پلتفرم اختصاصی
مهندسی کنترل

ضرب سریع ماتریس
(روش استراسن)

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

$$m_1=(a_{12}-a_{22})(b_{21}-b_{22})$$
$$m_2=(a_{11}-a_{22})(b_{11}+b_{22})$$

خصوصیات اعمال ماتریس‌ها

جمع ماتریس‌ها

$A+B=B+A$ جابجایی

$A+(B+C)=(A+B)+C$ شرکت‌پذیری

$A+0=0+A=A$

$c(A+B)=cA+cB$ — $(a+b)C=aC+bC$ — $(ab)C=a(bC)$

ضرب ماتریس‌ها

$A(BC)=(AB)C$ $\quad I_n=I_nA=A$

توان ماتریس‌ها

$A^k=A.A.A\cdots$ k مرتبه

$A^rA^s=A^{(r+s)}$ $\quad (A^r)^s=A^{rs}$ $\quad A^0=I_n$

A^t ماتریس ترانهاده

ماتریسی که از جابجا نمودن سطر و ستون ماتریس بدست می‌آید

$A_{m\times n}$ $\quad A^t_{n\times m}$

خواص ترانهاده

$(A+B)^t=A^t+B^t$, $(cA)^t=cA^t$

$(AB)^t=B^tA^t$, $(A^t)^t=A$, $(A^t)^r=(A^r)^t$

$(AB)^t=B^t.A^t$

$(AB)^t=AB$ عدد واقع در درایه ماتریس

B^tA^t عدد این درایه = B^t سطر i ام A^t ستون j ام = B ستون i ام × A سطر j ام

$b_{1i}a_{j1}+b_{2i}a_{j2}+\cdots+b_{ni}a_{jn}=a_{j1}b_{1i}+\cdots+a_{jn}b_{ni}$

$(AB)^t=B^tA^t$

ماتریس متقارن: ماتریس A را متقارن گوییم هرگاه $A^t = A$ باشد.

اصطلاح: اگر و تنها اگر — گزاره شرطی لازم و کافی

p و q عبارت — $p \to q$ — $q \to p$ گزاره عکس

p اگر و تنها اگر q

p لازم و کافی است برای q

اگر A و B ماتریس‌های متقارن و هم اندازه باشند

آنگاه ضرب AB متقارن است، اگر و تنها اگر $AB = BA$ باشد.

تعریف ماتریس متقارن $AB = (AB)^t$

ترانهاده حاصلضرب $= B^t A^t$

چون A و B متقارنند $= BA$

فرض $AB = BA$

ترانهاده حاصلضرب $(AB)^t = (BA)^t$

$= A^t B^t$

$= AB$

اثر یا trace عددی مربوط به ماتریس‌های مربعی

فرض A ماتریس مربعی اثر ماتریس A $tr(A)$ برابر مجموع درایه‌های روی قطر اصلی A

$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$

عدد، اثر ماتریس دارای خواص قابل توجهی است

خواص trace

فرض A و B ماتریس c عدد

$tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$

$tr(AB) = tr(BA)$

$tr(cA) = c\,tr(A)$

$tr(A^t) = tr(A)$

قطر اصلی $A+B = (a_{11}+b_{11}), (a_{22}+b_{22}), \dots, (a_{nn}+b_{nn})$

$tr(A+B) = (a_{11}+b_{11}) + (a_{22}+b_{22}) + \dots + (a_{nn}+b_{nn})$

$= (a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}) + (b_{11}+b_{22}+\dots+b_{nn})$

$= tr(A) + tr(B)$

ماتریس با درایه‌های اعداد مختلط

$$Z = \overset{Re}{a} + \overset{Im}{b}i$$

$$i = \sqrt{-1}$$

$$Z_1 Z_2 = (a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+cb)i$$

مزدوج $Z' = a+bi$ $\quad \bar{Z} = a-bi$ $\quad \overset{\text{استار}}{A^*} = \bar{A}^t$ $\quad$ استار = مزدوج ترانهاده

C ماتریس هرمیتی

$$C = C^*$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3-4i \\ 3+4i & 6 \end{bmatrix} \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3+4i \\ 3-4i & 6 \end{bmatrix} \quad \bar{C}^t = \begin{bmatrix} 2 & 3-4i \\ 3+4i & 6 \end{bmatrix} = C^* = C$$

خواص ترانهاده مزدوج

$$(A+B)^* = A^* + B^*$$

$$(ZA)^* = \bar{Z} A^*$$

$$(AB)^* = B^* A^*$$

$$(A^*)^* = A$$

A^{-1} ماتریس معکوس

فرض می‌کنیم ماتریس $A_{n\times n}$ باشد، اگر ماتریس $B_{n\times n}$ وجود داشته باشد که $AB = BA = I_n$ باشد آنگاه A معکوس پذیر است و B معکوس ماتریس A می‌نامیم

اگر ماتریس B وجود نداشته باشد، آنگاه ماتریس A معکوس ندارد.

هر ماتریس نمی‌تواند بیش از یک ماتریس معکوس داشته باشد. (منحصر بفرد است)

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = A^{-1}A^{-1} \cdots A^{(-1)}$$

$$AX = B \longrightarrow X = A^{-1}B$$

$$AX = B = A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = I_n B = B$$

$$A^{-1}AX_1 = A^{-1}B \Rightarrow I_n X_1 = A^{-1}B$$

جواب یکتا $X_1 = A^{-1}B$

روش حذفی گوس-جردن

$$A^{-1} = [x_1\ x_2 \cdots x_n] \quad I_n = [e_1\ e_2 \cdots e_n]$$

$$AA^{-1} = I_n$$

$$A[x_1 \cdots x_n] = [e_1 \cdots e_n] \qquad Ax_1 = e_1,\ Ax_2 = e_2,\ \cdots,\ Ax_n = e_n$$

$$[A : e_1 \cdots e_n] \approx [I_n : x_1 \cdots x_n]$$

$$[A : I_n] \approx \cdots [I_n : A^{-1}]$$

شکل سطری پلکانی ماتریس $[A:I_n]$ را محاسبه می‌کنیم

ماتریس بعدی $[I_n : B]$ بدست می‌آید

آنگاه $B = A^{-1}$

عدم تحلیل شده سطری پلکانی را محاسبه می‌کنیم

خواص ماتریس معکوس

A و B معکوس پذیر c عدد اسکالر

$(A^{-1})^{-1} = A \quad , (cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1} \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$(A^{n})^{-1} = (A^{-1})^{n} \quad , (A^{t})^{-1} = (A^{-1})^{t}$

$(A^{-1})^{-1} = A \qquad AA^{-1} = A^{-1}A = I_n \quad , (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$

$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$

دترمینان

عددی است که به هر ماتریس مربعی نسبت داده میشود، ابزار

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det(A)$$

کهاد

کهاد درایه a_{ij} را با M_{ij} نشان میدهیم، دترمینان ماتریس حاصل از حذف i ام سطر و j ام ستون از A

همساز

همساز درایه a_{ij} را با C_{ij} نشان میدهند

$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

تفاوت کهاد و همساز در یک علامت

$C_{ij} = +M_{ij}$ یا $C_{ij} = -M_{ij}$

دترمینان ماتریس مربعی A، عبارتست از مجموع حاصلضرب درایه‌های سطر اول در همساز مربوطه آن درایه

$|A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + \dots = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$

دترمینان یک ماتریس مربعی برحسب سطر یا ستونی که بیشترین 0 را دارد به حداقل می‌رسد.

فرض $S=\{1,2,\dots,n\}$ مجموعه اعداد صحیح از ۱ تا n باشد

هر ترتیبی از $(i_1 i_2 \dots i_n)$ را از اعضای S یک جایگشت روی S می‌نامیم.

منظور از یک تغییر روی یک جایگشت تغییر دو عدد متوالی با یکدیگر است

جایگشت $i_1 \dots i_n$ را یک جایگشت زوج می‌نامیم

جایگشت دوری از بعد n روی مجموعه $\{1,2,\dots,n\}$

$A_{n\times n}$ $\qquad \|A\| = \sum \pm a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$

دترمینان

فرض $A_{n\times n}$ ، C_{ij} همسازه درایه a_{ij} باشد ماتریسی که درایه سطر i ام و ستون j ام آن C_{ij} باشد ماتریس همسازه A و ترانهاده آن را ماتریس الحاقی $adj(A)$ گویند

$$A=\begin{bmatrix}1&3&5\\-1&2&1\\1&-1&2\end{bmatrix} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&C_{13}\\C_{21}&C_{22}&C_{23}\\C_{31}&C_{32}&C_{33}\end{bmatrix}}_{\text{ماتریس همسازه}} = \begin{bmatrix}5&3&-1\\-6&2&4\\3&-1&5\end{bmatrix}^t = \underbrace{\begin{bmatrix}5&-6&3\\3&2&-1\\-1&4&5\end{bmatrix}}_{\text{ماتریس الحاقی}}$$

$A_{n\times n}$ و $|A|\neq 0 \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj(A)$ معکوس یک ماتریس نامنفرد

فرض: $AX=b$ — یک دستگاه n معادله n مجهول

اگر $|A|\neq 0$ — یک جواب منحصر بفرد دارد

اگر $|A|=0$ — ممکن هیچ جواب نداشته باشد (∞ جواب)

اگر $|A|\neq 0$ باشد A^{-1} وجود دارد و داریم $X=A^{-1}b$

$AX=b$, $|A|\neq 0$

قاعده کرامر: حل دستگاه‌ها معادلاتی که دارای جواب منحصر بفرد است

$$x_1=\frac{|A_1|}{|A|},\ x_2=\frac{|A_2|}{|A|},\ \dots,\ x_n=\frac{|A_n|}{|A|}$$

A_i ماتریسی است که با جایگزینی ستون iام A بوسیله B بدست می‌آید.

