است.

$$R(A)=sp\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}\quad,\quad \text{rank}(A)=2$$

حال باید پوچی و فضای پوچی ماتریس A را بدست آوریم، از آنجاییکه $\text{rank}(A)=2$ است، لذا پوچی ماتریس A برابر با دو می باشد،

$$\text{nullity}(A)=\nu(A)=n-\text{rank}(A)=4-2=2$$

بنابراین بُعد فضای پوچی ماتریس A دو است و برای نمایش فضای پوچی ماتریس A باید دو بردار پایه بدست می آوریم،

$$A\mathbf{x}=0\quad\rightarrow\quad A\mathbf{x}=x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x}=x_1\mathbf{u}_1+x_2\mathbf{u}_2+x_3\mathbf{u}_3+x_4\mathbf{u}_4=\mathbf{0}$$

ستون های دوم و چهارم وابسته خطی هستند و می توان آنها را بصورت یک ترکیب خطی از دو بردار ستونی مستقل خطی دیگر نوشت،

$$\mathbf{u}_2=(1)\mathbf{u}_1+(0)\mathbf{u}_3\quad,\quad \mathbf{u}_4=(0)\mathbf{u}_1+(1)\mathbf{u}_3$$

با این کار معادلات به شکل زیر در می آیند،

$$A\mathbf{x}=(x_1+x_2)\mathbf{u}_1+(x_3+x_4)\mathbf{u}_3=\mathbf{0}$$

بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_3$ مستقل خطی هستند، بنابراین،

$$\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_3+x_4=0\end{cases}$$

همچنین معادلات اخیر را می توان از روی فرم سطری پلکانی کاهش یافته به راحتی بدست آورد. با حل این دستگاه معادلات بردارهای پایه $N(A)$ بدست می آید،

$$N(A)=sp\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}$$

****

ب) $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\-1&0&1\\0&2&1\\3&8&1\end{bmatrix}$

برای بدست آوردن رتبه و فضای گستره باید ستون های مستقل خطی ماتریس را بیابیم. ابتدا ماتریس A را به فرم سطری پلکانی کاهش یافته تبدیل می کنیم،

$$\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

با توجه به محل عناصر محوری ستون های اول و دوم مستقل خطی هستند، لذا رتبه ماتریس A دو است و $R(A)$ فضایی است که توسط این بردارهای ستونی اسپن می شود،

$$R(A)=sp\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\2\\8\end{bmatrix}\right\}\quad,\quad \text{rank}(A)=2$$

حال باید پوچی و فضای پوچی ماتریس A را بدست آوریم، از آنجاییکه $\text{rank}(A)=2$ است، لذا پوچی ماتریس A برابر با یک می باشد،

$$\text{nullity}(A)=\nu(A)=n-\text{rank}(A)=3-2=1$$

بنابراین فضای پوچی ماتریس A فقط یک بردار پایه دارد که بصورت زیر بدست می آید،

$$A\mathbf{x}=0\quad\rightarrow\quad A\mathbf{x}=x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x}=x_1\mathbf{u}_1+x_2\mathbf{u}_2+x_3\mathbf{u}_3=\mathbf{0}$$

ستون سوم با ستون های اول و دوم وابسته خطی است، بنابراین می توان نوشت،

$$\mathbf{u}_3=(-1)\mathbf{u}_1+(\frac{1}{2})\mathbf{u}_2$$

با جایگذاری در بالا معادلات به شکل زیر در می آیند،

$$A\mathbf{x}=(x_1-x_3)\mathbf{u}_1+(x_2+\frac{1}{2}x_3)\mathbf{u}_2=\mathbf{0}$$

از آنجاییکه بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$ مستقل خطی هستند، با حل این دستگاه معادلات بردارهای پایه $N(A)$ بدست می آید،

$$\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_2+\frac{1}{2}x_3=0\end{cases}\quad\rightarrow\quad N(A)=sp\left\{\begin{bmatrix}1\\\frac{-1}{2}\\1\end{bmatrix}\right\}$$

****

ج) $A=\begin{bmatrix}1&3&3&2\\2&6&9&5\\-1&-3&3&0\end{bmatrix}$

برای بدست آوردن رتبه و فضای گستره ماتریس A را به فرم سطری پلکانی کاهش یافته تبدیل می کنیم،

$$\begin{bmatrix}1&3&0&1\\0&0&1&\frac{1}{3}\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

با توجه به محل عناصر محوری ستون های اول و سوم مستقل خطی هستند. لذا رتبه ماتریس A برابر دو است و این دو ستون مستقل خطی پایه های فضای گستره ماتریس A هستند،

$$R(A)=sp\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\9\\3\end{bmatrix}\right\}\quad,\quad \text{rank}(A)=2$$

حال پوچی و فضای پوچی ماتریس A را بدست می آوریم،

$$\text{nullity}(A)=\nu(A)=n-\text{rank}(A)=4-2=2$$

بنابراین پوچی که همان بُعد فضای پوچی ماتریس A است برابر دو است. لذا فضای پوچی ماتریس A دو بردار پایه دارد که بصورت زیر بدست می آید،

$$A\mathbf{x}=0\quad\rightarrow\quad A\mathbf{x}=x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}1\\\frac{1}{3}\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x}=x_1\mathbf{u}_1+x_2\mathbf{u}_2+x_3\mathbf{u}_3+x_4\mathbf{u}_4=\mathbf{0}$$

ستون های دوم و چهارم وابسته خطی هستند و می توان آنها را بصورت یک ترکیب خطی از دو بردار ستونی مستقل خطی دیگر نوشت،

$$\mathbf{u}_2=(3)\mathbf{u}_1+(0)\mathbf{u}_3\quad,\quad \mathbf{u}_4=(1)\mathbf{u}_1+(\tfrac{1}{3})\mathbf{u}_3$$

با این کار معادلات به شکل زیر در می آیند،

$$A\mathbf{x}=(x_1+3x_2+x_4)\mathbf{u}_1+(x_3+\tfrac{1}{3}x_4)\mathbf{u}_3=\mathbf{0}$$

بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_3$ مستقل خطی هستند، بنابراین،

$$\begin{cases}x_1+3x_2+x_4=0\\x_3+\frac{1}{3}x_4=0\end{cases}$$

با حل این دستگاه معادلات بردارهای پایه $N(A)$ بدست می آید،

$$N(A)=sp\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\frac{1}{3}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\\-3\end{bmatrix}\right\}$$

****

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

حل تمرین های سری پنجم

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

نیمسال اول ۹۰-۹۱
۹۰/۸/۴

د) $A=\begin{bmatrix}1&4&0&2\\2&8&1&5\\-1&-4&3&1\\0&-3&4&4\end{bmatrix}$

ابتدا فرم سطری پلکانی کاهش یافته ماتریس A را بدست می آوریم،

$$\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

با توجه به محل عناصر محوری سون های اول، دوم و سوم مستقل خطی هستند. لذا رتبه ماتریس سه است و این ستون های مستقل خطی پایه های فضای گستره ماتریس A هستند،

$$R(A)=sp\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\8\\-4\\-3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\3\\4\end{bmatrix}\right\}\quad,\qquad \operatorname{rank}(A)=3$$

حال پوچی و فضای پوچی ماتریس A را بدست می آوریم،

$$\operatorname{nullity}(A)=\nu(A)=n-\operatorname{rank}(A)=4-3=1$$

بنابراین پوچی که همان بُعد فضای پوچی ماتریس A است برابر یک است. لذا فضای پوچی ماتریس A یک بردار پایه دارد که بصورت زیر بدست می آید،

$$\mathbf{Ax}=0\quad\rightarrow\quad \mathbf{Ax}=x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}2\\0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Ax}=x_1\mathbf{u}_1+x_2\mathbf{u}_2+x_3\mathbf{u}_3+x_4\mathbf{u}_4=\mathbf{0}$$

ستون چهارم وابسته خطی است و می توان آنها را بصورت یک ترکیب خطی از سه بردار ستونی مستقل خطی دیگر نوشت،

$$\mathbf{u}_4=(2)\mathbf{u}_1+(0)\mathbf{u}_2+(1)\mathbf{u}_3$$

با این کار معادلات به شکل زیر در می آیند،

$$\mathbf{Ax}=(x_1+2x_4)\mathbf{u}_1+x_2\mathbf{u}_2+(x_3+x_4)\mathbf{u}_3=\mathbf{0}$$

بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ مستقل خطی هستند، بنابراین با حل این دستگاه معادلات، بردار پایه $N(A)$ بدست می آید،

$$\begin{cases}x_1+2x_4=0\\x_2=0\\x_3+x_4=0\end{cases}\quad\rightarrow\quad N(A)=sp\left\{\begin{bmatrix}-2\\0\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

****

بنام خداوند بخشنده و مهربان

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

جبر خطی کاربردی

حل تمرین های سری پنجم

نیمسال اول ۹۰-۹۱
۹۰/۸/۴

۵) $$\boxed{A=\begin{bmatrix}1&2&1&5\\2&-1&7&5\\-1&0&-3&-3\\3&1&8&10\end{bmatrix}}$$

ابتدا فرم سطری پلکانی کاهش یافته ماتریس A را بدست می آوریم،

$$\begin{bmatrix}\enclose{circle}{1}&0&3&3\\0&\enclose{circle}{1}&-1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

با توجه به محل عناصر محوری سون های اول و دوم مستقل خطی هستند. لذا رتبه ماتریس دو است و این ستون های مستقل خطی پایه های فضای گستره ماتریس A هستند،

$$R(A)=sp\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}\quad,\quad \operatorname{rank}(A)=2$$

حال پوچی و فضای پوچی ماتریس A را بدست می آوریم،

$$\operatorname{nullity}(A)=\nu(A)=n-\operatorname{rank}(A)=4-2=2$$

بنابراین پوچی که همان بُعد فضای پوچی ماتریس A است برابر دو است. لذا فضای پوچی ماتریس A دو بردار پایه دارد که بصورت زیر بدست می آید،

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=0\quad\rightarrow\quad \mathbf{A}\mathbf{x}=x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}3\\-1\\0\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}3\\1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=x_1\mathbf{u}_1+x_2\mathbf{u}_2+x_3\mathbf{u}_3+x_4\mathbf{u}_4=\mathbf{0}$$

ستون های سوم و چهارم وابسته خطی است و می توان آنها را بصورت یک ترکیب خطی از دو بردار ستونی مستقل خطی دیگر نوشت،

$$\mathbf{u}_3=(3)\mathbf{u}_1+(-1)\mathbf{u}_2\quad,\quad \mathbf{u}_4=(3)\mathbf{u}_1+(1)\mathbf{u}_2$$

با این کار معادلات به شکل زیر در می آیند،

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=(x_1+3x_3+3x_4)\mathbf{u}_1+(x_2-x_3+x_4)\mathbf{u}_2=\mathbf{0}$$

بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$ مستقل خطی هستند، بنابراین با حل این دستگاه معادلات، بردارهای پایه $N(A)$ بدست می آید،

$$\begin{cases}x_1+3x_3+3x_4=0\\x_2-x_3+x_4=0\end{cases}\quad\rightarrow\quad N(A)=sp\left\{\begin{bmatrix}1\\\frac{1}{3}\\0\\\frac{-1}{3}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\2\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}$$

****

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

حل تمرین های سری پنجم

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

نیمسال اول ۹۰-۹۱
۹۰/۸/۴

حل تمرین شماره ۲

الف)
$$\boxed{\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 2 & 8 & 4\\ -1 & -4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}}$$

دستگاه معادلات مذکور زمانی پاسخ دارد که بردار **b** عضوی از فضای گستره ماتریس A باشد. لذا $R(A)$ را بدست می آوریم. فرم سطری پلکانی کاهش یافته ماتریس A بصورت زیر می باشد،

$$\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 2 & 8 & 4\\ -1 & -4 & -2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}\textcircled{1} & 4 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

مشخص است که رتبه ماتریس A یک است و لذا فضای گستره ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$R(A)=sp\left\{\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -1\end{bmatrix}\right\}$$

حال بردار **b** باید مضربی از بردار $\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -1\end{bmatrix}$ باشد، پس شرط داشتن جواب آن است که $b_2=2b_1$ و $b_3=-b_1$ باشد.

* * *

ب)
$$\boxed{\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 9\\ -1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}}$$

همانند قسمت (الف) فضای گستره ماتریس A را بدست می آوریم،

$$\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 9\\ -1 & -4\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}\textcircled{1} & 0\\ 0 & \textcircled{1}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

با توجه به تعداد عناصر محوری رتبه ماتریس A دو است و فضای گستره ماتریس A بصورت زیر می باشد،

$$R(A)=sp\left\{\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\ 9\\ -4\end{bmatrix}\right\}$$

بردار **b** باید یک ترکیب خطی از دو بردار $\begin{bmatrix}4\\ 9\\ -4\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -1\end{bmatrix}$ باشد. لذا شرط داشتن جواب آن است که $b_3=-b_1$ باشد.

* * *

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

حل تمرین شماره ۳

$$A_{3\times 4}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\quad,\quad m\times n=3\times 4$$

الف) ابتدا ماتریس A^T را بدست می آوریم،

$$A^T=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&-1&1\\1&-1&1\end{bmatrix}$$

رتبه و فضای گستره ماتریس A^T را محاسبه می کنیم،

$$A^T=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&-1&1\\1&-1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{rref(A^T)}\begin{bmatrix}1&0&0.5\\0&1&-0.5\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

بنابراین،

$$R(A^T)=sp\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}\right\}\quad,\quad \text{rank}(A^T)=2$$

حال پوچی و فضای پوچی ماتریس A^T را بدست می آوریم،

$$\text{nullity}(A^T)=\nu(A^T)=m-\text{rank}(A^T)=3-2=1$$

$$A^T\mathbf{x}=0\quad\rightarrow\quad A^T\mathbf{x}=x_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$A^T\mathbf{x}=x_1\mathbf{u}_1+x_2\mathbf{u}_2+x_3\mathbf{u}_3=\mathbf{0}$$

ستون سوم با ستون های اول و دوم وابسته خطی است،

$$\mathbf{u}_3=(0.5)\mathbf{u}_1+(-0.5)\mathbf{u}_2\quad\rightarrow\quad A^T\mathbf{x}=(x_1+0.5x_3)\mathbf{u}_1+(x_2-0.5x_3)\mathbf{u}_2=0$$

از آنجاییکه بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$ مستقل خطی هستند،

$$\begin{cases}x_1+0.5x_3=0\\x_2-0.5x_3=0\end{cases}\quad\rightarrow\quad N(A^T)=sp\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix}\right\}$$

ب) حال باید نشان دهیم که $R(A)\perp N(A^T)$ و $R(A^T)\perp N(A)$ است.

$$R(A)=sp\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}\quad,\quad N(A^T)=sp\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix}\right\}$$

برای اینکه دو فضای برداری متعامد باشند کافی است که بردارهای پایه آنها بر هم عمود گردند، لذا ضرب داخلی بردارهای پایه را بررسی می کنیم،

$$\left\langle\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix}\right\rangle=(1)\times(1)+(1)\times(-1)+(0)\times(-2)=0$$

$$\left\langle\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix}\right\rangle=(1)\times(1)+(-1)\times(-1)+(1)\times(-2)=0$$

بنابراین بردارهای پایه $N(A^T)$ و بردارهای پایه $R(A)$ متعامد هستند. لذا $R(A)\perp N(A^T)$ می باشد.

حال نشان می دهیم که $R(A^T)\perp N(A)$ است.

$$R(A^T)=sp\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}\right\}\quad,\quad N(A)=sp\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}$$

$$\left\langle\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}\right\rangle=(1)\times(1)+(1)\times(-1)+(1)\times(0)+(1)\times(0)=0$$

$$\left\langle\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}\right\rangle=(1)\times(1)+(1)\times(-1)+(-1)\times(0)+(-1)\times(0)=0$$

$$\left\langle\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}\right\rangle=(1)\times(0)+(1)\times(0)+(1)\times(1)+(1)\times(-1)=0$$

$$\left\langle\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}\right\rangle=(1)\times(0)+(1)\times(0)+(-1)\times(1)+(-1)\times(-1)=0$$

****

حل تمرین شماره ۴

الف) ثابت کنید $R(A)^{\perp} = N(A^T)$ یا $R(A) \perp N(A^T)$

ماتریس $A_{m\times n}$ را با بردارهای ستونی در نظر بگیرید،

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \dots & \mathbf{a}_n\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad A^T_{n\times m} = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \mathbf{a}_3^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^T\end{bmatrix}$$

اگر $\mathbf{q} \in N(A^T)$ باشد داریم،

$$A^T\mathbf{q} = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1^T\mathbf{q} \\ \mathbf{a}_2^T\mathbf{q} \\ \mathbf{a}_3^T\mathbf{q} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^T\mathbf{q}\end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

بنابراین بردار $\mathbf{q}$ بر سطرهای ماتریس A^T عمود است و سطرهای ماتریس A^T همان ستون های ماتریس A هستند و ستون های ماتریس A متعلق به $R(A)$ هستند. لذا بردارهای $\mathbf{q} \in N(A^T)$ عمودند بر بردارهای $\mathbf{y} \in R(A)$. بنابراین $R(A) \perp N(A^T)$ است. پس $N(A^T)$ همان مکمل متعامد $R(A)$ است یعنی $R(A)^{\perp} = N(A^T)$ است.

****

ب) ثابت کنید $R(A^T)^{\perp} = N(A)$ یا $R(A^T) \perp N(A)$

ماتریس $A_{m\times n}$ را با بردارهای سطری در نظر بگیرید،

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix}\mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad A^T_{n\times m} = \begin{bmatrix}\mathbf{b}_1^T & \mathbf{b}_2^T & \mathbf{b}_3^T & \dots & \mathbf{b}_m^T\end{bmatrix}$$

اگر $\mathbf{z} \in N(A)$ باشد داریم،

$$A\mathbf{z} = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix}\mathbf{b}_1\mathbf{z} \\ \mathbf{b}_2\mathbf{z} \\ \mathbf{b}_3\mathbf{z} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m\mathbf{z}\end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

بنابراین بردار $\mathbf{z}$ بر سطرهای ماتریس A عمود است و سطرهای ماتریس A همان ستون های ماتریس A^T هستند و ستون های ماتریس A^T متعلق به $R(A^T)$ هستند. لذا بردارهای $\mathbf{z} \in N(A)$ عمودند بر بردارهای $\mathbf{w} \in R(A^T)$. بنابراین $R(A^T) \perp N(A)$ است. پس $N(A)$ همان مکمل متعامد $R(A^T)$ است یعنی $R(A^T)^{\perp} = N(A)$ است.

حل تمرین شماره ۵

$$A=\begin{bmatrix} a & -3 & c \\ 1 & 3 & -1 \\ b & 9 & -3 \end{bmatrix}$$

- برای داشتن $rank(A)=1$ باشد ماتریس A باید یک ستون مستقل خطی داشته باشد.

$$a=-1,\quad b=3,\quad c=1 \quad\rightarrow\quad A=\begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 9 & -3 \end{bmatrix}$$

- برای داشتن $rank(A)=2$ باشد ماتریس A باید دو ستون مستقل خطی داشته باشد.

$$a=-1,\quad b=3,\quad c=2 \quad\rightarrow\quad A=\begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 9 & -3 \end{bmatrix}$$

- برای داشتن $rank(A)=3$ باشد ماتریس A باید سه ستون مستقل خطی داشته باشد.

$$a=5,\quad b=4,\quad c=2 \quad\rightarrow\quad A=\begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 9 & -3 \end{bmatrix}$$

****

حل تمرین شماره ۶

در ماتریس رتبه یک فقط یک ستون(سطر) مستقل خطی وجود دارد و بقیه ستون ها(سطرها) مضربی از آن ستون(سطر) هستند.

الف)
$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad A=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

ب) $A=\begin{bmatrix}-6 & 3 & 9\\ 2 & -1 & -3\\ 4 & -2 & -6\end{bmatrix}$

$$A=\begin{bmatrix}-6 & 3 & 9\\ 2 & -1 & -3\\ 4 & -2 & -6\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad A=-\begin{bmatrix}3\\ -1\\ -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & -3\end{bmatrix}$$

ج) $A=\begin{bmatrix}3 & 12 & -1 & -6\\ 6 & 24 & -2 & -12\\ -3 & -12 & 1 & 6\end{bmatrix}$

$$A=\begin{bmatrix}3 & 12 & -1 & -6\\ 6 & 24 & -2 & -12\\ -3 & -12 & 1 & 6\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad A=-\begin{bmatrix}-1\\ -2\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 12 & -1 & -6\end{bmatrix}$$

این خاصیت ماتریس های رتبه یک در هنگام ذخیره سازی داده ها به کاهش فضای ذخیره سازی کمک می کند.

****

حل تمرین شماره ۷

برای این منظور باید ضرایب زیر را بدست آوریم،

$$\mathbf{u}=\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\alpha_3\mathbf{v}_3 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix}2\\ -1\\ 6\end{bmatrix}=\alpha_1\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+\alpha_3\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}=\beta_1\mathbf{v}_1+\beta_2\mathbf{v}_2+\beta_3\mathbf{v}_3 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix}3\\ 4\\ 1\end{bmatrix}=\beta_1\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}+\beta_2\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+\beta_3\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}=\gamma_1\mathbf{v}_1+\gamma_2\mathbf{v}_2+\gamma_3\mathbf{v}_3 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix}-2\\ 4\\ 0\end{bmatrix}=\gamma_1\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}+\gamma_2\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+\gamma_3\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}=\lambda_1\mathbf{v}_1+\lambda_2\mathbf{v}_2+\lambda_3\mathbf{v}_3 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix}1\\ 5\\ 3\end{bmatrix}=\lambda_1\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+\lambda_3\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$$

این مسئله مستلزم آن است که برای هر یک از بردارهای $\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{x},\mathbf{z}$ یک دستگاه معادلات سه معادله سه مجهول را حل نمایم که مستلزم بکارگیری محاسبات زیادی است. لیکن می توان برای سولت کار از ماتریس تبدیل ضرایب بین پایه های استاندارد $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ و $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ استفاده نمود. لذا ابتدا ماتریس تبدیل ضرایب را بدست می آوریم.

برای این منظور این بار بردارهای $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ را بصورت ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ می نویسیم و دستگاه حاصل را با الگوریتم گوس- جردن حل می نماییم،

$$\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3\end{bmatrix}K$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\end{array}\right] \Rightarrow \left[I|K\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \begin{array}{c}-r_1+r_2\to r_2\\ -r_1+r_3\to r_3\end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 3 & -1 & 0 & 1\end{array}\right] \begin{array}{c}2r_2+r_1\to r_1\\ -2r_2+r_3\to r_3\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 3 & -1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1\end{array}\right] \begin{array}{c}3r_3+r_1\to r_1\\ 2r_3+r_2\to r_2\end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 2 & -4 & 3\\ 0 & -1 & 0 & 1 & -3 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c}-r_2\to r_2\\ -r_3\to r_3\end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 2 & -4 & 3\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1\end{array}\right]=\left[I|K\right]$$

لذا ماتریس تبدیل ضرایب K بدست می آید. حای می توان نمایش بردارهای $\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{x},\mathbf{z}$ را برحسب بردارهای پایه $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ به راحتی بدست آورد.

$$[\mathbf{u}]_e=\begin{bmatrix}2\\-1\\6\end{bmatrix} \to [\mathbf{u}]_v=K[\mathbf{u}]_e=\begin{bmatrix}2 & -4 & 3\\ -1 & 3 & -2\\ -1 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}26\\-17\\-10\end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{w}]_e=\begin{bmatrix}3\\4\\1\end{bmatrix} \to [\mathbf{w}]_v=K[\mathbf{w}]_e=\begin{bmatrix}2 & -4 & 3\\ -1 & 3 & -2\\ -1 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7\\7\\4\end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{x}]_e=\begin{bmatrix}-2\\4\\0\end{bmatrix} \to [\mathbf{x}]_v=K[\mathbf{x}]_e=\begin{bmatrix}2 & -4 & 3\\ -1 & 3 & -2\\ -1 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\4\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-20\\14\\10\end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{z}]_e=\begin{bmatrix}1\\5\\3\end{bmatrix} \to [\mathbf{z}]_v=K[\mathbf{z}]_e=\begin{bmatrix}2 & -4 & 3\\ -1 & 3 & -2\\ -1 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\5\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9\\8\\6\end{bmatrix}$$

بنام خداوند بخشنده و مهربان

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق - گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

جبر خطی کاربردی

حل تمرین های سری ششم

نیمسال اول ۹۰-۹۱
۹۰/۸/۱۱

حل تمرین شماره ۱

الف) $$\boxed{A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\\0&0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}}$$

- از آنجاییکه $\operatorname{rank}(A)=2$ و $\operatorname{rank}(A|\mathbf{b})=3$ است، لذا سیستم ناسازگار است.

- برای بدست آوردن بردار $\hat{\mathbf{b}}$ یعنی تصویر متعامد بردار $\mathbf{b}$ بر روی $R(A)$ دو روش را می توان بکار برد،

۱- با استفاده از معادلات نرمال بردار $\hat{\mathbf{b}}$ بصورت زیر بدست می آید،

$$\hat{\mathbf{b}}=A\hat{\mathbf{x}}=A(A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}\qquad\rightarrow\qquad \hat{\mathbf{b}}=\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix}$$

۲- همچنین با استفاده از متعامد سازی و روش گرام اشمیت هم می توان تصویر متعامد بردار $\mathbf{b}$ بر روی $R(A)$ را محاسبه کرد، ابتدا پایه های یکامتعامد $R(A)$ را بدست می آوریم،

$$R(A)=sp\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}\qquad \text{پایه های یکامتعامد با روش گرام- اشمیت}\ \rightarrow\ \mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

حال تصویر بردار $\mathbf{b}$ را بر روی پایه های $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ بدست می آوریم،

$$\hat{\mathbf{b}}=\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{b}\rangle\mathbf{v}_1+\langle\mathbf{v}_2,\mathbf{b}\rangle\mathbf{v}_2\qquad\rightarrow\qquad \hat{\mathbf{b}}=\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix}$$

- حال می خواهیم ارتباطی بین بردار $\mathbf{b}$ و تصویر متعامد آن یعنی بردار $\hat{\mathbf{b}}$ بیابیم، برای این کار از معادلات نرمال استفاده می نماییم،

$$\boxed{\hat{\mathbf{b}}=A(A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}\qquad\rightarrow\qquad\hat{\mathbf{b}}=P\mathbf{b}\qquad\rightarrow\qquad P=A(A^TA)^{-1}A^T}$$

به ماتریس P، ماتریس تصویر $R(A)$ (projection matrix) گویند. با استفاده از این ماتریس می توان تصویر متعامد هر بردار $\mathbf{b}_{m\times1}$ را بر روی $R(A_{m\times n})$ بدست آورد. در این تمرین ماتریس P بصورت زیر بدست می آید،

$$\hat{\mathbf{b}}=A(A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}\qquad\rightarrow\qquad\hat{\mathbf{b}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\mathbf{b}$$

- معکوس چپ ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$A^L=(A^TA)^{-1}A^T\qquad\rightarrow\qquad A^L=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

****

ب) $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\\0&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}4\\4\\6\end{bmatrix}$

- از آنجاییکه $\text{rank}(A)=2$ و $\text{rank}(A\,|\,\mathbf{b})=2$ است، لذا سیستم سازگار است.

- چون سیستم سازگار است، پس تصویر $\mathbf{b}\in R(A)$ است و تصویر $\mathbf{b}$ بر روی $R(A)$ خود بردار $\mathbf{b}$ خواهد بود،

$$\hat{\mathbf{b}}=A\hat{\mathbf{x}}=A(A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}\quad\rightarrow\quad \hat{\mathbf{b}}=\begin{bmatrix}4\\4\\6\end{bmatrix}$$

- معکوس چپ ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$A^L=(A^TA)^{-1}A^T\quad\rightarrow\quad A^L=\begin{bmatrix}0.5&0.5&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

****

ج) $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\\-1&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}3\\2\\7\end{bmatrix}$

- از آنجاییکه $\text{rank}(A)=2$ و $\text{rank}(A\,|\,\mathbf{b})=3$ است، لذا سیستم ناسازگار است.

- برای بدست آوردن بردار $\hat{\mathbf{b}}$ یعنی تصویر متعامد بردار $\mathbf{b}$ بر روی $R(A)$ دو روش را می توان بکار برد،

۱- با استفاده از معادلات نرمال بردار $\hat{\mathbf{b}}$ بصورت زیر بدست می آید،

$$\hat{\mathbf{b}}=A\hat{\mathbf{x}}=A(A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}\quad\rightarrow\quad \hat{\mathbf{b}}=\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$$

۲- همچنین با استفاده از متعامد سازی و روش گرام اشمیت هم می توان تصویر متعامد بردار $\mathbf{b}$ بر روی $R(A)$ را محاسبه کرد، ابتدا پایه های یکامتعامد $R(A)$ را بدست می آوریم،

$$R(A)=sp\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}\quad\text{پایه های یکامتعامد با روش گرام- اشمیت}\quad\rightarrow\quad \mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

حال تصویر بردار $\mathbf{b}$ را بر روی پایه های $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ بدست می آوریم،

$$\hat{\mathbf{b}}=\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{b}\rangle\mathbf{v}_1+\langle\mathbf{v}_2,\mathbf{b}\rangle\mathbf{v}_2\quad\rightarrow\quad \hat{\mathbf{b}}=\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$$

- حال می خواهیم ارتباطی بین بردار $\mathbf{b}$ و تصویر متعامد آن یعنی بردار $\hat{\mathbf{b}}$ بیابیم، برای این کار از معادلات نرمال استفاده می نماییم و همانند قسمت (الف) تمرین ماتریس تصویر $R(A)$ را بدست می آوریم. در این تمرین ماتریس P بصورت زیر بدست می آید،

$$\hat{\mathbf{b}} = A(A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \hat{\mathbf{b}} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}\mathbf{b}$$

- معکوس چپ ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$A^L = (A^TA)^{-1}A^T \quad \rightarrow \quad A^L = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -0.5 \\ 0.3333 & 0.3333 & 0.3333 \end{bmatrix}$$

* * *

حل تمرین شماره ۲

الف) $$\boxed{A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}}$$

ابتدا سازگار یا ناسازگار بودن را بررسی می کنیم،

$$\text{rank}(A) = 2, \quad \text{rank}(A\,|\,\mathbf{b}) = 3 \quad \rightarrow$$ سیستم ناسازگار است

حال جواب حداقل مربعات را بدست می آوریم،

$$A^TA\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b} \quad \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 75 & 38 \\ 38 & 28 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 \\ 24 \end{bmatrix} \rightarrow \quad \hat{x}_1 = 0.6585, \quad \hat{x}_2 = -0.0366 \rightarrow \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6585 \\ -0.0366 \end{bmatrix}$$

با استفاده از دستور pinv نیز همین جواب بدست می آید،

```
A =[1  2;3  2;1  -2;8  4];
b =[1;2;1;5];
x = pinv(A)* b
x =

        0.6585
       -0.0366
```

* * *

ب) $A=\begin{bmatrix}1&0&4\\2&2&10\\1&-2&2\\1&-2&-2\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}3\\7\\6\\1\end{bmatrix}$

ابتدا سازگار یا ناسازگار بودن را بررسی می کنیم،

$\text{rank}(A)=3,\quad \text{rank}(A\,|\,\mathbf{b})=4 \quad\rightarrow$ سیستم ناسازگار است

حال جواب حداقل مربعات را بدست می آوریم،

$$A^TA\hat{\mathbf{x}}=A^T\mathbf{b}\quad\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&2&-2&-2\\4&10&2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&4\\2&2&10\\1&-2&2\\1&-2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\\hat{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&2&-2&-2\\4&10&2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\7\\6\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}7&0&24\\0&12&20\\24&20&124\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\\hat{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24\\0\\92\end{bmatrix}\rightarrow\quad\hat{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\\hat{x}_2\\\hat{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.5455\\-1.9318\\1.1591\end{bmatrix}$$

با استفاده از دستور pinv نیز همین جواب بدست می آید،

```
A=[1 0 4;2 2 10;1 -2 2;1 -2 -2];
b=[3;7;6;1];
x=pinv(A)*b
x=
    -0.5455
    -1.9318
     1.1591
```

۸**********

حل تمرین شماره ۳

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	2	7	9	12	13	14	14	13	10	8	4

الف) ابتدا معادله خطی به فرم $y=mx+n$ را پیدا می کنیم که بهترین تخمین برای برازش این یازده نقطه باشد،

$$\left.\begin{array}{l} -5m+n=2 \\ -4m+n=7 \\ -3m+n=9 \\ -2m+n=12 \\ -1m+n=13 \\ 0m+n=14 \\ 1m+n=14 \\ 2m+n=13 \\ 3m+n=10 \\ 4m+n=8 \\ 5m+n=4 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -4 & 1 \\ -3 & 1 \\ -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 9 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 14 \\ 13 \\ 10 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow \quad A\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

$\text{rank}(A)=2, \quad \text{rank}(A\,|\,\mathbf{b})=3 \quad \rightarrow$ سیستم ناسازگار است

با استفاده از روش حداقل مربعات می توان معادله خط $y=mx+n$ را بدست آورد.

$$A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b} \quad \rightarrow \begin{bmatrix} 110 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 106 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \hat{m}=0.1818, \quad \hat{n}=9.6364$$

بنابراین بهترین تقریب برای خطی که از این یازده نقطه می گذرد بصورت $y=0.1818x+9.6364$ است.

****

ب) حال معادله منحنی دوم به فرم $y=\alpha_2 x^2+\alpha_1 x+\alpha_0$ را پیدا می کنیم که این یازده نقطه را برازش کند،

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_0-5\alpha_1+25\alpha_2=2 \\ \alpha_0-4\alpha_1+16\alpha_2=7 \\ \alpha_0-3\alpha_1+9\alpha_2=9 \\ \alpha_0-2\alpha_1+4\alpha_2=12 \\ \alpha_0-1\alpha_1+1\alpha_2=13 \\ \alpha_0+0\alpha_1+0\alpha_2=14 \\ \alpha_0+1\alpha_1+1\alpha_2=14 \\ \alpha_0+2\alpha_1+4\alpha_2=13 \\ \alpha_0+3\alpha_1+9\alpha_2=10 \\ \alpha_0+4\alpha_1+16\alpha_2=8 \\ \alpha_0+5\alpha_1+25\alpha_2=4 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 1 & -4 & 16 \\ 1 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 9 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 14 \\ 13 \\ 10 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow \quad A\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

$\text{rank}(A)=3, \quad \text{rank}(A\,|\,\mathbf{b})=4 \quad \rightarrow$ سیستم ناسازگار است

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

با استفاده از روش حداقل مربعات می توان معادله منحنی مرتبه دوم $y=\alpha_2 x^2+\alpha_1 x+\alpha_0$ را بدست آورد.

$$A^T A\hat{\mathbf{x}}=A^T\mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 11 & 0 & 110 \\ 0 & 110 & 0 \\ 110 & 0 & 1958 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_0 \\ \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 106 \\ 20 \\ 688 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\alpha}_0=13.9720, \qquad \hat{\alpha}_1=0.1818, \qquad \hat{\alpha}_2=-0.4336$$

بنابراین بهترین تقریب برای منحنی مرتبه دوم بصورت $y=-0.4336x^2+0.1818x+13.9720$ می باشد.

****

ج) بردار خطا و نُرم خطا بصورت زیر بدست می آیند،

۱- خطا برای تقریب $y=0.1818x+9.6364$

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{b}-A\mathbf{x} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_7 \\ \varepsilon_8 \\ \varepsilon_9 \\ \varepsilon_{10} \\ \varepsilon_{11} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 9 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 14 \\ 13 \\ 10 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -4 & 1 \\ -3 & 1 \\ -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{n} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.1818 \\ 9.6364 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \hat{\varepsilon}_3 \\ \hat{\varepsilon}_4 \\ \hat{\varepsilon}_5 \\ \hat{\varepsilon}_6 \\ \hat{\varepsilon}_7 \\ \hat{\varepsilon}_8 \\ \hat{\varepsilon}_9 \\ \hat{\varepsilon}_{10} \\ \hat{\varepsilon}_{11} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6.7273 \\ -1.9091 \\ -0.0909 \\ 2.7273 \\ 3.5455 \\ 4.3636 \\ 4.1818 \\ 3.0000 \\ -0.1818 \\ -2.3636 \\ -6.5455 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}\|=12.7636$$

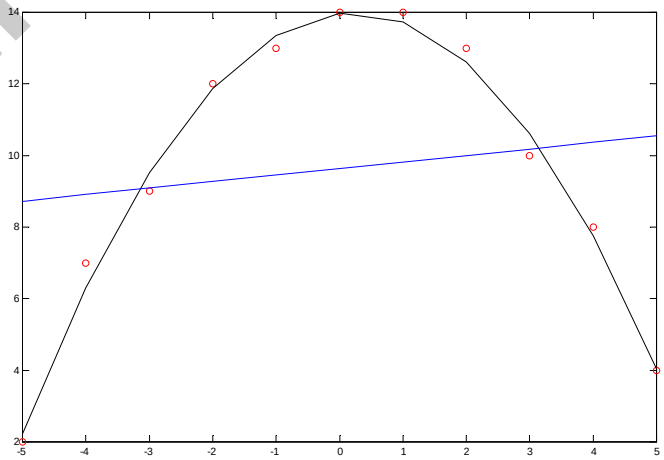
۲- خطا برای تقریب $y = 13.9720x^2 + 0.1818x - 0.4336$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{b} - A\mathbf{x} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_7 \\ \varepsilon_8 \\ \varepsilon_9 \\ \varepsilon_{10} \\ \varepsilon_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 9 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 14 \\ 13 \\ 10 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 1 & -4 & 16 \\ 1 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_0 \\ \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13.9720 \\ 0.1818 \\ -0.4336 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \hat{\varepsilon}_3 \\ \hat{\varepsilon}_4 \\ \hat{\varepsilon}_5 \\ \hat{\varepsilon}_6 \\ \hat{\varepsilon}_7 \\ \hat{\varepsilon}_8 \\ \hat{\varepsilon}_9 \\ \hat{\varepsilon}_{10} \\ \hat{\varepsilon}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2238 \\ 0.6923 \\ -0.5245 \\ 0.1259 \\ -0.3566 \\ 0.0280 \\ 0.2797 \\ 0.3986 \\ -0.6154 \\ 0.2378 \\ -0.0420 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}\| = 1.2737$$

با توجه به اینکه نُرم خطا در این حالت کمتر است لذا منحنی مرتبه دوم تقریب بهتری برای برازش این یازده نقطه است.

د) نمودارهای دو منحنی در شکل زیر آورده شده است،



بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۸/۱۱

حل تمرین های سری ششم

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

حل تمرین شماره ۴

t	0	1	2	3	4	1/2
$f(t)$	0	1	0	1	4	7

الف) می خواهیم یک منحنی به فرم $f(t)=ae^t+bt+ct^2+d\sin t$ برای برازش این شش نقطه پیدا کنیم،

$$\left.\begin{aligned}
ae^0+b(0)+c(0)^2+d\sin(0)&=0\\
ae^1+b(1)+c(1)^2+d\sin(1)&=1\\
ae^2+b(2)+c(2)^2+d\sin(2)&=0\\
ae^3+b(3)+c(3)^2+d\sin(3)&=1\\
ae^4+b(4)+c(4)^2+d\sin(4)&=4\\
ae^{\frac12}+b(\tfrac12)+c(\tfrac12)^2+d\sin(\tfrac12)&=7
\end{aligned}\right\}\rightarrow
\begin{bmatrix}1&0&0&0\\ e^1&1&1&\sin 1\\ e^2&2&4&\sin 2\\ e^3&3&9&\sin 3\\ e^4&4&16&\sin 4\\ e^{\frac12}&\frac12&\frac14&\sin\frac12\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{bmatrix}=
\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\\4\\7\end{bmatrix}\rightarrow A\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

$\operatorname{rank}(A)=4,\quad \operatorname{rank}(A\,|\,\mathbf{b})=5 \quad\rightarrow$ سیستم ناسازگار است

با استفاده از روش حداقل مربعات می توان معادله منحنی $f(t)=ae^t+bt+ct^2+d\sin t$ را بدست آورد.

$$A^TA\hat{\mathbf{x}}=A^T\mathbf{b}$$

$$A^TA=\begin{bmatrix}
1+e^2+e^4+e^3+e^8+e^1 & e^1+2e^2+3e^3+4e^4+\frac12 e^{\frac12} & e^1+4e^2+9e^3+16e^4+\frac14 e^{\frac12} & e^1\sin 1+e^2\sin 2+e^3\sin 3+e^4\sin 4+e^{\frac12}\sin\frac12\\
e^1+2e^2+3e^3+4e^4+\frac12 e^{\frac12} & \frac{121}{4} & \frac{801}{8} & \sin 1+2\sin 2+3\sin 3+4\sin 4+\frac12\sin\frac12\\
e^1+4e^2+9e^3+16e^4+\frac14 e^{\frac12} & \frac{801}{8} & \frac{5665}{16} & \sin 1+4\sin 2+9\sin 3+16\sin 4+\frac14\sin\frac12\\
e^1\sin 1+e^2\sin 2+e^3\sin 3+e^4\sin 4+e^{\frac12}\sin\frac12 & \sin 1+2\sin 2+3\sin 3+4\sin 4+\frac12\sin\frac12 & \sin 1+4\sin 2+9\sin 3+16\sin 4+\frac14\sin\frac12 & \sin^2 1+\sin^2 2+\sin^2 3+\sin^2 4+\sin^2\frac12
\end{bmatrix}$$

$$A^T\mathbf{b}=\begin{bmatrix}e^1+e^3+4e^4+7e^{\frac12}\\ \frac{47}{2}\\ \frac{303}{4}\\ \sin 1+\sin 3+4\sin 4+7\sin\frac12\end{bmatrix}$$

$$a=1.7431,\quad b=55.9923,\quad c=-21.7255,\quad d=-42.7684$$

بنابراین بهترین تقریب برای منحنی $f(t)$ داده شده بصورت زیر می باشد،

$$f(t)=1.7431e^t+55.9923t-21.7255t^2-42.7684\sin t$$

✽✽✽

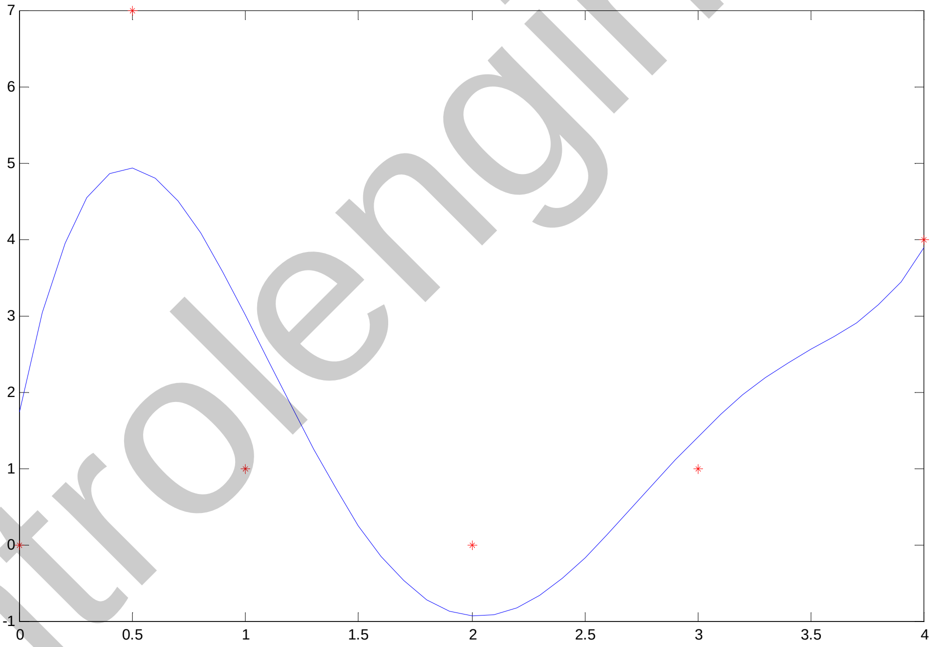
ب) نُرم خطا بصورت زیر بدست می آیند،

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{b} - A\mathbf{x} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} -1.7431 \\ -2.0167 \\ 0.9265 \\ -0.4235 \\ 0.1004 \\ 2.0656 \end{bmatrix}$$

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}\| = \|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\| \quad \rightarrow \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}\| = 3.5242$$

* * *

د) نمودار نقاط و منحنی برازش در شکل زیر آورده شده است،



* * *

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

حل تمرین های سری ششم

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

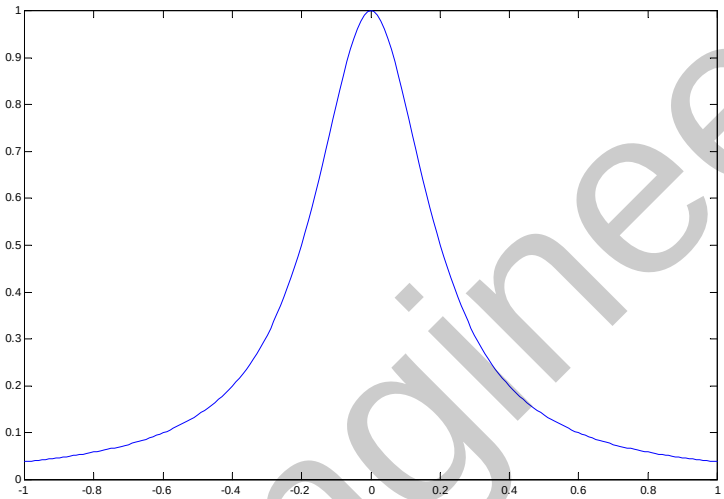
نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۸/۱۱

حل تمرین شماره ۵

$$f(t)=\frac{1}{1+25t^2}$$

الف) $f(t)$ را در بازه $t=[-1 \quad 1]$ با استفاده از نرم افزار MATLAB رسم می کنیم.

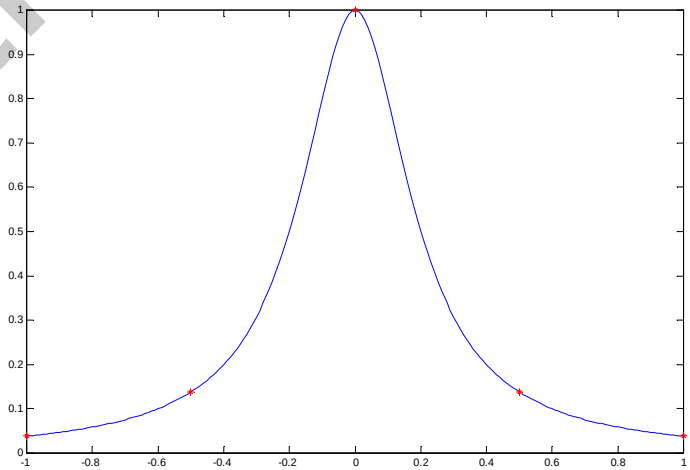


۱- روش اول:

پنج نقطه روی $f(t)$ انتخاب کرده و یک منحنی مرتبه چهار به فرم $g(t)=\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\alpha_3 t^3+\alpha_4 t^4$ تقریب می زنیم.

t	-1	-0.5	0	0.5	1
$f(t)$	0.0385	0.1379	1	0.1379	0.0385

پنج نقطه بصورت زیر بر روی این منحنی در نظر می گیریم،



در این حالت ماتریس A مربعی و سیستم سازگار است و با حل دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ جواب مستقیم بدست می آید و این جواب حداقل مربعات نیست به این روش interpolation گفته می شود.

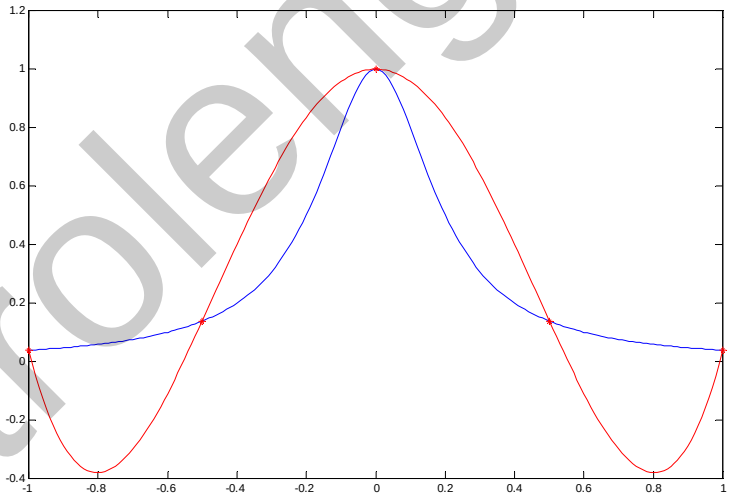
$$A\mathbf{x}=\mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -0.5 & 0.25 & -0.125 & 0.0625 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0.25 & 0.125 & 0.0625 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_0 \\ \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \hat{\alpha}_3 \\ \hat{\alpha}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0385 \\ 0.1379 \\ 1 \\ 0.1379 \\ 0.0385 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A\,|\,\mathbf{b})=5$$

همانطور که پیداست سیستم در این حالت ناسازگار نیست و ضرایب منحنی با حل مستقیم دستگاه معادلات بصورت زیر بدست می آیند،

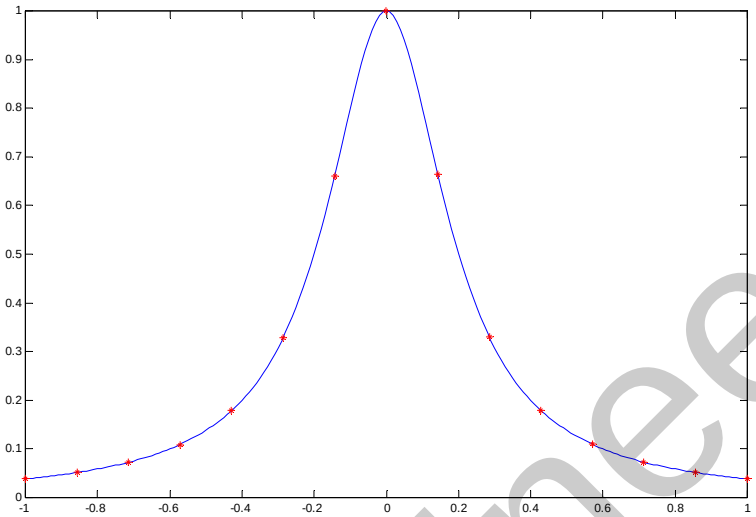
$$\hat{\alpha}_0=1, \quad \hat{\alpha}_1=0, \quad \hat{\alpha}_2=-4.2772, \quad \hat{\alpha}_3=0, \quad \hat{\alpha}_4=3.3156$$

منحنی مرتبه چهارم حاصل به شکل منحنی زیر خواهد بود،

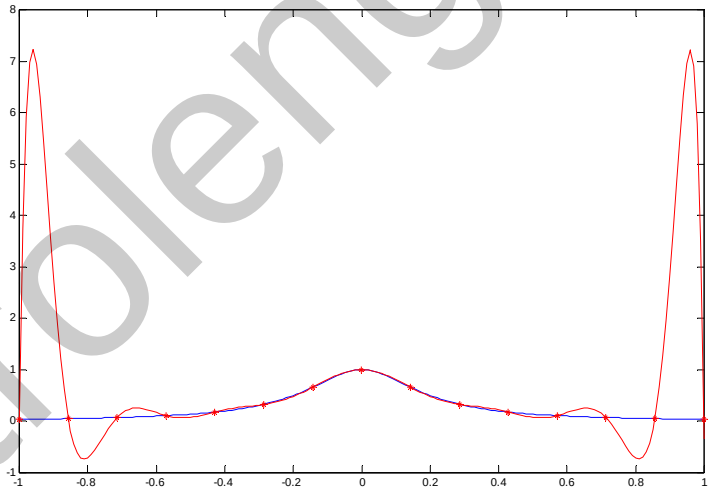


برای افزایش دقت تعداد نقاط و مرتبه منحنی برازش را بالاتر در نظر می گیریم. این بار ۱۵ نقطه و یک منحنی مرتبه چهارده در نظر می گیریم، لذا پانزده نقطه را بصورت زیر انتخاب می کنیم،

$(-1,0.0385)$ $(-0.8572,0.0516)$ $(-0.7144,0.0727)$ $(-0.5716,0.1091)$
$(-0.4288,0.1787)$ $(-0.2860,0.3284)$ $(-0.1432,0.6611)$ $(-0.0004,1)$
$(0.1424,0.6636)$ $(0.2852,0.3297)$ $(0.4280,0.1792)$ $(0.5708,0.1093)$
$(0.7136,0.0728)$ $(0.8564,0.0517)$ $(0.9992,0.0385)$



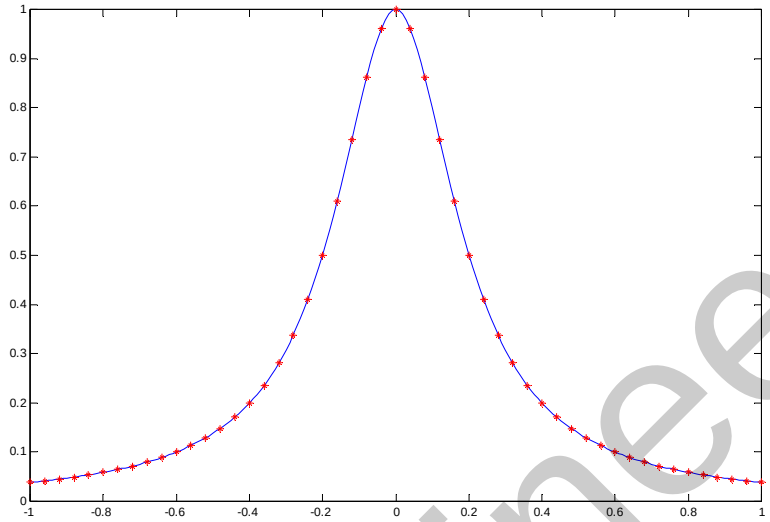
منحنی مرتبه چهارده برازش داده شده بشکل منحنی زیر بدست می آید،



همانطور که پیداست برازش مستقیم منحنی دقت مناسبی در نزدیکی نقاط مرزی ندارد.

۲- روش دوم:

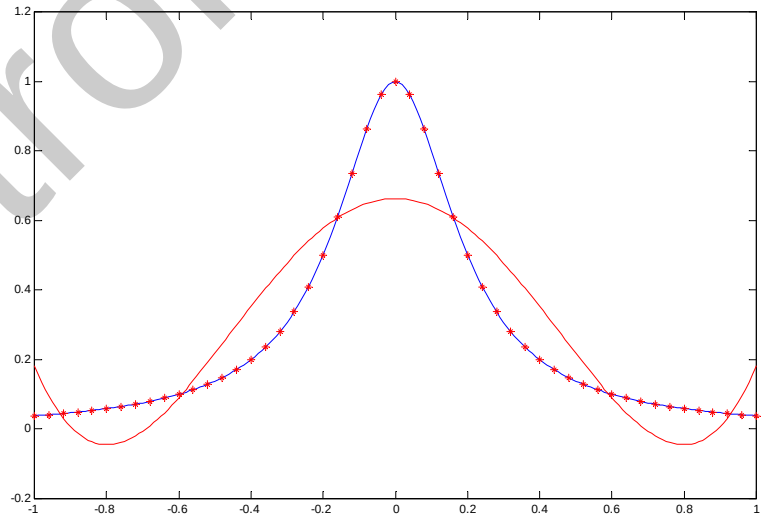
پنجاه و یک نقطه روی $f(t)$ انتخاب کرده و یک منحنی مرتبه چهار به فرم $g(t)=\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\alpha_3 t^3+\alpha_4 t^4$ تقریب می زنیم،
بطور مثال ۵۱ نقطه بصورت زیر انتخاب می کنیم.



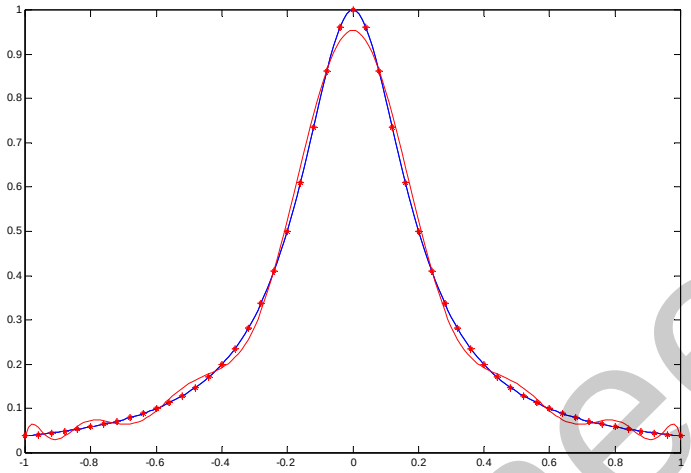
یک منحنی مرتبه چهار $g(t)=\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\alpha_3 t^3+\alpha_4 t^4$ را برای تقریب این ۵۱ نقطه در نظر می گیریم و با استفاده از روش حداقل مربعات سعی کنیم تا $\|A\mathbf{x}-\mathbf{b}\|$ را مینیمم نماییم، به این روش approximation گفته می شود. ضرایب منحنی بصورت زیر بدست می آید،

$$\hat{\alpha}_0=0.6629,\quad \hat{\alpha}_1=0,\quad \hat{\alpha}_2=-2.2150,\quad \hat{\alpha}_3=0,\quad \hat{\alpha}_4=1.7345$$

منحنی مرتبه چهارم حاصل به شکل زیر خواهد بود،



حال برای افزایش دقت تقریب، مرتبه منحنی را افزایش می دهیم و یک منحنی مرتبه ۱۴ را در نظر می گیریم، تقریب حاصل چنین خواهد بود،



همانطور که پیداست تقریب حاصل بسیار بهتر است و خطای تقریب $\|\varepsilon\| = \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\| = 0.1275$ می باشد. لذا روش تقریب با حداقل مربعات نتیجه بهتری از روش interpolation دارد.

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

حل تمرین های سری هفتم

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق - گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۸/۱۸

حل تمرین شماره ۱

الف)
$$A=\begin{bmatrix}2&1&3\\-1&0&7\\0&-1&-1\end{bmatrix}$$

برای اجرای فرایند گرام- اشمیت باید ماتریس A رتبه کامل باشد، لذا اول رتبه ماتریس A را بررسی می نماییم، $\operatorname{rank}(A)=3$ است پس می توان فرایند را اجرا کرد و تجزیه $A=QR$ را بدست آورد،

ابتدا با استفاده از ستون های ماتریس A که سه بردار مستقل خطی هستند، سه بردار متعامد بدست می آوریم،

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_2=\mathbf{a}_2-\frac{\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{a}_2\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}-\frac{\begin{bmatrix}2&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}2&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}-\frac{2}{5}\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{4}{5}\\\frac{-2}{5}\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5}\\\frac{2}{5}\\-1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3=\mathbf{a}_3-\frac{\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{a}_3\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1-\frac{\langle\mathbf{v}_2,\mathbf{a}_3\rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}3\\7\\-1\end{bmatrix}-\frac{\begin{bmatrix}2&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\7\\-1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}2&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}-\frac{\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\7\\-1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{5}\\\frac{2}{5}\\-1\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}\frac{1}{5}\\\frac{2}{5}\\-1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}3\\7\\-1\end{bmatrix}-\frac{-1}{5}\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}-\frac{\frac{22}{5}}{\frac{6}{5}}\begin{bmatrix}\frac{1}{5}\\\frac{2}{5}\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\7\\-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{-2}{5}\\\frac{1}{5}\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{11}{15}\\\frac{22}{15}\\\frac{-11}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{8}{3}\\\frac{16}{3}\\\frac{8}{3}\end{bmatrix}$$

حال بردارهای متعامد $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ را به بردارهای یکامتعامد تبدیل می نماییم و ماتریس های Q و R را بدست می آوریم،

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{5}\\\frac{2}{5}\\-1\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}\frac{8}{3}\\\frac{16}{3}\\\frac{8}{3}\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad \mathbf{q}_1=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{-1}{\sqrt5}\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{q}_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{30}}\\\frac{2}{\sqrt{30}}\\\frac{-5}{\sqrt{30}}\end{bmatrix},\quad \mathbf{q}_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{v}_1\|=\sqrt5,\quad \|\mathbf{v}_2\|=\frac{\sqrt{30}}{5},\quad \|\mathbf{v}_3\|=\frac{8\sqrt6}{3}$$

$$Q=\begin{bmatrix}\mathbf{q}_1&\mathbf{q}_2&\mathbf{q}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt{30}}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{-1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt{30}}&\frac{2}{\sqrt6}\\0&\frac{-5}{\sqrt{30}}&\frac{1}{\sqrt6}\end{bmatrix},\quad R=\begin{bmatrix}\|\mathbf{v}_1\|&\langle\mathbf{q}_1,\mathbf{a}_2\rangle&\langle\mathbf{q}_1,\mathbf{a}_3\rangle\\0&\|\mathbf{v}_2\|&\langle\mathbf{q}_2,\mathbf{a}_3\rangle\\0&0&\|\mathbf{v}_3\|\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt5&\frac{2}{\sqrt5}&\frac{-1}{\sqrt5}\\0&\frac{\sqrt{30}}{5}&\frac{22}{\sqrt{30}}\\0&0&\frac{8\sqrt6}{3}\end{bmatrix}$$

جواب تجزیه $A=QR$ را با نرم افزار MATLAB بررسی می نماییم،

```
A =[2 1 3;-1 0 7;0 -1 -1];
[Q,R]= qr(A)
Q =
    0.8944    0.1826    0.4082
    0.4472    0.3651    0.8165
         0   -0.9129    0.4082
R =
    2.2361    0.8944   -0.4472
         0    1.0954    4.0166
         0         0    6.5320
```

حال تجزیه چالسکی ماتریس $A^T A$ را بدست می آوریم،

```
A =[2 1 3;-1 0 7;0 -1 -1];
chol(A'*A)
ans =
    2.2361    0.8944   -0.4472
         0    1.0954    4.0166
         0         0    6.5320
```

مشخص است که ماتریس R در تجزیه $A=QR$ همان ماتریس L^T در تجزیه چالسکی ماتریس $A^T A$ است.

****

ب) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & -3\\ 0 & -2 & 3\end{bmatrix}$

ابتدا رتبه ماتریس A را بررسی می نماییم، $\text{rank}(A)=3$ است پس می توان فرایند را اجرا کرد و تجزیه $A=QR$ را بدست آورد،

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 0\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_2=\mathbf{a}_2-\frac{\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{a}_2\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}2\\ 0\\ -2\end{bmatrix}-\frac{\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 0\\ -2\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 0\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 0\\ -2\end{bmatrix}-\frac{2}{2}\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 0\\ -2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3=\mathbf{a}_3-\frac{\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{a}_3\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1-\frac{\langle \mathbf{v}_2,\mathbf{a}_3\rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}3\\-3\\3\end{bmatrix}-\frac{\begin{bmatrix}1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-3\\3\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}-\frac{\begin{bmatrix}1&1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-3\\3\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1&1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}3\\-3\\3\end{bmatrix}-\frac{6}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}-\frac{-6}{6}\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-3\\3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\-3\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

حال بردارهای متعامد $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ را به بردارهای یکامتعامد تبدیل می نماییم و ماتریس های Q و R را بدست می آوریم،

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad \mathbf{q}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{-1}{\sqrt2}\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{q}_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{-2}{\sqrt6}\end{bmatrix},\quad \mathbf{q}_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{v}_1\|=\sqrt2,\qquad \|\mathbf{v}_2\|=\sqrt6,\qquad \|\mathbf{v}_3\|=\sqrt3$$

$$Q=\begin{bmatrix}\mathbf{q}_1&\mathbf{q}_2&\mathbf{q}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{-1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\0&\frac{-2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix},\quad R=\begin{bmatrix}\|\mathbf{v}_1\|&\langle\mathbf{q}_1,\mathbf{a}_2\rangle&\langle\mathbf{q}_1,\mathbf{a}_3\rangle\\0&\|\mathbf{v}_2\|&\langle\mathbf{q}_2,\mathbf{a}_3\rangle\\0&0&\|\mathbf{v}_3\|\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt2&\frac{2}{\sqrt2}&\frac{6}{\sqrt2}\\0&\sqrt6&\frac{-6}{\sqrt6}\\0&0&\sqrt3\end{bmatrix}$$

جواب تجزیه $A=QR$ را با نرم افزار MATLAB بررسی می نماییم،

```
A =[1 2 3;-1 0 -3;0 -2 3];
[Q,R]=qr(A)
Q =

    0.7071    0.4082    0.5774
   -0.7071    0.4082    0.5774
         0   -0.8165    0.5774

R =

    1.4142    1.4142    4.2426
         0    2.4495   -2.4495
         0         0    1.7321
```

حال تجزیه چالسکی ماتریس A^TA را بدست می آوریم،

```
A =[1 2 3;-1 0 -3;0 -2 3];
chol(A'*A)
ans =
    1.4142    1.4142    4.2426
         0    2.4495   -2.4495
         0         0    1.7321
```

مشخص است که ماتریس R در تجزیه $A=QR$ همان ماتریس L^T در تجزیه چالسکی ماتریس A^TA است.

****

ج) $A=\begin{bmatrix}0&-2&1\\1&3&1\\0&0&1\\1&1&5\end{bmatrix}$

ابتدا رتبه ماتریس A را بررسی می نماییم، $\text{rank}(A)=3$ است، پس می توان فرایند را اجرا کرد و تجزیه $A=QR$ را بدست آورد.

حال با استفاده از ستون های ماتریس A که سه بردار مستقل خطی هستند، سه بردار متعامد بدست می آوریم،

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_2=\mathbf{a}_2-\frac{\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{a}_2\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}-2\\3\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{\begin{bmatrix}0&1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\3\\0\\1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}0&1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\3\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{4}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\3\\0\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\2\\0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3=\mathbf{a}_3-\frac{\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{a}_3\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1-\frac{\langle\mathbf{v}_2,\mathbf{a}_3\rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\5\end{bmatrix}-\frac{\begin{bmatrix}0&1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\5\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}0&1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{\begin{bmatrix}-2&1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\5\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}-2&1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\-1\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\-1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\5\end{bmatrix}-\frac{6}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{-6}{6}\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\3\\0\\3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

حال بردارهای متعامد $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ را به بردارهای یکامتعامد تبدیل می نماییم و ماتریس های Q و R را بدست می آوریم،

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\-1\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad \mathbf{q}_1=\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\quad \mathbf{q}_2=\begin{bmatrix}\frac{-2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\0\\\frac{-1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix},\quad \mathbf{q}_3=\begin{bmatrix}\frac{-1}{2}\\\frac{-1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{v}_1\|=\sqrt{2},\quad \|\mathbf{v}_2\|=\sqrt{6},\quad \|\mathbf{v}_3\|=2$$

$$Q=\begin{bmatrix}\mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \mathbf{q}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{2}\\0 & 0 & \frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2}\end{bmatrix},\quad R=\begin{bmatrix}\|\mathbf{v}_1\| & \langle\mathbf{q}_1,\mathbf{a}_2\rangle & \langle\mathbf{q}_1,\mathbf{a}_3\rangle\\0 & \|\mathbf{v}_2\| & \langle\mathbf{q}_2,\mathbf{a}_3\rangle\\0 & 0 & \|\mathbf{v}_3\|\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{6}{\sqrt{2}}\\0 & \sqrt{6} & \frac{-6}{\sqrt{6}}\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

جواب تجزیه $A=QR$ را با نرم افزار MATLAB بررسی می نماییم،

```
A =[0 -2 1;1 3 1;0 0 1;1 1 5];
[Q,R]= qr(A,0)
Q =
    0          -0.8165    -0.5000
    0.7071      0.4082    -0.5000
    0           0          0.5000
    0.7071      0.4082     0.5000
R =
    1.4142      2.8284     4.2426
    0           2.4495    -2.4495
    0           0          2.0000
```

حال تجزیه چالسکی ماتریس A^TA را بدست می آوریم،

```
A =[0 -2 1;1 3 1;0 0 1;1 1 5];
chol(A'*A)
ans =
    1.4142    2.8284    4.2426
         0    2.4495   -2.4495
         0         0    2.0000
```

مشخص است که ماتریس R در تجزیه $A=QR$ همان ماتریس L^T در تجزیه چالسکی ماتریس A^TA است.

****

د) $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\2&0&4\end{bmatrix}$

ابتدا رتبه ماتریس A را بررسی می نماییم، $\text{rank}(A)=3$ است پس می توان فرایند را اجرا کرد و تجزیه $A=QR$ را بدست آورد،

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_2=\mathbf{a}_2-\frac{\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{a}_2\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}-\frac{\begin{bmatrix}1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}-\frac{0}{6}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3=\mathbf{a}_3-\frac{\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{a}_3\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1-\frac{\langle\mathbf{v}_2,\mathbf{a}_3\rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\4\end{bmatrix}-\frac{\begin{bmatrix}1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\4\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}-\frac{\begin{bmatrix}1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\4\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1\\0\\4\end{bmatrix}-\frac{9}{6}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\\3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{-1}{2}\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

حال بردارهای متعامد $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ را به بردارهای یکامتعامد تبدیل می نماییم و ماتریس های Q و R را بدست می آوریم،

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad \mathbf{q}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{2}{\sqrt6}\end{bmatrix},\quad \mathbf{q}_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{-1}{\sqrt2}\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{q}_3=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt3}\\\frac{-1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{6}, \quad \|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{2}, \quad \|\mathbf{v}_3\| = \sqrt{3}$$

$$Q = [\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \mathbf{q}_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \|\mathbf{v}_1\| & \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{a}_2 \rangle & \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{a}_3 \rangle \\ 0 & \|\mathbf{v}_2\| & \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{a}_3 \rangle \\ 0 & 0 & \|\mathbf{v}_3\| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 & \frac{9}{\sqrt{6}} \\ 0 & \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}}$$

جواب تجزیه $A = QR$ را با نرم افزار MATLAB بررسی می نماییم،

```
A =[1 1 1;1 -1 0;2 0 4];
[Q,R]= qr(A)
Q =
    0.4082    0.7071   -0.5774
    0.4082   -0.7071   -0.5774
    0.8165    0.0000    0.5774
R =
    2.4495    0         3.6742
    0         1.4142    0.7071
    0         0         1.7321
```

حال تجزیه چالسکی ماتریس $A^T A$ را بدست می آوریم،

```
A =[1 1 1;1 -1 0;2 0 4];
chol(A'*A)
ans =
    2.4495         0    3.6742
         0    1.4142    0.7071
         0         0    1.7321
```

مشخص است که ماتریس R در تجزیه $A = QR$ همان ماتریس L^T در تجزیه چالسکی ماتریس $A^T A$ است.

****

حل تمرین شماره ۲

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}}$$

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

حل تمرین های سری هفتم

نیمسال اول ۹۰-۹۱
۹۰/۸/۱۸

الف) فرم سطری پلکانی کاهش یافته ماتریس A را بدست می آوریم،

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

با توجه به محل عناصر محوری ستون های اول، دوم و سوم مستقل خطی هستند و پایه های فضای گستره بصورت زیر بدست می آید،

$$R(A)=\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$$

حال با اعمال فرایند گرام-اشمیت این پایه ها را به پایه های یکامتعامد تبدیل می نماییم،

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{a}_1=[2,1,3]$$

$$\mathbf{v}_2=\mathbf{a}_2-\frac{\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{a}_2\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1=[1,0,1]-\frac{\langle[2,1,3],[1,0,1]\rangle}{\|[2,1,3]\|^2}[2,1,3]$$

$$=[1,0,1]-\frac{5}{14}[2,1,3]=[1,0,1]+[\frac{-10}{14},\frac{-5}{14},\frac{-15}{14}]=[\frac{4}{14},\frac{-5}{14},\frac{-1}{14}]$$

$$\mathbf{v}_3=\mathbf{a}_3-\frac{\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{a}_3\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1-\frac{\langle \mathbf{v}_2,\mathbf{a}_3\rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2$$

$$=[-1,1,2]-\frac{\langle[2,1,3],[-1,1,2]\rangle}{\|[2,1,3]\|^2}[2,1,3]-\frac{\langle[\frac{4}{14},\frac{-5}{14},\frac{-1}{14}],[-1,1,2]\rangle}{\|[\frac{4}{14},\frac{-5}{14},\frac{-1}{14}]\|^2}[\frac{4}{14},\frac{-5}{14},\frac{-1}{14}]=[-1,1,2]-\frac{5}{14}[2,1,3]+\frac{11}{3}[\frac{4}{14},\frac{-5}{14},\frac{-1}{14}]$$

$$=[-1,1,2]+[\frac{-10}{14},\frac{-5}{14},\frac{-15}{14}]+[\frac{44}{42},\frac{-55}{42},\frac{-11}{42}]=[\frac{-2}{3},\frac{-2}{3},\frac{2}{3}]$$

به این ترتیب پایه های متعامد بصورت زیر بدست می آیند،

$$\mathbf{v}_1=[2,1,3],\qquad \mathbf{v}_2=[\frac{4}{14},\frac{-5}{14},\frac{-1}{14}],\qquad \mathbf{v}_3=[\frac{-2}{3},\frac{-2}{3},\frac{2}{3}]$$

با نرمالیزه کردن این بردارها می توان بردارهای پایه یکامتعامد را بدست آورد،

$$\mathbf{w}_1=\frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1=\frac{1}{\sqrt{14}}[2,1,3]=[\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}]$$

$$\mathbf{w}_2=\frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|}\mathbf{v}_2=\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}}[\frac{4}{14},\frac{-5}{14},\frac{-1}{14}]=[\frac{4}{\sqrt{42}},\frac{-5}{\sqrt{42}},\frac{-1}{\sqrt{42}}]$$

$$\mathbf{w}_3=\frac{1}{\|\mathbf{v}_3\|}\mathbf{v}_3=\frac{3}{2\sqrt{3}}[\frac{-2}{3},\frac{-2}{3},\frac{2}{3}]=[\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}]$$

****

حل تمرین شماره ۳

سه بردار یکامتعامد $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ را در نظر بگیرید،

$$\mathbf{u}_1=[\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{-1}{\sqrt{5}}],\qquad \mathbf{u}_2=[0,-1,0],\qquad \mathbf{u}_3=[\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}]$$

حال فرایند گرام- اشمیت را بر این سه بردار اعمال می نماییم،

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{u}_1=[\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{-1}{\sqrt{5}}]$$

$$\mathbf{v}_2=\mathbf{u}_2-\frac{\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{u}_2\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1=[0,-1,0]-\frac{\langle[\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{-1}{\sqrt{5}}],[0,-1,0]\rangle}{\|[\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{-1}{\sqrt{5}}]\|^2}[\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{-1}{\sqrt{5}}]=[0,-1,0]$$

$$\mathbf{v}_3=\mathbf{u}_3-\frac{\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{u}_3\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1-\frac{\langle\mathbf{v}_2,\mathbf{u}_3\rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2$$

$$=[\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}]-\frac{\langle[\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{-1}{\sqrt{5}}],[\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}]\rangle}{\|[\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{-1}{\sqrt{5}}]\|^2}[\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{-1}{\sqrt{5}}]-\frac{\langle[0,-1,0],[\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}]\rangle}{\|[0,-1,0]\|^2}[0,-1,0]=[\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}]$$

لذا با اعمال فرایند گرام اشمیت به یک دسته بردار یکامتعامد مجدداً خود بردارها بدست می آیند.