* روش گوس جردن
* روش حذفی گوس

Proof:

$$|A|\neq 0 \Longrightarrow X=A^{-1}b=\frac{1}{|A|}\,adj(A)\,b$$

$$x_i=\frac{1}{|A|}\left[adj(A)\ \text{سطر } i\text{ام}\right]\times b=\frac{1}{|A|}\left[C_{1i},\dots,C_{ni}\right]\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{|A|}\left(b_1C_{1i}+b_2C_{2i}+\dots+b_nC_{ni}\right)$$

$|A_i|$ بسط همساز

$$\Longrightarrow x_i=\frac{|A_i|}{|A|}$$

ماتریس A که ستون iام آن با ستون مقادیر جایگزین شده است

فضای برداری

$\mathbb{R}^2$ مجموعه تمام زوج‌های مرتب از اعداد حقیقی

$\mathbb{R}^4$ مجموعه تمامی چهارتایی‌های مرتب از اعداد حقیقی - یک بردار مکان

فرض $u=(u_1,\dots,u_n)$ و $v=(v_1,\dots,v_n)$

در مورد $\mathbb{R}^n$ و C یک اسکالر

$$u+v=(u_1+v_1,\ \dots,\ u_n+v_n)$$

$$Cu=(Cu_1,\ \dots,\ Cu_n)$$

$\mathbb{R}^n$ نسبت به اعمال جمع و ضرب اسکالر بسته است

فرض کنیم u یک بردار و c یک عدد باشد

اگر $c>0$ ، cu هم جهت با بردار u

و اگر $c<0$ ، cu در خلاف جهت بردار u می باشد

طول بردار cu ، $|c|$ برابر طول بردار u است

بردار صفر $\mathbb{R}^n$ $0=(0,0,\dots,0)$ که n مؤلفه اش صفر است ، نقش اساسی در توسعه فضای برداری دارد

بردار قرینه بردار $(-1)u$ ، $-u$ قرینه u نامیده می شود بردار با طول u ولی در جهت خلاف جهت u

negative vector

تفاضل

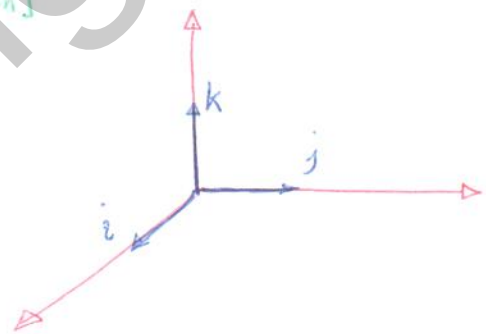
با لحاظ کردن مؤلفه های متناظر صورت می گیرد ، ترکیبی از جمع و ضرب اسکالر در (۱-) است

نقطه در مختصات مستقل روی $\mathbb{R}^n$ داریم ، جمع و ضرب اسکالر

کمیت های فیزیکی مانند نیرو و سرعت که دارای مقدار و جهت هستند ، بردارند.

بردارهای مستوی

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{bmatrix} \quad , \quad c\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cu_1 \\ \vdots \\ cu_n \end{bmatrix}$$



حاصلضرب نقطه ای دو بردار

فرض $u=(u_1,\dots,u_n)$ و $v=(v_1,\dots,v_n)$ دو بردار در $\mathbb{R}^n$ باشند

حاصلضرب نقطه ای u و v

$$u\circ v = u_1v_1 + \dots + u_nv_n$$

حاصلضرب دو بردار جمع از بردارها ، یک عدد حقیقی است.

ویژگی ها

$$u\circ v = v\circ u$$

$$(u+v)\circ w = u\circ w + v\circ w$$

$$cu\circ v = c(u\circ v) = u\circ cv$$

نرم یک بردار در $\mathbb{R}^n$ (طول یا مقدار)

تعریف طول (یا اقلیدسی نرم)

$u=(u_1,u_2)$

طول بردار $u = \sqrt{u_1^2+u_2^2}$

$u=(u_1,\dots,u_n)$ در $\mathbb{R}^n$

$\|u\| = \sqrt{u_1^2+\dots+u_n^2}$

نرم یک بردار برحسب حاصلضرب نقطه‌ای

$\|u\| = \sqrt{u\cdot u}$

بردار یکه: بردارست که نرم آن برابر 1 باشد

اگر v یک بردار ناصفر باشد آنگاه $u=\frac{1}{\|v\|}v$ بردار یکه در جهت v است

$(1,0)$ نشان دهید بردار یکه است؟

$\|(1,0)\| = \sqrt{1^2+0} = 1$ بنابراین $(1,0)$ بردار یکه است

$(0,1)$ نیز یک بردار یکه در $\mathbb{R}^2$ است

نرم بردار $(2,-1,3)$ را بیابید آنرا نرمال کنید

$\|(2,-1,3)\| = \sqrt{2^2+(-1)^2+(3)^2} = \sqrt{14}$

روش ساختن بردار یکه هم جهت با بردار داده شده را نرمال سازی بردار گویند

بردار نرمال شده:

$u = \frac{1}{\|v\|}v = \frac{1}{\sqrt{14}}(2,-1,3)$

بردارهای یکه

$(1,0)$ ، $(0,1)$ بردار یکه در $\mathbb{R}^2$

$(1,0,0)$ و $(0,1,0)$ و $(0,0,1)$ بردار یکه در $\mathbb{R}^3$

$(1,0,\dots,0)$ و ... و $(0,\dots,0,1)$ بردار یکه در $\mathbb{R}^n$

قضیه نامساوی کوشی شوارتز

$|u\cdot v| \leq \|u\|\,\|v\|$

تعمیم زاویه در $\mathbb{R}^2$ را به $\mathbb{R}^n$

قدر مطلق $u\cdot v$

تساوی برقرار است $|u\cdot v| \leq \|u\|\,\|v\|$

حالت خاص $u=0 \Rightarrow |u\cdot v|=0 \Rightarrow \|u\|\,\|v\|=0$

با فرض $u\neq 0$

$ru+v$ بردار

عدد حقیقی دلخواه

خواص حاصلضرب مدرسی $\Rightarrow (ru+v)\cdot(ru+v) = r^2(u\cdot u)+v\cdot v$

حاصلضرب داخلی $(ru+v)\cdot(ru+v) \geq 0$

ترکیب دو خاصیت $\therefore r^2(u\cdot u)+2r(u\cdot v)+v\cdot v \geq 0$

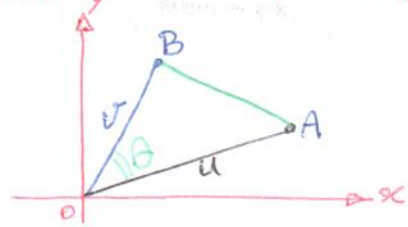
$r^2\|u\| + 2r\,u\cdot v + \|v\|$

زاویه بین بردارها

بردارهای ۲ بعدی در $\mathbb{R}^2$

فرض $u=(a,b)$, $v=(c,d)$

$\cos\theta = ?$



$$\cos\theta = \frac{u\cdot v}{\|u\|\cdot\|v\|}$$

قانون cos :

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2(OA)(OB)\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{AB^2 - OA^2 - OB^2}{2(OA)(OB)}$$

$$OA^2 + OB^2 - AB^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - \|v-u\|^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - \left[(c-a)^2 + (d-b)^2\right]$$

$$= 2ac + 2db = 2u\cdot v$$

$$2(OA)(OB) = 2\|u\|\|v\| \qquad \cos\theta = \frac{u\cdot v}{\|u\|\cdot\|v\|}$$

$$|\cos\theta| \leq 1 \Longrightarrow \left|\frac{u\cdot v}{\|u\|\,\|v\|}\right| \leq 1$$

تعریف زاویه بین دو بردار در $\mathbb{R}^2$ یا $\mathbb{R}^n$

u و v دو بردار ناصفر در $\mathbb{R}^n$

θ زاویه بین این بردارها $\Longrightarrow \cos\theta = \dfrac{u\cdot v}{\|u\|\cdot\|v\|}$ $\quad 0 \leq \theta \leq \pi$

$u=(1,0,0)$

$v=(1,0,1)$

$\mathbb{R}^3$, $\theta = ?$

$* \; u\cdot v = (1,0,0)\cdot(1,0,1) = 1$

$* \; \|u\| = \sqrt{1^2+0+0} = 1$

$* \; \|v\| = \sqrt{1^2+0+1^2} = \sqrt{2}$

$$\cos\theta = \frac{uv}{\|u\|\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\theta = 45^\circ$

دو بردار ناصفر را عمود بر هم گوییم اگر زاویه بین آنها قائمه یا $\frac{\pi}{2}$ باشد

شرط عمود بودن ضرب داخلی دو بردار $u\cdot v = 0$

بردارهای عمود بر هم

$\mathbb{R}^2 \longrightarrow (1,0), (0,1)$

$\mathbb{R}^3 \longrightarrow (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)$

$\mathbb{R}^n \longrightarrow (0,0,0,\ldots,1), \ldots, (1,0,0,0,\ldots)$

در $\mathbb{R}^2$ برداری بیابید که بر $(1,-3)$ عمود باشد

بردارهای زیادی با این شرط موجودند که همگی بر یک خط قرار دارند

فرض (a,b) بر $(3,-1)$

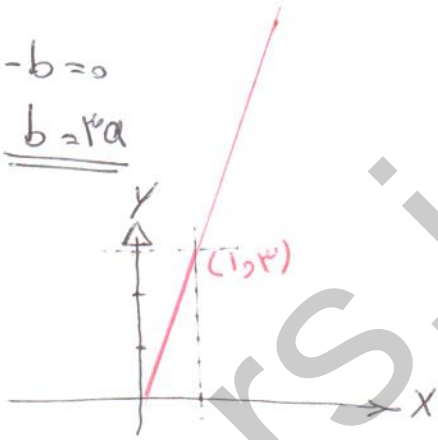
$$(a,b)\cdot(3,-1)=0 \Rightarrow [(a\times 3)+(b\times(-1))]=0 \Rightarrow 3a-b=0$$

$$\underline{\underline{b=3a}}$$

پس هر بردار به شکل $(a,3a)$ بر بردار $(3,-1)$ عمود است

چنین برداری به صورت $a(1,3)$ نوشته میشود

بردار $(1,3)$ روی خطی قرار دارد



قضیه الف) نامساوی مثلثی $\|u+v\| \leq \|u\|+\|v\|$

اندازه یک ضلع مثلث نمی‌تواند از حاصل جمع اندازه‌های دو ضلع دیگر بیشتر باشد

ب) قضیه فیثاغورث

اگر $u\cdot v=0$ $\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$

مربع وتر یک مثلث قائم‌الزاویه برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگر است

بنا به پیوستگی نرم

$$\|u+v\|^2=(u+v)\cdot(u+v)=u\cdot u+2u\cdot v+v\cdot v=\|u\|+2u\cdot v+\|v\|$$

$$\|u+v\|^2 \leq \|u\|^2+2|u v|+\|v\|$$

از نامساوی کوشی-شوارتز

$$\|u+v\|^2 \leq \|u\|^2+2\|u\|\|v\|+\|v\|^2$$

$$\|u+v\|^2 \leq (\|u\|+\|v\|)^2$$

جذر گرفتن طرفین

$$\Rightarrow \|u+v\| \leq \|u\|+\|v\|$$ نامساوی مثلث

* $u\cdot v=0$

$$\|u+v\|^2=(u+v)\cdot(u+v)$$

$$=uu+\underbrace{2uv}_{0}+vv=uu+vv$$

اثبات قضیه فیثاغورث

$$\|u+v\|^2=\|u\|+\|v\|$$

فاصله بین نقاط:

$\mathbb{R}^2$

$X=(x_1,x_2)$

$Y=(y_1,y_2)$

$$d(X,Y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

$\mathbb{R}^n$ $X=(x_1,\dots,x_n)$

$Y=(y_1,\dots,y_n)$

$$d(X,Y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}$$

$$d(X,Y)=\|X-Y\|$$

$\mathbb{R}^2: d(X,Y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$

$\mathbb{R}^3: d(X,Y)=\left[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2\right]^{1/2}$

$\mathbb{R}^n: d(X,Y)=\left[(x_1-y_1)^2+\dots+(x_n-y_n)^2\right]^{1/2}$

ویژگی های نرم

$\|u\|\geq 0$ طول یک بردار نمی تواند منفی باشد

$\|u\|=0$ اگر و تنها اگر $u=0$

اطول بردار صفر است اگر و تنها اگر بردار برابر صفر باشد

$\|cu\|=|c|\,\|u\|$

طول cu برابر $|c|$ برابر طول بردار u است

$\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|$

نامساوی مثلثی

ویژگی های فاصله

$d(X,Y)\geq 0$ فاصله بین دو نقطه نمی تواند منفی باشد

$d(X,Y)=0$ اگر و تنها اگر $X=Y$

فاصله بین دو نقطه برابر صفر است اگر و فقط اگر دو نقطه بر هم منطبق باشند

$d(X,Y)=d(Y,X)$

$d(X,Y)\leq d(X,Y)+d(Y,Z)$

ساختارهای هندسی R^n را مطالعه می کنیم

این هندسه، هندسه اقلیدسی نامیده میشود

۱۳ هندسه اقلیدسی $\mathbb{R}^n$

$u \cdot v = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$ حاصلضرب نقطه‌ای دو بردار u, v

$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}$ نرم بردار u

$\cos\theta = \dfrac{u \cdot v}{\|u\|\,\|v\|}$ زاویه بین دو بردار u, v

$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$ فاصله بین نقاط x, y

نگاشت خطی

فرض u و v بردارهای در $\mathbb{R}^n$ و c یک عدد باشد

$T: R^n \longrightarrow R^m$ نگاشت خطی

خطی نامیده می‌شود اگر

$$T(u+v) = T(u) + T(v)$$

$$T(cu) = cT(u)$$

حاصل جمع دو بردار به جمع دو تصاویر آن دو بردار می‌نگارد

T ضرب عددی یک بردار را به ضرب عددی از تصویر آن بردار می‌نگارد

هر ماتریس یک نگاشت را تعریف می‌کند و چنین نگاشتی خطی است

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \mathbb{R}^3$$

نگاشت خطی $T(X) = AX$

$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$T(X) = \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} x + 4y - 2z \\ 4y + z \end{bmatrix}$$

تصویر هر بردار مشخص با استفاده از مقادیر مناسب x و y و z محاسبه می‌شود

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \end{bmatrix} \quad , \quad T\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8 \\ 17 \end{bmatrix}$$

نمایش ماتریسی

$T: R^n \longrightarrow R^m$ یک نگاشت خطی

بردارهای مستوی $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdots e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ و $u = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ بردار دلخواه

بردارهای مبنای استاندارد $\mathbb{R}^n$

میتوان هر بردار مبنای دلخواهی مانند u را به طور یکتا برحسب آنها نوشت

$$u = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$$

چون T یک تبدیل خطی

$$T(u) = T(a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n)$$

$$= a_1 T(e_1) + \cdots + a_n T(e_n)$$

$$= \underbrace{\left[T(e_1) + \cdots + T(e_n)\right]}_{\text{ماتریس با ستون‌های}} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

تبدیل خطی T توسط ماتریس $A = [T(e_1) + \cdots]$ تعریف می‌شود

A ماتریس استاندارد T نامند

ماتریس استاندارد $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2x+y\\3y\end{bmatrix}$

اثر T روی مبنای استاندارد $T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$ و $T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ $\quad A=\begin{bmatrix}2&1\\0&3\end{bmatrix}$

T می‌تواند به عنوان یک تبدیل ماتریس نوشته شود

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2&1\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

فضاها برداری ماتریس‌ها

مجموعه ماتریس‌های حقیقی، ماتریس‌هایی با درایه‌های اعداد حقیقی، این مجموعه یک فضا برداری است

$M_{2\times2}$ نماد برداری

$M_{m\times n}$: مجموعه ماتریس‌های $m\times n$ یک فضای برداری است

استقلال و وابستگی خطی

$\{(1,2,3),(-2,1,1),(8,6,10)\}\longrightarrow\mathbb{R}^3$ وابستگی خطی

می‌خواهیم نشان دهیم حداقل یکی از c_iها غیر صفر است.

$$c_1(1,2,3)+c_2(-2,1,1)+c_3(8,6,10)=0$$

$$(c_1,2c_1,3c_1)+(-2c_2,c_2,c_2)+(8c_3,6c_3,10c_3)=0$$

$$(c_1-2c_2+8c_3,\ 2c_1+c_2+6c_3,\ 3c_1+c_2+10c_3)=0$$

$$\begin{cases}c_1-2c_2+8c_3=0\\2c_1+c_2+6c_3=0\\3c_1+c_2+10c_3=0\end{cases}\qquad\begin{bmatrix}1&-2&8\\2&1&6\\3&1&10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

چون حداقل یکی از c_iها غیر صفر است پس وابسته خطی اند

$c_1=4$

$c_2=-2$

$c_3=-1$

$$4(1,2,3)-2(-2,1,1)-(8,6,10)=0$$

$\{(1,0,5),(3,-1,4),(3,-2,2)\}\longrightarrow\mathbb{R}^3$ مستقل خطی

$$c_1(1,0,5)+c_2(3,-1,4)+c_3(3,-2,2)=0$$

وقتی برقرار است که c_iها همگی صفر است

خط یک فضای یک بعدی ، صفحه یک شش روبه‌روی

مجموعه گسترش ، استقلال خطی

مجموعه متناهی از بردارها همانند $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ را یک پایه فضای برداری V می‌نامیم.

هرگاه این مجموعه مولد V و مستقل خطی باشد

بردار فضا ترکیبی از بردارهای پایه و بردارهای پایه مستقل از یکدیگرند

پایه استاندارد $\mathbb{R}^n$: مجموعه بردارهای $\{(1,0,\dots,0), (0,1,0,\dots,0), \dots, (0,\dots,0,1)\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ است

$\{(1,0,0,-1), (1,1,1,1), (1,2,4,4)\}$ یک پایه $\mathbb{R}^4$

اسکالر $[c_1, c_2, c_3]$ و برداری دلخواه (x_1, x_2, x_3) این مجموعه $\mathbb{R}^n$ را گسترش می‌دهد

$$c_1(1,0,0,-1) + c_2(1,1,1,1) + c_3(1,2,4,4) = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = x_1 \\ 0 + c_2 + 2c_3 = x_2 \\ -c_1 + c_2 + 4c_3 = x_3 \end{cases} \qquad \begin{aligned} c_1 &= 2x_1 - 3x_2 + x_3 \\ c_2 &= -2x_1 + 5x_2 - 2x_3 \\ c_3 &= x_1 - 2x_2 + x_3 \end{aligned}$$

این مجموعه مستقل خطی است

$$b_1(1,0,0,-1) + b_2(1,1,1,1) + b_3(1,2,4,4) = (0,0,0,0)$$

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 0 \\ 0 + b_2 + 2b_3 = 0 \\ -b_1 + b_2 + 4b_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} b_1 &= 0 \\ b_2 &= 0 \\ b_3 &= 0 \end{aligned}$$

مجموعه مستقل خطی است

نشان دهید $\{f, g, h\}$ که که $f(x) = x^2+1$ و $g(x) = 2x-1$ و $h(x) = -4x+1$ یک پایه برای P_2 است

$$P(x) = bx^2 + cx + d$$

$$P(x) = a_1 f(x) + a_2 g(x) + a_3 h(x)$$

پس داریم $bx^2 + cx + d = a_1(x^2+1) + a_2(2x-1) + a_3(-4x+1)$

$$bx^2 + cx + d = a_1 x^2 + (2a_2 - 4a_3)x + (a_1 - a_2 + a_3)$$

$$a_1 = b, \quad 2a_2 - 4a_3 = c, \quad a_1 - a_2 + a_3 = d$$

$$a_2 = 4b - 4d - c$$

$$a_3 = 3b - 3d - c$$

هرگاه فضای برداری V دارای پایه‌ای مستقل بر n بردار باشد بعد V را برابر n می‌نامیم $\dim V$

$\{(1,2,3),(-2,4,1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\text{زیرفضا}} V$

بنابراین { یک پایه برداری V است }

$v = c_1(1,2,3)+c_2(-2,4,1)$ بردارهای زیرفضا

چون $(1,2,3)$ و $(-2,4,1)$ مضرب از هم نمی‌باشند این بردارها مستقل خطی هستند

در نتیجه $\dim V = 2$ و V صفحه است که از مبداء می‌گذرد

مبداء یک زیرفضای $\mathbb{R}^3$ است، بعد این زیرفضا را برابر صفر می‌گذارند

زیرفضاهای یک بعدی $\mathbb{R}^3$ خط‌هایی هستند که از مبداء می‌گذرند

زیرفضاهای دو بعدی $\mathbb{R}^3$ صفحه‌هایی هستند که از مبداء می‌گذرند.

بعد برخی فضاها

بعد فضای برداری $M_{m\times n}$ برابر mn است

بعد P_2 فضای برداری چندجمله‌ای با درجه حداکثر ۲

$ax^2+bx+c = a(x^2)+b(x)+c(1)$

$(x^2, x, 1)$ مستقل خطی

$\{x^2, x, 1\}$ یک پایه برای P_2

$ax^2+bx+c=0$ برای هر x ، $a=0$ و $b=0$ و $c=0$

پس بعد فضا برداری P_2 برابر ۳ است

بعد P_n برابر $n+1$ یک پایه P_n $\{x^n, x^{n-1}, \dots, x, 1\}$

پایه استاندارد

فضای برداری $\mathbb{C}^2$ ، بردارهای $(1,0)$ و $(0,1)$ در $\mathbb{C}^2$ مستقل خطی اند

$(a+bi, c+di) = (a+bi)(1,0)+(c+di)(0,1)$ $(a+bi, c+di)$

بعد $\mathbb{C}^2$ برابر ۲ می‌باشد

$\{(1,0,\dots,0), \dots, (0,\dots,1)\}$ یک پایه $\mathbb{C}^n$ باشد بعد این فضا برابر n می‌باشد

رتبه ماتریس

مفهوم رتبه، ارتباط ماتریس با بردار بودن و جواب دستگاه معادلات خطی، متقارن بودن یک ماتریس، معکوس پذیری، تحت تأثیر رتبه قرار می‌گیرند

$A_{m\times n}$ ، سطرهایش شامل بردارهای سطری $r_1, \dots, r_m$ و ستون‌هایش شامل بردارهای ستونی $c_1, \dots, c_n$ می‌باشد

هر بردار سطری شامل n مؤلفه هر بردار ستونی شامل m مؤلفه بردارهای سطری زیرفضای از $\mathbb{R}^n$ و بردارهای ستونی زیرفضای از $\mathbb{R}^m$ را گسترش می‌دهند

فضای ستونی

فضای سطری

$$A=\begin{bmatrix}1&1&-1&2\\3&4&1&6\\5&4&1&0\end{bmatrix}$$

بردارهای سطری A: $r_1=(1,1,-1,2)$

$r_2=(3,4,1,6)$

$r_3=(5,4,1,0)$

فضای سطری A

بردارهای زیرفضایی از $\mathbb{R}^4$

بردارهای ستونی A: $c_1=\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}$, $c_2=\begin{bmatrix}1\\4\\4\end{bmatrix}$, $c_3=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$, $c_4=\begin{bmatrix}2\\6\\0\end{bmatrix}$