****

حل تمرین شماره ۴

سه بردار وابسته خطی $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ را در نظر بگیرید،

$$\mathbf{u}_1=[1,0,-1],\qquad \mathbf{u}_2=[2,0,-2],\qquad \mathbf{u}_3=[-1,0,1]$$

حال فرایند گرام- اشمیت را بر این سه بردار اعمال می نماییم،

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{u}_1=[1,0,-1]$$

$$\mathbf{v}_2=\mathbf{u}_2-\frac{\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{u}_2\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1=[2,0,-2]-\frac{\langle[1,0,-1],[2,0,-2]\rangle}{\|[1,0,-1]\|^2}[1,0,-1]=[2,0,-2]-\frac{4}{2}[1,0,-1]=[0,0,0]$$

مشاهده می شود که بردار $\mathbf{v}_2$ صفر بدست می آید، لذا فرایند متوقف می شود زیرا $\|\mathbf{v}_2\|=0$ است. بنابراین برای اجرای صحیح فرایند متعامد سازی گرام- اشمیت باید بردارها مستقل خطی باشند.

****

حل تمرین شماره ۵

الف) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 2\end{bmatrix}$

- از آنجاییکه $\text{rank}(A)=2$ و $\text{rank}(A\,|\,\mathbf{b})=3$ است، لذا سیستم ناسازگار است.

- حال جواب حداقل مربعات را با استفاده از تجزیه QR بدست می آوریم،

۱- تجزیه QR ماتریس A :

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{a}_1=[1,1,1],$$

$$\mathbf{v}_2=\mathbf{a}_2-\frac{\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{a}_2\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1=[1,2,4]-\frac{\langle[1,1,1],[1,2,4]\rangle}{\|[1,1,1]\|^2}[1,1,1]=[1,2,4]-\frac{7}{3}[1,1,1]=[\frac{-4}{3},\frac{-1}{3},\frac{5}{3}]$$

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}\frac{-4}{3}\\ \frac{-1}{3}\\ \frac{5}{3}\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad \mathbf{q}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix},\quad \mathbf{q}_2=\begin{bmatrix}\frac{-4}{\sqrt{42}}\\ \frac{-1}{\sqrt{42}}\\ \frac{5}{\sqrt{42}}\end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{v}_1\|=\sqrt3,\qquad \|\mathbf{v}_2\|=\frac{\sqrt{42}}{3}$$

$$Q=[\mathbf{q}_1\quad \mathbf{q}_2]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt3} & \frac{-4}{\sqrt{42}}\\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{-1}{\sqrt{42}}\\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{5}{\sqrt{42}}\end{bmatrix},\qquad R=\begin{bmatrix}\|\mathbf{v}_1\| & \langle\mathbf{q}_1,\mathbf{a}_2\rangle\\ 0 & \|\mathbf{v}_2\|\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt3 & \frac{7}{\sqrt3}\\ 0 & \frac{\sqrt{42}}{3}\end{bmatrix}$$

۲- محاسبه بردار $\mathbf{y}=Q^T\mathbf{b}$:

$$\mathbf{y}=Q^T\mathbf{b}\quad\rightarrow\quad y=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{-4}{\sqrt{42}} & \frac{-1}{\sqrt{42}} & \frac{5}{\sqrt{42}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{\sqrt3}\\ \frac{4}{\sqrt{42}}\end{bmatrix}$$

۳- حل دستگاه معادلات $R\mathbf{x}=\mathbf{y}$ با روش جایگزینی پسرو:

$$R\mathbf{x}=\mathbf{y}\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}\sqrt3 & \frac{7}{\sqrt3}\\ 0 & \frac{\sqrt{42}}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{\sqrt3}\\ \frac{4}{\sqrt{42}}\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad x_1=1,\qquad x_2=\frac{2}{7}$$

لذا جواب حداقل مربعات بصورت $[x_1,x_2]=[1,\frac{2}{7}]$ بدست می آید.

- حال جواب حداقل مربعات را با استفاده از تجزیه چالسکی بدست می آوریم،

معادلات نرمال بصورت زیر است،

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b} \rightarrow C\mathbf{x} = \mathbf{d}$$

۱- ابتدا مقدارهای $C = A^T A$ و $\mathbf{d} = A^T\mathbf{b}$ را بدست می آوریم،

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 21 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 5 \\ 13 \end{bmatrix}$$

۲- سپس معادلات نرمال را با استفاده از تجزیه چالسکی حل می نماییم،

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b} \rightarrow C\mathbf{x} = \mathbf{d} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 21 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 13 \end{bmatrix}$$

تجزیه چالسکی ماتریس C بصورت زیر می باشد،

$$C = LL^T \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} \\ 0 & l_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} \\ l_{21}l_{11} & l_{21}^2 + l_{22}^2 \end{bmatrix}$$

$$l_{11}^2 = 3 \quad \rightarrow \quad l_{11} = \sqrt{3}$$

$$l_{11}l_{21} = 7 \quad \rightarrow \quad l_{21} = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

$$l_{21}^2 + l_{22}^2 = 21 \quad \rightarrow \quad l_{22} = \sqrt{21 - \frac{49}{3}} = \sqrt{\frac{14}{3}}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ \frac{7}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{14}{3}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{7}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{14}{3}} \end{bmatrix}$$

حال باید دستگاه معادلات را حل نمائیم،

$$L\mathbf{z} = \mathbf{d} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ \frac{7}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{14}{3}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 13 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad z_1 = \frac{5}{\sqrt{3}}, \quad z_2 = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{14}}$$

$$L^T\mathbf{x} = \mathbf{z} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{7}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{14}{3}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{3}} \\ \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{14}} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{2}{7}$$

لذا جواب حداقل مربعات بصورت $[x_1, x_2] = [1, \frac{2}{7}]$ بدست می آید.

****

ب)
$$\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & -6 & 26\\ 4 & -8 & -7\\ 0 & 4 & 4\\ 0 & -3 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

- از آنجاییکه $\text{rank}(A)=3$ و $\text{rank}(A\,|\,\mathbf{b})=4$ است، لذا سیستم ناسازگار است.
- ابتدا پاسخ حداقل مربعات را با استفاده از تجزیه QR بدست می آوریم،

۱- تجزیه $A=QR$ بفرم زیر می باشد،

$$A=QR\rightarrow\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{-6}{5} & \frac{26}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{-8}{5} & \frac{-7}{5}\\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{4}{5}\\ 0 & \frac{-3}{5} & \frac{-3}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{-3}{5}\\ 0 & \frac{4}{5} & 0\\ 0 & \frac{-3}{5} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

۲- بردار $\mathbf{y}=Q^T\mathbf{b}$ بصورت زیر بدست می آید،

$$\mathbf{y}=Q^T\mathbf{b}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{-3}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{7}{5}\\ \frac{1}{5}\\ \frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

۳- حال با حل معادله $R\mathbf{x}=\mathbf{y}$ مقدار $\mathbf{x}$ را بدست می آوریم،

$$R\mathbf{x}=Q^T\mathbf{b}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{7}{5}\\ \frac{1}{5}\\ \frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

لذا جواب حداقل مربعات بصورت $\mathbf{x}=[\frac{41}{25},\frac{4}{25},\frac{1}{25}]$ بدست می آید.

- حال جواب حداقل مربعات را با استفاده از تجزیه چالسکی بدست می آوریم،

معادلات نرمال بصورت زیر است،

$$A^TA\mathbf{x}=A^T\mathbf{b}\rightarrow C\mathbf{x}=\mathbf{d}$$

۱- ابتدا مقدارهای $C=A^TA$ و $\mathbf{d}=A^T\mathbf{b}$ را بدست می آوریم،

$$C=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 5 & -3\\ 2 & -3 & 30\end{bmatrix}\quad,\quad\mathbf{d}=\begin{bmatrix}\frac{7}{5}\\ \frac{-13}{5}\\ 4\end{bmatrix}$$

۲- سپس معادلات نرمال را با استفاده از تجزیه چالسکی حل می نماییم،

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b} \to C\mathbf{x} = \mathbf{d} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 30 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{-13}{5} \\ 4 \end{bmatrix}$$

تجزیه چالسکی ماتریس C بصورت زیر می باشد،

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

حال باید دستگاه معادلات را حل نمائیم،

$$L\mathbf{z} = \mathbf{d} \quad \to \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{-13}{5} \\ 4 \end{bmatrix} \quad \to \quad z_1 = \frac{7}{5}, \quad z_2 = \frac{1}{5}, \quad z_3 = \frac{1}{5}$$

$$L^T\mathbf{x} = \mathbf{z} \quad \to \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad \to \quad x_1 = \frac{41}{25}, \quad x_2 = \frac{4}{25}, \quad x_3 = \frac{1}{25}$$

لذا جواب حداقل مربعات بصورت $\mathbf{x} = [\frac{41}{25}, \frac{4}{25}, \frac{1}{25}]$ بدست می آید.

****

ج) $\boxed{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}}$

- از آنجاییکه $\text{rank}(A) = 2$ و $\text{rank}(A|\mathbf{b}) = 3$ است، لذا سیستم ناسازگار است.

- حال جواب حداقل مربعات را با استفاده از تجزیه QR بدست می آوریم،

۱- تجزیه QR ماتریس A :

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 = [1,-1,1],$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{a}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 = [-2,4,1] - \frac{\langle [1,-1,1],[-2,4,1] \rangle}{\|[1,-1,1]\|^2}[1,-1,1] = [-2,4,1] - \frac{-5}{3}[1,-1,1] = [\frac{-1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}]$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{8}{3} \end{bmatrix} \quad \to \quad \mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{114}} \\ \frac{7}{\sqrt{114}} \\ \frac{8}{\sqrt{114}} \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{3}, \quad \|\mathbf{v}_2\| = \frac{\sqrt{114}}{3}$$

$$Q=[\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2]=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{114}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{7}{\sqrt{114}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{8}{\sqrt{114}} \end{bmatrix}, \qquad R=\begin{bmatrix} \|\mathbf{v}_1\| & \langle \mathbf{q}_1,\mathbf{a}_2\rangle \\ 0 & \|\mathbf{v}_2\| \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{-5}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{114}}{3} \end{bmatrix}$$

۲- محاسبه بردار $\mathbf{y}=Q^T\mathbf{b}$:

$$\mathbf{y}=Q^T\mathbf{b} \quad \rightarrow \quad y=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{114}} & \frac{7}{\sqrt{114}} & \frac{8}{\sqrt{114}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{9}{\sqrt{3}} \\ \frac{27}{\sqrt{114}} \end{bmatrix}$$

۳- حل دستگاه معادلات $R\mathbf{x}=\mathbf{y}$ با روش جایگزینی پسرو:

$$R\mathbf{x}=\mathbf{y} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{-5}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{114}}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{9}{\sqrt{3}} \\ \frac{27}{\sqrt{114}} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad x_1=\frac{159}{38}, \qquad x_2=\frac{27}{38}$$

لذا جواب حداقل مربعات بصورت $[x_1,x_2]=[\frac{159}{38},\frac{27}{38}]$ بدست می آید.

- حال جواب حداقل مربعات را با استفاده از تجزیه چالسکی بدست می آوریم،
معادلات نرمال بصورت زیر است،

$$A^TA\mathbf{x}=A^T\mathbf{b} \rightarrow C\mathbf{x}=\mathbf{d}$$

۱- ابتدا مقدارهای $C=A^TA$ و $\mathbf{d}=A^T\mathbf{b}$ را بدست می آوریم،

$$C=\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 21 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{d}=\begin{bmatrix} 9 \\ -6 \end{bmatrix}$$

۲- سپس معادلات نرمال را با استفاده از تجزیه چالسکی حل می نماییم،

$$A^TA\mathbf{x}=A^T\mathbf{b} \rightarrow C\mathbf{x}=\mathbf{d} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 21 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 \\ -6 \end{bmatrix}$$

تجزیه چالسکی ماتریس C بصورت زیر می باشد،

$$C = LL^T \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} \\ 0 & l_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} \\ l_{21}l_{11} & l_{21}^2 + l_{22}^2 \end{bmatrix}$$

$$l_{11}^2 = 3 \quad \rightarrow \quad l_{11} = \sqrt{3}$$

$$l_{11}l_{21} = -5 \quad \rightarrow \quad l_{21} = \frac{-5}{\sqrt{3}}$$

$$l_{21}^2 + l_{22}^2 = 21 \quad \rightarrow \quad l_{22} = \sqrt{21 - \frac{25}{3}} = \sqrt{\frac{38}{3}}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ \frac{-5}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{38}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{-5}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{38}{3}} \end{bmatrix}$$

حال باید دستگاه معادلات را حل نمائیم،

$$L\mathbf{z} = \mathbf{d} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ \frac{-5}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{38}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -6 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad z_1 = \frac{9}{\sqrt{3}}, \quad z_2 = 9\sqrt{\frac{3}{38}}$$

$$L^T\mathbf{x} = \mathbf{z} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{-5}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{38}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{\sqrt{3}} \\ 9\sqrt{\frac{3}{38}} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad x_1 = \frac{159}{38}, \quad x_2 = \frac{27}{38}$$

لذا جواب حداقل مربعات بصورت $[x_1, x_2] = [\frac{159}{38}, \frac{27}{38}]$ بدست می آید.

****

حل تمرین شماره ۶

$$\boxed{\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}}$$

برای بدست آوردن پایه های یکامتعامد زیرفضای اسپن شده توسط بردارهای $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ از فرایند گرام- اشمیت استفاده می نماییم. لیکن باید ابتدا پایه ها را بدست آوریم

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

با توجه به فرم سطری پلکانی کاهش یافته بردارهای $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ مستقل خطی هستند، لذا فقط این دو بردار تشکیل پایه می دهند حال با استفاده از فرایند گرام- اشمیت بردارهای مستقل $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ را به پایه های یکامتعامد تبدیل می نماییم،

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix} - \frac{40}{30}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\frac{4}{3}\\\frac{8}{3}\\4\\\frac{16}{3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\0\\\frac{-1}{3}\end{bmatrix}$$

حال بردارهای متعامد $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ را به بردارهای یکامتعامد تبدیل می نماییم،

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\0\\\frac{-1}{3}\end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{30}}\\\frac{2}{\sqrt{30}}\\\frac{3}{\sqrt{30}}\\\frac{4}{\sqrt{30}}\end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix}\sqrt{\frac{2}{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\0\\\frac{-1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{30}, \quad \|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

لذا بردارهای $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ پایه های یکامتعامد زیر فضای اسپن شده توسط بردارهای $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ هستند.

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

حل تمرین های سری نهم

نیمسال اول ۹۰-۹۱
۹۰/۹/۲

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

حل تمرین شماره ۱

الف) $\boxed{A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 4\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}}$

معادله مشخصه و مقادیر ویژه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+4 & -4\\ 0 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=0 \quad\rightarrow\quad (\lambda+1)(\lambda+2)^2=0 \quad\rightarrow\quad \lambda_1=-1,\lambda_{2,3}=-2$$

برای بدست آوردن بردارهای ویژه بصورت زیر عمل می کنیم،

$$\text{Adj}(\lambda I-A)=\text{Adj}\begin{bmatrix}\lambda+1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+4 & -4\\ 0 & 1 & \lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda^2+4\lambda+4 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2+\lambda & 4\lambda+4\\ 0 & -\lambda-1 & \lambda^2+5\lambda+4\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1=-1 \quad\rightarrow\quad \text{Adj(-1}I\text{-}A)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad \mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=-2 \quad\rightarrow\quad \text{Adj(-2}I\text{-}A)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -4\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$$

از آنجاییکه $n-\text{rank}(A-\lambda_2 I)=3-2=1$ است، لذا برای مقدار ویژه تکراری $\lambda_{2,3}=-2$ فقط یک بردار ویژه مستقل خطی داریم.

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[-1  0  0;0  -4  4;0  -1  0];
[v,l]= eig(A)
v =
    0          0          1.0000
    0.8944     0.8944     0
    0.4472     0.4472     0
l =
        -2          0          0
         0         -2          0
         0          0         -1
```

****

ب) $A=\begin{bmatrix}2 & 10 & -2\\ 10 & 5 & 8\\ -2 & 8 & 11\end{bmatrix}$

معادله مشخصه و مقادیر ویژه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -10 & 2\\ -10 & \lambda-5 & -8\\ 2 & -8 & \lambda-11\end{vmatrix}=0 \quad\rightarrow\quad (\lambda-18)(\lambda-9)(\lambda+9)=0 \quad\rightarrow\quad \lambda_1=18,\lambda_2=9,\lambda_3=-9$$

ماتریس A سه مقدار ویژه حقیقی متمایز دارد. برای بدست آوردن بردارهای ویژه بصورت زیر عمل می کنیم،

$$\mathrm{Adj}(\lambda I-A)=\mathrm{Adj}\begin{bmatrix}\lambda-2 & -10 & 2\\ -10 & \lambda-5 & -8\\ 2 & -8 & \lambda-11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda^2-16\lambda-9 & 10\lambda-126 & 90-2\lambda\\ 10\lambda-126 & \lambda^2-13\lambda+18 & 8\lambda-36\\ 90-2\lambda & 8\lambda-36 & \lambda^2-7\lambda-90\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1=18 \quad\rightarrow\quad \mathrm{Adj}(18I\text{-}A)=\begin{bmatrix}27 & 54 & 54\\ 54 & 108 & 108\\ 54 & 108 & 108\end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad \mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}27\\ 54\\ 54\end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad \begin{bmatrix}1\\ 2\\ 2\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=9 \quad\rightarrow\quad \mathrm{Adj}(9I\text{-}A)=\begin{bmatrix}-72 & -36 & 72\\ -36 & -18 & 36\\ 72 & 36 & -72\end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}-36\\ -18\\ 36\end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad \begin{bmatrix}-2\\ -1\\ 2\end{bmatrix}$$

$$\lambda_3=-9 \quad\rightarrow\quad \mathrm{Adj}(\text{-}9I\text{-}A)=\begin{bmatrix}216 & -216 & 108\\ -216 & 216 & -108\\ 108 & -108 & 54\end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad \mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}108\\ -108\\ 54\end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad \begin{bmatrix}2\\ -2\\ 1\end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[2  10  -2;10  5  8;-2  8  11];
[v,l]= eig(A)
v =
    0.3333    0.6667    0.6667
    0.6667    0.3333   -0.6667
    0.6667   -0.6667    0.3333
l =
        18.0000         0         0
         0              9.0000    0
         0              0        -9.0000
```

****

ج) $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 0\end{bmatrix}$

معادله مشخصه و مقادیر ویژه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & \frac{-1}{2}\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ -2 & 2 & \lambda\end{vmatrix}=0 \quad\rightarrow\quad \lambda^3-\lambda^2-\lambda+1=0 \quad\rightarrow\quad \lambda_1=-1,\lambda_{2,3}=1$$

برای بدست آوردن بردارهای ویژه بصورت زیر عمل می کنیم،

$$A\mathbf{v}_i=\lambda_i\mathbf{v}_i \rightarrow \begin{bmatrix}\lambda & -1 & \frac{-1}{2}\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ -2 & 2 & \lambda\end{bmatrix}\mathbf{v}_i=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

برای مقدار ویژه غیر تکراری و حقیقی $\lambda_1=-1$ داریم،

$$\lambda_1=-1\rightarrow\begin{bmatrix}-1 & -1 & \frac{-1}{2}\\ 0 & -2 & 0\\ -2 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}-x_1-x_2-\frac{1}{2}x_3=0\\ -2x_2=0\end{cases}\rightarrow\quad \mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}$$

برای مقدار ویژه تکراری $\lambda_2=1$ داریم، $n-\text{rank}(A-\lambda_2 I)=3-1=2$، لذا دو بردار ویژه مستقل خطی داریم.

$$\lambda_{2,3}=1\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -1 & \frac{-1}{2}\\ 0 & 0 & 0\\ -2 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow\{x_1-x_2-\tfrac{1}{2}x_3=0\quad\rightarrow\quad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix},\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}$$

لذا توانستیم دو بردار ویژه مستقل خطی برای مقدار ویژه تکراری $\lambda_2=1$ بدست آوریم.

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[0  1  1/2;0  1  0;2  -2  0];
[v,l]= eig(A)
v =
    0.4472   -0.4472    0.3333
    0         0         0.6667
    0.8944    0.8944   -0.6667
l =
         1         0         0
         0        -1         0
         0         0         1
```

****

بنام خداوند بخشنده و مهربان

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل

جبر خطی کاربردی

نیمسال اول ۹۰-۹۱

حل تمرین های سری نهم

مدرس: صدقی زاده

۹۰/۹/۲

د) $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & -4 & -3\end{bmatrix}$

معادله مشخصه و مقادیر ویژه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 2 & 4 & \lambda+3\end{vmatrix}=0 \quad\rightarrow\quad \lambda^3+3\lambda^2+4\lambda+2=0 \quad\rightarrow\quad \lambda_1=-1,\lambda_{2,3}=-1\pm j$$

برای بدست آوردن بردارهای ویژه بصورت زیر عمل می کنیم،

$$A\mathbf{v}_i=\lambda_i\mathbf{v}_i\rightarrow\begin{bmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 2 & 4 & \lambda+3\end{bmatrix}\mathbf{v}_i=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1=-1\rightarrow\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ 2 & 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}-x_1-x_2=0\\ -x_2-x_3=0\end{cases}\rightarrow\quad \mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=-1+j\rightarrow\begin{bmatrix}-1+j & -1 & 0\\ 0 & -1+j & -1\\ 2 & 4 & 2+j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}(-1+j)x_1-x_2=0\\ (-1+j)x_2-x_3=0\\ 2x_1+4x_2+(2+j)x_3=0\end{cases}\rightarrow\quad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\-1+j\\-2j\end{bmatrix}$$

$$\lambda_3=-1-j\rightarrow\begin{bmatrix}-1-j & -1 & 0\\ 0 & -1-j & -1\\ 2 & 4 & 2-j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_7\\x_8\\x_9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}(-1-j)x_1-x_2=0\\ (-1-j)x_2-x_3=0\\ 2x_1+4x_2+(2-j)x_3=0\end{cases}\rightarrow\quad \mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}1\\-1-j\\2j\end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[0  1  1/2;0  1  0;2  -2  0];
[v,l]= eig(A)
v =
   -0.5774         0.3529+0.1353i         0.3529-0.1353i
    0.5774        -0.4882+0.2176i        -0.4882-0.2176i
   -0.5774         0.2706-0.7058i         0.2706+0.7058i
l =
        1               0                   0
        0             -1.0000+1.0000i      0
        0               0                 -1.0000-1.0000i
```

* * *

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق - گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

حل تمرین های سری نهم

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۹/۲

۵)
$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&-3\\0&1&-3&0\\-0.5&-3&1&0.5\\-3&0&0&1\end{bmatrix}$$

معادله مشخصه و مقادیر ویژه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0&3\\0&\lambda-1&3&0\\0.5&3&\lambda-1&-0.5\\3&0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=0\rightarrow\lambda^4-4\lambda^3-12\lambda^2+32\lambda+64=0\quad\rightarrow\quad\lambda_{1,2}=-2,\lambda_{3,4}=4$$

برای بدست آوردن بردارهای ویژه بصورت زیر عمل می کنیم،

$$A\mathbf{v}_i=\lambda_i\mathbf{v}_i\rightarrow\begin{bmatrix}\lambda-1&0&0&3\\0&\lambda-1&3&0\\0.5&3&\lambda-1&-0.5\\3&0&0&\lambda-1\end{bmatrix}\mathbf{v}_i=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

برای مقدار ویژه تکراری $\lambda_{1,2}=-2$ داریم، $n-\text{rank}(A-\lambda_1 I)=4-2=2$، لذا دو بردار ویژه مستقل خطی داریم.

$$\lambda_{1,2}=-2\rightarrow\begin{bmatrix}-3&0&0&3\\0&-3&3&0\\0.5&3&-3&-0.5\\3&0&0&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}-3x_2+3x_3=0\\0.5x_1+3x_2-3x_3-0.5x_4=0\end{cases}\quad\rightarrow\quad\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix},\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

برای مقدار ویژه تکراری $\lambda_{3,4}=4$ داریم، $n-\text{rank}(A-\lambda_3 I)=4-3=1$، لذا یک بردار ویژه مستقل خطی داریم.

$$\lambda_{3,4}=4\rightarrow\begin{bmatrix}3&0&0&3\\0&3&3&0\\0.5&3&3&-0.5\\3&0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_5\\x_6\\x_7\\x_8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}3x_5+3x_8=0\\3x_6+3x_7=0\\0.5x_5+3x_6+3x_7-0.5x_8=0\end{cases}\quad\rightarrow\quad\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[1 0 0 -3;0 1 -3 0;-0.5 -3 1 0.5;-3 0 0 1];
[v,l]= eig(A)
v =
    0.0000   -0.0000    0.6563    0.0602
    0.7071    0.7071   -0.2631    0.7045
   -0.7071   -0.7071   -0.2631    0.7045
   -0.0000    0.0000    0.6563    0.0602
l =
    4.0000         0         0         0
         0    4.0000         0         0
         0         0   -2.0000         0
         0         0         0   -2.0000
```

****

و) $A=\begin{bmatrix}4&2&1\\0&6&1\\0&-4&2\end{bmatrix}$

معادله مشخصه و مقادیر ویژه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&-2&-1\\0&\lambda-6&-1\\0&4&\lambda-2\end{vmatrix}=0\quad\rightarrow\quad(\lambda-4)^3=0\quad\rightarrow\quad\lambda_{1,2,3}=4$$

برای بدست آوردن بردارهای ویژه بصورت زیر عمل می کنیم،

$$A\mathbf{v}_i=\lambda_i\mathbf{v}_i\rightarrow\begin{bmatrix}\lambda-4&-2&-1\\0&\lambda-6&-1\\0&4&\lambda-2\end{bmatrix}\mathbf{v}_i=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

برای مقدار ویژه تکراری $\lambda_{1,2,3}=4$ داریم، $n-\text{rank}(A-\lambda_2 I)=3-1=2$، لذا دو بردار ویژه مستقل خطی داریم.

$$\lambda_1=4\rightarrow\begin{bmatrix}0&-2&-1\\0&-2&-1\\0&4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow\{-2x_2-x_3=0\quad\rightarrow\quad\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix}$$

لذا توانستیم دو بردار ویژه مستقل خطی برای مقدار ویژه تکراری $\lambda_{1,2,3}=4$ بدست آوریم.

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[4 2 1;0 6 1;0 -4 2];
[v,l]= eig(A)
v =
    1.0000         0         0
         0    0.4472    0.4472
         0   -0.8944   -0.8944
l =
     4     0     0
     0     4     0
     0     0     4
```

****

حل تمرین شماره ۲

الف) $\boxed{|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i}$

می دانیم چندجمله ای مشخصه برای ماتریس $A_{n\times n}$ یک چندجمله ای مرتبه n و مونیک است،

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0$$

این چندجمله ای را می توان بصورت زیر نمایش داد،

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_{n-1})(\lambda - \lambda_n)$$

$\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ مقادیر ویژه هستند که می توانند حقیقی یا مختلط مزدوج و متمایز یا تکراری باشند. حال اگر در رابطه بالا $\lambda = 0$ قرار دهیم مقدار $|A|$ بدست می آید،

$$|A| = (\lambda_1)(\lambda_2)\cdots(\lambda_{n-1})(\lambda_n) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

****

ب) می دانیم $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ است، حال باید نشان دهیم $A^k \mathbf{v}_i = \lambda_i^k \mathbf{v}_i$ است،

$$A^k \mathbf{v}_i = A^{k-1}(A\mathbf{v}_i) = A^{k-1}(\lambda_i \mathbf{v}_i) = \lambda_i A^{k-2}(A\mathbf{v}_i) = \lambda_i A^{k-2}(\lambda_i \mathbf{v}_i) = \cdots = \lambda_i^{k-1}(A\mathbf{v}_i) = \lambda_i^{k-1}(\lambda_i \mathbf{v}_i) = \lambda_i^{k}\mathbf{v}_i$$

بنابراین λ^k نیز یک مقدار ویژه برای ماتریس A^k است.

****

ج) معادله مشخصه ماتریس $A_{n\times n}$ را می توان بدین صورت نوشت،

$$|\lambda I_n - A| = |\lambda A^{-1}A - A| = |(\lambda A^{-1} - I_n)A| = |\lambda A^{-1} - I_n|\ |A| = |\lambda|\ |A^{-1} - \lambda^{-1} I_n|\ |A| = 0$$

به عبارتی،

$$\left|\lambda^{-1}I_n - A^{-1}\right| = 0$$

بنا به فرض معادله مشخصه ماتریس معکوس A^{-1} عبارت است از،

$$\left|\mu I_n - A^{-1}\right| = 0$$

با مقایسه دو معادله اخیر می توان گفت،

$$\mu = \lambda^{-1}$$

لذا اگر λ یک مقدار ویژه ماتریس A باشد، آنگاه $\mu = \lambda^{-1}$ یک مقدار ویژه ماتریس A^{-1} خواهد بود.

****

د) فرض کنید A یک ماتریس متقارن و حقیقی باشد ($A^T = A$) و فرض کنید که $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس A باشند، می خواهیم ثابت کنیم که $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ مقادیری حقیقی هستند. با توجه به تعریف بردار ویژه داریم،

$$\boxed{\begin{aligned}
&A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\\
&(A\mathbf{v})^T = (\lambda\mathbf{v})^T\\
&\mathbf{v}^T A^T = \lambda\mathbf{v}^T\\
&\mathbf{v}^T A = \lambda\mathbf{v}^T\\
&(\mathbf{v}^T A)^* = (\lambda\mathbf{v}^T)^*\\
&\overline{\mathbf{v}}^T A = \overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{v}}^T\\
&\overline{\mathbf{v}}^T A\mathbf{v} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{v}}^T\mathbf{v}\\
&\overline{\mathbf{v}}^T \lambda\mathbf{v} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{v}}^T\mathbf{v}\\
&\lambda\overline{\mathbf{v}}^T\mathbf{v} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{v}}^T\mathbf{v}\\
&\lambda\|\mathbf{v}\|^2 = \overline{\lambda}\|\mathbf{v}\|^2 \qquad , \qquad \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\\
&\lambda = \overline{\lambda}
\end{aligned}}$$

لذا مقادیر ویژه $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ اعدادی حقیقی هستند.

- حال نشان می دهیم که بردارهای ویژه ماتریس حقیقی متقارن متعامد هستند.

فرض کنید $\mathbf{v}_i$ و $\mathbf{v}_j$ ($i \neq j$) دو بردار ویژه برای ماتریس متقارن A و λ_i و λ_j دو مقدار ویژه متمایز متناظر با آنها هستند،

$$\boxed{\begin{aligned}
\lambda_i\langle\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j\rangle &= \langle\lambda_i\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j\rangle\\
&= \langle A\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j\rangle\\
&= \langle\mathbf{v}_i,A^T\mathbf{v}_j\rangle\\
&= \langle\mathbf{v}_i,A\mathbf{v}_j\rangle\\
&= \langle\mathbf{v}_i,\lambda_j\mathbf{v}_j\rangle\\
&= \lambda_j\langle\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j\rangle
\end{aligned}}$$

لذا داریم $(\lambda_i - \lambda_j)\langle\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j\rangle = 0$ و از آنجاییکه $\lambda_i \neq \lambda_j$ است لذا باید $\langle\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j\rangle = 0$ باشد. پس دو بردار ویژه متعامد هستند.

- حال موارد بالا را برای ماتریس متقارن زیر بررسی می نماییم،

$$A=\begin{bmatrix}8 & 2 & -5\\ 2 & 11 & -2\\ -5 & -2 & 8\end{bmatrix}$$

معادله مشخصه، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه این ماتریس بصورت زیر است،

$$|\lambda I-A|=\lambda^3-27\lambda^2+207\lambda-405=0 \quad\rightarrow\quad \lambda_1=9,\lambda_2=3,\lambda_3=15$$

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\-1\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

****

ه) حال نشان می دهیم که اگر ماتریس متقارن مثبت معین باشد، حتماً مقادیر ویژه مثبت خواهد داشت،

$$A\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}$$
$$\mathbf{v}^T A\mathbf{v}=\mathbf{v}^T\lambda\mathbf{v}$$
$$\mathbf{v}^T A\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}^T\mathbf{v}$$
$$\mathbf{v}^T A\mathbf{v}=\lambda\|\mathbf{v}\|^2$$

از آنجاییکه ماتریس A مثبت معین است، لذا باید $\mathbf{v}^T A\mathbf{v}>0$ باشد. بنابراین باید $\lambda>0$ باشد.