فضای ستونی A

بردارهای زیرفضایی از $\mathbb{R}^3$

فضای سطری و فضای ستونی ماتریس A دارای یک بُعد هستند

$$\dim(\text{فضای ستونی } A) \leqslant \dim(\text{فضای سطری } A)$$

$$\dim(\text{فضای سطری } A) \leqslant \dim(\text{فضای ستونی } A)$$

$$\dim(\text{فضای ستونی } A) = \dim(\text{فضای سطری } A)$$

$\text{Rank}(A)$

بعد فضای سطری (ستونی) ماتریس A را رتبه A می‌نامیم

(رتبه ابزاری محاسباتی و هندسی سفید است)

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\2&5&8\end{bmatrix} \qquad \text{Rank}(A)=?$$

سطر سوم ترکیبی از دو سطر دیگر است

سه سطر وابسته خطی

رتبه این ماتریس از ۳ کوچکتر

$(2,5,8)=2(1,2,3)+(0,1,2)$

دو بردار $(1,2,3)$ و $(0,1,2)$ مستقل خطی و تشکیل یک پایه برای فضای برداری A

$\text{Rank}(A)=2$

تعیین رتبه ماتریس از عدم پلکانی تحویل یافته قابل تشخیص است

سطرهای غیرصفر ماتریس A که بفرم پلکانی تحویل یافته باشد تشکیل یک پایه برای فضای سطری A

رتبه A برابر تعداد بردارهای سطری غیرصفر آن است

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

فرم پلکانی تحویل یافته

سه بردار سطری غیرصفر

یک پایه فضای سطری

$\text{rank}(A)=3$

فرض کنیم A و B دو ماتریس سطری معادلند پس دارای یک فضای سطری هستند پس

$Rank(A) = Rank(B)$

فرض کنیم E فرم سطری پلکانی تحویل یافته ماتریس A باشد

بردارهای سطری غیرصفر E، تشکیل یک پایه برای فضای سطری A می‌دهد

و رتبه A، برابر تعداد بردارهای سطری غیرصفر E است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

*؟ پایه‌ای برای فضای سطری و

*؟ رتبه ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$Rank(A) = 2$ یک پایه برای فضای سطری A بردارهای $(1, 0, 7)$ و $(0, 1, -2)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

پایه برای فضای ستونی

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بردارهای غیرصفر سطری $(1, 0, 5)$ و $(0, 1, -3)$

یک پایه فضای سطری A^t

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

یک پایه فضای ستونی A

با فرض $A_{n \times n}$

الف) A وارون‌پذیر است

ب) $|A| \neq 0$ و A نامنفرد

ج) دستگاه $AX = B$ دارای جواب منحصر بفرد است

د) A با I_n هم‌ارز سطری

هـ) $Rank(A) = n$

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

یک نگاشت خطی روی فضای برداری با بعد متناهی V را انتخاب کرده و بررسی می‌کنیم در درون آن چه می‌گذرد به زبان ماتریس‌ها

ماتریس قطری

$$D=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots\\ \vdots & & \lambda_3 & \\ 0 & \cdots & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

پایه $B=\{x_1,\dots,x_n\}$

ماتریس T نسبت به پایه‌ی مرتب B، D است اگر و فقط اگر

$T(x_k)=\lambda_k x_k \qquad k=1,\dots,n$

رتبه — دترمینان — برد — $\operatorname{Ker}T$

$\lambda\neq 0$ زیرفضاهای تولید شده توسط x = برد

زیرفضای تولید شده به وسیله بقیه xها = $\operatorname{Ker}T$

فرض T نگاشت خطی روی فضای با بعد متناهی V و λ اسکالر دلخواه

(λ یک مقدار ویژه T است) (نگاشت $(T-\lambda I)$ معکوس‌پذیر نیست)

$(\det(T-\lambda I)=0)$

$\det(A-\lambda I)=0 \longleftarrow$ λ مقدار ویژه A است

اگر $\det(\lambda I-A)=0$ ماتریس $(xI-A)$ تشکیل چندجمله‌ای

$P(x)=\det(xI-A)$ (چندجمله‌ای مشخصه) (سرشت‌نمای A)

$B=P^{-1}AP$

$\det(xI-B)=\det(xI-P^{-1}AP)=\det(xIP^{-1}P-P^{-1}AP)$

$=\det(P^{-1}(xI-A)P)=\det P^{-1}\times\det(xI-A)\det P=\det(xI-A)$

بررسی مقادیر ویژه حقیقی و بردارهای ویژه ماتریس‌های ۲×۲

$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$

$\det(\lambda I-A)=0$

$\begin{vmatrix}\lambda-a & -b\\ -c & \lambda-d\end{vmatrix}=0 \Rightarrow (\lambda-a)(\lambda-d)-bc=0$

$\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0$

$\lambda^2-tr(A)\lambda+\det(A)=0$

$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=trace(A)\\ \lambda_1\cdot\lambda_2=\det(A)\end{cases}$

$Ax=\lambda x$

$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}(\lambda-a)x-by=0\\ -cx+(\lambda-d)y=0\end{cases}$

$Ax=\lambda x,\ k\neq 0$

$A(kx)=kAx=k(\lambda x)=\lambda(kx)$

$A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ مقادیر ویژه T = ?

$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda & +1\\ -1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1=0$ چون معادله مشخصه (مفسر) دارای ریشه حقیقی نیست T هیچ مقدار ویژه‌ای حقیقی ندارد.

$A=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ m & 4\end{bmatrix}$ m را تعیین کرده بگونه‌ای که ماتریس A همه بردارهای مختلط را تغییر دهد.

ماتریس A باید فاقد مقادیر ویژه حقیقی باشد

$\lambda^2-(\text{trace}(A)\lambda+\det A=0$

$\lambda^2-2\lambda+(-4+2m)=0 \qquad \Delta'<0 \Rightarrow 1+4-2m<0 \Rightarrow m>2$

ایده‌ی گاوسی که برداری مفروض را به برداری موازی با آن می‌نگارد در حل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل مدل‌های فیزیکی، اندازه‌ی اهمیت کاربرد دارد

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس‌های ۳×۳

$A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix} \qquad \det(\lambda I-A)=0 \qquad \begin{vmatrix}\lambda-a & -b & -c\\ -d & \lambda-e & -f\\ -g & -h & \lambda-i\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow \lambda^3-(\text{trace}(A))\lambda^2+\left(\begin{vmatrix}a & b\\ d & e\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}e & f\\ h & i\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & c\\ g & i\end{vmatrix}\right)\lambda-\det(A)=0$

یک ریشه حقیقی متمایز - یک ریشه حقیقی مضاعف - مقدار ویژه مساوی

مقادیر ویژه حقیقی را در دستگاه همگن

$AX=\lambda X \quad \begin{cases}(\lambda-a)x-by-cz=0\\ -dx+(\lambda-e)y-fz=0\\ -gx-hy+(\lambda-i)z=0\end{cases}$

جواب‌های غیرصفر این دستگاه همگن را در هر حالت جستجو تا بردارهای ویژه به مقدار ویژه بدست آید.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & -5 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$S_m=(-1)^m\sum_{P}\left|A^{i_1 i_2 \cdots i_m}_{i_1 i_2 \cdots i_m}\right|\lambda^{n-m}$$

$$|A|=2$$

$$S_1=1+0+-2+6=5$$

$$S_2=\begin{vmatrix}1&-4\\2&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&-1\\-1&-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&-4\\-1&6\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&5\\1&-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&-4\\4&6\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-2&3\\-1&6\end{vmatrix}$$

$$S_2=8-3+2-5+16-9=9$$

S_2 تعداد کهادهای $C^2_4=\frac{4!}{2!\,2!}=6$ $\qquad$ S_3 تعداد کهادهای $C^3_4=\frac{4!}{3!\,1!}=4$

$$S_3=\begin{vmatrix}1&-4&-1\\2&0&5\\-1&1&-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&-4&-4\\2&0&-4\\-1&4&6\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&-1&-4\\-1&-2&3\\-1&-1&6\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&5&-4\\1&-2&3\\4&-1&6\end{vmatrix}=-3+16-8+2=7$$

$$\det(\lambda I-A)=\lambda^4-5\lambda^3+9\lambda^2-7\lambda+2$$

$$f(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11}&-a_{12}&-a_{13}\\-a_{21}&\lambda-a_{22}&-a_{23}\\-a_{31}&-a_{32}&\lambda-a_{33}\end{vmatrix}$$

$$f'(\lambda)=\begin{vmatrix}1&0&0\\-a_{21}&\lambda-a_{22}&-a_{23}\\-a_{31}&-a_{32}&\lambda-a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda-a_{11}&-a_{12}&-a_{13}\\0&1&-a_{23}\\-a_{31}&-a_{32}&\lambda-a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda-a_{11}&-a_{12}&-a_{13}\\-a_{21}&\lambda-a_{22}&-a_{23}\\0&0&1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-a_{22}&-a_{23}\\-a_{32}&\lambda-a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda-a_{11}&-a_{13}\\-a_{31}&\lambda-a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda-a_{11}&-a_{12}\\-a_{21}&\lambda-a_{22}\end{vmatrix}=(\lambda I-A)$$

مجموع همه کهادهای ۲×۲ اصلی ماتریس

$$f''(\lambda)=\begin{vmatrix}1&0\\-a_{32}&\lambda-a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda-a_{22}&-a_{23}\\0&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&0\\-a_{31}&\lambda-a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda-a_{11}&-a_{13}\\0&1\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}1&-a_{12}\\-a_{21}&\lambda-a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda-a_{11}&-a_{12}\\0&1\end{vmatrix}=2\left[(\lambda-a_{11})+(\lambda-a_{22})+(\lambda-a_{33})\right]$$

$$=2!\,(\lambda I-A)$$

مجموع همه کهادهای ۱×۱ اصلی ماتریس

$$f'''(\lambda)=3! \Rightarrow f^{(4)}(\lambda)=f^{(5)}(\lambda)=\cdots=0$$

$A_{n\times n}$ و λ مقدار ویژه

مجموعه همه بردارهای ویژه متناظر با λ همراه با بردار صفر، زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$ است

این زیرفضا را فضای ویژه λ می‌نامیم

بسته
۱
نیست

برای اینکه نشان دهیم فضای ویژه، زیرفضای بردار است باید ثابت کنیم نسبت به ضرب اسکالر و جمع بردارها

فرض X_1, X_2

$$AX_1=\lambda X_1,\quad AX_2=\lambda X_2 \Rightarrow AX_1+AX_2=\lambda X_1+\lambda X_2$$

$$A(x_1+x_2)=\lambda(x_1+x_2)$$

x_1 و x_2 عضوی از فضای ویژه است

$$Ax_1=\lambda x_1 \Rightarrow cAx_1=c\lambda x_1 \Rightarrow A(cx_1)=\lambda(cx_1)$$

یعنی فضای ویژه نسبت به ضرب اسکالر نیز بسته است

$$A=\begin{bmatrix}5&4&2\\4&5&2\\2&2&2\end{bmatrix}$$

پایه‌ای از فضاهای ویژه ماتریس A را بدست آوریم

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}5-\lambda&4&2\\4&5-\lambda&2\\2&2&2-\lambda\end{vmatrix}\xrightarrow{-r_2+r_1}\begin{vmatrix}1+\lambda&-1+\lambda&0\\4&5-\lambda&2\\2&2&2-\lambda\end{vmatrix}\xrightarrow{C_1+C_2}\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\4&9-\lambda&2\\2&4&2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\left[(9-\lambda)(2-\lambda)-8\right]=-(\lambda-10)(\lambda-1)^2$$

مقادیر ویژه A: $\lambda=10$ و 1

$$(A-\lambda I)x=0$$

چندگانگی یک

$$\lambda=10 \Rightarrow (A-10I)x=0 \Rightarrow \begin{bmatrix}-5&4&2\\4&-5&2\\2&2&-8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned}-5x_1+4x_2+2x_3&=0\\4x_1-5x_2+2x_3&=0\\2x_1-2x_2-8x_3&=0\end{aligned}$$

فضای ویژه $\lambda=10$ فضای یک بعدی از بردارهای مضرب $\begin{bmatrix}2\\2\\3\end{bmatrix}$ است $(x_1=x_2=2,\ x_3=3)$

چندگانگی دو

$$\lambda=1 \Rightarrow (A-1I)x=0 \Rightarrow \begin{bmatrix}4&4&2\\4&4&2\\2&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned}x_1&=-s-t\\x_2&=s\\x_3&=2t\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-s-t\\s\\2t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-s\\s\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-t\\0\\2t\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}$$

یعنی فضای ویژه $\lambda=1$ فضا دو بعدی با پایه

$$B=\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}\right\}$$ است

$A : \mathbb{C}^n$

مقدار ویژه مختلط

اسکالر مختلط λ در $\det(A-\lambda I)=0$ صدق می‌کند اگر و فقط اگر بردار ناصفر X در $\mathbb{C}^n$ وجود داشته باشد

$AX=\lambda X$

بردار ویژه مختلط

$$A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Delta(\lambda)=\lambda^2+1=0$$

ریشه حقیقی ندارد

$$\lambda=\pm i$$

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}i\\ 1\end{bmatrix}=i\begin{bmatrix}1\\ -i\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-i\\ 1\end{bmatrix}=-i\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix}$$

i و $-i$ مقادیر ویژه

$\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}1\\ -i\end{bmatrix}$ بردارهای ویژه هستند

$$A=\begin{bmatrix}0.5 & -0.4\\ 0.75 & 1.1\end{bmatrix}$$

? مقادیر ویژه A

? بردار ویژه‌ها

$$\lambda^2-1.6\lambda-1=0$$

$$\lambda=\frac{1}{2}\left[1.6\pm\sqrt{(-1.6)^2-4}\right]=0.8\pm 0.6i$$

$$\lambda_1=0.8+0.6i$$

$$(A-\lambda I)=\begin{bmatrix}0.5-0.8-0.6i & -0.4\\ 0.75 & 1.1-0.8-0.6i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.3-0.6i & -0.4\\ 0.75 & 0.3-0.6i\end{bmatrix}$$

این ماتریس معکوس پذیر نیست

فرض $x=-2-4i$

$y=5$

$$v_1=\begin{bmatrix}-2-4i\\ 5\end{bmatrix},\quad v_2=\begin{bmatrix}-2+4i\\ 5\end{bmatrix}$$

مزدوج مختلط بردار مختلط X در $\mathbb{C}^n$ بردار $\bar{X}$ در $\mathbb{C}^n$ است که مؤلفه‌های آن مزدوج مختلط درایه‌های X هستند

قسمت‌های حقیقی و موهومی بردار مختلط X بردارهای $\mathrm{Re}X$ و $\mathrm{Im}X$ هستند که از قسمت‌های حقیقی و موهومی مؤلفه‌های X ساخته می‌شوند

$$X=\begin{bmatrix}3-i\\ i\\ 2+5i\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}3\\ 0\\ 2\end{bmatrix}}_{\mathrm{Re}X}+i\underbrace{\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 5\end{bmatrix}}_{\mathrm{Im}X}$$

$$\bar{X}=\begin{bmatrix}3\\ 0\\ 2\end{bmatrix}-i\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+i\\ -i\\ 2-5i\end{bmatrix}$$

خواص مزدوج ماتریس‌ها

$$\overline{rX}=\bar{r}\bar{X},\quad \overline{BX}=\bar{B}\bar{X},\quad \overline{BC}=\bar{B}\bar{C},\quad \overline{rB}=\bar{r}\bar{B},\quad (\bar{B})'=\overline{(B')}$$

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس حقیقی که روی $\mathbb{C}^n$ عمل می‌کند

$A_{n\times n}$ $\quad \overline{AX} = \bar{A}\bar{X} = A\bar{X}$

$$A\bar{X} = \overline{AX} = \overline{\lambda X} = \bar{\lambda}\bar{X}$$

در نتیجه $\bar{\lambda}$ مقدار ویژه ای از A بوده و $\bar{X}$ بردار ویژه متناظرش

وقتی A حقیقی است مقادیر ویژه مختلط آن در جفت‌های مزدوج ظاهر می‌شوند.

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{bmatrix} \qquad \lambda_{1,2} = 0.8 \pm 0.6i \ , \ v_1 = \begin{bmatrix} -3-4i \\ 5 \end{bmatrix} , \ v_2 = \begin{bmatrix} -3+4i \\ 5 \end{bmatrix} = \bar{v}_1$$

$$C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \qquad a,b \in \mathbb{R} \qquad \lambda = a \pm bi$$

$$a,b \neq 0 \qquad r = |\lambda| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$C = r\begin{bmatrix} \frac{a}{r} & -\frac{b}{r} \\ \frac{b}{r} & \frac{a}{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

نکاتی در مورد مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

۱) دترمینان هر ماتریس اسکالر، قطری، بالا مثلثی یا پایین مثلثی مساوی حاصلضرب درایه‌های روی قطر اصلی است

اگر A ماتریس اسکالر/قطری/بالا/پایین مثلثی باشد، درایه‌های واقع بر قطر اصلی مقادیر ویژه A خواهند بود

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

۲) برای اینکه ماتریس $A_{n\times n}$ مقدار ویژه $\lambda = 0$ داشته باشد کافی و لازم است که معادله $AX = 0X$ جواب غیربدیهی داشته و $AX = 0$ باشد A باید معکوس‌پذیر باشد، ($\lambda = 0$ است اگر A معکوس‌پذیر نباشد)

۳) اگر λ_i مقدار ویژه A باشد، A وارون‌پذیر ($\lambda_i \neq 0$)

مقادیر ویژه A^{-1} برابر $\frac{1}{\lambda_i}$ بوده ولی بردارهای ویژه A و A^{-1} یکسان هستند

$$AX = \lambda_i X \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}\lambda_i X \Rightarrow X = \lambda_i A^{-1}X \Rightarrow \frac{1}{\lambda_i}X = A^{-1}X$$

۴)

$$0 = \det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - A)' = \det(\lambda I - A')$$

A و A' معادله مشترک‌شان داشته و مقادیر ویژه برابر ولی بردارهای ویژه لزوماً برابر نبوده

۵) اگر ماتریس A در k ضرب شود مقادیر ویژه نیز در k ضرب شده ولی بردار ویژه تغییر نمی‌کند

$$AX = \lambda X \Rightarrow k(AX) = k(\lambda X) \Rightarrow (kA)X = (k\lambda)X$$

۶) اگر ماتریس A به توان m برسد مقادیر ویژه نیز m برابر شده ولی بردارهای ویژه ثابت هستند

$$AX = \lambda X \Rightarrow A(AX) = A(\lambda X) \Rightarrow A^2X = \lambda(AX) = \lambda(\lambda X) = \lambda^2 X$$

۷) در ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ مقادیر ویژه $a+b$ و $a-b$ بوده و راستای بردارهای ویژه $y \pm x$ است

$$\lambda^2-(a+a)\lambda+a^2-b^2=0 \Longrightarrow \lambda^2-(a+b+a-b)\lambda+(a+b)(a-b)=0$$

$$\Longrightarrow (\lambda-(a+b))(\lambda-(a-b))=0$$

$$\Longrightarrow \lambda_1=a+b \ , \ \lambda_2=a-b$$

$$\begin{cases} (\lambda-a)x-by=0 \\ -bx+(\lambda-a)y=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} x=y \\ -x=y \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

بردار ویژه یکسان برای مقدار ویژه ماتریس

$$\lambda_1=a+b=2+1=3$$
$$\lambda_2=a-b=2-1=1$$

$$(\lambda-2)x+y=0 \xrightarrow{\lambda=1} -x+y=0 \Rightarrow x=y$$

۸) اگر مقدار ویژه A ، λ باشد مقدار ویژه ماتریس $A+mI$ برابر $\lambda+m$ است اما بردارهای ویژه یکسان اند

$$AX=\lambda X \Longrightarrow AX+mIX=\lambda X+mIX \xrightarrow{IX=X} (A+m)X=(\lambda+m)X$$

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$A: \ \lambda_1=3 \ , \ \lambda_2=2 \ , \ \lambda_3=-2$

$A^2: \ \lambda=9,4,4 \Longrightarrow 2A^2: \ \lambda=18,8,8$

$A^{-1}: \ \lambda=\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{-2} \Longrightarrow (A^{-1})^3: \ \lambda=\frac{1}{27},\frac{1}{8},\frac{-1}{8}$

$A^2+3I: \ \lambda_{A^2}+3 \Longrightarrow \lambda=12,7,7$

۹) در ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ اگر b و c هم علامت باشند دو مقدار ویژه حقیقی متمایز داریم

$$\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=0$$

$$\Delta=(a-d)^2-4ad+4bc=\underbrace{(a-d)^2}_{\geq 0}+\underbrace{4abc}_{>0}>0$$

۱۰) $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و λ_1 و λ_2 ، α زاویه بین راستای بردارهای ماتریس $\tan\alpha=\left|\frac{\lambda_1-\lambda_2}{b-c}\right|$ ، $b\neq 0$

$$\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=0$$

$$\lambda=\frac{1}{2}\left((a+d)\pm\sqrt{(a-d)^2-4bc}\right)$$

$$\begin{cases} (\lambda-a)x-by=0 \\ -cx+(\lambda-d)y=0 \end{cases} \qquad m_1 \ , \ m_2 \qquad \tan\alpha=\left|\frac{\lambda_1-\lambda_2}{b-c}\right|$$

در $A_{2\times 2}$ اگر مقادیر ویژه متمایز بود 3 ماتریس متقارن

راستای بردارهای ویژه برهم عمودند

اگر ضرب اسکالر بردارهای ویژه برابر صفر باشند دو بردار برهم عمودند

مقادیر ویژه هر ماتریس متقارن حقیقی اعدادی حقیقی است

۱۱) اگر A ماتریس ۲x۲ یا ۳x۳ قطری باشد درایه‌های روی قطر متمایز باشد راستای بردارهای ویژه محورهای مختصات است

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \Longrightarrow \lambda_1=a_{11}\ ,\ \lambda_2=a_{22}\ ,\ \lambda_3=a_{33}$$