****

حل تمرین شماره ۳

$$\boxed{e^{At}=I+At+\frac{A^2t^2}{2!}+\frac{A^3t^3}{3!}+\cdots}$$

مطلوب است محاسبه $\frac{d}{dt}\left[e^{At}\right]$ و $\int_0^t e^{A\tau}d\tau$.

$$\frac{d}{dt}\left[e^{At}\right]=A+\frac{2A^2t}{2!}+\frac{3A^3t^2}{3!}+\cdots=A(I+At+\frac{A^2t^2}{2!}+\frac{A^3t^3}{3!}+\cdots)=Ae^{At}$$

$$\int_0^t e^{A\tau}d\tau=\int_0^t Id\tau+A\int_0^t \tau d\tau+\frac{A^2}{2!}\int_0^t\tau^2d\tau+\cdots=It+\frac{At^2}{2}+\frac{A^2t^3}{3!}+\cdots$$

بنابراین با ضرب A از سمت چپ در رابطه بالا داریم،

$$A\int_0^t e^{A\tau}d\tau+I=e^{At}$$

و در صورتیکه A ماتریس غیرمنفرد باشد،

$$\int_0^t e^{A\tau}d\tau=A^{-1}[e^{At}-I]=[e^{At}-I]A^{-1}$$

****

حل تمرین شماره ۴

$$\boxed{A=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 1 & -3\end{bmatrix}}$$

- محاسبه ماتریس A^{-1}،

$$|\lambda I-A|=\lambda^2+5\lambda+4$$

با توجه به قضیه کیلی- هامیلتون داریم،

$$A^2+5A+4I=0\rightarrow\quad -\frac{1}{4}(A^2+5A)=I=AA^{-1}\rightarrow\quad -\frac{1}{4}A(A+5I)=AA^{-1}$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{4}(A+5I)=-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 1 & -3\end{bmatrix}-\frac{5}{4}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-3}{4} & \frac{-1}{2}\\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{2}\end{bmatrix}$$

- محاسبه چندجمله ای $P(A)$،

$$\boxed{P(A)=A^5+2A^3+4A+8I}$$

$$P(\lambda)=\lambda^5+2\lambda^3+4\lambda+8\quad,\quad Q(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda^2+5\lambda+4$$

چندجمله ای باقیمانده تقسیم $\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}$ از مرتبه یک می باشد.

$$R(\lambda)=c_1\lambda+c_0$$

حال مقدار c_1 و c_0 را بدست می آوریم،

$$\lambda_1=-1\quad\rightarrow\quad R(\lambda_1)=P(\lambda_1)=c_0+c_1\lambda_1\quad\rightarrow\quad 1=c_0-c_1$$
$$\lambda_2=-4\quad\rightarrow\quad R(\lambda_2)=P(\lambda_2)=c_0+c_1\lambda_2\quad\rightarrow\quad -1160=c_0-4c_1$$

با حل این دستگاه معادلات مقدار $c_1=387$ و $c_0=388$ بدست می آید.

$$R(\lambda)=387\lambda+388$$

و با توجه قضیه کیلی- هامیلتون می توان نوشت،

$$P(A)=R(A)$$

$$P(A)=387A+388I=387\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 1 & -3\end{bmatrix}+388\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-386 & 774\\ 387 & -773\end{bmatrix}$$

- محاسبه تابع $\sin(A)$،

با توجه به قضیه کیلی- هامیلتون،

$$\sin(A)=R(A)=c_0I+c_1A$$

$$\lambda_1=-1\quad\rightarrow\quad \sin(\lambda_1)=c_0+c_1\lambda_1\quad\rightarrow\quad \sin(-1)=c_0-c_1$$
$$\lambda_2=-4\quad\rightarrow\quad \sin(\lambda_2)=c_0+c_1\lambda_2\quad\rightarrow\quad \sin(-4)=c_0-4c_1$$

با حل دستگاه داریم،

$$c_0=-\frac{1}{3}[\sin(-4)-4\sin(-1)],\qquad c_1=-\frac{1}{3}[\sin(-4)-\sin(-1)]$$

به این ترتیب،

$$\sin(A)=c_0I+c_1A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}\sin(-4)+2\sin(-1) & -2\sin(-4)+2\sin(-1)\\ -\sin(-4)+\sin(-1) & 2\sin(-4)+\sin(-1)\end{bmatrix}$$

- نشان دهید $\sin^2(A)+\cos^2(A)=I$،

با توجه به قضیه کیلی- هامیلتون،

$$\cos(A)=R(A)=c_0I+c_1A$$

$$\lambda_1=-1\quad\rightarrow\quad\cos(\lambda_1)=c_0+c_1\lambda_1\quad\rightarrow\quad\cos(-1)=c_0-c_1$$

$$\lambda_2=-4\quad\rightarrow\quad\cos(\lambda_2)=c_0+c_1\lambda_2\quad\rightarrow\quad\cos(-4)=c_0-4c_1$$

با حل دستگاه داریم،

$$c_0=-\frac{1}{3}[\cos(-4)-4\cos(-1)],\qquad c_1=-\frac{1}{3}[\cos(-4)-\cos(-1)]$$

به این ترتیب،

$$\cos(A)=c_0I+c_1A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}\cos(-4)+2\cos(-1) & -2\cos(-4)+2\cos(-1)\\ -\cos(-4)+\cos(-1) & 2\cos(-4)+\cos(-1)\end{bmatrix}$$

حال مقدار $\sin^2(A)+\cos^2(A)$ را بدست می آوریم،

$$\sin^2(A)=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}3\sin^2(-4)+6\sin^2(-1) & -6\sin^2(-4)+6\sin^2(-1)\\ -3\sin^2(-4)+3\sin^2(-1) & 6\sin^2(-4)+3\sin^2(-1)\end{bmatrix}$$

$$\cos^2(A)=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}3\cos^2(-4)+6\cos^2(-1) & -6\cos^2(-4)+6\cos^2(-1)\\ -3\cos^2(-4)+3\cos^2(-1) & 6\cos^2(-4)+\cos^2(-1)\end{bmatrix}$$

لذا $\sin^2(A)+\cos^2(A)=I$ خواهد بود.

- فرم بسته توابع ماتریسی e^{At} و $\sin(At)$،

با توجه به قضیه کیلی- هامیلتون،

$$e^{At}=R(A)=c_0I+c_1A$$

$$\lambda_1=-1\quad\rightarrow\quad e^{\lambda_1t}=c_0+c_1\lambda_1\quad\rightarrow\quad e^{-t}=c_0-c_1$$

$$\lambda_2=-4\quad\rightarrow\quad e^{\lambda_2t}=c_0+c_1\lambda_2\quad\rightarrow\quad e^{-4t}=c_0-4c_1$$

با حل دستگاه داریم،

$$c_0=-\frac{1}{3}[e^{-4t}-4e^{-t}],\qquad c_1=-\frac{1}{3}[e^{-4t}-e^{-t}]$$

به این ترتیب،

$$e^{At} = c_0 I + c_1 A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} e^{-4t} + 2e^{-t} & -2e^{-4t} + 2e^{-t} \\ -e^{-4t} + e^{-t} & 2e^{-4t} + e^{-t} \end{bmatrix}$$

با توجه به قضیه کیلی- هامیلتون،

$$\sin(At) = R(A) = c_0 I + c_1 A$$

$$\lambda_1 = -1 \quad \rightarrow \quad \sin(\lambda_1 t) = c_0 + c_1\lambda_1 \quad \rightarrow \quad \sin(-t) = c_0 - c_1$$

$$\lambda_2 = -4 \quad \rightarrow \quad \sin(\lambda_2 t) = c_0 + c_1\lambda_2 \quad \rightarrow \quad \sin(-4t) = c_0 - 4c_1$$

با حل دستگاه داریم،

$$c_0 = -\frac{1}{3}[\sin(-4t) - 4\sin(-t)], \qquad c_1 = -\frac{1}{3}[\sin(-4t) - \sin(-t)]$$

به این ترتیب،

$$\sin(At) = c_0 I + c_1 A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \sin(-4t) + 2\sin(-t) & -2\sin(-4t) + 2\sin(-t) \\ -\sin(-4t) + \sin(-t) & 2\sin(-4t) + \sin(-t) \end{bmatrix}$$

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق - گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

حل تمرین های سری نهم

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۹/۹

حل تمرین شماره ۱

$$A_C=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}$$

- برای حالتیکه $n=2$ باشد، چند جمله ای مشخصه بصورت زیر بدست می آید،

$$A_C=\begin{bmatrix}0&1\\-a_0&-a_1\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad|\lambda I-A_C|=\begin{vmatrix}\lambda&-1\\a_0&\lambda+a_1\end{vmatrix}=\lambda^2+a_1\lambda+a_0$$

در این حالت دو مقدار ویژه λ_1 و λ_2 خواهیم داشت. متناظر با آنها بردار ویژه بدست می آوریم،

$$\mathrm{Adj}(\lambda I-A_C)=\mathrm{Adj}\begin{bmatrix}\lambda&-1\\a_0&\lambda+a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda+a_1&1\\a_0&\lambda\end{bmatrix}$$

$$\lambda=\lambda_1\quad\rightarrow\quad\mathrm{Adj}(\lambda_1 I\text{-}A)=\begin{bmatrix}\lambda_1+a_1&1\\a_0&\lambda_1\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\\lambda_1\end{bmatrix}$$

$$\lambda=\lambda_2\quad\rightarrow\quad\mathrm{Adj}(\lambda_2 I\text{-}A)=\begin{bmatrix}\lambda_2+a_1&1\\a_0&\lambda_2\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\\lambda_2\end{bmatrix}$$

در انتخاب بردار ویژه دقت می کنیم که بردار مورد نظر تحت هر شرایطی مخالف صفر باشد.

- برای حالتیکه $n=3$ باشد،

$$A_C=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-a_0&-a_1&-a_2\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad|\lambda I-A_C|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\0&\lambda&-1\\a_0&a_1&\lambda+a_2\end{vmatrix}=\lambda^3+a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0$$

برای سه مقدار ویژه λ_1، λ_2 و λ_3 بردارهای ویژه نظیر را بدست می آوریم،

$$\mathrm{Adj}(\lambda I-A_C)=\mathrm{Adj}\begin{bmatrix}\lambda&-1&0\\0&\lambda&-1\\a_0&a_1&\lambda+a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda^2+a_2\lambda+a_1&\lambda+a_2&1\\-a_0&\lambda^2+a_2\lambda&\lambda\\-a_0\lambda&-a_1\lambda-a_0&\lambda^2\end{bmatrix}$$

$$\lambda=\lambda_1\quad\rightarrow\quad\mathrm{Adj}(\lambda_1 I\text{-}A)=\begin{bmatrix}\lambda_1^{\,2}+a_2\lambda_1+a_1&\lambda_1+a_2&1\\-a_0&\lambda_1^{\,2}+a_2\lambda_1&\lambda_1\\-a_0\lambda_1&-a_1\lambda_1-a_0&\lambda_1^{\,2}\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\\lambda_1\\\lambda_1^2\end{bmatrix}$$

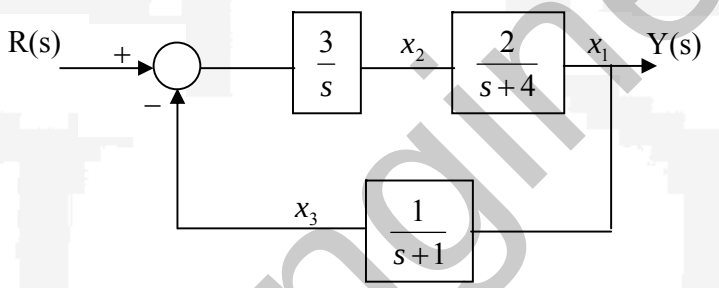
$$\lambda=\lambda_2 \quad\rightarrow\quad \mathrm{Adj}(\lambda_2 I\text{-}A)=\begin{bmatrix}\lambda 2_1^{\,2}+a_2\lambda_2+a_1 & \lambda_2+a_2 & 1\\ -a_0 & \lambda_2^{\,2}+a_2\lambda_2 & \lambda_2\\ -a_0\lambda_2 & -a_1\lambda_2-a_0 & \lambda_2^{\,2}\end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\ \lambda_2\\ \lambda_2^2\end{bmatrix}$$

$$\lambda=\lambda_3 \quad\rightarrow\quad \mathrm{Adj}(\lambda_3 I\text{-}A)=\begin{bmatrix}\lambda_3^{\,2}+a_2\lambda_3+a_1 & \lambda_3+a_2 & 1\\ -a_0 & \lambda_3^{\,2}+a_2\lambda_3 & \lambda_3\\ -a_0\lambda_3 & -a_1\lambda_3-a_0 & \lambda_3^{\,2}\end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad \mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}1\\ \lambda_3\\ \lambda_3^2\end{bmatrix}$$

به همین ترتیب برای حالت $n\times n$ نیز قابل تعمیم است.

****

حل تمرین شماره ۲



$$\frac{X_1(s)}{X_2(s)}=\frac{2}{s+4} \quad\rightarrow\quad sX_1(s)+4X_1(s)=2X_2(2) \quad\rightarrow\quad \dot{x}_1(t)=-4x_1(t)+2x_2(t)$$

$$\frac{X_3(s)}{X_1(s)}=\frac{1}{s+1} \quad\rightarrow\quad sX_3(s)+X_3(s)=X_1(s) \quad\rightarrow\quad \dot{x}_3(t)=x_1(t)-x_3(t)$$

$$\frac{X_2(s)}{R(s)-X_3(s)}=\frac{3}{s} \quad\rightarrow\quad sX_2(s)=3R(s)-3X_3(s) \quad\rightarrow\quad \dot{x}_2(t)=-3x_3(t)+3r(t)$$

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -3\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 3\\ 0\end{bmatrix}r(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}\end{cases}$$

****

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

حل تمرین های سری نهم

نیمسال اول ۹۰-۹۱
۹۰/۹/۹

حل تمرین شماره ۳

الف) $\boxed{\dddot{y}(t)+2\ddot{y}(t)+\dot{y}(t)+3y(t)=u(t)}$

$$\begin{cases} x_1(t)=y(t)\rightarrow \dot{x}_1(t)=\dot{y}(t) \\ x_2(t)=\dot{y}(t)\rightarrow \dot{x}_2(t)=\ddot{y}(t) \\ x_3(t)=\ddot{y}(t)\rightarrow \dot{x}_3(t)=\dddot{y}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t)=x_2(t) \\ \dot{x}_2(t)=x_3(t) \\ \dot{x}_3(t)=-3x_1(t)-x_2(t)-2x_3(t)+u(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

****

ب) $\boxed{\dddot{y}(t)-\ddot{y}(t)+2\dot{y}(t)=3u(t)}$

$$\begin{cases} x_1(t)=y(t)\rightarrow \dot{x}_1(t)=\dot{y}(t) \\ x_2(t)=\dot{y}(t)\rightarrow \dot{x}_2(t)=\ddot{y}(t) \\ x_3(t)=\ddot{y}(t)\rightarrow \dot{x}_3(t)=\dddot{y}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t)=x_2(t) \\ \dot{x}_2(t)=x_3(t) \\ \dot{x}_3(t)=-2x_2(t)+x_3(t)+3u(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

****

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

حل تمرین های سری نهم

نیمسال اول ۹۰-۹۱
۹۰/۹/۹

حل تمرین شماره ۴

الف)

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}0&-2\\1&-3\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\mathbf{u}(t)\\[2mm] \mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)\end{cases}$$

$$sI-A=\begin{bmatrix}s&2\\-1&s+3\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad(sI-A)^{-1}=\frac{Adj(sI-A)}{|sI-A|}=\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix}s+3&-2\\1&s\end{bmatrix}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=C(sI-A)^{-1}B=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{s+3}{s^2+3s+2}&\frac{-2}{s^2+3s+2}\\\frac{1}{s^2+3s+2}&\frac{s}{s^2+3s+2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

* * *

ب)

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}-5&-1\\3&-1\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}\mathbf{u}(t)\\[2mm] \mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)\end{cases}$$

$$sI-A=\begin{bmatrix}s+5&1\\-3&s+1\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad(sI-A)^{-1}=\frac{Adj(sI-A)}{|sI-A|}=\frac{1}{s^2+6s+8}\begin{bmatrix}s+1&-1\\3&s+5\end{bmatrix}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=C(sI-A)^{-1}B=\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{s+1}{s^2+6s+8}&\frac{-1}{s^2+6s+8}\\\frac{3}{s^2+6s+8}&\frac{s+5}{s^2+6s+8}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}=\frac{12s+59}{s^2+6s+8}$$

* * *

حل تمرین شماره ۵

الف)

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&1\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$$

با روش سری ها،

$$e^{At}=I+At+\frac{1}{2!}(At)^2+\frac{1}{3!}(At)^3+\cdots$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-t\\0&t&t\end{bmatrix}+\frac{1}{2!}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-t^2&-t^2\\0&t^2&0\end{bmatrix}+\frac{1}{3!}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-t^3&0\\0&0&-t^3\end{bmatrix}+\frac{1}{4!}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&t^4\\0&-t^4&-t^4\end{bmatrix}+\cdots$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1-\frac{t^2}{2!}-\frac{t^3}{3!}+\cdots & -t-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+\cdots\\ 0 & t+\frac{t^2}{2!}-\frac{t^4}{4!}+\cdots & 1+t-\frac{t^3}{3!}-\frac{t^4}{4!}+\cdots\end{bmatrix}$$

****

ب) $\boxed{\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)}$

با روش سری ها،

$$e^{At}=I+At+\frac{1}{2!}(At)^2+\frac{1}{3!}(At)^3+\cdots$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & t & t\\ 0 & 0 & t\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\frac{1}{2!}\begin{bmatrix}0 & 0 & t^2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\frac{1}{3!}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix}1 & t & \frac{t^2}{2!}+t\\ 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

****

حل تمرین شماره ۶

الف) $\boxed{\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 4\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)}$

با روش کیلی- هامیلتون،

معادله مشخصه و مقادیر ویژه را بدست می آوریم،

$$Q(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+4 & -4\\ 0 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda+2)^2=0 \quad\rightarrow\quad \lambda_1=-1,\lambda_{2,3}=-2$$

لذا یک مقدار ویژه حقیقی متمایز و یک مقدار ویژه حقیقی تکراری با مرتبه دو داریم. چندجمله ای مشخصه مرتبه ۳ است، لذا چند جمله ای باقیمانده $R(\lambda)$ درجه دو خواهد بود،

$$R(\lambda)=c_0+c_1\lambda+c_2\lambda^2$$

$$N(\lambda_i)=R(\lambda_i)=c_0+c_1\lambda_i+c_2\lambda_i^{\,2} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} e^{-t}=c_0-c_1+c_2 \\ e^{-2t}=c_0-2c_1+4c_2 \\ te^{-2t}=c_1-4c_2 \end{cases}$$

با حل دستگاه معادلات بالا مقدار ضرایب c_0، c_1 و c_2 بدست می آید،

$$c_0=4e^{-t}-3e^{-2t}-2te^{-2t}$$
$$c_1=4e^{-t}-4e^{-2t}-3te^{-2t}$$
$$c_2=e^{-t}-e^{-2t}-te^{-2t}$$

ماتریس انتقال حالت بصورت زیر بدست می آید،

$$\Phi(t)=\exp[At]=c_0I+c_1A+c_2A^2$$

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix} c_0 & 0 & 0 \\ 0 & c_0 & 0 \\ 0 & 0 & c_0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -c_1 & 0 & 0 \\ 0 & -4c_1 & 4c_1 \\ 0 & -c_1 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 12c_2 & -16c_2 \\ 0 & 4c_2 & -4c_2 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t}-2te^{-2t} & 4te^{-2t} \\ 0 & -te^{-2t} & e^{-2t}+2te^{-2t} \end{bmatrix}$$

با روش تبدیل لاپلاس،

نخست $\Phi(s)$ را بدست می آوریم،

$$\Phi(s)=(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ 0 & s+4 & -4 \\ 0 & 1 & s \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{(s+1)(s+2)^2}\begin{bmatrix} (s+2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & s(s+1) & 4(s+1) \\ 0 & -(s+1) & (s+4)(s+1) \end{bmatrix}$$

$$\Phi(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s}{(s+2)^2} & \frac{4}{(s+2)^2} \\ 0 & \frac{-1}{(s+2)^2} & \frac{s+4}{(s+2)^2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+2)}+\frac{-2}{(s+2)^2} & \frac{4}{(s+2)^2} \\ 0 & \frac{-1}{(s+2)^2} & \frac{1}{(s+2)}+\frac{2}{(s+2)^2} \end{bmatrix}$$

برای محاسبه $\Phi(t)$ باید عکس تبدیل لاپلاس هر یک از عناصر ماتریس $\Phi(s)$ را بدست آوریم،

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t}-2te^{-2t} & 4te^{-2t} \\ 0 & -te^{-2t} & e^{-2t}+2te^{-2t} \end{bmatrix}$$

- پاسخ سیستم را بر حسب شرایط اولیه $x_1(0)$، $x_1(0)$ و $x_1(0)$ بصورت زیر بدست می آید،

$$\mathbf{x}(t)=\mathrm{e}^{At}\mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t} & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-2t}-2t\mathrm{e}^{-2t} & 4t\mathrm{e}^{-2t}\\ 0 & -t\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-2t}+2t\mathrm{e}^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\\ x_3(0)\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}x_1(0)\mathrm{e}^{-t}\\ x_2(0)[\mathrm{e}^{-2t}-2t\mathrm{e}^{-2t}]+4x_3(0)t\mathrm{e}^{-2t}\\ -x_2(0)t\mathrm{e}^{-2t}+x_3(0)[\mathrm{e}^{-2t}+2t\mathrm{e}^{-2t}]\end{bmatrix}$$

****

ب) $$\boxed{\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}-2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -3 & -4\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)}$$

با روش کیلی - هامیلتون،

معادله مشخصه و مقادیر ویژه را بدست می آوریم،

$$Q(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+2 & 2 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 0 & 3 & \lambda+4\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)=0 \quad\rightarrow\quad \lambda_1=-1,\lambda_2=-2,\lambda_3=-3$$

لذا سه مقدار ویژه حقیقی و متمایز داریم. چندجمله ای مشخصه مرتبه ۳ است، پس چند جمله ای باقیمانده $R(\lambda)$ درجه دو خواهد بود،

$$R(\lambda)=c_0+c_1\lambda+c_2\lambda^2$$

$$N(\lambda_i)=R(\lambda_i)=c_0+c_1\lambda_i+c_2\lambda_i^{\,2} \quad\rightarrow\quad \begin{cases}\mathrm{e}^{-t}=c_0-c_1+c_2\\ \mathrm{e}^{-2t}=c_0-2c_1+4c_2\\ \mathrm{e}^{-3t}=c_0-3c_1+9c_2\end{cases}$$

با حل دستگاه معادلات بالا مقدار ضرایب c_0، c_1 و c_2 بدست می آید،

$$c_0=3\mathrm{e}^{-t}-3\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-3t}$$
$$c_1=\tfrac{5}{2}\mathrm{e}^{-t}-4\mathrm{e}^{-2t}+\tfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-3t}$$
$$c_2=\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}+\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}$$

ماتریس انتقال حالت بصورت زیر بدست می آید،

$$\Phi(t)=\exp[At]=c_0I+c_1A+c_2A^2$$

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix}c_0&0&0\\0&c_0&0\\0&0&c_0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2c_1&-2c_1&0\\0&0&c_1\\0&-3c_1&-4c_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4c_2&4c_2&-2c_2\\0&-3c_2&-4c_2\\0&12c_2&13c_2\end{bmatrix}$$

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix}e^{-2t}&-e^{-3t}+4e^{-2t}-3e^{-t}&-e^{-3t}+2e^{-2t}-e^{-t}\\0&\frac{-1}{2}e^{-3t}+\frac{3}{2}e^{-t}&\frac{-1}{2}e^{-3t}+\frac{1}{2}e^{-t}\\0&\frac{3}{2}e^{-3t}-\frac{3}{2}e^{-t}&\frac{3}{2}e^{-3t}-\frac{1}{2}e^{-t}\end{bmatrix}$$

با روش تبدیل لاپلاس،

نخست $\Phi(s)$ را بدست می آوریم،

$$\Phi(s)=(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}s+2&2&0\\0&s&-1\\0&3&s+4\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}\begin{bmatrix}(s+1)(s+3)&-2(s+4)&-2\\0&(s+2)(s+4)&s+2\\0&-3(s+2)&s(s+2)\end{bmatrix}$$

$$\Phi(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+2}&\frac{-2(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)}&\frac{-2}{(s+1)(s+2)(s+3)}\\0&\frac{s+4}{(s+1)(s+3)}&\frac{1}{(s+1)(s+3)}\\0&\frac{-3}{(s+1)(s+3)}&\frac{s}{(s+1)(s+3)}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+2}&\frac{-3}{s+1}+\frac{4}{s+2}+\frac{-1}{s+3}&\frac{-1}{s+1}+\frac{2}{s+2}+\frac{-1}{s+3}\\0&\frac{\frac{3}{2}}{s+1}+\frac{\frac{-1}{2}}{s+3}&\frac{\frac{1}{2}}{s+1}+\frac{\frac{-1}{2}}{s+3}\\0&\frac{\frac{-3}{2}}{s+1}+\frac{\frac{3}{2}}{s+3}&\frac{\frac{-1}{2}}{s+1}+\frac{\frac{3}{2}}{s+3}\end{bmatrix}$$

برای محاسبه $\Phi(t)$ باید عکس تبدیل لاپلاس هر یک از عناصر ماتریس $\Phi(s)$ را بدست آوریم،

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix}e^{-2t}&-e^{-3t}+4e^{-2t}-3e^{-t}&-e^{-3t}+2e^{-2t}-e^{-t}\\0&\frac{-1}{2}e^{-3t}+\frac{3}{2}e^{-t}&\frac{-1}{2}e^{-3t}+\frac{1}{2}e^{-t}\\0&\frac{3}{2}e^{-3t}-\frac{3}{2}e^{-t}&\frac{3}{2}e^{-3t}-\frac{1}{2}e^{-t}\end{bmatrix}$$

- پاسخ سیستم بر حسب شرایط اولیه $x_1(0)$، $x_1(0)$ و $x_1(0)$ بصورت زیر بدست می آید،

$$\mathbf{x}(t)=e^{At}\mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix} e^{-2t} & -e^{-3t}+4e^{-2t}-3e^{-t} & -e^{-3t}+2e^{-2t}-e^{-t} \\ 0 & \frac{-1}{2}e^{-3t}+\frac{3}{2}e^{-t} & \frac{-1}{2}e^{-3t}+\frac{1}{2}e^{-t} \\ 0 & \frac{3}{2}e^{-3t}-\frac{3}{2}e^{-t} & \frac{3}{2}e^{-3t}-\frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(0)[e^{-2t}]+x_2(0)[-e^{-3t}+4e^{-2t}-3e^{-t}]+x_3(0)[-e^{-3t}+2e^{-2t}-e^{-t}] \\ x_2(0)[\frac{-1}{2}e^{-3t}+\frac{3}{2}e^{-t}]+x_3(0)[\frac{-1}{2}e^{-3t}+\frac{1}{2}e^{-t}] \\ x_2(0)[\frac{3}{2}e^{-3t}-\frac{3}{2}e^{-t}]+x_3(0)[\frac{3}{2}e^{-3t}-\frac{1}{2}e^{-t}] \end{bmatrix}$$

****

حل تمرین شماره ۷

الف) $\boxed{\begin{bmatrix} -e^{-t} & 0 \\ 0 & 1-e^{-t} \end{bmatrix}}$

خواص ماتریس انتقال حالت را بررسی می نماییم،

۱- $\boxed{\Phi(0)=I}$

$$\begin{bmatrix} -e^{-t} & 0 \\ 0 & 1-e^{-t} \end{bmatrix} \xrightarrow{t=0} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq I$$

در شرط اول صدق نمی کند، لذا ماتریس انتقال حالت نیست،

ب) $\boxed{\begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & t^2e^{-2t}/2 \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}}$

خواص ماتریس انتقال حالت را بررسی می نماییم،

۱- $\boxed{\Phi(0)=I}$

$$\begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & t^2e^{-2t}/2 \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \xrightarrow{t=0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=I$$

۲- $\boxed{\Phi(t_2-t_1)\Phi(t_1-t_0)=\Phi(t_2-t_0)}$

$$\begin{bmatrix} e^{-2(t_2-t_1)} & (t_2-t_1)e^{-2(t_2-t_1)} & (t_2-t_1)^2e^{-2(t_2-t_1)}/2 \\ 0 & e^{-2(t_2-t_1)} & (t_2-t_1)e^{-2(t_2-t_1)} \\ 0 & 0 & e^{-2(t_2-t_1)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-2(t_1-t_0)} & (t_1-t_0)e^{-2(t_1-t_0)} & (t_1-t_0)^2e^{-2(t_1-t_0)}/2 \\ 0 & e^{-2(t_1-t_0)} & (t_1-t_0)e^{-2(t_1-t_0)} \\ 0 & 0 & e^{-2(t_1-t_0)} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} e^{-2(t_2-t_0)} & (t_2-t_0)e^{-2(t_2-t_0)} & (t_2-t_0)^2e^{-2(t_2-t_0)}/2 \\ 0 & e^{-2(t_2-t_0)} & (t_2-t_0)e^{-2(t_2-t_0)} \\ 0 & 0 & e^{-2(t_2-t_0)} \end{bmatrix}$$

۳- $\boxed{\Phi(t)\Phi(t)\cdots\Phi(t)=\Phi^{\alpha}(t)=\Phi(\alpha t)}$

$$\alpha=2 \quad\rightarrow\quad \Phi(2t)=\begin{bmatrix} e^{-4t} & 2te^{-4t} & 2t^2e^{-4t} \\ 0 & e^{-4t} & 2te^{-4t} \\ 0 & 0 & e^{-4t} \end{bmatrix}$$

$$\Phi^2(t)=\begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & t^2e^{-2t}/2 \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & t^2e^{-2t}/2 \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{-4t} & 2te^{-4t} & 2t^2e^{-4t} \\ 0 & e^{-4t} & 2te^{-4t} \\ 0 & 0 & e^{-4t} \end{bmatrix}=\Phi(2t)$$

$$\alpha=3 \quad\rightarrow\quad \Phi(3t)=\begin{bmatrix} e^{-6t} & 3te^{-6t} & 9t^2e^{-6t}/2 \\ 0 & e^{-6t} & 3te^{-6t} \\ 0 & 0 & e^{-6t} \end{bmatrix}$$

$$\Phi^3(t)=\begin{bmatrix} e^{-4t} & 2te^{-4t} & 2t^2e^{-4t} \\ 0 & e^{-4t} & 2te^{-4t} \\ 0 & 0 & e^{-4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & t^2e^{-2t}/2 \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{-6t} & 3te^{-6t} & 9t^2e^{-6t}/2 \\ 0 & e^{-6t} & 3te^{-6t} \\ 0 & 0 & e^{-6t} \end{bmatrix}=\Phi(3t)$$

به همین ترتیب برای سایر αها نیز قابل اثبات است.

۴- $\boxed{\Phi^{-1}(t)=\Phi(-t)}$

$$\Phi(-t)=\begin{bmatrix} e^{2t} & -te^{2t} & t^2e^{2t}/2 \\ 0 & e^{2t} & -te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\Phi^{-1}(t)=\begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & t^2e^{-2t}/2 \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{e^{-6t}}\begin{bmatrix} e^{-4t} & -te^{-4t} & t^2e^{-4t}/2 \\ 0 & e^{-4t} & -te^{-4t} \\ 0 & 0 & e^{-4t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{2t} & -te^{2t} & t^2e^{2t}/2 \\ 0 & e^{2t} & -te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}=\Phi(-t)$$

بنابراین این ماتریس می تواند یک ماتریس انتقال حالت باشد.

****

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق - گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

حل تمرین های سری نهم

نیمسال اول ۹۰-۹۱
۹۰/۹/۹

ج) $\boxed{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{2t}+1 & e^{3t}-1 \\ e^{t}-1 & e^{5t}+1 \end{bmatrix}}$

خواص ماتریس انتقال حالت را بررسی می نماییم،

۱- $\boxed{\Phi(0)=I}$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{2t}+1 & e^{3t}-1 \\ e^{t}-1 & e^{5t}+1 \end{bmatrix} \xrightarrow{t=0} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=I$$

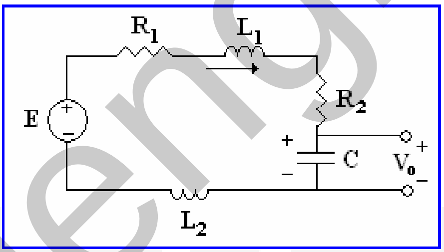
۲- $\boxed{\Phi(t_2-t_1)\Phi(t_1-t_0)=\Phi(t_2-t_0)}$

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} e^{2(t_2-t_1)}+1 & e^{3(t_2-t_1)}-1 \\ e^{(t_2-t_1)}-1 & e^{5(t_2-t_1)}+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2(t_1-t_0)}+1 & e^{3(t_1-t_0)}-1 \\ e^{(t_1-t_0)}-1 & e^{5(t_1-t_0)}+1 \end{bmatrix} \neq \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{2(t_2-t_0)}+1 & e^{3(t_2-t_0)}-1 \\ e^{(t_2-t_0)}-1 & e^{5(t_2-t_0)}+1 \end{bmatrix}$$

در شرط دوم صدق نمی کند، لذا ماتریس انتقال حالت نیست.

****

حل تمرین شماره ۸



ابتدا معادلات حاکم بر مدار را می نویسیم،

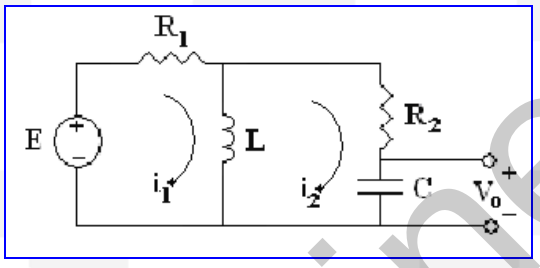
$$\begin{cases} E=R_1 i_L+L_1\dfrac{di_L}{dt}+R_2 i_L+V_C+L_2\dfrac{di_L}{dt}=(R_1+R_2)i_L+V_C+(L_1+L_2)\dot{i}_L \\ i_L=C\dfrac{dV_C}{dt}=C\dot{V}_C \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{i}_L=-\dfrac{R_1+R_2}{L_1+L_2}i_L-\dfrac{1}{L_1+L_2}V_C+\dfrac{1}{L_1+L_2}E \\ \dot{V}_C=\dfrac{1}{C}i_L \\ V_O=V_C \end{cases}$$

متغیرهای حالت $x_1(t)=i_L(t)$ جریان سلف و $x_2(t)=V_C(t)$ ولتاژ خازن هستند،

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\dfrac{R_1+R_2}{L_1+L_2} & -\dfrac{1}{L_1+L_2} \\ \dfrac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L_1+L_2} \\ 0 \end{bmatrix} E \\ \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

****



ابتدا معادلات حاکم بر مدار را می نویسیم،

$$\begin{cases} E = R_1 i_1 + L\dfrac{di_L}{dt} = R_1(i_L + i_2) + L\dot{i}_L \\ R_2 i_2 + V_C - L\dfrac{di_L}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad i_2 = -\dfrac{1}{R_2}V_C + \dfrac{L}{R_2}\dot{i}_L \\ i_2 = C\dfrac{dV_C}{dt} = C\dot{V}_C \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{i}_L = \dfrac{-R_1R_2}{L(R_1+R_2)}i_L + \dfrac{R_1}{L(R_1+R_2)}V_C + \dfrac{R_2}{L(R_1+R_2)}E \\ \dot{V}_C = \dfrac{-R_1}{C(R_1+R_2)}i_L + \dfrac{-1}{C(R_1+R_2)}V_C + \dfrac{1}{C(R_1+R_2)}E \\ V_O = V_C \end{cases}$$

متغیرهای حالت $x_1(t) = i_L(t)$ جریان سلف و $x_2(t) = V_C(t)$ ولتاژ خازن هستند،

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{-R_1R_2}{L(R_1+R_2)} & \dfrac{R_1}{L(R_1+R_2)} \\ \dfrac{-R_1}{C(R_1+R_2)} & \dfrac{-1}{C(R_1+R_2)} \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \dfrac{R_2}{L(R_1+R_2)} \\ \dfrac{1}{C(R_1+R_2)} \end{bmatrix} E \\ \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

****

حل تمرین شماره ۹

$$\boxed{\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_{n-1}s^{n-1}+b_{n-2}s^{n-2}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}}$$

در ابتدا از یک متغیر کمکی به نام $Z(s)$ استفاده می نماییم،

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_{n-1}s^{n-1}+b_{n-2}s^{n-2}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}\times\frac{Z(s)}{Z(s)}$$
$$=\frac{b_{n-1}s^{n-1}Z(s)+b_{n-2}s^{n-2}Z(s)+\cdots+b_1sZ(s)+b_0Z(s)}{s^nZ(s)+a_{n-1}s^{n-1}Z(s)+\cdots+a_1sZ(s)+a_0Z(s)}$$

$$\begin{cases}Y(s)=b_{n-1}s^{n-1}Z(s)+b_{n-2}s^{n-2}Z(s)+\cdots+b_1sZ(s)+b_0Z(s)\\U(s)=s^nZ(s)+a_{n-1}s^{n-1}Z(s)+\cdots+a_1sZ(s)+a_0Z(s)\end{cases}$$

حال متغیرهای حالت را $X_i(s)=s^{i-1}Z(s)$,$i=1,\dots,n$ تعریف می نماییم،

$$\begin{aligned}
&X_1(s)=s^0Z(s)\rightarrow x_1(t)=z(t)\rightarrow \dot{x}_1(t)=x_2(t)\\
&X_2(s)=s^1Z(s)\rightarrow x_2(t)=\dot{z}(t)\rightarrow \dot{x}_2(t)=x_3(t)\\
&X_3(s)=s^2Z(s)\rightarrow x_3(t)=\ddot{z}(t)\rightarrow \dot{x}_3(t)=x_4(t)\\
&\quad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\\
&X_{n-1}(s)=s^{n-2}Z(s)\rightarrow x_{n-1}(t)=z^{(n-2)}(t)\rightarrow \dot{x}_{n-1}(t)=x_n(t)\\
&X_n(s)=s^{n-1}Z(s)
\end{aligned}$$

حال باید مقدار $\dot{x}_n(t)$ را محاسبه نماییم،

$$\begin{cases}Y(s)=b_{n-1}X_n(s)+b_{n-2}X_{n-1}(s)+\cdots+b_1X_2(s)+b_0X_1(s)\\U(s)=sX_n(s)+a_{n-1}X_n(s)+\cdots+a_1X_2(s)+a_0X_1(s)\end{cases}$$

در حوزه زمان داریم،

$$\begin{cases}y(t)=b_{n-1}x_n(t)+b_{n-2}x_{n-1}(t)+\cdots+b_1x_2(t)+b_0x_1(t)\\u(t)=\dot{x}_n(t)+a_{n-1}x_n(t)+\cdots+a_1x_2(t)+a_0x_1(t)\end{cases}$$

لذا $\dot{x}_n(t)$ بصورت زیر بدست می آید،

$$\dot{x}_n(t)=-a_{n-1}x_n(t)-\cdots-a_1x_2(t)-a_0x_1(t)+u(t)$$

بنابراین تحقق فضای حالت به فرم زیر خواهد بود،

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) = -a_{n-1}x_n(t) - \cdots - a_1 x_2(t) - a_0 x_1(t) + u(t) \end{cases}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

حال تحقق مذکور را برای این دو تابع تبدیل بدست می آوریم،

الف) $\boxed{\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{s^2+1}{s^3+6s^2+11s+5}}$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -11 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

****

ب) $\boxed{\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{s^2+3s+4}{s^4+s^2+2}}$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

حل تمرین های سری دهم

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۹/ ۲۳

حل تمرین شماره۱

تحقق اول)

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}-5 & -1\\ 3 & -1\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)\end{cases}$$

$$sI-A_1=\begin{bmatrix}s+5 & 1\\ -3 & s+1\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad (sI-A_1)^{-1}=\frac{Adj(sI-A_1)}{|sI-A_1|}=\frac{1}{s^2+6s+8}\begin{bmatrix}s+1 & -1\\ 3 & s+5\end{bmatrix}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=C_1(sI-A_1)^{-1}B_1=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{s+1}{s^2+6s+8} & \frac{-1}{s^2+6s+8}\\ \frac{3}{s^2+6s+8} & \frac{s+5}{s^2+6s+8}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}=\frac{12s+59}{s^2+6s+8}$$

تحقق دوم)

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{z}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -8 & -6\end{bmatrix}\mathbf{z}(t)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix}59 & 12\end{bmatrix}\mathbf{z}(t)\end{cases}$$

$$sI-A_2=\begin{bmatrix}s & -1\\ 8 & s+6\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad (sI-A_2)^{-1}=\frac{Adj(sI-A_2)}{|sI-A_2|}=\frac{1}{s^2+6s+8}\begin{bmatrix}s+6 & 1\\ -8 & s\end{bmatrix}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=C_2(sI-A_2)^{-1}B_2=\begin{bmatrix}59 & 12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{s+6}{s^2+6s+8} & \frac{1}{s^2+6s+8}\\ \frac{-8}{s^2+6s+8} & \frac{s}{s^2+6s+8}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\frac{12s+59}{s^2+6s+8}$$

از آنجاییکه هر دو تحقق مربوط به یک تابع هستند و ابعاد تحقق ها، یعنی تعداد متغیرهای حالت آنها یکسان است، لذا می توان یک تبدیل همانندی بین این دو بدست آورد. با توجه به ارتباط بین متغیرهای حالت چنین ماتریس تبدیلی بدست می آید،

$$\left.\begin{aligned}y&=x_1+2x_2\\ y&=59z_1+12z_2\end{aligned}\right\}\rightarrow\quad x_1+2x_2=59z_1+12z_2\qquad(1)$$

از طرفین رابطه (1) مشتق می گیریم و به جای مشتقات از معادلات فضای حالت مربوطه جایگذاری می کنیم،

$$\dot{x}_1+2\dot{x}_2=59\dot{z}_1+12\dot{z}_2\quad\rightarrow\quad(-5x_1-x_2+2u)+2(3x_1-x_2+5u)=59(z_2)+12(-8z_1-6z_2+u)$$

$$x_1-3x_2=-96z_1-13z_2\qquad(2)$$

حال از روی رابطه (1) و (2) می توان ماتریس تبدیل همانندی را بدست آورد،

$$\left.\begin{aligned}x_1&=-3z_1+2z_2\\ x_2&=31z_1+5z_2\end{aligned}\right\}\quad\rightarrow\quad\mathbf{x}=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 31 & 5\end{bmatrix}\mathbf{z}\quad\rightarrow\quad T=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 31 & 5\end{bmatrix}$$

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

صحت ماتریس بدست آمده را می توان بصورت زیر بررسی نمود،

$$A_2 = T^{-1}A_1T \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 31 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 31 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = T^{-1}B_1 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 31 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = TC_1 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 59 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 31 & 5 \end{bmatrix}$$

****

تحقق اول)

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$sI - A_1 = \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad (sI - A_1)^{-1} = \frac{Adj(sI - A_1)}{|sI - A_1|} = \frac{1}{s^2 + 3s + 3} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C_1(sI - A_1)^{-1}B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s^2+3s+3} & \frac{1}{s^2+3s+3} \\ \frac{-1}{s^2+3s+3} & \frac{s+2}{s^2+3s+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + 3s + 3}$$

تحقق دوم)

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$sI - A_2 = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s+3 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad (sI - A_2)^{-1} = \frac{Adj(sI - A_2)}{|sI - A_2|} = \frac{1}{s^2 + 3s + 3} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C_2(sI - A_2)^{-1}B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+3}{s^2+3s+3} & \frac{1}{s^2+3s+3} \\ \frac{-3}{s^2+3s+3} & \frac{s}{s^2+3s+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + 3s + 3}$$

از آنجاییکه این دو تحقق هم مرتبه و هر دو متعلق به یک تابع تبدیل هستند، می توان یک تبدیل همانندی بین آنها بدست آورد که $\mathbf{x} = T\mathbf{z}$ باشد. برای بدست آوردن ماتریس تبدیل باید رابطه ای بین متغیرهای حالت دو تحقق بدست آوریم،

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

تحقق اول

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=-2x_1(t)+x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=-x_1(t)-x_2(t)+r(t)\\ y(t)=x_1(t)\end{cases}$$

و

تحقق دوم

$$\begin{cases}\dot{z}_1(t)=z_2(t)\\ \dot{z}_2(t)=-3z_1(t)-3z_2(t)+r(t)\\ y(t)=z_1(t)\end{cases}$$

حال می توان نوشت،

$$\left.\begin{matrix}y(t)=x_1(t)\\ y(t)=z_1(t)\end{matrix}\right\}\rightarrow x_1(t)=z_1(t)$$

$$z_2(t)=\dot{z}_1(t)=\dot{x}_1(t)=-2x_1(t)+x_2(t)\rightarrow x_2(t)=2z_1(t)+z_2(t)$$

بنابراین ماتریس تبدیل بصورت زیر بدست می آید،

$$\mathbf{x}=T\mathbf{z}\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\ 2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}$$

حال می توان بررسی کرد که $A_2=T^{-1}A_1T$ و $B_2=T^{-1}B_1$ و $C_2=C_1T$ است.

****

حل تمرین شماره۲

$$\boxed{\dddot{y}(t)+3\ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+y(t)=u(t)}$$

الف) با متغیرهای حالت $x_1(t)=y(t)$ و $x_2(t)=\dot{y}(t)$ و $x_3(t)=\ddot{y}(t)$ معادلات حالت به فرم همبسته زیر بدست می آید،

$$\begin{cases}x_1(t)=y(t)\rightarrow\dot{x}_1(t)=\dot{y}(t)\\ x_2(t)=\dot{y}(t)\rightarrow\dot{x}_2(t)=\ddot{y}(t)\\ x_3(t)=\ddot{y}(t)\rightarrow\dot{x}_3(t)=\dddot{y}(t)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=x_3(t)\\ \dot{x}_3(t)=-x_1(t)-3x_2(t)-3x_3(t)+u(t)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\ 0&0&1\\ -1&-3&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}\end{cases}$$

****

ب) معادله مشخصه و مقادیر ویژه بصورت زیر است،

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\ 0&\lambda&-1\\ 1&3&\lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3=0\quad\rightarrow\quad\lambda_{1,2,3}=-1$$

****

ج) ماتریس انتقال حالت با روش کیلی- هامیلتون بصورت زیر بدست می آید،

$$Q(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda+1)^3=0 \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2,3}=-1$$

مقدار ویژه حقیقی تکراری مرتبه سه داریم. چندجمله ای مشخصه مرتبه ۳ است و چند جمله ای باقیمانده $R(\lambda)$ درجه دو خواهد بود،

$$R(\lambda)=c_0+c_1\lambda+c_2\lambda^2$$

$$N(\lambda_i)=R(\lambda_i)=c_0+c_1\lambda_i+c_2\lambda_i^{\,2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} e^{-t}=c_0-c_1+c_2 \\ te^{-t}=c_1-2c_2 \\ t^2e^{-t}=2c_2 \end{cases}$$

با حل دستگاه معادلات بالا مقدار ضرایب c_0، c_1 و c_2 بدست می آید،

$$c_0=e^{-t}+te^{-t}+t^2e^{-t}/2$$
$$c_1=te^{-t}+t^2e^{-t}$$
$$c_2=t^2e^{-t}/2$$

ماتریس انتقال حالت بصورت زیر بدست می آید،

$$\Phi(t)=\exp[At]=c_0I+c_1A+c_2A^2$$

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix} c_0 & 0 & 0 \\ 0 & c_0 & 0 \\ 0 & 0 & c_0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \\ -c_1 & -3c_1 & -3c_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 & c_2 \\ -c_2 & -3c_2 & -3c_2 \\ 3c_2 & 8c_2 & 6c_2 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix} e^{-t}+te^{-t}+t^2e^{-t}/2 & te^{-t}+t^2e^{-t} & t^2e^{-t}/2 \\ -t^2e^{-t}/2 & e^{-t}+te^{-t}-t^2e^{-t} & te^{-t}-t^2e^{-t}/2 \\ -te^{-t}+t^2e^{-t}/2 & -3te^{-t}+t^2e^{-t} & e^{-t}-2te^{-t}+t^2e^{-t}/2 \end{bmatrix}$$

****

د) پاسخ کامل معادلات حالت را بدست می آوریم،

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t)=e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0)+e^{At}\int_{t_0}^{t}e^{A\tau}B\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ \mathbf{y}(t)=C\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

$$e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0)=e^{At}\mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix} e^{-t}+te^{-t}+t^2e^{-t}/2 \\ -t^2e^{-t}/2 \\ -te^{-t}+t^2e^{-t}/2 \end{bmatrix}$$

$$\int_{t_0}^{t}e^{A(\tau-t_0)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau=\int_0^t\begin{bmatrix} \tau^2e^{-\tau}/2 \\ \tau e^{-\tau}-\tau^2e^{-\tau}/2 \\ e^{-\tau}-2\tau e^{-\tau}+\tau^2e^{-\tau}/2 \end{bmatrix}d\tau$$

با استفاده از $\mathbf{x}(t)$ بدست آمده مقدار $\mathbf{y}(t)$ را از رابطه زیر بدست می آوریم،

$$\mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$$

****

ه) با متغیرهای حالت $z_1(t)=y(t)$ و $z_2(t)=\dot{y}(t)+y(t)$ و $z_3(t)=\ddot{y}(t)$ معادلات حالت به فرم زیر بدست می آید،

$$\begin{cases} z_1(t)=y(t)\rightarrow \dot{z}_1(t)=\dot{y}(t) \\ z_2(t)=\dot{y}(t)+y(t)\rightarrow \dot{z}_2(t)=\ddot{y}(t)+\dot{y}(t) \\ z_3(t)=\ddot{y}(t)\rightarrow \dot{z}_3(t)=\dddot{y}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{z}_1(t)=z_2(t)-z_1(t) \\ \dot{z}_2(t)=z_3(t)+z_2(t)-z_1(t) \\ \dot{z}_3(t)=2z_1(t)-3z_2(t)-3z_3(t)+u(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

****

و) یافتن یک تبدیل همانندی $\mathbf{x}=T\mathbf{z}$

با مقایسه ارتباط بین متغیرهای حالت $\mathbf{x}$ و $\mathbf{z}$ می توان به راحتی ماتریس تبدیل همانندی T را بدست آورد.

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{z}$$

****

حل تمرین شماره۳

الف) $$\boxed{A=\begin{bmatrix} 2 & 10 & -2 \\ 10 & 5 & 8 \\ -2 & 8 & 11 \end{bmatrix}}$$

ابتدا مقادیر مشخصه ماتریس A را بدست می آوریم،

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -10 & 2 \\ -10 & \lambda-5 & -8 \\ 2 & -8 & \lambda-11 \end{vmatrix}=(\lambda-18)(\lambda-9)(\lambda+9)=0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1=18,\lambda_2=9,\lambda_3=-9$$

از آنجاییکه سه مقدار ویژه حقیقی و متمایز دارد می توان فرم قطری کامل را بدست آورد. فرم قطری کامل به صورت زیر است،

$$\Lambda=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

حال ماتریس تبدیل همانندی را می یابیم که رابطه $\Lambda=T^{-1}AT$ را برآورده سازد. برای این منظور باید بردارهای ویژه نظیر هر یک از مقادیر ویژه را بدست آوریم،

$$\mathrm{Adj}(\lambda I - A) = \mathrm{Adj}\begin{bmatrix} \lambda-2 & -10 & 2 \\ -10 & \lambda-5 & -8 \\ 2 & -8 & \lambda-11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^2-16\lambda-9 & 10\lambda-126 & 90-2\lambda \\ 10\lambda-126 & \lambda^2-13\lambda+18 & 8\lambda-36 \\ 90-2\lambda & 8\lambda-36 & \lambda^2-7\lambda-90 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 18 \quad \rightarrow \quad \mathrm{Adj}(18I\text{-}A) = \begin{bmatrix} 27 & 54 & 54 \\ 54 & 108 & 108 \\ 54 & 108 & 108 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 27 \\ 54 \\ 54 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 9 \quad \rightarrow \quad \mathrm{Adj}(9I\text{-}A) = \begin{bmatrix} -72 & -36 & 72 \\ -36 & -18 & 36 \\ 72 & 36 & -72 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -36 \\ -18 \\ 36 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = -9 \quad \rightarrow \quad \mathrm{Adj}(-9I\text{-}A) = \begin{bmatrix} 216 & -216 & 108 \\ -216 & 216 & -108 \\ 108 & -108 & 54 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 108 \\ -108 \\ 54 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

لذا ماتریس تبدیل T به شکل زیر خواهد بود،

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[2 10 -2;10 5 8;-2 8 11];
[T,J]= jordan(A)
T =
    0.4444    0.4444    0.1111
   -0.4444    0.2222    0.2222
    0.2222   -0.4444    0.2222
J =
    -9     0     0
     0     9     0
     0     0    18
```

****

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

ب) $A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

ابتدا مقادیر مشخصه ماتریس A را بدست می آوریم،

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & -2\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)=0 \quad\rightarrow\quad \lambda_1=-1,\lambda_2=1,\lambda_3=2$$

از آنجاییکه سه مقدار ویژه حقیقی و متمایز دارد می توان فرم قطری کامل را بدست آورد. فرم قطری کامل به صورت زیر است،

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

حال ماتریس تبدیل همانندی را می یابیم که رابطه $\Lambda=T^{-1}AT$ را برآورده سازد. برای این منظور باید بردارهای ویژه نظیر هر یک از مقادیر ویژه را بدست آوریم،

$$A\mathbf{v}_i=\lambda_i\mathbf{v}_i\rightarrow\begin{bmatrix}\lambda+1 & -1 & -2\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{bmatrix}\mathbf{v}_i=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1=-1\rightarrow\begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}-x_2-2x_3=0\\-2x_2=0\\-3x_3=0\end{cases}\rightarrow\quad\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=1\rightarrow\begin{bmatrix}2 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}2x_4-x_5-2x_6=0\\-x_6=0\end{cases}\rightarrow\quad\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$$

$$\lambda_3=2\rightarrow\begin{bmatrix}3 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_7\\x_8\\x_9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}3x_7-x_8-2x_9=0\\x_8=0\end{cases}\rightarrow\quad\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\0\\1\end{bmatrix}$$

لذا ماتریس تبدیل T به شکل زیر خواهد بود،

$$T=\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[-1 1 2;0 1 0;0 0 2];
[T,J]= jordan(A)
T =
    0.3333   -1.0000    0.6667
         0   -2.0000         0
         0         0    1.0000
J =
    -1     0     0
     0     1     0
     0     0     2
```

****

ج) $A=\begin{bmatrix}-9 & -26 & -24\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

ابتدا مقادیر مشخصه ماتریس A را بدست می آوریم،

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+9 & 26 & 24\\ -1 & \lambda & 0\\ 0 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+4)(\lambda+3)(\lambda+2)=0 \quad\rightarrow\quad \lambda_1=-4,\lambda_2=-3,\lambda_3=-2$$

از آنجاییکه سه مقدار ویژه حقیقی و متمایز دارد می توان فرم قطری کامل را بدست آورد. فرم قطری کامل به صورت زیر است،

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

حال ماتریس تبدیل همانندی را می یابیم که رابطه $\Lambda=T^{-1}AT$ را برآورده سازد. برای این منظور باید بردارهای ویژه نظیر هر یک از مقادیر ویژه را بدست آوریم. چون ماتریس A فرم همبسته دارد، لذا بردارهای ویژه نظیر هر یک از مقادیر ویژه به راحتی قابل محاسبه است،

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\ \lambda_1\\ \lambda_1^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -4\\ 16\end{bmatrix}\quad,\quad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\ \lambda_2\\ \lambda_2^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -3\\ 9\end{bmatrix}\quad,\quad \mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}1\\ \lambda_3\\ \lambda_3^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 4\end{bmatrix}$$

و ماتریس تبدیل همانی $\Lambda=T^{-1}AT$ به فرم ماتریس وَندرمُند خواهد بود،

$$T=\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -4 & -3 & -2\\ 16 & 9 & 4\end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[-9 -26 -24;1 0 0;0 1 0];
[T,J]=jordan(A)
T =
    2.0000   -9.0000    8.0000
   -1.0000    3.0000   -2.0000
    0.5000   -1.0000    0.5000
J =
    -2     0     0
     0    -3     0
     0     0    -4
```

****

د) $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{bmatrix}$

ابتدا مقادیر مشخصه ماتریس A را بدست می آوریم،

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\0&\lambda&-1\\6&11&\lambda+6\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)=0\quad\rightarrow\quad\lambda_1=-1,\lambda_2=-2,\lambda_3=-3$$

از آنجاییکه سه مقدار ویژه حقیقی و متمایز دارد می توان فرم قطری کامل را بدست آورد. فرم قطری کامل به صورت زیر است،

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{bmatrix}$$

حال ماتریس تبدیل همانندی را می یابیم که رابطه $\Lambda=T^{-1}AT$ را برآورده سازد. برای این منظور باید بردارهای ویژه نظیر هر یک از مقادیر ویژه را بدست آوریم. چون ماتریس A فرم همبسته دارد، لذا بردارهای ویژه نظیر هر یک از مقادیر ویژه به راحتی قابل محاسبه است،

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\\lambda_1\\\lambda_1^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\quad,\quad\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\\lambda_2\\\lambda_2^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\\4\end{bmatrix}\quad,\quad\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}1\\\lambda_3\\\lambda_3^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-3\\9\end{bmatrix}$$

و ماتریس تبدیل همانی $\Lambda=T^{-1}AT$ به فرم ماتریس وَندرمُند خواهد بود،

$$T=\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -2 & -3\\ 1 & 4 & 9\end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[0 1 0;0 0 1;-6 -11 -6];
[T,J]= jordan(A)
T =
     3    -3     1
    -3     6    -3
     3   -12     9
J =
    -1     0     0
     0    -2     0
     0     0    -3
```

****

ه) $A=\begin{bmatrix}2 & -2 & 3\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{bmatrix}$

ابتدا مقادیر ویژه، بردارهای ویژه و سپس فرم قطری سازی شده ماتریس A را بدست می آوریم،

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 2 & -3\\ -1 & \lambda-1 & -1\\ -1 & -3 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-3)=0 \quad\rightarrow\quad \lambda_1=1,\lambda_2=-2,\lambda_3=3$$

از آنجاییکه سه مقدار ویژه حقیقی و متمایز دارد می توان فرم قطری کامل را بدست آورد. فرم قطری کامل به صورت زیر است،

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

حال ماتریس تبدیل همانندی را می یابیم که رابطه $\Lambda=T^{-1}AT$ را برآورده سازد. برای این منظور باید بردارهای ویژه نظیر هر یک از مقادیر ویژه را بدست آوریم،

$$\mathrm{Adj}(\lambda I-A)=\mathrm{Adj}\begin{bmatrix}\lambda-2 & 2 & -3\\ -1 & \lambda-1 & -1\\ -1 & -3 & \lambda+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda^2-4 & -2\lambda+7 & 3\lambda-5\\ \lambda+2 & \lambda^2-\lambda-5 & \lambda+1\\ \lambda+2 & 3\lambda-8 & \lambda^2-3\lambda+4\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \rightarrow \quad \mathrm{Adj}(1I\text{-}A) = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 3 & -5 & 2 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -2 \quad \rightarrow \quad \mathrm{Adj}(-2I\text{-}A) = \begin{bmatrix} 0 & 11 & -11 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -14 & 14 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -11 \\ -1 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 3 \quad \rightarrow \quad \mathrm{Adj}(3I\text{-}A) = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

لذا ماتریس تبدیل T به شکل زیر خواهد بود،

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -11 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 14 & 1 \end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[2 -2 3;1 1 1;1 3 -1];
[T,J]=jordan(A)
T =
   -0.1667   -0.7333   -0.1000
    0.1667   -0.0667   -0.1000
    0.1667    0.9333   -0.1000
J =
     1     0     0
     0    -2     0
     0     0     3
```

****

و) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

ابتدا مقادیر ویژه، بردارهای ویژه و سپس فرم قطری سازی شده ماتریس A را بدست می آوریم،

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-4 & 2 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-6 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 12\lambda^2 + 46\lambda - 60 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 6, \lambda_{2,3} = 3 \pm j$$

از آنجاییکه یک مقدار ویژه حقیقی و دو مقدار ویژه مختلط مزدوج دارد، باید به فرم قطری بلوکی تبدیل گردد. فرم قطری بلوکی به صورت زیر است،

$$\Lambda=\left[\begin{array}{c:cc}\lambda_1 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & \sigma_2 & \omega_2\\ 0 & -\omega_2 & \sigma_2\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:cc}6 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 3\end{array}\right]$$

حال ماتریس تبدیل همانندی را می یابیم که رابطه $\Lambda=T^{-1}AT$ را برآورده سازد. برای این منظور بردارهای ویژه نظیر هر یک از مقادیر ویژه را بدست می آوریم،

$$A\mathbf{v}_i=\lambda_i\mathbf{v}_i\rightarrow\begin{bmatrix}\lambda-4 & 2 & 0\\ -1 & \lambda-2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-6\end{bmatrix}\mathbf{v}_i=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1=6\rightarrow\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ -1 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}2x_1+2x_2=0\\ -x_1+4x_2=0\end{cases}\rightarrow\quad\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=3+j\rightarrow\begin{bmatrix}-1+j & 2 & 0\\ -1 & 1+j & 0\\ 0 & 0 & -3+j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}(-1+j)x_4+2x_5=0\\ -x_4+(1+j)x_5=0\\ (-3+j)x_6=0\end{cases}\rightarrow\quad\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1+j\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\lambda_3=3-j\rightarrow\begin{bmatrix}-1-j & 2 & 0\\ -1 & 1-j & 0\\ 0 & 0 & -3-j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_7\\x_8\\x_9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}(-1-j)x_7+2x_8=0\\ -x_7+(1-j)x_8=0\\ (-3-j)x_9=0\end{cases}\rightarrow\quad\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}1-j\\1\\0\end{bmatrix}$$

لذا ماتریس تبدیل T به شکل زیر خواهد بود،

$$T=[\mathbf{v}_1\quad \mathrm{Re}\{\mathbf{v}_2\}\quad \mathrm{Im}\{\mathbf{v}_2\}]=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[4 -2 0;1 2 0;0 0 6];
[T,J]=jordan(A)
T =
         0             0.5000 - 0.5000i   0.5000 + 0.5000i
         0                  0 - 0.5000i        0 + 0.5000i
    1.0000                  0                  0
J =
    6.0000                  0                  0
         0             3.0000 + 1.0000i        0
         0                  0              3.0000 - 1.0000i
```

****

ز) $A=\begin{bmatrix}4&2&1\\0&6&1\\0&-4&2\end{bmatrix}$

ابتدا مقادیر ویژه، بردارهای ویژه و سپس فرم قطری سازی شده ماتریس A را بدست می آوریم،

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&-2&-1\\0&\lambda-6&-1\\0&4&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-4)^3=0\quad\rightarrow\quad\lambda_{1,2,3}=4$$

ماتریس یک مقدار ویژه حقیقی تکراری مرتبه سه دارد، باید به فرم قطری بلوکی جردن تبدیل گردد. حال باید بدانیم چند تا بلوک جردن داریم،

$$\nu(\lambda_1 I-A)=n-\text{rank}(\lambda_1 I-A)=3-\text{rank}\begin{bmatrix}0&-2&-1\\0&-2&-1\\0&4&2\end{bmatrix}=3-1=2$$

بعد فضای پوچی $(\lambda_1 I-A)$ برابر با ۲ است، پس دو بردار ویژه مستقل خطی متناظر با مقدار ویژه تکراری $\lambda_{1,2,3}=4$ داریم. پس دو بلوک جردن در فرم قطری بلوکی جردن خواهیم داشت که به صورت زیر است،

$$\Lambda=\left[\begin{array}{cc:c}\lambda_1&1&0\\0&\lambda_1&0\\\hdashline 0&0&\lambda_1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc:c}4&1&0\\0&4&0\\\hdashline 0&0&4\end{array}\right]$$

حال ماتریس تبدیل همانندی را می یابیم که رابطه $\Lambda=T^{-1}AT$ را برآورده سازد. لذا باید دو بردار ویژه مستقل خطی و یک بردار ویژه تعمیم یافته برای مقدار ویژه تکراری $\lambda_{1,2,3}=4$ بدست آوریم،

$$A\mathbf{v}_i=\lambda_i\mathbf{v}_i\rightarrow\begin{bmatrix}\lambda-4&-2&-1\\0&\lambda-6&-1\\0&4&\lambda-2\end{bmatrix}\mathbf{v}_i=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

ابتدا دو بردار ویژه مستقل خطی $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ را بدست می آوریم،

$$\lambda_{1,2,3}=4\rightarrow\begin{bmatrix}0&-2&-1\\0&-2&-1\\0&4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow-2x_2-x_3=0\quad\rightarrow\quad\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix},\quad\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

سپس بردار ویژه تعمیم یافته φ_1 را محاسبه می کنیم،

$$(A-\lambda_1 I)\varphi_1=\mathbf{v}_1\rightarrow\begin{bmatrix}0&2&1\\0&2&1\\0&-4&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}\rightarrow2x_5+x_6=1\quad\rightarrow\quad\varphi_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

لذا ماتریس تبدیل T به شکل زیر خواهد بود،

$$T=\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1&\varphi_1&\mathbf{v}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&0&0\\-2&1&0\end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[4 2 1;0 6 1;0 -4 2];
[T,J]= jordan(A)
T =
    2.0000         0         0
    2.0000    0.5000   -0.5000
   -4.0000    1.0000    1.0000
J =
     4     1     0
     0     4     0
     0     0     4
```

* * *

ح)
$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -3 & 0\\ -0.5 & -3 & 1 & 0.5\\ -3 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

ابتدا مقادیر ویژه، بردارهای ویژه و سپس فرم قطری سازی شده ماتریس A را بدست می آوریم،

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & \lambda-1 & 3 & 0\\ 0.5 & 3 & \lambda-1 & -0.5\\ 3 & 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^4-4\lambda^3-12\lambda^2+32\lambda+64=0 \quad\rightarrow\quad \lambda_{1,2}=4,\quad \lambda_{3,4}=-2$$

ماتریس دو مقدار ویژه حقیقی تکراری مرتبه دو دارد، باید به فرم قطری بلوکی جردن تبدیل گردد. حال باید بدانیم برای هر یک از مقادیر ویژه تکراری چند تا بلوک جردن داریم،

$$v(\lambda_1 I-A)=n-\text{rank}(\lambda_1 I-A)=4-\text{rank}\begin{bmatrix}3 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 3 & 3 & 0\\ 0.5 & 3 & 3 & -0.5\\ 3 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}=4-3=1$$

برای بردار $\lambda_{1,2}=4$ یک بردار ویژه مستقل خطی داریم، پس یک بلوک جردن برای $\lambda_{1,2}=4$ خواهیم داشت.

$$v(\lambda_3 I-A)=n-\text{rank}(\lambda_3 I-A)=4-\text{rank}\begin{bmatrix}-3 & 0 & 0 & 3\\ 0 & -3 & 3 & 0\\ 0.5 & 3 & -3 & -0.5\\ 3 & 0 & 0 & -3\end{bmatrix}=4-2=2$$

برای بردار $\lambda_{3,4}=-2$ دو بردار ویژه مستقل خطی داریم، پس دو بلوک جردن برای $\lambda_{3,4}=-2$ خواهیم داشت.

فرم قطری بلوکی جردن به صورت زیر است،

$$\Lambda=\left[\begin{array}{cc:cc}\lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc:cc}4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{array}\right]$$

حال ماتریس تبدیل همانندی را می یابیم که رابطه $\Lambda=T^{-1}AT$ را برآورده سازد. باید یک بردار ویژه مستقل خطی و یک بردار ویژه تعمیم یافته برای مقدار ویژه تکراری $\lambda_{1,2}=4$ و دو بردار ویژه مستقل خطی برای $\lambda_{3,4}=-2$ بدست آوریم،

$$A\mathbf{v}_i=\lambda_i\mathbf{v}_i\rightarrow\begin{bmatrix}\lambda-1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & \lambda-1 & 3 & 0\\ 0.5 & 3 & \lambda-1 & -0.5\\ 3 & 0 & 0 & \lambda-1\end{bmatrix}\mathbf{v}_i=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

ابتدا دو بردار ویژه مستقل خطی $\mathbf{v}_1$ را برای $\lambda_{1,2}=4$ بدست می آوریم،

$$\lambda_{1,2}=4\rightarrow\begin{bmatrix}3 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 3 & 3 & 0\\ 0.5 & 3 & 3 & -0.5\\ 3 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}3x_1+3x_4=0\\3x_2+3x_3=0\\0.5x_1+3x_2+3x_3-0.5x_4=0\end{cases}\rightarrow\quad\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

سپس بردار ویژه تعمیم یافته φ_1 را محاسبه می کنیم،

$$(A-\lambda_1 I)\varphi_1=\mathbf{v}_1\rightarrow\begin{bmatrix}-3 & 0 & 0 & -3\\ 0 & -3 & -3 & 0\\ -0.5 & -3 & -3 & 0.5\\ -3 & 0 & 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_5\\x_6\\x_7\\x_8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}-3x_5-3x_8=0\\-3x_6-3x_7=1\\-0.5x_5-3x_6-3x_7+0.5x_8=-1\end{cases}\rightarrow\varphi_1=\begin{bmatrix}2\\0\\\frac{-1}{3}\\-2\end{bmatrix}$$

حال دو بردار وبژه مستقل خطی $\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4$ را برای $\lambda_{3,4}=-2$ محاسبه می کنیم،

$$\lambda_{3,4}=-2\rightarrow\begin{bmatrix}-3 & 0 & 0 & 3\\ 0 & -3 & 3 & 0\\ 0.5 & 3 & -3 & -0.5\\ 3 & 0 & 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_9\\x_{10}\\x_{11}\\x_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}-3x_9+3x_{12}=0\\-3x_{10}+3x_{11}=0\\0.5x_9+3x_{10}-3x_{11}-0.5x_{12}=0\end{cases}\rightarrow\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix},\mathbf{v}_4=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

لذا ماتریس تبدیل T به شکل زیر خواهد بود،

$$T=\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \varphi_1 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ -1 & \frac{-1}{3} & 1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[1 0 0 -3;0 1 -3 0;-0.5 -3 1 0.5;-3 0 0 1];
[T,J]=jordan(A)
T =
    1.5000         0    0.5000    1.0000
    0.0417    0.2500   -0.0417         0
    0.0417   -0.2500   -0.0417         0
    1.5000         0   -0.5000    1.0000
J =
    -2     0     0     0
     0     4     1     0
     0     0     4     0
     0     0     0    -2
```

****

ط) $A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & -4 & 8\end{bmatrix}$

ابتدا مقادیر ویژه، بردارهای ویژه و سپس فرم قطری سازی شده ماتریس A را بدست می آوریم،

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & -2 & -1\\ -1 & \lambda-2 & -1\\ 1 & 4 & \lambda-8\end{vmatrix}=\lambda^3-14\lambda^2+59\lambda-60=0 \quad\rightarrow\quad \lambda_1=1.4843,\lambda_{2,3}=6.2578\pm j1.1235$$

ماتریس یک مقدار ویژه حقیقی و دو مقدار ویژه مختلط مزدوج دارد، باید به فرم قطری بلوکی تبدیل گردد. فرم قطری بلوکی به صورت زیر است،

$$\Lambda=\left[\begin{array}{c|cc}\lambda_1 & 0 & 0\\ \hline 0 & \sigma_2 & \omega_2\\ 0 & -\omega_2 & \sigma_2\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|cc}1.4843 & 0 & 0\\ \hline 0 & 6.2578 & 1.1235\\ 0 & -1.1235 & 6.2578\end{array}\right]$$

حال ماتریس تبدیل همانندی را می یابیم که رابطه $\Lambda=T^{-1}AT$ را برآورده سازد. برای این منظور بردارهای ویژه نظیر هر یک از مقادیر ویژه را بدست می آوریم،

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda-4 & -2 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ 1 & 4 & \lambda-8 \end{bmatrix} \mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

در اینجا از نرم افزار MATLAB برای محاسبه بردارهای ویژه استفاده شده است،

$$\lambda_1 = 1.4843 \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -0.6642 \\ 0.6782 \\ 0.3144 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 6.2578 + j1.1235 \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0.3757 + j0.3678 \\ 0.1706 + j0.2283 \\ 0.0940 + j0.7959 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 6.2578 - j1.1235 \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0.3757 - j0.3678 \\ 0.1706 - j0.2283 \\ 0.0940 - j0.7959 \end{bmatrix}$$

لذا ماتریس تبدیل T به شکل زیر خواهد بود،

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathrm{Re}\{\mathbf{v}_2\} & \mathrm{Im}\{\mathbf{v}_2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6642 & 0.3757 & 0.3678 \\ 0.6782 & 0.1706 & 0.2283 \\ 0.3144 & 0.0940 & 0.7959 \end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[4 2 1;1 2 1;-1 -4 8];
[T,J]=jordan(A)
T =
   0.3060          0.3470 - 0.3547i   0.3470 + 0.3547i
  -0.3125          0.1563 - 0.2189i   0.1563 + 0.2189i
  -0.1449          0.0724 - 0.7528i   0.0724 + 0.7528i
J =
   1.4843                0                  0
        0          6.2578 - 1.1235i         0
        0                0            6.2578 + 1.1235i
```

****

ی) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ابتدا مقادیر ویژه، بردارهای ویژه و سپس فرم قطری سازی شده ماتریس A را بدست می آوریم،

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3(\lambda-2) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2,3} = 0, \lambda_4 = 2$$

ماتریس یک مقدار ویژه حقیقی متمایز و یک مقدار ویژه حقیقی تکراری مرتبه سه دارد، باید به فرم قطری بلوکی جردن تبدیل گردد. حال باید بدانیم چند تا بلوک جردن داریم،

$$\nu(\lambda_1 I - A) = n - \text{rank}(\lambda_1 I - A) = 4 - \text{rank}\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1$$

بنابراین یک بردار ویژه مستقل خطی برای $\lambda_{1,2,3} = 0$ داریم، در نتیجه یک بلوک جردن داریم. فرم قطری بلوکی جردن به صورت زیر است،

$$\Lambda = \left[\begin{array}{ccc:c} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

حال ماتریس تبدیل همانندی را می یابیم که رابطه $\Lambda = T^{-1}AT$ را برآورده سازد.

ابتدا باید یک بردار ویژه مستقل خطی $\mathbf{v}_1$ و دو بردار ویژه تعمیم یافته φ_1, φ_2 برای $\lambda_{1,2,3} = 0$ بدست آوریم،

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda-2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ابتدا دو بردار ویژه مستقل خطی $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ را بدست می آوریم،

$$\lambda_{1,2,3} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -2x_1 - x_3 = 0 \\ -x_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

سپس بردارهای ویژه تعمیم یافته φ_1, φ_2 را محاسبه می کنیم،

$$(A - \lambda_1 I)\varphi_1 = \mathbf{v}_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x_5 + x_7 = 0 \\ x_8 = 1 \end{cases} \rightarrow \quad \varphi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(A-\lambda_1 I)\varphi_2=\varphi_1 \rightarrow \begin{bmatrix}2&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_9\\x_{10}\\x_{11}\\x_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}2x_9+x_{11}=0\\x_{12}=1\end{cases}\rightarrow \quad \varphi_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$$

حال بردار ویژه نظیر مقدار ویژه حقیقی و متمایز $\lambda_4=2$ را بدست می آوریم،

$$\lambda_4=2\rightarrow\begin{bmatrix}0&0&-1&0\\0&2&0&-1\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{13}\\x_{14}\\x_{15}\\x_{16}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}-x_{15}=0\\2x_{14}-x_{16}=0\\2x_{16}=0\end{cases}\rightarrow \quad \mathbf{v}_4=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

لذا ماتریس تبدیل T به شکل زیر خواهد بود،

$$T=\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \varphi_1 & \varphi_2 & \mathbf{v}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\1&1&0&0\\0&0&-2&0\\0&1&1&0\end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[2 0 1 0;0 0 0 1;0 0 0 0;0 0 0 0];
[T,J]= jordan(A)
T =
          0   -0.5000    0.5000    0.5000
     1.0000         0         0    0.5000
          0    1.0000         0   -1.0000
          0    1.0000         0         0
J =
      0     1     0     0
      0     0     0     0
      0     0     2     0
      0     0     0     0
```

* * *

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

حل تمرین شماره ۴

$$A=\begin{bmatrix}3&1&0&0&0&0&0\\0&3&0&0&0&0&0\\0&0&3&0&0&0&0\\0&0&0&4&1&0&0\\0&0&0&0&4&0&0\\0&0&0&0&0&4&1\\0&0&0&0&0&0&4\end{bmatrix}$$

مشخص است که ماتریس به فرم قطری بلوکی جردن است، پس ابتدا بلوک های جردن آن را مشخص می نماییم و سپس سوال ها را جواب می دهیم،

$$A=\left[\begin{array}{cc:c:ccc:c}3&1&0&0&0&0&0\\0&3&0&0&0&0&0\\\hdashline 0&0&3&0&0&0&0\\\hdashline 0&0&0&4&1&0&0\\0&0&0&0&4&0&0\\\hdashline 0&0&0&0&0&4&1\\0&0&0&0&0&0&4\end{array}\right]$$

الف) این ماتریس چند مقدار ویژه دارد؟ آنها را بیابید.