$(\lambda_1-a_{11})x=0$ $\quad$ x دلخواه $\quad$ $y=0$ و $z=0$ $\quad$ محور xها

$(\lambda_2-a_{22})y=0 \Longrightarrow$ y دلخواه $\quad$ $x=z=0$ $\quad$ محور yها

$(\lambda_3-a_{33})z=0$ $\quad$ z دلخواه $\quad$ $x=y=0$ $\quad$ محور zها

۱۲) اگر A ماتریس nxn اسکالر باشد هر بردار دلخواه بردار ویژه این ماتریس است.

$$A=\begin{bmatrix} k & & \phi \\ & k & \\ \phi & & \ddots \ k \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} \lambda-k & & \phi \\ & \lambda-k & \\ \phi & & \ddots \ \lambda-k \end{bmatrix}=0 \qquad (\lambda-k)^n=0 \Longrightarrow \lambda=k$$

$(\lambda-k)x_1=0$

$(\lambda-k)x_2=0 \quad \lambda=k \Longrightarrow$ هر x_i $\qquad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$\vdots$

$(\lambda-k)x_n=0$

۱۳) اگر A_{nxn} باشد مجموع درایه‌های هر سطر (ستون) دلخواه برابر عددی مانند S است که یکی از مقادیر ویژه ماتریس می‌باشد

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{1j}=\sum_{j=1}^{n} a_{2j}=\cdots=\sum_{j=1}^{n} a_{nj}=S$$

$$\det(\lambda I-A)=0 \Longrightarrow \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}=0$$

معمولی ستون‌ها دوم به بعد را به ستون اول دترمینان اضافه می‌کنیم

$$\Longrightarrow A=\begin{vmatrix} \lambda-\sum_{1}^{n} a_{1j} & & -a_{1n} \\ \vdots & & \\ \lambda-\sum_{1}^{n} a_{n1} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix}=0$$

$$\Longrightarrow \begin{vmatrix} \lambda-S & -a_{12} & \cdots & \\ \lambda-S & \lambda-a_{22} & & \\ \lambda-S & & \ddots & \\ \vdots & & & -a_{nn} \\ \lambda-S & & & \end{vmatrix}=0$$

$$\Longrightarrow (\lambda-S)\begin{vmatrix} 1 & -a_{12} & \cdots & \\ \vdots & \lambda-a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & -a_{nn} \end{vmatrix}=0$$

$\lambda=S$ یکی از مقادیر ویژه

۱۴) در ماتریس قطر فرعی از مرتبه فرد همواره در این وسط یکی از مقادیر ویژه است

۲۸

$$A=\begin{bmatrix}0&0&a\\0&b&0\\c&0&0\end{bmatrix}$$

$\lambda_1=b$

$$\det(\lambda I-A)=a\begin{vmatrix}0&b\\c&0\end{vmatrix}=a(0-bc)=-abc$$

$\lambda_{2,3}=\pm\sqrt{ac}$

$$\begin{bmatrix}0&0&\sqrt{2}\\0&4&0\\2\sqrt{2}&0&0\end{bmatrix}$$

$\lambda_1=4$

$\lambda_{2,3}=\pm\sqrt{\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}}=\pm 2$

۱۵) اگر $M=\begin{bmatrix}A_1&B\\0&A_2\end{bmatrix}$ A_1, A_2 ماتریس مربع

$$\lambda I-M=\begin{bmatrix}\lambda I-A_1&-B\\0&\lambda I-A_2\end{bmatrix}$$

$$|\lambda I-M|=\begin{vmatrix}\lambda I-A_1&-B\\0&\lambda I-A_2\end{vmatrix}=|\lambda I-A_1||\lambda I-A_2|$$

$$M=\begin{bmatrix}A_1&B&\cdots&C\\&A_2&\cdots&D\\&&\ddots&\\\phi&&&A_n\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}2&5&7&-9\\1&4&-6&6\\0&0&6&-5\\0&0&2&3\end{bmatrix}$$

$$|\lambda I-A|=|\lambda I_2-A_1||\lambda I_2-A_2|$$

$$|\lambda I_2-A_1|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-5\\-1&\lambda-4\end{vmatrix}=[(\lambda-2)(\lambda-4)-5]$$

$$=(\lambda^2-6\lambda+3)(\lambda^2-9\lambda+28)$$

۱۶) اگر A و B ماتریس $n\times n$ باشند مقادیر ویژه AB و BA برابرند

عدد صفر مقدار ویژه AB است

AB منفرد است

A یا B منفرد است

BA منفرد است

عدد صفر مقدار ویژه از BA است

λ مقدار ویژه ناصفر

v بردار ناصفر

$ABv=\lambda v$

فرض $w=Bv$

$\lambda\neq 0$

$v\neq 0$

$\Longrightarrow Aw=\lambda v=ABv\neq 0$

$w\neq 0$

بردار ویژه BA متناظر با λ

$\Longrightarrow BAw=BABw=B\lambda v=\lambda Bv=\lambda w$

در نتیجه λ مقدار ویژه‌ای از BA است

هر مقدار ویژه ناصفر BA مقدار ویژه‌ای از AB است.

۱۷) $A_{m\times n}$ و $B_{n\times m}$ چندجمله‌ای AB و BA در زیر صدق می‌کنند

$$\lambda^n|\lambda I_m - AB| = \lambda^m|\lambda I_n - BA|$$

بخصوص اگر $m=n$ باشد و $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$

مقادیر ویژه AB و BA بدلیل یکی شدن چندجمله‌ای برابرند

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -B & \mu I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mu I_m & A \\ B & \mu I_n \end{bmatrix}$$

۱۸) برای یک ماتریس مفروض $n\times n$ میتوان یک چندجمله‌ای نوشت ولی آیا برای $P(x)$ می‌توان ماتریس را بدست آورد

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

(بله)

هر یک از ماتریس‌های زیر یا ترانهاده آنها جواب مسئله است

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس همراه چندجمله‌ای $P(x)$

ماتریس فروبنیوس

فضاهای برداری

فضای برداری R^n شامل مجموعه عناصری است که بردار نامیده میشود که برای آنها دو عمل جمع و ضرب اسکالر تعریف شده. فضای برداری R^n تحت این عمل ها بسته است. حاصل جمع دو بردار R^n در R^n قرار دارد و حاصل ضرب اسکالر در یک بردار R^n در R^n است.

$u+v=v+u$

$u+(v+w)=(u+v)+w$

یک فضای برداری مجموعه‌ای مانند V متشکل از عناصری است که بردار نامیده میشود. با عمل جمع و ضرب اسکالر بر آن تعریف شده

عناصر u و v و w دلخواه

اسکالر c و d و V

بداهت‌های بستاری

- حاصل جمع $u+v$ وجود داشته و متعلق به V است (تحت جمع بسته است)
- cu عنصری از V است (تحت ضرب اسکالر بسته است)

بداهت‌های جمع

$u+v=v+u$ ویژگی جابه‌جایی

$u+(v+w)=(u+v)+w$ ویژگی شرکت‌پذیری

عنصری از V به شکل 0 که بردار صفر نامیده میشود وجود دارد $u+0=0$

متناظر هر عنصر u از V عنصری وجود دارد که قرینه u نامیده و $-u$ است $u+(-u)=0$

بداهت‌های ضرب اسکالر

$c(u+v)=cu+cv$ $\quad (c+d)u=cu+du$

$c(du)=cdu$ $\quad 1u=u$

مجموعه‌هایی که بعنوان مجموعه‌های اسکالر در فضاهای برداری استفاده میشود

مجموعه عددهای حقیقی و مختلط

فضاهای برداری حقیقی و مختلط

فضاهای برداری ماتریس‌ها

ماتریس‌های 2×2 با درایه‌های اعداد حقیقی

$u=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $v=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$

بداهت $u+v=\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}_{2\times2}$ $\quad M_{2\times2}$ جمع بسته

$0=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad u+0=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=u$ $\quad -u=\begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$

$u+(-u)=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=0$

مجموعه $M_{2\times2}$ متشکل از همه ماتریس‌های 2×2 که فضای برداری است

ویژگی‌های جبری $M_{2\times2}$ مشابه ویژگی‌های R^n است

$M_{m\times n}$: مجموعه ماتریس‌های $m\times n$ یک فضای برداری است

فضاهای برداری تابع‌ها

اگر V مجموعه همه تابع‌های حقیقی با دامنه عددهای حقیقی باشد
در عنصر V همانند f خط حقیقی را به خط حقیقی می‌نگارد
عمل‌های جمع و ضرب اسکالر را در V تعریف و آن را یک فضای برداری تبدیل می‌کنیم

$$(f+g)x = f(x)+g(x)$$

دو عنصر دلخواه V

$f+g$ تابعی با دامنه اعداد حقیقی

جمع نقطه‌ای: هر عدد حقیقی x در f را با مقدار g در x جمع می‌کنیم.

$$(cf)_{(x)} = c(f(x))$$

اسکالر نقطه‌ای

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$$

با دامنه اعداد حقیقی و عضوی متعلق به V
V تحت جمع بسته است

$$(f+0)(x) = f(x)+0(x) = f(x)$$

$$(f+(-f))(x) = f(x)+(-f)(x) = f(x)-f(f(x)) = 0 = 0(x)$$

فضاهای برداری مختلط $\mathbb{C}^n$

تعمیم مفهوم فضای برداری حقیقی $\mathbb{R}^n$ به فضای برداری مختلط $\mathbb{C}^n$

$(u_1, u_2, \dots, u_n)$ دنباله‌ای از n عدد مختلط

$\mathbb{C}^n$ (n-تایی‌های مرتب)

عضوی از $\mathbb{C}^2$: $((2+3i), (4-6i))$

عضوی از $\mathbb{C}^3$: $(3i, 1-5i, 4)$

$$(u_1, \dots, u_n)+(v_1, \dots, v_n) = (u_1+v_1, \dots, u_n+v_n)$$

$$c(u_1, \dots, u_n) = (cu_1, \dots, cu_n)$$

ویژگی‌های معکوس برداری‌ها

$A0$ بردار صفر V — V فضای برداری

$A0A\upsilon = A0$ $\quad A0 = A0$ $\quad (-1)A\upsilon = -A\upsilon$ $\quad A\upsilon = 0$ یا $c = 0$ آنگاه $cA\upsilon = A0$

$$0A\upsilon + 0A\upsilon = (0+0)A\upsilon = 0A\upsilon \quad \text{(ویژگی اسکالر)}$$

$$(-1)A\upsilon + A\upsilon = (-1)A\upsilon + 1A\upsilon = [(-1)+1]A\upsilon = 0A\upsilon = A0$$

$$0A\upsilon + 0A\upsilon + (-0A\upsilon) = 0A\upsilon + (-0A\upsilon)$$

$$0A\upsilon + [0A\upsilon + (-0A\upsilon)] = A0$$

$$0A\upsilon + A0 = A0$$

$$0A\upsilon = 0$$

زیرفضاها

زیرمجموعه‌هایی خاص از فضاهای برداری خودشان یک فضای برداری می‌دهند
فضای محاط شده در یک فضای بزرگتر را زیرفضا می‌نامیم
اگر V یک فضای برداری و U یک زیرمجموعه ناتهی V باشد U را یک زیرفضای V می‌نامیم هرگاه
تحت جمع و ضرب اسکالر بسته باشد

$(a,0,0,0)$ $(b,0,0,0)$ دو بردار در U

$\mathbb{R}$ اسکالر

$(a,0,0,0)+(b,0,0,0)=(a+b,0,0,0)\in U$

$k(a,0,0,0)=(ka,0,0,0)\in U$

زیرفضای $\mathbb{R}^4$

U مجموعه همه بردارهایی است که بر محورها واقع‌اند
حاصل جمع و ضرب اسکالر هر دو بردار واقع بر محورها بر این محور واقع‌اند

$\mathbb{R}^4$ (a,a^2,b) دو بردار

W در (c,c^2,d)

$(a,a^2,b)+(c,c^2,d)=(a+c,a^2+c^2,b+d)$

$\neq(a+c,(a+c)^2,b+d)$

عضوی از W نمی‌باشد
W تحت جمع بسته نیست
W زیرفضا نیست

ثابت کنید: مجموعه U متشکل از ماتریس‌های قطری 2×2 یک زیرفضای فضای برداری $M_{2\times2}$ می‌باشد.