با توجه به عناصر روی قطر اصلی، ماتریس A هفت مقدار ویژه بصورت $\lambda_{1,2,3}=3$ (حقیقی تکراری مرتبه سه) و $\lambda_{4,5,6,7}=4$ (حقیقی تکراری مرتبه چهار) دارد.

ب) چند بردار ویژه مستقل خطی برای ماتریس A وجود دارد؟

تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی برابر با تعداد بلوک های جردن است، لذا ماتریس A چهار بردار ویژه مستقل خطی دارد.

ج) چند بردار ویژه تعمیم یافته برای ماتریس A وجود دارد؟

با توجه به اینکه هفت مقدار ویژه و چهار بردار ویژه مستقل خطی داریم، لذا سه بردار ویژه تعمیم یافته وجود دارد.

****

حل تمرین شماره ۵

$$\boxed{\begin{array}{ll}\lambda_1=\lambda_2=2, & \operatorname{rank}(A-2I)=4\\ \lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=-2, & \operatorname{rank}(A+2I)=3\end{array}}$$

فرم کانونیکال جردن ماتریس A به یکی از فرم های زیر است،

$$A=\left[\begin{array}{cc:cc:c}2&1&0&0&0\\0&2&0&0&0\\\hdashline 0&0&-2&1&0\\0&0&0&-2&0\\\hdashline 0&0&0&0&-2\end{array}\right],\qquad A=\left[\begin{array}{cc:c:cc}2&1&0&0&0\\0&2&0&0&0\\\hdashline 0&0&-2&0&0\\\hdashline 0&0&0&-2&1\\0&0&0&0&-2\end{array}\right]$$

با توجه به تعداد مقادیر ویژه ابعاد ماتریس 5×5 است که مقادیر ویژه به ترتیب روی قطر اصلی قرار دارند. عناصر زیر قطر اصلی همگی صفر هستند. برای تعیین عناصر بالای قطر اصلی باید تعداد بلوک های جردن را بدست آوریم.

$$\lambda_1=\lambda_2=2,\qquad \text{rank}(A-2I)=4 \quad\rightarrow\quad \text{nullity}(A-2I)=n-\text{rank}(A-2I)=5-4=1$$

لذا یک بردار ویژه مستقل خطی برای $\lambda_{1,2}=2$ داریم، پس یک بلوک جردن خواهیم داشت.

$$\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=-2,\qquad \text{rank}(A+2I)=3 \quad\rightarrow\quad \text{nullity}(A+2I)=n-\text{rank}(A+2I)=5-3=2$$

این بار دو بردار ویژه مستقل خطی برای $\lambda_{3,4,5}=-2$ داریم، پس دو بلوک جردن خواهیم داشت. ترتیب قرار گرفتن این دو بلوک اختیاری است.

****

حل تمرین شماره ۶

الف) $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-2&2\\0&1&-3\end{bmatrix}$

ابتدا مقادیر ویژه، بردارهای ویژه و سپس فرم قطری سازی شده ماتریس A را بدست می آوریم،

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda+2&-2\\0&-1&\lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda+4)=0 \quad\rightarrow\quad \lambda_1=2,\lambda_2=-1,\lambda_3=-4$$

از آنجاییکه سه مقدار ویژه حقیقی و متمایز دارد می توان فرم قطری کامل را بدست آورد. فرم قطری کامل به صورت زیر است،

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-4\end{bmatrix}$$

حال ماتریس تبدیل همانندی را می یابیم که رابطه $\Lambda=T^{-1}AT$ را برآورده سازد. برای این منظور باید بردارهای ویژه نظیر هر یک از مقادیر ویژه را بدست آوریم،

$$\text{Adj}(\lambda I-A)=\text{Adj}\begin{bmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda+2&-2\\0&-1&\lambda+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda^2+5\lambda+4&0&0\\0&\lambda^2+\lambda-6&2\lambda-4\\0&\lambda-2&\lambda^2-4\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1=2 \quad\rightarrow\quad \text{Adj}(2I\text{-}A)=\begin{bmatrix}18&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad \mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}18\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=-1 \quad\rightarrow\quad \text{Adj}(-1I\text{-}A)=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-6&-6\\0&-3&-3\end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}0\\-6\\-3\end{bmatrix}$$

$$\lambda_3=-4 \quad \to \quad \mathrm{Adj}(-4I\text{-}A)=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&6&-12\\0&-6&12\end{bmatrix} \quad \to \quad \mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}0\\6\\-6\end{bmatrix}$$

لذا ماتریس تبدیل T به شکل زیر خواهد بود،

$$T=\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18&0&0\\0&-6&6\\0&-3&-6\end{bmatrix}$$

حال e^{At} را بدست می آوریم،

$$\mathrm{e}^{At}=Te^{\Lambda t}T^{-1}=\begin{bmatrix}18&0&0\\0&-6&6\\0&-3&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{2t}&0&0\\0&e^{-t}&0\\0&0&e^{-4t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}18&0&0\\0&-6&6\\0&-3&-6\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}e^{2t}&\multicolumn{2}{c}{0}\\0&\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{-4t}&\frac{2}{3}e^{-t}-\frac{2}{3}e^{-4t}\\0&\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{-4t}&\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{2}{3}e^{-4t}\end{bmatrix}$$

نکته: یک راه سریع برای بررسی اینکه e^{At} بدست آمده درست است یا نه آن است که برای $t=0$ ماتریس برابر با I باشد.

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[2 0 0;0 -2 2;0 1 -3];
t = sym('t');
expm(A *t)
ans =
[ exp(2*t),                        0,                        0]
[        0,  2/3*exp(-t)+1/3*exp(-4*t), -2/3*exp(-4*t)+2/3*exp(-t)]
[        0,  1/3*exp(-t)-1/3*exp(-4*t),  2/3*exp(-4*t)+1/3*exp(-t)]
```

****

ب) $$\boxed{A=\begin{bmatrix}0&-3&0\\3&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}}$$

ابتدا مقادیر ویژه، بردارهای ویژه و سپس فرم قطری سازی شده ماتریس A را بدست می آوریم،

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&3&0\\-3&\lambda&0\\0&0&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda^2+9)=0 \quad \to \quad \lambda_1=-1,\lambda_2=3j,\lambda_3=-3j$$

از آنجاییکه یک مقدار ویژه حقیقی متمایز و دو مقدار ویژه مختلط مزدوج دارد لذا باید به فرم قطری بلوکی در آید،

$$\Lambda=\left[\begin{array}{c|cc}\lambda_1 & 0 & 0\\ \hline 0 & \sigma_2 & \omega_2\\ 0 & -\omega_2 & \sigma_2\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|cc}-1 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 3\\ 0 & -3 & 0\end{array}\right]$$

حال ماتریس تبدیل همانندی را می یابیم که رابطه $\Lambda=T^{-1}AT$ را برآورده سازد. برای این منظور باید بردارهای ویژه نظیر هر یک از مقادیر ویژه را بدست آوریم،

$$A\mathbf{v}_i=\lambda_i\mathbf{v}_i\rightarrow\begin{bmatrix}\lambda & 3 & 0\\ -3 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda+1\end{bmatrix}\mathbf{v}_i=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1=-1\rightarrow\begin{bmatrix}-1 & 3 & 0\\ -3 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}-x_1+3x_2=0\\-3x_1-x_2=0\end{cases}\rightarrow\quad\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=3j\rightarrow\begin{bmatrix}3j & 3 & 0\\ -3 & 3j & 0\\ 0 & 0 & 1+3j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}3jx_4+3x_5=0\\-3x_4+3jx_5=0\\(1+3j)x_6=0\end{cases}\rightarrow\quad\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}j\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\lambda_3=-3j\rightarrow\begin{bmatrix}-3j & 3 & 0\\ -3 & -3j & 0\\ 0 & 0 & 1-3j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_7\\x_8\\x_9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}3jx_7+3x_8=0\\-3x_7+3jx_8=0\\(1+3j)x_9=0\end{cases}\rightarrow\quad\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}-j\\1\\0\end{bmatrix}$$

لذا ماتریس تبدیل T به شکل زیر خواهد بود،

$$T=\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathrm{Re}\{\mathbf{v}_2\} & \mathrm{Im}\{\mathbf{v}_2\}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

حال e^{At} را بدست می آوریم،

$$e^{At}=Te^{\Lambda t}T^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\left[\begin{array}{c|cc}e^{-t} & 0 & 0\\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$e^{\begin{bmatrix}0 & 3\\ -3 & 0\end{bmatrix}t}$}}\\ 0 & & \end{array}\right]\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{-1}=\left[\begin{array}{c|cc}e^{-t} & 0 & 0\\ \hline 0 & \cos(3t) & \sin(3t)\\ 0 & -\sin(3t) & \cos(3t)\end{array}\right]$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[0 -3 0;3 0 0;0 0 -1];
t = sym('t');
expm(A*t)
ans =
[  cos(3*t),  sin(3*t),        0]
[ -sin(3*t),  cos(3*t),        0]
[        0,         0,   exp(-t)]
```

****

ج) $A=\begin{bmatrix}4 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$

این تمرین همان ماتریس (ب) در سوال اول است لذا می توان از نتایج آن در محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه استفاده کرد.
مقادیر ویژه، فرم قطری سازی شده و ماتریس تبدیل T بصورت زیر هستند،

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & 2 & 0\\ -1 & \lambda-2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-6\end{vmatrix}=\lambda^3-12\lambda^2+46\lambda-60=0 \quad\rightarrow\quad \lambda_1=6,\lambda_{2,3}=3\pm j$$

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & \omega_2\\ 0 & -\omega_2 & \sigma_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 3\end{bmatrix}$$

$$T=\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathrm{Re}\{\mathbf{v}_2\} & \mathrm{Im}\{\mathbf{v}_2\}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

حال e^{At} را بدست می آوریم،

$$e^{At}=Te^{\Lambda t}T^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{6t} & 0 & 0\\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$e^{\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}t}$}}\\ 0 & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}e^{6t} & 0 & 0\\ 0 & e^{3t}\cos(t)+e^{3t}\sin(t) & -2e^{3t}\sin(t)\\ 0 & e^{3t}\sin(t) & e^{3t}\cos(t)-e^{3t}\sin(t)\end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[4 -2 0;1 2 0;0 0 6];
t = sym('t');
expm(A*t)
ans =
[ exp(3*t)*sin(t)+exp(3*t)*cos(t),                -2*exp(3*t)*sin(t),          0]
[                 exp(3*t)*sin(t), -exp(3*t)*sin(t)+exp(3*t)*cos(t),          0]
[                               0,                                 0,   exp(6*t)]
```

****

حل تمرین شماره ۷

الف)
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix} 7 & 4 & -8 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}u(t) \\ y(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

الف) ابتدا معادله مشخصه و مقادیر ویژه ماتریس حالت را بدست می آوریم.

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-7 & -4 & 8 \\ -4 & \lambda+8 & 1 \\ 4 & 1 & \lambda+8 \end{vmatrix}=0 \quad\rightarrow\quad \lambda^3+9\lambda^2-97\lambda-873=(\lambda+9)(\lambda^2-97)=0$$

مقادیر ویژه عبارتند از، $\lambda_1=-9$ و $\lambda_2=\sqrt{97}=9.8489$ و $\lambda_3=-\sqrt{97}=-9.8489$ سه مقدار ویژه حقیقی و متمایز دارد پس می توان ماتریس حالت را بصورت قطری کامل تبدیل کرد.

ب) برای بدست آوردن ماتریس تبدیل T بردارهای ویژه را بدست می آوریم،

$$A\mathbf{v}_i=\lambda_i\mathbf{v}_i$$

$$\begin{cases} A\mathbf{v}_1=\lambda_1\mathbf{v}_1\rightarrow\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix} -0.2425 \\ 0.9701 \\ 0 \end{bmatrix} \\ A\mathbf{v}_2=\lambda_2\mathbf{v}_2\rightarrow\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix} 0.9480 \\ 0.2251 \\ -0.2251 \end{bmatrix} \\ A\mathbf{v}_3=\lambda_3\mathbf{v}_3\rightarrow\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix} 0.4498 \\ -0.6315 \\ 0.6315 \end{bmatrix} \end{cases} \quad\rightarrow\quad T=\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -0.2425 & 0.9480 & 0.4498 \\ 0.9701 & 0.2251 & -0.6315 \\ 0 & -0.2251 & 0.6315 \end{bmatrix}$$

ج) حال باید فرم قطری سازی شده معادلات حالت را بدست آوریم.

$$\Lambda = T^{-1}AT$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1.0308 & 1.0308 \\ 0.9023 & 0.2256 & -0.4171 \\ 0.3215 & 0.0804 & 1.4348 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 4 & -8 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.2425 & 0.9480 & 0.4498 \\ 0.9701 & 0.2251 & -0.6315 \\ 0 & -0.2251 & 0.6315 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9.8489 & 0 \\ 0 & 0 & -9.8489 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{97} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{97} \end{bmatrix}$$

$$B_n = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 1.0308 & 1.0308 \\ 0.9023 & 0.2256 & -0.4171 \\ 0.3215 & 0.0804 & 1.4348 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0308 \\ 0.2256 \\ 0.0804 \end{bmatrix}$$

$$C_n = CT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.2425 & 0.9480 & 0.4498 \\ 0.9701 & 0.2251 & -0.6315 \\ 0 & -0.2251 & 0.6315 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2425 & 0.9480 & 0.4498 \end{bmatrix}$$

معادلات قطری سازی شده به فرم زیر می باشد،

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = \Lambda \mathbf{z}(t) + B_n \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C_n \mathbf{z}(t) \end{cases}$$

د) ماتریس انتقال حالت را می توان از روش قطری سازی بصورت زیر بدست آورد،

$$e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} -0.2425 & 0.9480 & 0.4498 \\ 0.9701 & 0.2251 & -0.6315 \\ 0 & -0.2251 & 0.6315 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-9t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{97}t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\sqrt{97}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1.0308 & 1.0308 \\ 0.9023 & 0.2256 & -0.4171 \\ 0.3215 & 0.0804 & 1.4348 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.2425e^{-9t} & 0.9480e^{\sqrt{97}t} & 0.4498e^{-\sqrt{97}t} \\ 0.9701e^{-9t} & 0.2251e^{\sqrt{97}t} & -0.6315e^{-\sqrt{97}t} \\ 0 & -0.2251e^{\sqrt{97}t} & 0.6315e^{-\sqrt{97}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1.0308 & 1.0308 \\ 0.9023 & 0.2256 & -0.4171 \\ 0.3215 & 0.0804 & 1.4348 \end{bmatrix}$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix} 0.8554e^{\sqrt{97}t}+0.146e^{-\sqrt{97}t} & -0.25e^{-9t}+0.2139e^{\sqrt{97}t}+0.0362e^{-\sqrt{97}t} & -0.25e^{-9t}-0.3954e^{\sqrt{97}t}+0.6454e^{-\sqrt{97}t} \\ 0.2031e^{\sqrt{97}t}-0.2030e^{-\sqrt{97}t} & e^{-9t}+0.0508e^{\sqrt{97}t}-0.0508e^{-\sqrt{97}t} & e^{-9t}-0.0939e^{\sqrt{97}t}-0.9061e^{-\sqrt{97}t} \\ -0.2031e^{\sqrt{97}t}+0.2030e^{-\sqrt{97}t} & -0.0508e^{\sqrt{97}t}+0.0508e^{-\sqrt{97}t} & 0.0939e^{\sqrt{97}t}+0.9061e^{-\sqrt{97}t} \end{bmatrix}$$

همچنین می توان برای محاسبه ماتریس انتقال حالت از روش کیلی- هامیلتون نیز استفاده کرد.

$$N(\lambda_i)=R(\lambda_i)=c_0+c_1\lambda_i+c_2\lambda_i^{\,2} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} e^{-9t}=c_0-9c_1+81c_2 \\ e^{\sqrt{97}t}=c_0+\sqrt{97}c_1+97c_2 \\ e^{-\sqrt{97}t}=c_0-\sqrt{97}c_1+97c_2 \end{cases}$$

با حل دستگاه معادلات بالا مقدار ضرایب c_0، c_1 و c_2 بدست می آید،

$$\begin{cases} c_0=\dfrac{194\sqrt{97}e^{-9t}+(-81\sqrt{97}+873)e^{\sqrt{97}t}+(-81\sqrt{97}-873)e^{-\sqrt{97}t}}{32\sqrt{97}} \\ c_1=\dfrac{e^{\sqrt{97}t}-e^{-\sqrt{97}t}}{2\sqrt{97}} \\ c_2=\dfrac{-2\sqrt{97}e^{-9t}+(\sqrt{97}-9)e^{\sqrt{97}t}+(\sqrt{97}+9)e^{-\sqrt{97}t}}{32\sqrt{97}} \end{cases}$$

ماتریس انتقال حالت بصورت زیر بدست می آید،

$$\Phi(t)=\exp[At]=c_0I+c_1A+c_2A^2$$

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix} c_0 & 0 & 0 \\ 0 & c_0 & 0 \\ 0 & 0 & c_0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 7c_1 & 4c_1 & -8c_1 \\ 4c_1 & -8c_1 & -c_1 \\ -4c_1 & -c_1 & -8c_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 97c_2 & 4c_2 & 4c_2 \\ 0 & 81c_2 & -16c_2 \\ 0 & 0 & 97c_2 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix} c_0+7c_1+97c_2 & 4c_1+4c_2 & -8c_1+4c_2 \\ 4c_1 & c_0-8c_1+81c_2 & -c_1-16c_2 \\ -4c_1 & -c_1 & c_0-8c_1+97c_2 \end{bmatrix}$$

****

ب)
$$\boxed{\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -7 & -9 & -5 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t) \\ y(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) \end{cases}}$$

الف) ابتدا معادله مشخصه و مقادیر ویژه ماتریس حالت را بدست می آوریم.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 2 & 7 & 9 & \lambda+5 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad (\lambda+1)^3(\lambda+2) = 0$$

مقادیر ویژه عبارتند از، $\lambda_{1,2,3} = -1$ و $\lambda_4 = -2$ لذا باید به فرم کانونیکال جردن تبدیل نمود.

ب) برای بدست آوردن ماتریس تبدیل T بردارهای ویژه را بدست می آوریم،

$$\text{rank}(\lambda_1 I - A) = rank\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 7 & 9 & 4 \end{bmatrix} = 3$$

لذا فقط یک بردار ویژه مستقل خطی متناظر با $\lambda_1 = -1$ وجود دارد و باید دو بردار تعمیم یافته دیگر بدست آوریم.

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$$

$$(\lambda_1 I - A)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 7 & 9 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0 \\ -x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

چون ماتریس حالت به فرم همبسته است، بردار ویژه $\mathbf{v}_1$ را می توانستیم بدون محاسبه نیز بدست آوریم.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1^2 \\ \lambda_1^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

حال دو بردار ویزه تعمیم یافته برای $\lambda_1 = -1$ محاسبه می کنیم،

$$(A - \lambda_1 I)\varphi_1 = \mathbf{v}_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -7 & -9 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_5 + x_6 = 1 \\ x_6 + x_7 = -1 \\ x_7 + x_8 = 1 \\ -2x_5 - 7x_6 - 9x_7 - 4x_8 = -1 \end{cases} \rightarrow \varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda_1 I)\varphi_2 = \varphi_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -7 & -9 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_9 + x_{10} = 1 \\ x_{10} + x_{11} = 0 \\ x_{11} + x_{12} = -1 \\ -2x_9 - 7x_{10} - 9x_{11} - 4x_{12} = 2 \end{cases} \rightarrow \varphi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

بردار ویژه متناظر با $\lambda_4 = -2$ را بدست می آوریم،

$$(\lambda_4 I - A)\mathbf{v}_4 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 7 & 9 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \begin{cases} -2x_1 - x_2 = 0 \\ -2x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix}$$

چون ماتریس حالت به فرم همبسته است، بردار ویژه $\mathbf{v}_4$ را هم می توانستیم بدون محاسبه بدست آوریم.

$$\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_4 \\ \lambda_4^2 \\ \lambda_4^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix}$$

ماتریس تبدیل T بصورت زیر بدست می آید،

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \varphi_1 & \varphi_2 & \mathbf{v}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & -8 \end{bmatrix}$$

ج) حال باید معادلات حالت را به فرم قطری بلوکی جردن تبدیل نماییم،

$$\Lambda = T^{-1}AT$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 & 2 \\ -2 & -7 & -7 & -2 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -7 & -9 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & -8 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$$B_n = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 & 2 \\ -2 & -7 & -7 & -2 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$C_n = CT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

معادلات قطری سازی شده به فرم زیر می باشد،

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = \Lambda\mathbf{z}(t) + B_n\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C_n\mathbf{z}(t) \end{cases}$$

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

د) ماتریس انتقال حالت با استفاده از فرم قطری بلوکی جردن به شکل زیر بدست می آید.

$$e^{At}=Te^{\Lambda t}T^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\-1&0&0&-2\\1&-1&0&4\\-1&2&-1&-8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t}&te^{-t}&\frac{t^2}{2}e^{-t}&0\\0&e^{-t}&te^{-t}&0\\0&0&e^{-t}&0\\0&0&0&e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&5&6&2\\-2&-7&-7&-2\\2&5&4&1\\-1&-3&-3&-1\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix}t^2e^{-t}+2e^{-t}-e^{-2t}&\frac{5}{2}t^2e^{-t}-2te^{-t}+3e^{-t}-3e^{-2t}&2t^2e^{-t}-3te^{-t}+3e^{-t}-3e^{-2t}&\frac{1}{2}t^2e^{-t}-te^{-t}+e^{-t}-e^{-2t}\\-t^2e^{-t}+2te^{-t}-2e^{-t}+2e^{-2t}&\frac{-5}{2}t^2e^{-t}+7te^{-t}-5e^{-t}+6e^{-2t}&-2t^2e^{-t}+7te^{-t}-6e^{-t}+6e^{-2t}&\frac{-1}{2}t^2e^{-t}+2te^{-t}-2e^{-t}+2e^{-2t}\\t^2e^{-t}-4te^{-t}+4e^{-t}-4e^{-2t}&\frac{5}{2}t^2e^{-t}-12te^{-t}+12e^{-t}-12e^{-2t}&2t^2e^{-t}-11te^{-t}+13e^{-t}-12e^{-2t}&\frac{1}{2}t^2e^{-t}-3te^{-t}+4e^{-t}-4e^{-2t}\\-t^2e^{-t}+6te^{-t}-8e^{-t}+8e^{-2t}&\frac{-5}{2}t^2e^{-t}+17te^{-t}-24e^{-t}+24e^{-2t}&-2t^2e^{-t}+15te^{-t}-24e^{-t}+24e^{-2t}&\frac{-1}{2}t^2e^{-t}+4te^{-t}-7e^{-t}+8e^{-2t}\end{bmatrix}$$

****

ج)

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\1&-1&0&0\\0&1&0&1\\0&0&-2&-2\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}1\\-3\\1\\0\end{bmatrix}u(t)\\y(t)=\begin{bmatrix}1&0&1&1\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)\end{cases}$$

الف) ابتدا معادله مشخصه و مقادیر ویژه ماتریس حالت را بدست می آوریم.

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1&0&0&0\\-1&\lambda+1&0&0\\0&-1&\lambda&-1\\0&0&2&\lambda+2\end{vmatrix}=0\quad\rightarrow\quad(\lambda+1)^2(\lambda^2+2\lambda+2)=0$$

مقادیر ویژه عبارتند از، $\lambda_{1,2}=-1$ و $\lambda_{3,4}=-1\pm j$ لذا باید به فرم قطری بلوکی تبدیل نمود.

ب) برای بدست آوردن ماتریس تبدیل T بردارهای ویژه را بدست می آوریم،

$$\text{rank}(\lambda_1 I-A)=rank\begin{bmatrix}0&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&-1&-1&-1\\0&0&2&1\end{bmatrix}=3$$

لذا فقط یک بردار ویژه مستقل خطی متناظر با $\lambda_1=-1$ وجود دارد و باید یک بردار تعمیم یافته دیگر بدست آوریم.

$$A\mathbf{v}_i=\lambda_i\mathbf{v}_i$$

$$(\lambda_1 I-A)\mathbf{v}_1=\mathbf{0}\rightarrow\begin{bmatrix}0&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&-1&-1&-1\\0&0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\mathbf{0}\rightarrow\begin{cases}-x_1=0\\-x_2-x_3-x_4=0\\2x_3+x_4=0\end{cases}\rightarrow\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\-2\end{bmatrix}$$

حال یک بردار ویژه تعمیم یافته برای $\lambda_1=-1$ محاسبه می کنیم،

$$(A-\lambda_1 I)\varphi_1=\mathbf{v}_1 \rightarrow \begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&0&-2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_5\\x_6\\x_7\\x_8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\-2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}x_5=1\\x_6+x_7+x_8=1\\-2x_7-x_8=-2\end{cases}\rightarrow\varphi_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

بردارهای ویژه متناظر با $\lambda_{3,4}=-1\pm j$ بصورت زیر است،

$$(\lambda_3 I-A)\mathbf{v}_3=\mathbf{0}\rightarrow\begin{bmatrix}j&0&0&0\\-1&j&0&0\\0&-1&-1+j&-1\\0&0&2&1+j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\mathbf{0}\rightarrow\begin{cases}-jx_1=0\\-x_1+jx_2=0\\-x_2+(-1+j)x_3-x_4=0\\2x_3+(1+j)x_4=0\end{cases}\rightarrow\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\-0.5-0.5j\\1\end{bmatrix}$$

بردار ویژه $\mathbf{v}_4$ هم مزدوج بردار ویژه $\mathbf{v}_3$ خواهد بود،

$$\mathbf{v}_4=\begin{bmatrix}0\\0\\-0.5+0.5j\\1\end{bmatrix}$$

ماتریس تبدیل T بصورت زیر بدست می آید،

$$T=\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \varphi_1 & \mathrm{Re}(\mathbf{v}_3) & \mathrm{Im}(\mathbf{v}_3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\1&1&-0.5&-0.5\\-2&0&1&0\end{bmatrix}$$

ج) حال باید فرم قطری بلوکی جردن معادلات حالت را بدست آوریم.

$$\Lambda=T^{-1}AT$$

$$\Lambda=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&2&0&1\\2&0&-2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\1&-1&0&0\\0&1&0&1\\0&0&-2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\1&1&-0.5&-0.5\\-2&0&1&0\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|cc}-1&1&0&0\\0&-1&0&0\\\hline 0&0&-1&1\\0&0&-1&-1\end{array}\right]$$

$$B_n=T^{-1}B=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&2&0&1\\2&0&-2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-3\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\1\\-6\\0\end{bmatrix}$$

$$C_n = CT = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -0.5 & -0.5\\ -2 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 2 & 0.5 & -0.5\end{bmatrix}$$

معادلات قطری سازی شده به فرم زیر می باشد،

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{z}}(t) = \Lambda\mathbf{z}(t) + B_n\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t) = C_n\mathbf{z}(t)\end{cases}$$

د) ماتریس انتقال حالت با استفاده از فرم قطری بلوکی به شکل زیر بدست می آید،

$$e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -0.5 & -0.5\\ -2 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\left[\begin{array}{cc|c} e^{-t} & te^{-t} & 0\\ 0 & e^{-t} & \\ \hline 0 & & e^{\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}t}\end{array}\right]\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -2 & -1\end{bmatrix}$$

برای محاسبه $e^{\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}t}$ می توان از روش تبدیل لاپلاس استفاده نمود،

$$\left(\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix}s+1 & -1\\ 1 & s+1\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+1)^2+1}\begin{bmatrix}s+1 & 1\\ -1 & s+1\end{bmatrix}$$

حال از یک یک درایه ها معکوس لاپلاس می گیریم،

$$L^{-1}\left(\begin{bmatrix}\frac{s+1}{(s+1)^2+1} & \frac{1}{(s+1)^2+1}\\ \frac{-1}{(s+1)^2+1} & \frac{s+1}{(s+1)^2+1}\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}e^{-t}\cos(t) & e^{-t}\sin(t)\\ -e^{-t}\sin(t) & e^{-t}\cos(t)\end{bmatrix}$$

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix}e^{-t} & te^{-t} & 0 & 0\\ 0 & e^{-t} & 0 & 0\\ 0 & 0 & e^{-t}\cos(t) & e^{-t}\sin(t)\\ 0 & 0 & -e^{-t}\sin(t) & e^{-t}\cos(t)\end{bmatrix}$$

و مقدار e^{At} بدست می آید،

$$e^{At} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -0.5 & -0.5\\ -2 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t} & te^{-t} & 0 & 0\\ 0 & e^{-t} & 0 & 0\\ 0 & 0 & e^{-t}\cos(t) & e^{-t}\sin(t)\\ 0 & 0 & -e^{-t}\sin(t) & e^{-t}\cos(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -2 & -1\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ te^{-t} & e^{-t} & 0 & 0 \\ te^{-t}+e^{-t}-e^{-t}\sin(t)-e^{-t}\cos(t) & e^{-t}-e^{-t}\cos(t)+e^{-t}\sin(t) & e^{-t}\sin(t)+e^{-t}\cos(t) & e^{-t}\sin(t) \\ -2te^{-t}+2e^{-t}\sin(t) & -2te^{-t}+2e^{-t}\cos(t) & -2e^{-t}\sin(t) & e^{-t}\cos(t)-e^{-t}\sin(t) \end{bmatrix}$$

****

د)
$$\boxed{\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}u(t) \\ y(t)=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) \end{cases}}$$

الف) ابتدا معادله مشخصه و مقادیر ویژه ماتریس حالت را بدست می آوریم.

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 4 \\ 0 & -1 & \lambda+3 \end{vmatrix}=0 \quad\rightarrow\quad (\lambda+1)^3=0$$

مقادیر ویژه عبارتند از، $\lambda_{1,2,3}=-1$ لذا باید به فرم قطری بلوکی جردن تبدیل نمود.

ب) برای بدست آوردن ماتریس تبدیل T بردارهای ویژه را بدست می آوریم،

$$\text{rank}(\lambda_1 I-A)=rank\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}=2$$

لذا فقط یک بردار ویژه مستقل خطی متناظر با $\lambda_{1,2,3}=-1$ وجود دارد و باید دو بردار تعمیم یافته دیگر بدست آوریم.

$$A\mathbf{v}_i=\lambda_i\mathbf{v}_i$$

$$(\lambda_1 I-A)\mathbf{v}_1=\mathbf{0}\rightarrow\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases} -x_2+x_3=0 \\ -2x_2+4x_3=0 \end{cases}\rightarrow\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حال دو بردار ویژه تعمیم یافته برای $\lambda_1=-1$ محاسبه می کنیم،

$$(A-\lambda_1 I)\varphi_1=\mathbf{v}_1\rightarrow\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases} x_5-x_6=1 \\ 2x_5-4x_6=0 \end{cases}\rightarrow\varphi_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(A-\lambda_1 I)\varphi_2=\varphi_1\rightarrow\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases} x_8-x_9=0 \\ 2x_8-4x_9=2 \end{cases}\rightarrow\varphi_2=\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ماتریس تبدیل T بصورت زیر بدست می آید،

بنام خداوند بخشنده و مهربان

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

جبر خطی کاربردی

حل تمرین های سری دهم

نیمسال اول ۹۰-۹۱
۹۰/۹/ ۲۳

$$T=\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \varphi_1 & \varphi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}$$

ج) حال باید معادلات حالت را به فرم قطری بلوکی جردن تبدیل نماییم،

$$\Lambda=T^{-1}AT$$

$$\Lambda=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1&1&-1\\0&1&-4\\0&1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

$$B_n=T^{-1}B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$C_n=CT=\begin{bmatrix}-1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\end{bmatrix}$$

معادلات قطری سازی شده به فرم زیر می باشد،

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{z}}(t)=\Lambda\mathbf{z}(t)+B_n\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t)=C_n\mathbf{z}(t)\end{cases}$$

د) ماتریس انتقال حالت با استفاده از فرم قطری بلوکی جردن به شکل زیر بدست می آید.

$$e^{At}=Te^{\Lambda t}T^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t}&te^{-t}&\frac{t^2}{2}e^{-t}\\0&e^{-t}&te^{-t}\\0&0&e^{-t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&1&-2\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix}e^{-t}&te^{-t}+\frac{1}{2}t^2e^{-t}&-t^2e^{-t}-te^{-t}\\0&e^{-t}+2te^{-t}&-4te^{-t}\\0&te^{-t}&e^{-t}-2te^{-t}\end{bmatrix}$$

****

ه)

$$\boxed{\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)\end{cases}}$$

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

الف) ابتدا معادله مشخصه و مقادیر ویژه ماتریس حالت را بدست می آوریم.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda^4 = 0$$

مقادیر ویژه عبارتند از، $\lambda_{1,2,3,4} = 0$ لذا باید به فرم قطری بلوکی جردن تبدیل نمود.

ب) برای بدست آوردن ماتریس تبدیل T بردارهای ویژه را بدست می آوریم،

$$\text{rank}(\lambda_1 I - A) = rank \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

لذا دو بردار ویژه مستقل خطی متناظر با $\lambda_1 = 0$ وجود دارد و باید دو بردار تعمیم یافته دیگر بدست آوریم.

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$$

$$(\lambda_1 I - A)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -x_3 = 0 \\ -x_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حال دو بردار ویژه تعمیم یافته برای $\lambda_1 = 0$ محاسبه می کنیم،

$$(A - \lambda_1 I)\varphi_1 = \mathbf{v}_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_7 = 1 \\ x_8 = 0 \end{cases} \rightarrow \varphi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda_1 I)\varphi_2 = \mathbf{v}_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_7 = 1 \\ x_8 = 1 \end{cases} \rightarrow \varphi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس تبدیل T بصورت زیر بدست می آید،

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \varphi_1 & \mathbf{v}_2 & \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ج) حال باید فرم قطری بلوکی جردن معادلات حالت را بدست آوریم.

$$\Lambda = T^{-1}AT$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$B_n = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_n = CT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

معادلات قطری سازی شده به فرم زیر می باشد،

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = \Lambda \mathbf{z}(t) + B_n \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C_n \mathbf{z}(t) \end{cases}$$

د) ماتریس انتقال حالت با استفاده از فرم قطری بلوکی به شکل زیر بدست می آید،

$$e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

****

و)
$$\boxed{\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 20 & 16 \\ 0 & -25 & -20 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}}$$

الف) ابتدا معادله مشخصه و مقادیر ویژه ماتریس حالت را بدست می آوریم.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -4 & -3 \\ 0 & \lambda-20 & -16 \\ 0 & 25 & \lambda+20 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda^3 = 0$$

مقادیر ویژه عبارتند از، $\lambda_{1,2,3} = 0$ لذا باید به فرم قطری بلوکی جردن تبدیل نمود.

ب) برای بدست آوردن ماتریس تبدیل T بردارهای ویژه را بدست می آوریم،

$$\text{rank}(\lambda_1 I - A) = \text{rank}\begin{bmatrix} 0 & -4 & -3 \\ 0 & -20 & -16 \\ 0 & 25 & 20 \end{bmatrix} = 2$$

لذا یک بردار ویژه مستقل خطی متناظر با $\lambda_1 = 0$ وجود دارد و باید دو بردار تعمیم یافته دیگر بدست آوریم.

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$$

$$(\lambda_1 I - A)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -4 & -3 \\ 0 & -20 & -16 \\ 0 & 25 & 20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -4x_2 - 3x_3 = 0 \\ -20x_2 - 16x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حال دو بردار ویژه تعمیم یافته برای $\lambda_1 = 0$ محاسبه می کنیم،

$$(A - \lambda_1 I)\varphi_1 = \mathbf{v}_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 20 & 16 \\ 0 & -25 & -20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 4x_5 + 3x_6 = 1 \\ 20x_5 + 16x_6 = 0 \end{cases} \rightarrow \varphi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda_1 I)\varphi_2 = \varphi_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 20 & 16 \\ 0 & -25 & -20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 4x_8 + 3x_9 = 0 \\ 20x_8 + 16x_9 = 4 \end{cases} \rightarrow \varphi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ماتریس تبدیل T بصورت زیر بدست می آید،

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \varphi_1 & \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

ج) حال باید فرم قطری بلوکی جردن معادلات حالت را بدست آوریم.

$$\Lambda = T^{-1} A T$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 20 & 16 \\ 0 & -25 & -20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_n = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 12 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$C_n = CT = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 12 & -9 \end{bmatrix}$$

معادلات قطری سازی شده به فرم زیر می باشد،

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = \Lambda \mathbf{z}(t) + B_n \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C_n \mathbf{z}(t) \end{cases}$$

د) ماتریس انتقال حالت با استفاده از فرم قطری بلوکی به شکل زیر بدست می آید،

$$e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & -5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4t + \frac{5}{2}t^2 & 2t^2 + 3t \\ 0 & 1 + 20t & 16t \\ 0 & -25t & 1 - 20t \end{bmatrix}$$

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

حل تمرین های سری یازدهم

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۹/۳۰

حل تمرین شماره ۱

الف) $\boxed{A=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\1&1\end{bmatrix}}$

- مقادیر منفرد ماتریس A برابر با جذر مقادیر ویژه ماتریس A^TA است،

$$A^TA=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I-A^TA\right|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)=0\quad\rightarrow\quad\lambda_1=3,\lambda_2=1$$

پس مقادیر منفرد ماتریس A برابر است با،

$$\sigma_1=\sqrt{3},\qquad\sigma_2=1$$

- رتبه ماتریس برابر تعداد مقادیر منفرد غیر صفر ماتریس است، لذا $\text{rank}(A)=2$ می باشد.

- حال تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A را بدست می آوریم،

$$\boxed{A=U\Sigma V^T}$$

ستون های ماتریس U بردارهای ویژه یکامتعامد ماتریس AA^T هستند. برای محاسبه ماتریس U به شکل زیر عمل می نماییم،

$$AA^T=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I-AA^T\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-1\\0&\lambda-1&-1\\-1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)=0\quad\rightarrow\quad\lambda_1=3,\lambda_2=1,\lambda_3=0$$

ماتریس AA^T سه مقدار ویژه حقیقی و متمایز دارد و بردارهای ویژه متناظر با هر یک از آنها را بدست می آوریم،

$$\lambda_1=3\rightarrow(\lambda_1I-AA^T)\mathbf{u}_1=\mathbf{0}\rightarrow\begin{bmatrix}2&0&-1\\0&2&-1\\-1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11}\\u_{21}\\u_{31}\end{bmatrix}=\mathbf{0}\rightarrow\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=1\rightarrow(\lambda_2I-AA^T)\mathbf{u}_2=\mathbf{0}\rightarrow\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&-1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{12}\\u_{22}\\u_{32}\end{bmatrix}=\mathbf{0}\rightarrow\mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 0 \rightarrow (\lambda_3 I - AA^T)\mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس $U_{3\times3}$ بصورت زیر بدست می آید،

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

با یکامتعامد سازی داریم،

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

حال ماتریس V را بدست می آوریم، ستون های ماتریس V بردارهای ویژه ماتریس $A^T A$ است،

$$A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I - A^T A\right| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$$

ماتریس $A^T A$ دو مقدار ویژه حقیقی و متمایز دارد و بردارهای ویژه متناظر با هر یک از آنها را بدست می آوریم،

$$\lambda_1 = 3 \rightarrow (\lambda_1 I - A^T A)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 \rightarrow (\lambda_2 I - A^T A)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس $V_{2\times2}$ بصورت زیر بدست می آید،

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

با یکا متعامد سازی داریم،

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

- لذا تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A به شکل زیر بدست می آید،

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T$$

- با استفاده از نرم افزار MATLAB نیز چنین نتیجه ای بدست می آید،