باید نشان دهیم که U تحت جمع و ضرب اسکالر بسته است

$U=\begin{bmatrix}a&0\\0&b\end{bmatrix}$, $V=\begin{bmatrix}p&0\\0&q\end{bmatrix}$

$U+V=\begin{bmatrix}a+p&0\\0&b+q\end{bmatrix}$ و $cU=c\begin{bmatrix}a&0\\0&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ca&0\\0&cb\end{bmatrix}$

یک ماتریس قطری 2×2 بوده و عضوی از U است U تحت جمع بسته است

ماتریس قطری است
تحت عمل ضرب اسکالر بسته است

U یک زیرفضای $M_{2\times2}$ است
U یک فضای برداری ماتریس است که در $M_{2\times2}$ محاط شده است

فضای برداری

P_n مجموعه تابع‌های چندجمله‌ای حقیقی

P_n به همراه ضرب اسکالر و جمع در همه نیز است و همگی فضای برداری صدق می‌کند
P_n یک زیرمجموعه از فضای برداری V متشکل از همه تابع‌هایی با دامنه عددهای حقیقی است
نشان می‌دهیم که این زیرمجموعه یک زیرفضای V است در واقع صورت خود یک فضای برداری است
P_n تحت جمع و ضرب اسکالر بسته است

$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$

$g(x)=b_nx^n+\cdots+b_1x+b_0$

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

$=(a_n+b_n)x^n+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)$

یک چندجمله‌ای حداکثر با درجه برابر n است
$f+g$ ... تحت جمع بسته است

$(cf)(x) = c[f(x)]$

$= ca_n x^n + \cdots + ca_1 x + ca_0$

یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر n

لذا cf عضوی از P_n بوده و P_n تحت ضرب اسکالر بسته است

P_n یک زیرفضای V بوده و خود یک فضای برداری است.

فرض کنیم U یک زیرفضای برداری V باشد، U شامل بردار صفر V است.

مجموعه $(a, a, a+2)$

مثال دهید زیرفضای $\mathbb{R}^3$ نمی‌باشد

چک می‌کنیم که $(0,0,0)$ در W است

آیا مقداری از a هست که برای آن مجموعه برابر $(0,0,0)$ باشد.

$(a, a, a+2) = (0, 0, 0)$ پس

$$\begin{cases} a = 0 \\ a = 0 \\ a + 2 = 0 \end{cases}$$ ناممکن

پس $(0,0,0)$ عضوی از W نبوده

ولذا W یک زیرفضا نیست

$\mathbb{R}^3$

$(a, a, b) = a(1, 1, 0) + b(0, 0, 1)$

$(2, 2, 4) = 2(1, 1, 0) + 4(0, 0, 1)$

$(-1, -1, 7) = -1(1, 1, 0) + 7(0, 0, 1)$

ترکیبات خطی بردارها

فرض کنیم $v_1, v_2, \ldots, v_m$ بردارهای در فضای برداری V باشند، گوییم v بردارهای در V، یک ترکیب خطی از $v_1, \ldots, v_m$ است هرگاه اسکالرهایی چون $c_1, \ldots, c_m$ موجود باشند به قسمی که

$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_m v_m$

$(5, 4, 2) = (1, 2, 0) + 2(3, 1, 4) - 2(1, 0, 3)$

$c_1(1, 2, 3) + c_2(0, 1, 4) + c_3(2, 3, 6) = (-1, 1, 5)$

$(c_1, 2c_1, 3c_1) + (0, c_2, 4c_2) + (2c_3, 3c_3, 6c_3) = (-1, 1, 5)$

$((c_1 + 2c_3), (2c_1 + c_2 + 3c_3), (3c_1, 4c_2, 6c_3)) = (-1, 1, 5)$

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_3 &= -1 \\ 2c_1 + c_2 + 3c_3 &= 1 \\ 3c_1 + 4c_2 + 6c_3 &= 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= 3 \\ c_3 &= -1 \end{aligned} \Rightarrow (-1, 1, 5) = (1, 2, 3) + 3(0, 1, 4) - (2, 3, 6)$$

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 + 2c_2 & -3c_2 + c_3 \\ 2c_1 + 2c_3 & c_1 + 2c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 &= -1 \\ -3c_2 + c_3 &= 7 \\ 2c_1 + 2c_3 &= 8 \\ c_1 + 2c_2 &= -1 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} c_1 &= 3 \\ c_2 &= -2 \\ c_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

مجموعه بردارهای $v_1, \ldots, v_m$ از یک فضای برداری را وقتی یک مولد این فضا می‌نامیم که هر بردار فضا ترکیبی

3.1) Introduction

$$AB = [a_1 \cdots a_m]\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = a_1 b_1 + \cdots + a_m b_m$$

$$CA = C[a_1 \cdots a_m] = [Ca_1 \cdots Ca_m]$$

$$BD = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} b_1 D \\ \vdots \\ b_m D \end{bmatrix}$$

$x = [1 \quad 3]'$

$q_1 = [3 \quad 1]'$

$q_2 = [2, 2]$

3.2) Basis, Respresentation, and orthonormalization

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m = 0$$

$$x_1 = -\frac{1}{\alpha_1}\left[\alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m\right]$$

$$=: \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \cdots + \beta_m x_m$$

$$x = \alpha_1 q_1 + \cdots + \alpha_n q_n \qquad Q := [q_1 \cdots q_n]$$

$$x = Q\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} =: Q\bar{x} \qquad e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdots e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = I_n \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

نشان دهید بردارهای $(1,2,0)$ و $(0,1,-1)$ و $(1,1,2)$ مولد $\mathbb{R}^3$ هستند

$$(x,y,z)=c_1(1,2,0)+c_2(0,1,-1)+c_3(1,1,2)$$

ضرب اسکالر و جمع بردارها $\Rightarrow (x,y,z)=(c_1+c_3,\ 2c_1+c_2+c_3,\ -c_2+2c_3)$

سه بردار $\mathbb{R}^3$ را تولید می‌کنند

$$\begin{aligned} c_1+c_3&=x \\ 2c_1+c_2+c_3&=y \\ -c_2+2c_3&=z \end{aligned} \qquad \begin{aligned} c_1&=3x-y-z \\ c_2&=-4x+2y+z \\ c_3&=-2x+y+z \end{aligned}$$

بردار دلخواه:

$$(x,y,z)=(3x-y-z)(1,2,0)+(-4x+2y+z)(0,1,-1)+(-2x+y+z)(1,1,2)$$

استقلال و وابستگی خطی

الف) مجموعه بردارهای $\{v_1,\dots,v_m\}$ در یک فضای برداری V را وابسته خطی نامیم هرگاه اسکالرهای $c_1,\dots,c_m$ که همگی صفر نیستند وجود داشته باشد به قسمی که

$$c_1v_1+\dots+c_mv_m=0$$

ب) مجموعه بردارهای $\{v_1,\dots,v_m\}$ را مستقل خطی گوییم هرگاه

$$c_1v_1+\dots+c_mv_m=0$$
$$c_1=\dots=c_m=0$$

اثبات وابستگی خطی $\mathbb{R}^3$: $\{(1,2,3),(-2,1,1),(8,6,10)\}$

$$c_1(1,2,3)+c_2(-2,1,1)+c_3(8,6,10)=0$$

$$c_1-2c_2+8c_3=0 \qquad 2c_1+c_2+6c_3=0 \qquad 3c_1+c_2+10c_3=0$$

$$c_1=4,\ c_2=-2,\ c_3=-1$$

$$-4(1,2,3)+(-2)(-2,1,1)-(8,6,10)=0$$

اثبات مستقل خطی $\mathbb{R}^3$: $(1,0,5),(3,-1,4),(3,-2,2)$

$$c_1=c_2=c_3=0$$

$$c_1(1,0,5)+c_2(3,-1,4)+c_3(3,-2,2)=0$$

$$c_1+3c_2+3c_3=0,\quad -c_2-2c_3=0,\quad 5c_1+4c_2+2c_3=0$$

$f(x)=x^2+1$ و $g(x)=3x-1$ و $h(x)=-4x+1$

P_2 $\{f,g,h\}$ مستقل خطی

$c_1 f+c_2 g+c_3 h=0 \qquad c_1=c_2=c_3=0$

$c_1(x^2+1)+c_2(3x-1)+c_3(-4x+1)=0$

$x=0 \Longrightarrow c_1-c_2+c_3=0$

$x=1 \Longrightarrow 2c_1+2c_2-3c_3=0$

$x=-1 \Longrightarrow 2c_1-4c_2+5c_3=0$

مجموعه‌ای شامل حداقل دو بردار در یک فضای برداری وابسته خطی است
اگر و فقط اگر بتوان یک بردار آن را برحسب دیگر بردارهای مجموعه نوشت

$\{v_1,\dots,v_m\}$

حداقل یکی غیرصفر $c_1,\dots,c_m$

$c_1v_1+\dots+c_mv_m=0 \qquad c_1\neq 0$

$v_1=\left(\frac{-c_2}{c_1}\right)v_2+\dots+\left(\frac{-c_m}{c_1}\right)v_m$

پس v_1 ترکیب خطی از $v_2,\dots,v_m$

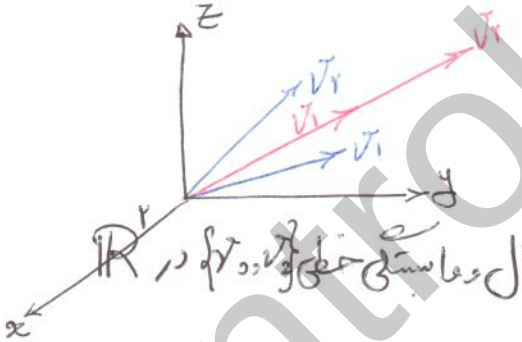
$v_1=d_2v_2+\dots+d_mv_m$

$v_1+(-d_2)v_2+\dots+(-d_m)v_m=0$

v_1 ترکیب خطی از $v_2,\dots,v_m$

$d_2,\dots,d_m$ اسکالر

پس $\{v_1,\dots,v_m\}$ وابسته خطی بود



بردارها در یک خط قرار دارند
$\{v_1,v_2\}$ وابسته خطی اند

بردارها در یک خط نیستند
$\{v_1,v_2\}$ مستقل خطی اند

استقلال و وابستگی خطی $\{v_1,v_2\}$ در $\mathbb{R}^2$

هر مجموعه بردار که شامل بردار صفر باشد وابسته خطی است

$u_i\neq 0 \ (1\leq i\leq m)$ اگر بردارهای $\{v_1,\dots,v_m\}$ مستقل خطی باشند، آنگاه

$\{v_1,\dots,v_m\}$ وابسته خطی

اسکالر $\{c_1,\dots,c_m\}$

$c_1v_1+\dots+c_mv_m=0 \qquad c_i\neq 0$ حداقل

$c_1v_1+\dots+c_mv_m+0v_{m+1}+\dots+0v_n=0$

$\{v_1,\dots,v_m,v_{m+1},\dots,v_n\}$ وابسته خطی

مستقل خطی $\{v_1,v_2\} \Rightarrow \{v_1+v_2,\ v_1-v_2\}$ مستقل خطی

$a(v_1+v_2)+b(v_1-v_2)=0$

$a=0,\ b=0$

پایه و بعد

خط فضای یک بعدی صفحه فضای دو بعدی

مجموعه‌ای متناهی از بردارها همانند $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ را یک پایه فضای برداری V نامیم هرگاه این مجموعه مولد V و مستقل خطی باشد.