```
A =[0 1;1 0;1 1]
[U,S,V]= svd(A)
u =
    0.4082    0.7071   -0.5774
    0.4082   -0.7071   -0.5774
    0.8165    0.0000    0.5774
s =
    1.7321         0
         0    1.0000
         0         0
v =
    0.7071   -0.7071
    0.7071    0.7071
```

****

ب) $$\boxed{A=\begin{bmatrix}2&2&-2\\4&1&2\\-4&2&1\end{bmatrix}}$$

- مقادیر منفرد ماتریس A برابر با جذر مقادیر ویژه ماتریس AA^T است،

$$AA^T=\begin{bmatrix}2&2&-2\\4&1&2\\-4&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&4&-4\\2&1&2\\-2&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12&6&-6\\6&21&-12\\-6&-12&21\end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I-AA^T\right|=\begin{vmatrix}\lambda-12&-6&6\\-6&\lambda-21&12\\6&12&\lambda-21\end{vmatrix}=(\lambda-36)(\lambda-9)^2=0\quad\rightarrow\quad\lambda_1=36,\lambda_2=9,\lambda_3=9$$

پس مقادیر منفرد ماتریس A برابر است با،

$$\sigma_1=6,\qquad\sigma_2=3,\qquad\sigma_3=3$$

- رتبه ماتریس برابر تعداد مقادیر منفرد غیر صفر ماتریس است، لذا $\operatorname{rank}(A)=3$ می باشد.

- حال تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A را بدست می آوریم،

$$\boxed{A = U\Sigma V^T}$$

ستون های ماتریس U بردارهای ویژه یکامتعامد ماتریس AA^T هستند. برای محاسبه ماتریس U به شکل زیر عمل می نماییم،

$$AA^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -6 \\ 6 & 21 & -12 \\ -6 & -12 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I - AA^T\right| = \begin{vmatrix} \lambda-12 & -6 & 6 \\ -6 & \lambda-21 & 12 \\ 6 & 12 & \lambda-21 \end{vmatrix} = (\lambda-36)(\lambda-9)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 36, \lambda_2 = 9, \lambda_3 = 9$$

ماتریس AA^T دو مقدار ویژه حقیقی تکراری و یک مقدار ویژه حقیقی متمایز دارد. ابتدا بردار ویژه متناظر با $\lambda_1 = 36$ را بدست می آوریم،

$$\lambda_1 = 36 \rightarrow (\lambda_1 I - AA^T)\mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} 24 & -6 & 6 \\ -6 & 15 & 12 \\ 6 & 12 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

حال بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه تکراری را بدست می آوریم. از آنجاییکه $n - \text{rank}(\lambda_1 I - AA^T) = 3 - 1 = 2$ است، لذا برای مقدار ویژه تکراری $\lambda_{2,3} = 9$ دو بردار ویژه مستقل خطی داریم و نیازی به بدست آوردن بردار ویژه تعمیم یافته نیست،

$$\lambda_2 = 9 \rightarrow (\lambda_2 I - AA^T)\mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} -3 & -6 & 6 \\ -6 & -12 & 12 \\ 6 & 12 & -12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس $U_{3\times3}$ بصورت زیر بدست می آید،

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

با یکامتعامد سازی داریم،

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

حال ماتریس V را بدست می آوریم،

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

چون ماتریس $A^T A$ قطری است لذا مقادیر ویژه آن بصورت $\lambda_1 = 36, \lambda_2 = 9, \lambda_3 = 9$ هستند و نیازی به محاسبه ندارند. حال می توان همانند روش قبل بردارهای ویژه ماتریس $A^T A$ را بدست آورد.

بنام خداوند بخشنده و مهربان

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل

جبر خطی کاربردی

نیمسال اول ۹۰-۹۱

حل تمرین های سری یازدهم

مدرس: صدقی زاده

۹۰/۹/۳۰

$$\lambda_1 = 36 \rightarrow (\lambda_1 I - A^T A)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix}0&0&0\\0&27&0\\0&0&27\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{21}\\v_{31}\end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

از آنجاییکه $n-\text{rank}(\lambda_2 I - A^T A) = 3-1=2$ است، لذا برای مقدار ویژه تکراری $\lambda_{2,3}=9$ دو بردار ویژه مستقل خطی داریم و نیازی به بدست آوردن بردار ویژه تعمیم یافته نیست.

$$\lambda_{2,3} = 9 \rightarrow (\lambda_2 I - A^T A)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix}-27&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{12}\\v_{22}\\v_{32}\end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس $V_{3\times3}$ بصورت زیر بدست می آید و نیازی به یکامتعامد سازی نداریم،

$$V = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

توجه :

زمانیکه ماتریس $A^T A$ یک ماتریس قطری باشد، می توان بدون محاسبه $V = I$ انتخاب کرد.

زمانیکه ماتریس AA^T یک ماتریس قطری باشد، می توان بدون محاسبه $U = I$ انتخاب کرد.

لذا تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A به شکل زیر بدست می آید،

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{-2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{-2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^T$$

- با استفاده از نرم افزار MATLAB نیز چنین نتیجه ای بدست می آید،

```
A =[2 2 -2;4 1 2;-4 2 1]
[U, S, V] = svd(A)
u =
     0.3333      0.6667     -0.6667
     0.6667      0.3333      0.6667
    -0.6667      0.6667      0.3333
s =
      6      0      0
      0      3      0
      0      0      3
v =
      1      0      0
      0      1      0
      0      0      1
```

****

ج) $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & -2\end{bmatrix}$

- مقادیر منفرد ماتریس A برابر با جذر مقادیر ویژه ماتریس AA^T است،

$$AA^T=\begin{bmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\\ 2 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17 & 8\\ 8 & 17\end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I-AA^T\right|=\begin{vmatrix}\lambda-17 & -8\\ -8 & \lambda-17\end{vmatrix}=(\lambda-9)(\lambda-25)=0 \quad\rightarrow\quad \lambda_1=25,\lambda_2=9$$

پس مقادیر منفرد ماتریس A برابر است با،

$$\sigma_1=5,\qquad \sigma_2=3$$

- رتبه ماتریس برابر تعداد مقادیر منفرد غیر صفر ماتریس است، لذا $\operatorname{rank}(A)=2$ می باشد.

- حال تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A را بدست می آوریم،

$$\boxed{A=U\Sigma V^T}$$

ستون های ماتریس U بردارهای ویژه یکامتعامد ماتریس AA^T هستند. برای محاسبه ماتریس U به شکل زیر عمل می نماییم،

$$AA^T=\begin{bmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\\ 2 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17 & 8\\ 8 & 17\end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I-AA^T\right|=\begin{vmatrix}\lambda-17 & -8\\ -8 & \lambda-17\end{vmatrix}=(\lambda-9)(\lambda-25)=0 \quad\rightarrow\quad \lambda_1=25,\lambda_2=9$$

ماتریس AA^T دو مقدار ویژه حقیقی و متمایز دارد و بردارهای ویژه متناظر با هر یک از آنها را بدست می آوریم،

$$\lambda_1=25\rightarrow(\lambda_1 I-A^TA)\mathbf{u}_1=\mathbf{0}\rightarrow\begin{bmatrix}8 & -8\\ -8 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11}\\ u_{21}\end{bmatrix}=\mathbf{0}\rightarrow\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=9\rightarrow(\lambda_2 I-A^TA)\mathbf{u}_2=\mathbf{0}\rightarrow\begin{bmatrix}-8 & -8\\ -8 & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{12}\\ u_{22}\end{bmatrix}=\mathbf{0}\rightarrow\mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس $U_{2\times2}$ بصورت زیر بدست می آید،

$$\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

با یکا متعامد سازی داریم،

$$U=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2} & \frac{-1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$$

حال ماتریس V را بدست می آوریم، ستون های ماتریس V بردارهای ویژه ماتریس A^TA است،

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 12 & 2 \\ 12 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I - A^T A\right| = \begin{vmatrix} \lambda-13 & -12 & -2 \\ -12 & \lambda-13 & 2 \\ -2 & 2 & \lambda-8 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-9)(\lambda-25) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 25, \lambda_2 = 9, \lambda_3 = 0$$

ماتریس $A^T A$ سه مقدار ویژه حقیقی و متمایز دارد و بردارهای ویژه متناظر با هر یک از آنها را بدست می آوریم،

$$\lambda_1 = 25 \rightarrow (\lambda_1 I - AA^T)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} 12 & -12 & -2 \\ -12 & 12 & 2 \\ -2 & 2 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 9 \rightarrow (\lambda_2 I - AA^T)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} -4 & -12 & -2 \\ -12 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 0 \rightarrow (\lambda_3 I - AA^T)\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} -13 & -12 & -2 \\ -12 & -13 & 2 \\ -2 & 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس $V_{3\times3}$ بصورت زیر بدست می آید،

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

با یکامتعامد سازی داریم،

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{-2}{3} \\ 0 & \frac{-4}{\sqrt{18}} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$$

- لذا تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A به شکل زیر بدست می آید،

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{-2}{3} \\ 0 & \frac{-4}{\sqrt{18}} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}^T$$

- با استفاده از نرم افزار MATLAB نیز چنین نتیجه ای بدست می آید،

```
A =[0 1;1 0;1 1]
[U,S,V]= svd(A)
u =
    0.7071   -0.7071
    0.7071    0.7071
s =
     5     0     0
     0     3     0
v =
    0.7071   -0.2357    0.6667
    0.7071    0.2357   -0.6667
   -0.0000   -0.9428   -0.3333
```

****

د) $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}$

- مقادیر منفرد ماتریس A برابر با جذر مقادیر ویژه ماتریس AA^T است،

$$AA^T=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -2 & -4\\ -2 & 8 & -2\\ -4 & -2 & 5\end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I-AA^T\right|=\begin{vmatrix}\lambda-5 & 2 & 4\\ 2 & \lambda-8 & 2\\ 4 & 2 & \lambda-5\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-9)^2=0 \quad\rightarrow\quad \lambda_1=9,\lambda_2=9,\lambda_3=0$$

پس مقادیر منفرد ماتریس A برابر است با،

$$\sigma_1=3,\qquad \sigma_2=3,\qquad \sigma_3=0$$

- رتبه ماتریس برابر تعداد مقادیر منفرد غیر صفر ماتریس است، لذا $\text{rank}(A)=2$ می باشد.
- حال تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A را بدست می آوریم،

$$\boxed{A=U\Sigma V^T}$$

ستون های ماتریس U بردارهای ویژه یکامتعامد ماتریس AA^T هستند. برای محاسبه ماتریس U به شکل زیر عمل می نماییم،

$$AA^T=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -2 & -4\\ -2 & 8 & -2\\ -4 & -2 & 5\end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I - AA^T\right| = \begin{vmatrix} \lambda-5 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda-8 & 2 \\ 4 & 2 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-9)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 9, \lambda_2 = 9, \lambda_3 = 0$$

ماتریس AA^T دو مقدار ویژه حقیقی تکراری و یک مقدار ویژه حقیقی متمایز دارد. ابتدا بردار ویژه متناظر با $\lambda_{1,2}=9$ مقادیر ویژه تکراری را بدست می آوریم. از آنجاییکه $n-\text{rank}(\lambda_1 I - AA^T) = 3-1=2$ است، لذا برای مقدار ویژه تکراری $\lambda_{1,2}=9$ دو بردار ویژه مستقل خطی داریم و نیازی به بدست آوردن بردار ویژه تعمیم یافته نیست،

$$\lambda_1 = 9 \rightarrow (\lambda_1 I - AA^T)\mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ \frac{-5}{2} \end{bmatrix}$$

حال بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه متمایز را بدست می آوریم.

$$\lambda_3 = 0 \rightarrow (\lambda_3 I - AA^T)\mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس $U_{3\times3}$ بصورت زیر بدست می آید،

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{-5}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

با یکامتعامد سازی داریم،

$$U = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{-5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

حال ماتریس V را بدست می آوریم،

$$A^T A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I - A^T A\right| = \begin{vmatrix} \lambda-5 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda-8 & 2 \\ 4 & 2 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-9)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 9, \lambda_2 = 9, \lambda_3 = 0$$

حال می توان همانند روش قبل بردارهای ویژه ماتریس $A^T A$ را بدست آورد.

ماتریس $A^T A$ دو مقدار ویژه حقیقی تکراری و یک مقدار ویژه حقیقی متمایز دارد. ابتدا بردار ویژه متناظر با $\lambda_{1,2}=9$ مقادیر ویژه تکراری را بدست می آوریم. از آنجاییکه $n-\text{rank}(\lambda_1 I - A^T A) = 3-1=2$ است، لذا برای مقدار ویژه تکراری $\lambda_{1,2}=9$ دو بردار ویژه مستقل خطی داریم و نیازی به بدست آوردن بردار ویژه تعمیم یافته نیست،

بنام خداوند بخشنده و مهربان

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل

جبر خطی کاربردی

حل تمرین های سری یازدهم

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۹/۳۰

مدرس: صدقی زاده

$$\lambda_1 = 9 \rightarrow (\lambda_1 I - A^T A)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{-5}{2} \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

حال بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه متمایز را بدست می آوریم.

$$\lambda_3 = 0 \rightarrow (\lambda_3 I - A^T A)\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس $V_{3\times 3}$ بصورت زیر بدست می آید،

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-5}{2} & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

با یکامتعامد سازی داریم،

$$V = \begin{bmatrix} \frac{-5}{3\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

لذا تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A به شکل زیر بدست می آید،

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{-5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-5}{3\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}^T$$

- با استفاده از نرم افزار MATLAB نیز چنین نتیجه ای بدست می آید،

```
 A =[-1  2  0; 2 0 -2; 0 -2  1];
[U,S,V] = svd(A)
U =
    -0.4472     0.5963    -0.6667
     0.8944     0.2981    -0.3333
          0    -0.7454    -0.6667
S =
      3      0      0
      0      3      0
      0      0      0
V =
     0.7454          0    -0.6667
    -0.2981     0.8944    -0.3333
    -0.5963    -0.4472    -0.6667
```

****

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

حل تمرین های سری یازدهم

نیمسال اول ۹۰-۹۱
۹۰/۹/۳۰

حل تمرین شماره ۲

$$\boxed{\sigma_{\min} \le \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le \sigma_{\max}}$$

$$\boxed{\|A\|^2 = \left(\max_{\mathbf{x}\neq 0}\frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}\right)^2 = \max_{\mathbf{x}\neq 0}\frac{\|A\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2} = \max_{\mathbf{x}\neq 0}\frac{\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle} = \max_{\mathbf{x}\neq 0}\frac{\langle \mathbf{x}, A^T A\mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle} = \lambda_{\max} = \sigma_{\max}^2 \rightarrow \|A\| = \sigma_{\max}}$$

بزرگترین مقدار ویژه ماتریس $A^T A$ که جذر آن بزرگترین مقدار منفرد ماتریس A است

- نشان می دهیم چرا $\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{x}, A^T A\mathbf{x}\rangle$ است.

$$\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{x}\rangle = (A\mathbf{x})^T (A\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T (A^T A\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, A^T A\mathbf{x}\rangle$$

- نشان می دهیم چرا $\max_{\mathbf{x}\neq 0}\frac{\langle \mathbf{x}, A^T A\mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle} = \lambda_{\max}$ است.

برای این منظور ابتدا نشان می دهیم که تساوی زیر برقرار است،

$$\boxed{\frac{\langle \mathbf{x}, A^T A\mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle} = \frac{\langle \mathbf{z}, \Lambda\mathbf{z}\rangle}{\langle \mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle}}$$

در این تساوی $\Lambda = T^{-1}(A^T A)T = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ فرم قطری سازی شده ماتریس $A^T A$ تحت تبدیل همانندی $\mathbf{x} = T\mathbf{z}$ است لذا ماتریس T ماتریس مُدال است که ستون های آن بردارهای ویژه مستقل خطی ماتریس $A^T A$ هستند. می دانیم ماتریس $A^T A$ متقارن و مثبت معین است، یعنی مقادیر ویژه آن (λ) حقیقی و مثبت و بردارهای ویژه آن (v_i) متعامد و مستقل خطی هستند. لذا ماتریس مُدال T یک ماتریس متعامد است، یعنی $T^T = T^{-1}$ است.

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = (T\mathbf{z})^T (T\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T T^T T\mathbf{z} = \mathbf{z}^T\mathbf{z} = \langle \mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle$$

$$\langle \mathbf{x}, A^T A\mathbf{x}\rangle = \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} = (T\mathbf{z})^T (T\Lambda T^{-1})(T\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T T^T T\Lambda T^{-1} T\mathbf{z} = \mathbf{z}^T\Lambda\mathbf{z} = \langle \mathbf{z}, \Lambda\mathbf{z}\rangle$$

بنابراین تساوی $\frac{\langle \mathbf{x}, A^T A\mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle} = \frac{\langle \mathbf{z}, \Lambda\mathbf{z}\rangle}{\langle \mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle}$ برقرار است. می دانیم که نُرم یک ماتریس قطری برابر است که قدر مطلق بزرگترین عنصر قطری آن ماتریس و چون عناصر قطری ماتریس Λ مقادیر ویژه $A^T A$ هستند، لذا داریم،

$$\max_{\mathbf{x}\neq 0}\frac{\langle \mathbf{z}, \Lambda\mathbf{z}\rangle}{\langle \mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle} = \lambda_{\max} \quad \rightarrow \quad \max_{\mathbf{x}\neq 0}\frac{\langle \mathbf{x}, A^T A\mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle} = \lambda_{\max}$$

به همین ترتیب می توان نشان داد که $\min_{\mathbf{x}\neq 0}\frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \sigma_{\min}$ به عبارتی $\boxed{\sigma_{\min} \le \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le \sigma_{\max}}$ است.

* * *

حل تمرین شماره ۳

$$\boxed{A=\begin{bmatrix}3&0&4\\-4&0&3\\0&3&0\end{bmatrix}}$$

- ابتدا تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A را بدست می آوریم،

$$A=U\Sigma V^T$$

- ابتدا ماتریس U را بدست می آوریم،

$$AA^T=\begin{bmatrix}3&0&4\\-4&0&3\\0&3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-4&0\\0&0&3\\4&3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25&0&0\\0&25&0\\0&0&9\end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I-AA^T\right|=\begin{vmatrix}\lambda-25&0&0\\0&\lambda-25&0\\0&0&\lambda-9\end{vmatrix}=0\quad\rightarrow\quad\lambda_{1,2}=25,\lambda_3=9$$

ماتریس AA^T دو مقدار ویژه حقیقی تکراری و یک مقدار ویژه حقیقی متمایز دارد. ابتدا بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه تکراری را بدست می آوریم. از آنجاییکه $n-\text{rank}(AA^T-\lambda_1 I)=3-1=2$ است، لذا برای مقدار ویژه تکراری $\lambda_{1,2}=25$ دو بردار ویژه مستقل خطی داریم و نیازی به بدست آوردن بردار ویژه تعمیم یافته نیست،

$$(AA^T-\lambda_1 I)\mathbf{u}_1=\mathbf{0}\rightarrow\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11}\\u_{21}\\u_{31}\end{bmatrix}=\mathbf{0}\rightarrow\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad\mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$(AA^T-\lambda_3 I)\mathbf{u}_3=\mathbf{0}\rightarrow\begin{bmatrix}16&0&0\\0&16&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{13}\\u_{23}\\u_{33}\end{bmatrix}=\mathbf{0}\rightarrow\mathbf{u}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس $U_{3\times3}$ بصورت زیر بدست می آید،

$$U=\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1&\mathbf{u}_2&\mathbf{u}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

چون نُرم بردارهای ستونی ماتریس U یک است، لذا نیازی به یکامتعامد سازی نداریم.

- حال ماتریس V را بدست می آوریم،

$$A^TA=\begin{bmatrix}3&-4&0\\0&0&3\\4&3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0&4\\-4&0&3\\0&3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25&0&0\\0&9&0\\0&0&25\end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A^T A| = \begin{vmatrix} \lambda-25 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-9 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-25 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 25, \lambda_3 = 9$$

ماتریس $A^T A$ دو مقدار ویژه حقیقی تکراری و یک مقدار ویژه حقیقی متمایز دارد. ابتدا بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه تکراری را بدست می آوریم. از آنجاییکه $n - \mathrm{rank}(A^T A - \lambda_1 I) = 3 - 1 = 2$ است، لذا برای مقدار ویژه تکراری $\lambda_{1,2} = 25$ دو بردار ویژه مستقل خطی داریم و نیازی به بدست آوردن بردار ویژه تعمیم یافته نیست،

$$(A^T A - \lambda_1 I)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0 \\ 0.8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -0.8 \\ 0 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

$$(A^T A - \lambda_3 I)\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس $V_{3\times3}$ بصورت زیر بدست می آید و باز هم نیازی به یکامتعامد سازی نداریم،

$$V = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.8 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}$$

لذا تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A به شکل زیر بدست می آید،

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0.8 \\ -0.8 & 0 & 0.6 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

****

توجه: زمانیکه ماتریس $A^T A$ یک ماتریس قطری باشد، می توان روشی بصورت زیر انتخاب کرد که راه حل ساده تری دارد،

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 = 5 \quad , \quad \sigma_2 = 3 \quad , \quad \sigma_3 = 5$$

چون $A^T A$ یک ماتریس قطری است، می توان $V = I$ انتخاب کرد، با این کار فقط محاسبه ماتریس U را داریم که آن هم بسیار ساده است،

$$\boxed{A = U\Sigma V^T \quad \rightarrow \quad AV = U\Sigma \quad \rightarrow \quad AV\Sigma^{-1} = U \quad \rightarrow \quad A\mathbf{v}_i \frac{1}{\sigma_i} = \mathbf{u}_i}$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = \dfrac{1}{\sigma_1} A\mathbf{v}_1 = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ -0.8 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}_2 = \dfrac{1}{\sigma_2} A\mathbf{v}_2 = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}_3 = \dfrac{1}{\sigma_3} A\mathbf{v}_3 = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases} \rightarrow \quad U = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0.8 \\ -0.8 & 0 & 0.6 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

لذا تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A با رعایت چینش مقادیر منفرد از بزرگترین مقدار تا کوچکترین مقدار به شکل زیر بدست می آید،

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 \\ -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB نیز چنین نتیجه ای بدست می آید،

```
A =[3 0 4;-4 0 3;0 3 0]
[U,S,V]=svd(A)
U =
    0.6000    0.8000         0
   -0.8000    0.6000         0
         0         0    1.0000
S =
     5     0     0
     0     5     0
     0     0     3
V =
     1     0     0
     0     0     1
     0     1     0
```

****

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

ب) $\boxed{A\mathbf{x}=\mathbf{y} \quad , \quad \dfrac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\|}=\sqrt{17}}$

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix}3&0&4\\-4&0&3\\0&3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3x_1+4x_3\\-4x_1+3x_3\\3x_2\end{bmatrix}\rightarrow \quad \|\mathbf{y}\|=\sqrt{(3x_1+4x_3)^2+(-4x_1+3x_3)^2+(3x_2)^2}$$

$$\frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\|}=\frac{\sqrt{(3x_1+4x_3)^2+(-4x_1+3x_3)^2+(3x_2)^2}}{\sqrt{(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2}}=\sqrt{17}$$

$$25x_1^2+25x_2^2+9x_3^2=17x_1^2+17x_2^2+17x_3^2 \quad \rightarrow \quad x_1^2+x_3^2=x_2^2$$

****

ج) $\boxed{\dfrac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\|}=\sqrt{50} \quad , \quad \mathbf{x}\neq\mathbf{0}}$

چنین رابطه ای برقرار نمی باشد، زیرا با توجه به مقدار مقادیر منفرد ماتریس A رابطه زیر را داریم،

$$\sigma_3\le\frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\|}\le\sigma_1 \quad \rightarrow \quad 3\le\frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\|}\le 5$$

لذا حداکثر بزرگنمایی نگاشت $A\mathbf{x}=\mathbf{y}$ برابر با $\sigma_1=5$ است و $\sqrt{50}>5$ می باشد.

****

حل تمرین شماره ۴

$$\boxed{A=\begin{bmatrix}1+\varepsilon&1&2\\1&-1&0\\1&0&1\end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}}$$

الف) به ازای $\varepsilon=0$ رتبه ماتریس A را بررسی می نماییم،

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&-1&0\\1&0&1\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{rank}(A)=2$$

لذا با توجه به نقص رتبه، ماتریس A به ازای $\varepsilon=0$ یک ماتریس منفرد است.

****

ب) به ازای $\varepsilon=1$ ماتریس معکوس را بدست می آوریم،

$$A=\begin{bmatrix}2&1&2\\1&-1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad \text{rank}(A)=3,\qquad A^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&-2\\1&0&-2\\-1&-1&3\end{bmatrix}$$

برای محاسبه عدد حالت، مقادیر منفرد ماتریس A را بدست می آوریم،

$$A^TA=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&-1&0\\2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&2\\1&-1&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&1&5\\1&2&2\\5&2&5\end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I-A^TA\right|=\begin{vmatrix}\lambda-6&-1&-5\\-1&\lambda-2&-2\\-5&-2&\lambda-5\end{vmatrix}=0\quad\rightarrow\quad \lambda_1=11.0101,\lambda_2=1.9432,\lambda_3=0.0467$$

$$\sigma_1=\sqrt{11.0101}\quad,\quad \sigma_2=\sqrt{1.9432}\quad,\quad \sigma_3=\sqrt{0.0467}$$

$$\kappa_A=\frac{\sigma_1}{\sigma_3}=\frac{\sqrt{11.0101}}{\sqrt{0.0467}}=15.3478$$

با توجه به تعریفی که برای نُرم داشتیم بصورت زیر می توان نوشت،

$$\|A\|=\sigma_1,\qquad \|A^{-1}\|=\frac{1}{\sigma_3}\quad\rightarrow\quad \kappa_A=\frac{\sigma_1}{\sigma_3}=\|A\|\|A^{-1}\|$$

****

ج) به ازای $\varepsilon=0.0001$ عدد حالت ماتریس A را بدست می آوریم،

$$A^TA=\begin{bmatrix}1.0001&1&1\\1&-1&0\\2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.0001&1&2\\1&-1&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3.0002&0.0001&3.0002\\0.0001&2&2\\3.0002&2&5\end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I-A^TA\right|=0\quad\rightarrow\quad \lambda_1=7.6460,\lambda_2=2.3542,\lambda_3=0.00000000055555$$

$$\sigma_1=2.7651\quad,\quad \sigma_2=1.5343\quad,\quad \sigma_3=0.00002357$$

$$\kappa_A=\frac{\sigma_1}{\sigma_3}=\frac{2.7651}{0.00002357}=1.1732\times10^5>>1$$

با توجه به عدد حالت بزرگی که ماتریس A دارد، معادله $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ یک سیستم ill condition است.

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1.0001 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1.0001 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}=\begin{bmatrix} 1.1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} 1000.0 \\ 999.0 \\ -999.0 \end{bmatrix}$$

مشخص است سیستم به دلیل ill condition بودن نسبت به تغییرات هر چند کوچک در بردار $\mathbf{b}$ بسیار حساس است.

****

حل تمرین شماره ۵

$$\boxed{A\mathbf{x}=\mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 21 & 19 & 16 \\ 39 & 48 & 53 \end{bmatrix}\mathbf{x}=\begin{bmatrix} k \\ 56 \\ 140 \end{bmatrix}}$$

جواب معادلات برای $k=15$ بصورت زیر است،

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 21 & 19 & 16 \\ 39 & 48 & 53 \end{bmatrix}\mathbf{x}=\begin{bmatrix} 15 \\ 56 \\ 140 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 21 & 19 & 16 \\ 39 & 48 & 53 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 15 \\ 56 \\ 140 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

جواب معادلات برای $k=14.9$ بصورت زیر است،

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 21 & 19 & 16 \\ 39 & 48 & 53 \end{bmatrix}\mathbf{x}=\begin{bmatrix} 15 \\ 56 \\ 140 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 21 & 19 & 16 \\ 39 & 48 & 53 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 14.9 \\ 56 \\ 140 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -22.9 \\ 49.9 \\ -25.7 \end{bmatrix}$$

جواب ها بطور چشمگیری تغییر کرده است، برای بررسی ill condition بودن این سیستم، عدد شرطی ماتریس A را بدست می آوریم، ماتریس A سه مقدار منفرد بصورت زیر دارد،

$$\sigma_1=87.8181 \quad , \quad \sigma_2=8.5434 \quad , \quad \sigma_3=0.0013$$

$$\kappa_A=\frac{\sigma_1}{\sigma_3}=\frac{87.8181}{0.0013}=6.7552\times 10^4 >> 1$$

با توجه به عدد حالت بزرگی که ماتریس A دارد، معادله $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ یک سیستم ill condition است. لذا تغییرات بسیار کوچک در مقدار بردار $\mathbf{b}$ سبب بروز خطای محاسباتی زیادی در محاسبه $\mathbf{x}$ می گردد.

****

حل تمرین شماره ۶

برای محاسبه عدد حالت ابتدا باید مقادیر منفرد هر یک از ماتریس ها را بدست آوریم،

$$A=\begin{bmatrix} 100 & 0 & -100 \\ 0 & 100 & -100 \\ -100 & -100 & 300 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1=373.2051 \quad , \quad \sigma_2=100.0000 \quad , \quad \sigma_3=26.7949 \rightarrow \quad \kappa_A=\frac{\sigma_1}{\sigma_3}=\frac{373.2051}{26.7949}=13.9282$$

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 8 & -1 \\ -9 & -71 & 11 \\ 1 & 17 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1=74.3164 \quad , \quad \sigma_2=20.0016 \quad , \quad \sigma_3=0.0007 \rightarrow \quad \kappa_B=\frac{\sigma_1}{\sigma_3}=\frac{74.3164}{0.0007}=1.1047\times 10^5 >>1$$

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 22 & -42 \\ 0 & 1 & -45 \\ -45 & -948 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1=949.3256 \quad , \quad \sigma_2=61.5297 \quad , \quad \sigma_3=0.00000017 \rightarrow \quad \kappa_C=\frac{\sigma_1}{\sigma_3}=\frac{949.3256}{0.00000017}=5.5452\times 10^7 >>1$$

با توجه به عدد حالت هر یک از ماتریس ها ماتریس C و B به شدت ill condition و ماتریس A well condition است.

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

حل تمرین های سری دوازدهم

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۱۰/۷

حل تمرین شماره ۱

الف) $A=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\1&1\end{bmatrix}$

ابتدا تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A را بصورت زیر بدست می آوریم،

$$A=U\Sigma V^T=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{-1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{-1}{\sqrt2}&\frac{-1}{\sqrt3}\\\frac{2}{\sqrt6}&0&\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt3&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{-1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}^T$$

برای ماتریس $A_{m\times n}$ ماتریس شبه معکوس $A^{\#}_{n\times m}$ بصورت زیر بدست می آید،

$$\boxed{A^{\#}=V\Sigma^{\#}U^T\quad,\quad \Sigma^{\#}=\mathrm{diag}(1/\sigma_1,1/\sigma_2,\dots,1/\sigma_k,0,\dots,0)\quad,\quad \sigma_1\ge\sigma_2\ge\cdots\ge\sigma_k>0}$$

لذا ابتدا $\Sigma^{\#}$ را بدست می آوریم،

$$\sigma_1=\sqrt3,\sigma_2=1\quad,\quad \Sigma^{\#}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sigma_1}&0&0\\0&\frac{1}{\sigma_2}&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

ماتریس شبه معکوس بصورت زیر بدست می آید،

$$A^{\#}=V\Sigma^{\#}U^T=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{-1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{-1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{-1}{\sqrt2}&\frac{-1}{\sqrt3}\\\frac{2}{\sqrt6}&0&\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}\frac{-1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{-1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[0 1;1 0;1 1];
pinv(A)
ans =
   -0.3333    0.6667    0.3333
    0.6667   -0.3333    0.3333
```

****

ب) $A=\begin{bmatrix}2&2&-2\\4&1&2\\-4&2&1\end{bmatrix}$

ابتدا تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A را بصورت زیر بدست می آوریم،

$$A=U\Sigma V^T=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{-2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{-2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^T$$

برای ماتریس $A_{m\times n}$ ماتریس شبه معکوس $A^{\#}_{n\times m}$ بصورت زیر بدست می آید،

$$A^{\#}=V\Sigma^{\#}U^T\quad,\quad \Sigma^{\#}=\mathrm{diag}(1/\sigma_1,1/\sigma_2,\dots,1/\sigma_k,0,\dots,0)\quad,\quad \sigma_1\ge\sigma_2\ge\cdots\ge\sigma_k>0$$

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

ابتدا $\Sigma^{\#}$ را بدست می آوریم،

$$\sigma_1 = 6, \sigma_2 = 3, \sigma_3 = 3 \quad , \quad \Sigma^{\#} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma 1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

و ماتریس شبه معکوس بصورت زیر بدست می آید،

$$A^{\#} = V\Sigma^{\#}U^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{-1}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{-2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[2 2 -2;4 1 2;-4 2 1];
pinv(A)
ans =
    0.0556    0.1111   -0.1111
    0.2222    0.1111    0.2222
   -0.2222    0.2222    0.1111
```

****

ج) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

ابتدا تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A را بصورت زیر بدست می آوریم،

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{-2}{3} \\ 0 & \frac{-4}{\sqrt{18}} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}^T$$

برای ماتریس $A_{m\times n}$ ماتریس شبه معکوس $A^{\#}_{n\times m}$ بصورت زیر بدست می آید،

$$A^{\#} = V\Sigma^{\#}U^T \quad , \quad \Sigma^{\#} = \mathrm{diag}(1/\sigma_1, 1/\sigma_2, \ldots, 1/\sigma_k, 0, \ldots, 0) \quad , \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_k > 0$$

ابتدا $\Sigma^{\#}$ را بدست می آوریم،

$$\sigma_1 = 5, \sigma_2 = 3 \quad , \quad \Sigma^{\#} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و ماتریس شبه معکوس بصورت زیر بدست می آید،

$$A^{\#} = V\Sigma^{\#}U^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{-2}{3} \\ 0 & \frac{-4}{\sqrt{18}} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{7}{45} & \frac{2}{45} \\ \frac{2}{45} & \frac{7}{45} \\ \frac{2}{9} & \frac{-2}{9} \end{bmatrix}$$

با استفاده از نرم افزار MATLAB داریم،

```
A =[3 2 2;2 3 -2];
pinv(A)
ans =
    0.1556    0.0444
    0.0444    0.1556
    0.2222   -0.2222
```

* * *

حل تمرین شماره ۲

ثابت کنید که شبه معکوس معرفی شده بصورت $A^{\#}=V\Sigma^{\#}U^T$ جواب مسئله حداقل مربعات برای دستگاه معادلات ناسازگار $A_{m\times n}\mathbf{x}_{n\times 1}=\mathbf{b}_{m\times 1}$ است. می دانیم $A=U\Sigma V^T$ تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A است $(rank(A)=k)$ ماتریس های U و V متعامد هستند، لذا $\|U\|=\|U^T\|=1$ و $\|V\|=\|V^T\|=1$ است.

$$\|A\mathbf{x}-\mathbf{b}\|=\|U\Sigma V^T\mathbf{x}-\mathbf{b}\|=\|U^T\|\|U\Sigma V^T\mathbf{x}-\mathbf{b}\|=\|U^TU\Sigma V^T\mathbf{x}-U^T\mathbf{b}\|=\|\Sigma V^T\mathbf{x}-U^T\mathbf{b}\|=\|\Sigma\mathbf{x}_0-\mathbf{b}_0\|$$

که در آن $\mathbf{b}_0=U^T\mathbf{b}$ و $\mathbf{x}_0=V^T\mathbf{x}$ تعریف شده است و داریم،

$$\min\|A\mathbf{x}-\mathbf{b}\|=\min\|\Sigma\mathbf{x}_0-\mathbf{b}_0\|$$

$$\Sigma\mathbf{x}_0-\mathbf{b}_0=\left[\begin{array}{ccc:c}\sigma_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0\\ 0 & & \sigma_k & \\ \hdashline & 0 & & 0\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_{01}\\x_{02}\\ \vdots\\x_{0n}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}b_{01}\\b_{02}\\ \vdots\\b_{0m}\end{bmatrix}$$

$$\|\Sigma\mathbf{x}_0-\mathbf{b}_0\|=\sqrt{|\sigma_1x_{01}-b_{01}|^2+|\sigma_2x_{02}-b_{02}|^2+\cdots+|\sigma_kx_{0k}-b_{0k}|^2+|-b_{0(k+1)}|^2+\cdots+|-b_{0m}|^2}$$

حال $\min\|\Sigma\mathbf{x}_0-\mathbf{b}_0\|$ زمانی بدست می آید که بردار $\mathbf{x}_0$ بصورت زیر تعریف گردد،

$$\mathbf{x}_0=\begin{bmatrix}x_{01}\\x_{02}\\ \vdots\\x_{0n}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc:c}1/\sigma_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0\\ 0 & & 1/\sigma_k & \\ \hdashline & 0 & & 0\end{array}\right]\begin{bmatrix}b_{01}\\b_{02}\\ \vdots\\b_{0m}\end{bmatrix}=\Sigma^{\#}\mathbf{b}_0$$

بنابراین $\mathbf{x}_0=\Sigma^{\#}\mathbf{b}_0$ برداری است که مقدار $\|\Sigma\mathbf{x}_0-\mathbf{b}_0\|$ به ازای آن حداقل می شود و با توجه به اینکه $\mathbf{b}_0=U^T\mathbf{b}$ و $\mathbf{x}_0=V^T\mathbf{x}$ است و $\min\|A\mathbf{x}-\mathbf{b}\|=\min\|\Sigma\mathbf{x}_0-\mathbf{b}_0\|$ می باشد، می توان جواب حداقل مربعات برای $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ را هم بدست آورد،

$$\mathbf{x}_0=\Sigma^{\#}\mathbf{b}_0\quad\rightarrow\quad V^T\mathbf{x}=\Sigma^{\#}U^T\mathbf{b}\quad\rightarrow\quad\mathbf{x}=V\Sigma^{\#}U^T\mathbf{b}$$

لذا $\mathbf{x}=V\Sigma^{\#}U^T\mathbf{b}$ جواب حداقل مربعات برای $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ می باشد و $A^{\#}=V\Sigma^{\#}U^T$ همان شبه معکوس ماتریس A است.

* * *

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

حل تمرین های سری دوازدهم

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۱۰/۷

حل تمرین شماره ۳

توجه : زمانیکه ماتریس A نقص رتبه دارد یا $A^T A$ یک ماتریس ill condition است، نمی توان جواب حداقل مربعات را با استفاده از معادله نُرمال بصورت $\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$ بدست آورد، در چنین واقعی از ماتریس شبه معکوس و تجزیه مقادیر منفرد برای حل مسئله حداقل مربعات استفاده می نماییم.

الف)
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 5 \\ -2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 = 4 \end{cases}$$

- ابتدا سازگار یا ناسازگار بودن سیستم را بررسی می نماییم.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

از آنجاییکه $\text{rank}(A) = 1$ و $\text{rank}(A \mid \mathbf{b}) = 2$ است، لذا سیستم ناسازگار است و باید جواب حداقل مربعات را برای آن بدست آورد. با توجه به full rank نبودن ماتریس A برای حل مسئله حداقل مربعات باید از شبه معکوس استفاده کرد.

- مقادیر منفرد ماتریس A برابر با جذر مقادیر ویژه ماتریس $A^T A$ است،

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -28 \\ -28 & 56 \end{bmatrix}$$

$$\left| \lambda I - A^T A \right| = \begin{vmatrix} \lambda - 14 & 28 \\ 28 & \lambda - 56 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 70) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 70, \lambda_2 = 0$$

پس مقادیر منفرد ماتریس A برابر است با،

$$\sigma_1 = \sqrt{70}, \qquad \sigma_2 = 0$$

- حال تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A را بدست می آوریم،

$$\boxed{A = U \Sigma V^T}$$

ستون های ماتریس U بردارهای ویژه یکامتعامد ماتریس AA^T هستند. برای محاسبه ماتریس U به شکل زیر عمل می نماییم،

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -10 & 15 \\ -10 & 20 & -30 \\ 15 & -30 & 45 \end{bmatrix}$$

$$\left| \lambda I - AA^T \right| = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 10 & -15 \\ 10 & \lambda - 20 & 30 \\ -15 & 30 & \lambda - 45 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 70) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 70, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$$

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق - گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

بنام خداوند بخشنده و مهربان

جبر خطی کاربردی

حل تمرین های سری دوازدهم

نیمسال اول ۹۰-۹۱

۹۰/۱۰/۷

ماتریس AA^T یک مقدار ویژه حقیقی متمایز و یک مقدار ویژه حقیقی تکراری مرتبه دو دارد.

ابتدا بردار ویژه متناظر با مقدار حقیقی متمایز را بدست می آوریم،

$$\lambda_1 = 70 \rightarrow (\lambda_1 I - AA^T)\mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} 65 & 10 & -15 \\ 10 & 50 & 30 \\ -15 & 30 & 25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

برای مقدار ویژه تکراری $n - \text{rank}(\lambda_2 I - AA^T) = 3 - 1 = 2$ است لذا دو بردار ویژه مستقل خطی داریم و نیازی به محاسبه بردار ویژه تعمیم یافته نیست.

$$\lambda_2 = 0 \rightarrow (\lambda_2 I - AA^T)\mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} -5 & 10 & -15 \\ 10 & -20 & 30 \\ -15 & 30 & -45 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس $U_{3\times3}$ با یکامتعامد سازی بصورت زیر بدست می آید،

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{19}} \\ \frac{-2}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{19}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{19}} \end{bmatrix}$$

حال ماتریس V را بدست می آوریم، ستون های ماتریس V بردارهای ویژه ماتریس $A^T A$ است،

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -28 \\ -28 & 56 \end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I - A^T A\right| = \begin{vmatrix} \lambda - 14 & 28 \\ 28 & \lambda - 56 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 70) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 70, \lambda_2 = 0$$

ماتریس $A^T A$ دو مقدار ویژه حقیقی و متمایز دارد و بردارهای ویژه متناظر با هر یک از آنها را بدست می آوریم،

$$\lambda_1 = 70 \rightarrow (\lambda_1 I - A^T A)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} 56 & 28 \\ 28 & 14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 0 \rightarrow (\lambda_2 I - A^T A)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} -14 & 28 \\ 28 & -56 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس $V_{2\times2}$ با یکا متعامد سازی بصورت زیر بدست می آید،

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

- لذا تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A به شکل زیر بدست می آید،

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{19}} \\ \frac{-2}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{19}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{19}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{70} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}^T$$

حال ماتریس شبه معکوس را بدست می آوریم،

$$A^{\#} = V\Sigma^{\#}U^T$$

$$\Sigma^{\#} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{70}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad A^{\#} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{70}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{19}} \\ \frac{-2}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{19}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{19}} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{70} & \frac{-2}{70} & \frac{3}{70} \\ \frac{-2}{70} & \frac{4}{70} & \frac{-6}{70} \end{bmatrix}$$

لذا جواب حداقل مربعات بصورت زیر بدست می آید،

$$\hat{\mathbf{x}} = A^{\#}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{70} & \frac{-2}{70} & \frac{3}{70} \\ \frac{-2}{70} & \frac{4}{70} & \frac{-6}{70} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{17}{70} \\ \frac{-34}{70} \end{bmatrix}$$

****

ب) $\boxed{\begin{cases} x_1 + x_2 = 15 \\ 2x_1 + 2x_2 = 15 \\ 2x_1 + 2x_2 = -30 \end{cases}}$

- ابتدا سازگار یا ناسازگار بودن سیستم را بررسی می نماییم.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \\ -30 \end{bmatrix}$$

از آنجاییکه $\text{rank}(A) = 1$ و $\text{rank}(A \mid \mathbf{b}) = 2$ است، لذا سیستم ناسازگار است و باید جواب حداقل مربعات را برای آن بدست آورد. با توجه به full rank نبودن ماتریس A برای حل مسئله حداقل مربعات باید از شبه معکوس استفاده کرد.

- مقادیر منفرد ماتریس A برابر با جذر مقادیر ویژه ماتریس $A^T A$ است،

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 9 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\left| \lambda I - A^T A \right| = \begin{vmatrix} \lambda - 9 & -9 \\ -9 & \lambda - 9 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 18) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 18, \lambda_2 = 0$$

پس مقادیر منفرد ماتریس A برابر است با،

$$\sigma_1 = \sqrt{18}, \qquad \sigma_2 = 0$$

- حال تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A را بدست می آوریم،

$$\boxed{A = U\Sigma V^T}$$

ستون های ماتریس U بردارهای ویژه یکامتعامد ماتریس AA^T هستند. برای محاسبه ماتریس U به شکل زیر عمل می نماییم،

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I - AA^T\right| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -4 & -4 \\ -4 & \lambda-8 & -8 \\ -4 & -8 & \lambda-8 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-18) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 18, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$$

ماتریس AA^T یک مقدار ویژه حقیقی متمایز و یک مقدار ویژه حقیقی تکراری مرتبه دو دارد.

ابتدا بردار ویژه متناظر با مقدار حقیقی متمایز را بدست می آوریم،

$$\lambda_1 = 18 \rightarrow (\lambda_1 I - AA^T)\mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} 16 & -4 & -4 \\ -4 & 10 & -8 \\ -4 & -8 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

برای مقدار ویژه تکراری $n - \text{rank}(\lambda_2 I - AA^T) = 3 - 1 = 2$ است، لذا دو بردار ویژه مستقل خطی داریم و نیازی به محاسبه بردار ویژه تعمیم یافته نیست.

$$\lambda_2 = 0 \rightarrow (\lambda_2 I - AA^T)\mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -4 & -4 \\ -4 & -8 & -8 \\ -4 & -8 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{-5}{3} \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس $U_{3\times3}$ با یکامتعامد سازی بصورت زیر بدست می آید،

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{2}{3} \\ 2 & 1 & \frac{4}{3} \\ 2 & 0 & \frac{-5}{3} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad U = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{-5}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

حال ماتریس V را بدست می آوریم، ستون های ماتریس V بردارهای ویژه ماتریس $A^T A$ است،

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 9 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I - A^T A\right| = \begin{vmatrix} \lambda-9 & -9 \\ -9 & \lambda-9 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-18) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 18, \lambda_2 = 0$$

ماتریس $A^T A$ دو مقدار ویژه حقیقی و متمایز دارد و بردارهای ویژه متناظر با هر یک از آنها را بدست می آوریم،

$$\lambda_1 = 18 \rightarrow (\lambda_1 I - A^T A)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 0 \rightarrow (\lambda_2 I - A^T A)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} -9 & -9 \\ -9 & -9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس $V_{2\times 2}$ با یکا متعامد سازی بصورت زیر بدست می آید،

$$[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

- لذا تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A به شکل زیر بدست می آید،

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{-5}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{18} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T$$

حال ماتریس شبه معکوس را بدست می آوریم،

$$A^{\#} = V\Sigma^{\#}U^T$$

$$\Sigma^{\#} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{18}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad A^{\#} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{18}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{-5}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & \frac{2}{18} & \frac{2}{18} \\ \frac{1}{18} & \frac{2}{18} & \frac{2}{18} \end{bmatrix}$$

لذا جواب حداقل مربعات بصورت زیر بدست می آید،

$$\hat{\mathbf{x}} = A^{\#}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & \frac{2}{18} & \frac{2}{18} \\ \frac{1}{18} & \frac{2}{18} & \frac{2}{18} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 15 \\ 15 \\ -30 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{-5}{6} \\ \frac{-5}{6} \end{bmatrix}$$

****

ج)
$$\boxed{\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}}$$

- ابتدا سازگار یا ناسازگار بودن سیستم را بررسی می نماییم.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

از آنجاییکه $\text{rank}(A) = 2$ و $\text{rank}(A\,|\,\mathbf{b}) = 3$ است، لذا سیستم ناسازگار است و باید جواب حداقل مربعات را برای آن بدست آورد.
با توجه به full rank نبودن ماتریس A برای حل مسئله حداقل مربعات باید از شبه معکوس استفاده کرد.

- مقادیر منفرد ماتریس A برابر با جذر مقادیر ویژه ماتریس $A^T A$ است،

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I - A^T A\right| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-4)(\lambda-1) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$$

پس مقادیر منفرد ماتریس A برابر است با،

$$\sigma_1 = 2, \qquad \sigma_2 = 1, \qquad \sigma_3 = 0$$

- حال تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A را بدست می آوریم،

$$\boxed{A = U\Sigma V^T}$$

ستون های ماتریس U بردارهای ویژه یکامتعامد ماتریس AA^T هستند. برای محاسبه ماتریس U به شکل زیر عمل می نماییم،

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I - AA^T\right| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-4)(\lambda-1) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$$

ماتریس AA^T سه مقدار ویژه حقیقی متمایز دارد. بردارهای ویژه متناظر با مقدار حقیقی متمایز را بدست می آوریم،

$$\lambda_1 = 4 \rightarrow (\lambda_1 I - AA^T)\mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 \rightarrow (\lambda_1 I - AA^T)\mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 0 \rightarrow (\lambda_1 I - AA^T)\mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس $U_{3\times3}$ با یکامتعامد سازی بصورت زیر بدست می آید،

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix}$$

حال ماتریس V را بدست می آوریم، ستون های ماتریس V بردارهای ویژه ماتریس $A^T A$ است،

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I - A^T A\right| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-4)(\lambda-1) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$$

ماتریس $A^T A$ سه مقدار ویژه حقیقی متمایز دارد. بردارهای ویژه متناظر با مقدار حقیقی متمایز را بدست می آوریم،

$$\lambda_1 = 4 \rightarrow (\lambda_1 I - A^T A)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 \rightarrow (\lambda_1 I - A^T A)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 0 \rightarrow (\lambda_1 I - A^T A)\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} -3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس $V_{3\times3}$ با یکامتعامد سازی بصورت زیر بدست می آید،

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow V = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

- لذا تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A به شکل زیر بدست می آید،

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T$$

حال ماتریس شبه معکوس را بدست می آوریم،

$$A^{\#} = V\Sigma^{\#}U^T$$

$$\Sigma^{\#} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow A^{\#} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

لذا جواب حداقل مربعات بصورت زیر بدست می آید،

$$\hat{\mathbf{x}} = A^{\#}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

****

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق - گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

حل تمرین شماره ۴

الف) زمانیکه ماتریس A غیرمنفرد باشد، $A^{\#} = A^{-1}$ است.

زمانیکه ماتریس A غیرمنفرد باشد تجزیه مقادیر منفرد آن بصورت زیر خواهد بود،

$$A_{n\times n} = U_{n\times n}\Sigma_{n\times n}V^T_{n\times n} = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1^T\\ \vdots\\ \mathbf{v}_n^T\end{bmatrix}$$

حال A^{-1} و $A^{\#}$ هر یک بصورت زیر بدست می آیند،

$$A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sigma_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\sigma_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1^T\\ \vdots\\ \mathbf{u}_n^T\end{bmatrix}$$

$$A^{\#} = V\Sigma^{\#}U^T = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sigma_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\sigma_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1^T\\ \vdots\\ \mathbf{u}_n^T\end{bmatrix}$$

مشخص است که هر دو مقدار یکسانی دارند.

****

ب) $(A^{\#})^{\#} = A$ و $(A^{\#})^T = (A^T)^{\#}$

طبق تعریف برای اینکه ماتریس $A^{\#}$ یک شبه معکوس برای ماتریس A باشد باید چهار شرط moore-penrose را برای ماتریس A برآورده سازد.

۱- $AA^{\#}A = A$

۲- $A^{\#}AA^{\#} = A^{\#}$

۳- $(AA^{\#})^T = AA^{\#}$

۴- $(A^{\#}A)^T = A^{\#}A$

لذا برای اثبات تساوی $(A^{\#})^T = (A^T)^{\#}$ باید نشان دهیم که ماتریس $(A^{\#})^T$ یک شبه معکوس برای ماتریس A^T است، پس ماتریس $(A^{\#})^T$ باید چهار شرط moore-penrose را برای ماتریس A^T برآورده سازد،

۱- $A^T(A^{\#})^T A^T = A^T$

$$\begin{aligned}A^T(A^{\#})^T A^T &= (U\Sigma V^T)^T(V\Sigma^{\#}U^T)^T(U\Sigma V^T)^T\\ &= V\Sigma^T U^T U(\Sigma^{\#})^T V^T V\Sigma^T U^T\\ &= V\Sigma^T(\Sigma^{\#})^T\Sigma^T U^T\\ &= V(\Sigma\Sigma^{\#}\Sigma)^T U^T\\ &= V\Sigma^T U^T\\ &= (U\Sigma V^T)^T = A^T\end{aligned}$$

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

۲- $(A^{\#})^T A^T (A^{\#})^T = (A^{\#})^T$

$$
\begin{aligned}
(A^{\#})^T A^T (A^{\#})^T &= (V\Sigma^{\#}U^T)^T (U\Sigma V^T)^T (V\Sigma^{\#}U^T)^T \\
&= U(\Sigma^{\#})^T V^T V\Sigma^T U^T U(\Sigma^{\#})^T V^T \\
&= U(\Sigma^{\#})^T \Sigma^T (\Sigma^{\#})^T V^T \\
&= U(\Sigma^{\#}\Sigma\Sigma^{\#})^T V^T \\
&= U(\Sigma^{\#})^T V^T \\
&= (V\Sigma^{\#}U^T)^T = (A^{\#})^T
\end{aligned}
$$

۳- $(A^T (A^{\#})^T)^T = A^T (A^{\#})^T$

$$
\begin{aligned}
(A^T (A^{\#})^T)^T &= ((U\Sigma V^T)^T (V\Sigma^{\#}U^T)^T)^T \\
&= (V\Sigma^T U^T U(\Sigma^{\#})^T V^T)^T \\
&= (V\Sigma^T (\Sigma^{\#})^T V^T)^T \\
&= (V(\Sigma^{\#}\Sigma)^T V^T)^T \\
&= (V(\Sigma^{\#}\Sigma)V^T)^T \\
&= V(\Sigma^{\#}\Sigma)^T V^T \\
&= V\Sigma^T (\Sigma^{\#})^T V^T \\
&= V\Sigma^T U^T U(\Sigma^{\#})^T V^T \\
&= (U\Sigma V^T)^T (V\Sigma^{\#}U^T)^T = A^T (A^{\#})^T
\end{aligned}
$$

۴- $(A^{\#}A)^T = A^{\#}A$

$$
\begin{aligned}
((A^{\#})^T A^T)^T &= ((V\Sigma^{\#}U^T)^T (U\Sigma V^T)^T)^T \\
&= (U(\Sigma^{\#})^T V^T V\Sigma^T U^T)^T \\
&= (U(\Sigma^{\#})^T \Sigma^T U^T)^T \\
&= (U(\Sigma\Sigma^{\#})^T U^T)^T \\
&= (U(\Sigma\Sigma^{\#})U^T)^T \\
&= U(\Sigma\Sigma^{\#})^T U^T \\
&= U(\Sigma^{\#})^T \Sigma^T U^T \\
&= U(\Sigma^{\#})^T V^T V\Sigma^T U^T \\
&= (V\Sigma^{\#}U^T)^T (U\Sigma V^T)^T = (A^{\#})^T A^T
\end{aligned}
$$

بنام خداوند بخشنده و مهربان

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

جبر خطی کاربردی

حل تمرین های سری دوازدهم

نیمسال اول ۹۰-۹۱
۹۰/۱۰/۷

و برای اثبات تساوی $A=(A^\#)^\#$ باید نشان دهیم که ماتریس A یک شبه معکوس برای ماتریس $A^\#$ است، پس ماتریس A باید چهار شرط moore-penrose را برای ماتریس $A^\#$ برآورده سازد،

۱- $A^\# AA^\# = A^\#$

$$\begin{aligned} A^\# AA^\# &= V\Sigma^\# U^T U\Sigma V^T V\Sigma^\# U^T \\ &= V\Sigma^\#\Sigma\Sigma^\# U^T \\ &= V\Sigma^\# U^T = A^\# \end{aligned}$$

۲- $AA^\# A = A$

$$\begin{aligned} AA^\# A &= U\Sigma V^T V\Sigma^\# U^T U\Sigma V^T \\ &= U\Sigma\Sigma^\#\Sigma V^T \\ &= U\Sigma V^T = A \end{aligned}$$

۳- $(A^\# A)^T = A^\# A$

$$\begin{aligned} (A^\# A)^T &= (V\Sigma^\# U^T U\Sigma V^T)^T \\ &= (V\Sigma^\#\Sigma V^T)^T \\ &= V(\Sigma^\#\Sigma)^T V^T \\ &= V\Sigma^\#\Sigma V^T \\ &= V\Sigma^\# U^T U\Sigma V^T = A^\# A \end{aligned}$$

۴- $(AA^\#)^T = AA^\#$

$$\begin{aligned} (AA^\#)^T &= (U\Sigma V^T V\Sigma^\# U^T)^T \\ &= (U\Sigma\Sigma^\# U^T)^T \\ &= U(\Sigma\Sigma^\#)^T U^T \\ &= U(\Sigma\Sigma^\#)U^T \\ &= U\Sigma V^T V\Sigma^\# U^T = AA^\# \end{aligned}$$

* * *

ج) $\boxed{A^\# AA^\# = A^\# \quad \text{و} \quad AA^\# A = A}$

$$AA^\# A = (U\Sigma \underbrace{V^T)(V}_{I}\Sigma^\# \underbrace{U^T)(U}_{I}\Sigma V^T) = U\underbrace{\Sigma\Sigma^\#\Sigma}_{\Sigma}V^T = U\Sigma V^T = A$$

$$A^\# AA^\# = (V\Sigma^\# \underbrace{U^T)(U}_{I}\Sigma \underbrace{V^T)(V}_{I}\Sigma^\# U^T) = V\underbrace{\Sigma^\#\Sigma\Sigma^\#}_{\Sigma^\#}U^T = V\Sigma^\# U^T = A^\#$$

* * *

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

حل تمرین شماره ۵

سال (x)	۱۹۰۰	۱۹۱۰	۱۹۲۰	۱۹۳۰	۱۹۴۰	۱۹۵۰	۱۹۶۰	۱۹۷۰	۱۹۸۰
جمعیت (y) (میلیون)	۷۶ / ۰	۹۲ / ۰	۱۰۵ / ۷	۱۲۳ / ۲	۱۳۱ / ۷	۱۵۰ / ۷	۱۷۹ / ۳	۲۰۳ / ۲	۲۲۶ / ۵

الف) با محاسبه شبه معکوس یک مدل مرتبه دوم بصورت $y = ax^2 + bx + c$ بر اساس روش حداقل مربعات برای افزایش جمعیت بدست آورید.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} (1900)^2 & 1900 & 1 \\ (1910)^2 & 1910 & 1 \\ (1920)^2 & 1920 & 1 \\ (1930)^2 & 1930 & 1 \\ (1940)^2 & 1940 & 1 \\ (1950)^2 & 1950 & 1 \\ (1960)^2 & 1960 & 1 \\ (1970)^2 & 1970 & 1 \\ (1980)^2 & 1980 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 76.0 \\ 92.0 \\ 105.7 \\ 123.2 \\ 131.7 \\ 150.7 \\ 179.3 \\ 203.2 \\ 226.5 \end{bmatrix}$$

بدیهی است که دستگاه معادلات بدست آمده ناسازگار است و جواب مسئله حداقل مربعات با استفاده از شبه معکوس بصورت زیر بدست می آید،

$$\hat{\mathbf{x}} = A^{\#}\mathbf{y} \quad , \quad A^{\#} = V\Sigma^{\#}U^T$$

لذا ابتدا تجزیه SVD ماتریس A را بدست می آوریم،

$$A = U\Sigma V^T$$

$$U = \begin{bmatrix} 0.3196 & 0.5188 & 0.5379 & -0.0168 & 0.0408 & 0.0198 & -0.0796 & -0.2576 & -0.5141 \\ 0.3229 & 0.3945 & 0.1375 & 0.0359 & 0.1864 & 0.3061 & 0.3949 & 0.4529 & 0.4800 \\ 0.3263 & 0.2687 & -0.1489 & -0.4555 & -0.4854 & -0.4221 & -0.2655 & -0.0157 & 0.3273 \\ 0.3297 & 0.1417 & -0.3213 & 0.8342 & -0.1712 & -0.1558 & -0.1196 & -0.0627 & 0.0149 \\ 0.3332 & 0.0133 & -0.3798 & -0.1910 & 0.7871 & -0.2078 & -0.1757 & -0.1166 & -0.0305 \\ 0.3366 & -0.1164 & -0.3243 & -0.1757 & -0.2091 & 0.7807 & -0.2064 & -0.1703 & -0.1110 \\ 0.3401 & -0.2474 & -0.1549 & -0.1200 & -0.1597 & -0.1902 & 0.7885 & -0.2236 & -0.2266 \\ 0.3435 & -0.3798 & 0.1285 & -0.0239 & -0.0647 & -0.1205 & -0.1912 & 0.7233 & -0.3772 \\ 0.3470 & -0.5135 & 0.5258 & 0.1128 & 0.0758 & -0.0102 & -0.1454 & -0.3296 & 0.4371 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_1&0&0\\0&\sigma_2&0\\0&0&\sigma_3\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11296800.2191956&0&0\\0&77.4101337&0\\0&0&0.0004664\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$V=\begin{bmatrix}1.0000&-0.0005&0.0000\\0.0005&1.0000&-0.0010\\0.0000&0.0010&1.0000\end{bmatrix}$$

حال ماتریس $\Sigma^{\#}$ را بدست می آوریم،

$$\Sigma^{\#}=\begin{bmatrix}1/\sigma_1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1/\sigma_2&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1/\sigma 3&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

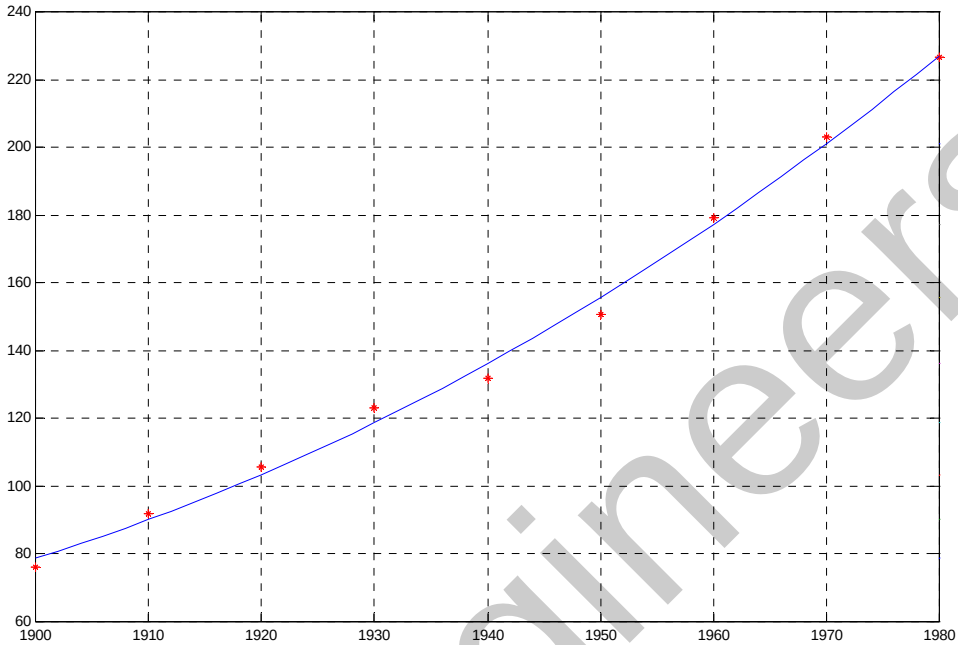
$$=\begin{bmatrix}(11296800.2191956)^{-1}&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&(77.4101337)^{-1}&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&(0.0004664)^{-1}&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

و جواب مسئله حداقل مربعات بصورت زیر بدست می آید،

$$\hat{\mathbf{x}}=A^{\#}\mathbf{y}=V\Sigma^{\#}U^T\mathbf{y}$$

$$\hat{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.0104556277\\-38.7173354979\\35897.0044588966\end{bmatrix}$$

بنابراین ضرایب منحنی مرتبه دوم $y=ax^2+bx+c$ بدست می آید. در ادامه منحنی بدست آمده به همراه نقاط داده رسم شده است،



****

ب) بر اساس مدل بدست آمده در بخش (الف) میزان جمعیت را در سال ۱۹۹۰ تخمین بزنید.

مدل بدست آمده به شکل زیر است،

$$y = 0.0104556277x^2 - 38.7173354979x + 35897.0044588966$$

لذا جمعیت در سال ۱۹۹۰ بصورت زیر خواهد بود،

$$y = 0.0104556277 \times (1990)^2 - 38.7173354979 \times 1900 + 35897.0044588966 = 254.838 \text{ میلیون}$$

****

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده برق – گروه کنترل
مدرس: صدقی زاده

حل تمرین شماره ۶

الف) با استفاده از کد داده شده،

```
[A,map] =imread('roteyl.bmp');
B =im2double(A ,'indexed');
P = ind2gray(B ,map);
figure(1), imshow(P), title('main picture')
```

تصویر حاصل بصورت زیر می باشد،

main picture

ب) با استفاده از دستور svd(P) در نرم افزار MATLAB مقادیر منفرد ماتریس P را بیابید. رتبه ماتریس P چند است؟

به این ترتیب تصویر مربوطه در یک ماتریس P با ابعاد 107×130 ذخیره می شود که مقادیر منفرد آن بصورت زیر است.

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 84.8793\\ \sigma_2 &= 10.7428\\ \sigma_3 &= 4.4494\\ \sigma_4 &= 4.3051\\ &\vdots\\ \sigma_{107} &= 0.06\end{aligned}$$

با توجه به تعداد مقادیر منفرد غیر صفر ماتریس P نتیجه می گیریم که $rank(P)=107$ است.

****

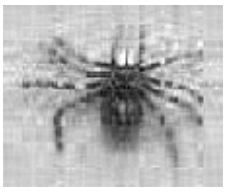
ج) با توجه به مقادیر منفرد بدست آمده یک تقریب رتبه پایین مناسب برای ماتریس P بدست آورید. خطای تقریب چند است؟

تجزیه مقادیر منفرد ماتریس P بصورت زیر است،

$$P = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_{107}\end{bmatrix}\left[\begin{array}{ccc|ccc}\sigma_1 & & 0 & 0 & \cdots & 0\\ & \ddots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & & \sigma_{107} & 0 & \cdots & 0\end{array}\right]\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1^T\\ \mathbf{v}_2^T\\ \vdots\\ \mathbf{v}_{130}^T\end{bmatrix}$$

حال برای ماتریس P شش تقریب با رتبه های مختلف در نظر می گیریم که تصاویر حاصل در شکل بعدی نشان داده شده است.

rank = 10



rank = 5

rank = 50

rank = 20

rank = 100

rank = 70

برای رسم تصاویر از کد زیر می توان استفاده نمود،

```
[U,S,V]=svd(P);
figure(2)
subplot(321),imshow(U(:,1:5)*S(1:5,1:5)*V(:,1:5)'),title('rank = 5')
subplot(322),imshow(U(:,1:10)*S(1:10,1:10)*V(:,1:10)'),title('rank = 10')
subplot(323),imshow(U(:,1:20)*S(1:20,1:20)*V(:,1:20)'),title('rank = 20')
subplot(324),imshow(U(:,1:50)*S(1:50,1:50)*V(:,1:50)'),title('rank = 50')
subplot(325),imshow(U(:,1:70)*S(1:70,1:70)*V(:,1:70)'),title('rank = 70')
subplot(326),imshow(U(:,1:100)*S(1:100,1:100)*V(:,1:100)'),title('rank = 100')
```

مشخص است که از رتبه ۲۰ به بعد تصویر وضوح لازم را دارد.

$$P_{appox} = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_{20}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_{20}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{20}^T\end{bmatrix}$$

لذا خطای تقریب بصورت زیر است،

$$\left\|P - P_{appox}\right\| = \sigma_{21} = 1.7127$$