پایه استاندارد $\mathbb{R}^n$: $\{(1,0,0,\dots), (0,1,0,\dots), \dots, (0,\dots,1)\}$

پایه $\mathbb{R}^3$: $\{(1,0,0,-1), (1,1,1,1), (1,2,3,4)\}$

$\mathbb{R}^3$ را گسترش می‌دهیم بردارهای دلخواه (x_1, x_2, x_3) با c_1, c_2, c_3

$$c_1(1,0,0,-1) + c_2(1,1,1,1) + c_3(1,2,3,4) = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= x_1 \\ c_2 + 2c_3 &= x_2 \\ -c_1 + c_2 + 3c_3 &= x_3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= 2x_1 - 3x_2 + x_3 \\ c_2 &= -2x_1 + 5x_2 - 2x_3 \\ c_3 &= x_1 - 2x_2 + x_3 \end{aligned}$$

مثال: میدهیم مجموعه مستقل خطی

$$b_1(1,0,0,-1) + b_2(1,1,1,1) + b_3(1,2,3,4) = (0,0,0,0)$$

$$b_1 = b_2 = b_3 = 0$$

مجموعه مولد $\mathbb{R}^3$ و مستقل خطی است لذا تشکیل یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ می‌دهد.

هرگاه فضای برداری V دارای پایه‌ای مستقل بر n بردار باشد، بعد V را برابر n می‌نامیم

بعد V را با $\dim V$ نشان میدهیم

n بردار $\{(1,0,0,\dots,0), \dots, (0,0,\dots,1)\}$ یک پایه استاندارد $\mathbb{R}^n$ $\Leftarrow$ بعد فضای $\mathbb{R}^n$، برابر n است

$\{(1,2,3), (-2,4,1)\}$ $\mathbb{R}^3$

$c_1(1,2,3) + c_2(-2,4,1)$ = V زیرفضا

بردارها مستقل خطی

بنابراین $\{(1,2,3), (-2,4,1)\}$ یک پایه برداری V

$\dim V = 2$ V یک صفحه که از مبدأ می‌گذرد

بعد بعضی فضاها

برای فضای برداری $M_{2\times2}$ از ماتریس $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$ فضای $M_{2\times2}$ را گسترش داده و مستقل خطی

این بردارها یک پایه $M_{2\times2}$ میشود بعد فضای برداری $M_{2\times2}$ برابر ۴ است، بعد فضای $M_{m\times n}$ برابر mn است

فضای برداری چندجمله‌ای P_2 $1, x, x^2$ $ax^2+bx+c = a(x^2)+b(x)+c(1)$

مستقل خطی برای هر x: $ax^2+bx+c=0$ $a=0, b=0, c=0 \Rightarrow$ یک پایه P_2 $\{x^2, x, 1\}$

بعد فضای برداری P_2 ۳ است

$\{x^n, x^{n-1}, \dots, x, 1\}$

یک پایه P_n

بعد P_n برابر $n+1$

پایه برای $\mathbb{C}^2$ ——— مستقل خطی ——— $(1,0)$ و $(0,1)$ $\mathbb{C}^2$

بعد $\mathbb{C}^2$ برابر ۲

$\{(a+bi),(c+di)\}$

$(a+bi, c+di) = (a+bi)(1,0) + (c+di)(0,1)$

فضاهای ضرب داخلی

$\mathbb{R}^n$ نرم، زاویه، فاصله

تعمیم ضرب نقطه‌ای در $\mathbb{R}^n$ به فضاهای برداری با یک ساختار پایه‌ای موسوم به ضرب داخلی

یک ضرب داخلی روی یک فضای برداری V تابعی است که به هر زوج از بردارهای u و v از V عددی را نسبت داده و $\langle u,v\rangle$ متناظر می‌کند

اصل تقارن $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$

اصل جمعی $\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$

اصل همگنی $\langle cu,v\rangle = c\langle u,v\rangle$

اصل مثبت معین $\langle u,u\rangle \geq 0$ و $\langle u,u\rangle = 0$ اگر و فقط اگر $u=0$

فضای ضرب داخلی

بردارهای $\mathbb{R}^2$ $u=(x_1,x_2)$ ، $v=(y_1,y_2)$ و $w=(z_1,z_2)$

$(-2,0)$ و $(3,1)$

ثابت کنید $\langle u,v\rangle = x_1y_1 + 4x_2y_2$

(۱)

$\langle u,v\rangle = x_1y_1 + 4x_2y_2$

$= y_1x_1 + 4y_2x_2$

$= \langle v,u\rangle$

(۲)

$\langle u+v,w\rangle = \langle (x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2)\rangle$

$= \langle (x_1+y_1, x_2+y_2),(z_1,z_2)\rangle$

$= (x_1,y_1)z_1 + 4(x_2+y_2)z_2$

$= x_1z_1 + y_1z_1 + 4x_2z_2 + 4y_2z_2$

$= x_1z_1 + 4x_2z_2 + y_1z_1 + 4y_2z_2$

$= \langle (x_1,x_2),(z_1,z_2)\rangle + (y_1,y_2)(z_1,z_2)$

$= \langle u,v\rangle + \langle v,w\rangle$

(۳)

$\langle cu\cdot v\rangle = \langle c(x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle =$

$(cx_1,cx_2),(y_1,y_2)$

$= cx_1y_1 + 4cx_2y_2 = c(x_1y_1 + 4x_2y_2)$

$= c\langle u,v\rangle$

(۴)

$\langle u,u\rangle = \langle (x_1,x_2),(x_1,x_2)\rangle$

$= x_1^2 + 4x_2^2 \geq 0$

$u = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، $v = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ $\langle u,v\rangle = ae + bf + cg + dh$ ضرب متناظر درایه‌ها و جمع آنها

P_n را فضای برداری چندجمله‌ای از درجه نابیشتر از n فرض f و g دو عضو P_n

$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

$$=\int_0^1 f(x)\cdot g(x)\,dx=\int_0^1 g(x)\cdot f(x)\,dx=\langle g,f\rangle$$

$$\langle f+g,h\rangle=\int_0^1[f(x)+g(x)]h(x)\,dx=\int_0^1([f(x)\cdot h(x)]+\int_0^1[f(x)g(x)])\,dx$$

$$=\int_0^1 f(x)\cdot h(x)\,dx+\int_0^1 g(x)\cdot h(x)\,dx=\langle f,h\rangle+\langle g,h\rangle$$

$f(x)=x^2+2x-1$

$g(x)=4x+1$

$\xrightarrow[\text{داخلی}]{\text{ضرب}}\langle x^2+2x-1,4x+1\rangle=\int_0^1(4x^3+9x^2-2x-1)\,dx=2$

نرم یک بردار

نرم براساس ضرب نقطه‌ای

کاربرد در محاسبات عددی

$$\|(x_1,\dots,x_n)\|=\sqrt{(x_1^2+\dots+x_n^2)}$$

$$=\sqrt{(x_1,\dots,x_n)(x_1,\dots,x_n)}$$

$$\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}$$

$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(x)\cdot g(x)\,dx$$

$$\|f\|=\sqrt{\langle f,f\rangle}=\sqrt{\int_0^1[f(x)]^2\,dx}$$

نرم: $f(x)=5x^2+1$

$$\|f(x)=5x^2+1\|=\sqrt{\int_0^1(5x^2+1)^2\,dx}=\sqrt{\frac{28}{3}}$$

زاویه θ ضرب نقطه‌ای برای تعیین زاویه بین بردارها در فضای $\mathbb{R}^n$

$$\cos\theta=\frac{u\cdot v}{\|u\|\cdot\|v\|}$$

$f(x)=5x^2$

$g(x)=3x$

$$\|5x^2\|=\sqrt{\int_0^1[5x^2]^2\,dx}=\sqrt{5}$$

$$\|3x\|=\sqrt{\int_0^1[3x]^2\,dx}=\sqrt{3}$$

$$\cos\theta=\frac{\langle f,g\rangle}{\|f\|\cdot\|g\|}=\frac{\int_0^1 f(x)\cdot g(x)\,dx}{\|f\|\,\|g\|}$$

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

بردارهای متعامد

در فضای ضرب داخلی V و u و v بردار ناصفر متعامد نامیده می‌شوند

$$\langle u, v\rangle = 0$$

مثال

$f(x) = 3x - 2$

$g(x) = x$

در: $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$

$$\langle 3x-2, x\rangle = \int_0^1 (3x-2)(x)\,dx = \int_0^1 (3x^2-2x)\,dx = x^3 - x^2\Big|_0^1 = 1-1 = 0$$

بنابراین توابع f و g متعامدند

فاصله

تعمیم فضای اقلیدسی به فضاهای برداری است (فواصل توابع)

V را یک فضای ضرب داخلی با نرم $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ در نظر می‌گیریم

فاصله دو بردار u و v را با $d(u, v)$ نشان می‌دهیم

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle}$$

مثال

$f(x) = x^2$

$g(x) = x^2 - 3x + 5$

$h(x) = x^2 + 4$

h, g از f فاصله؟

$$[d(f, g)]^2 = \langle f - g, f - g\rangle = \langle 3x - 5, 3x - 5\rangle = \int_0^1 (3x-5)^2\,dx = 13$$

$$[d(f, h)]^2 = \langle f - h, f - h\rangle = \langle -4, -4\rangle = \int_0^1 (-4)^2\,dx = 16$$

بنابراین $d(f, g) = \sqrt{13}$ و $d(f, h) = 4$

فواصل نسبی توابع از فواصل مطلق مهمتر هستند

ضرب داخلی C^n

$$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$$

$u = (x_1, \dots, x_n)$

$v = (y_1, \dots, y_n) \Rightarrow \langle u, v\rangle = x_1\bar{y}_1 + \dots + x_n\bar{y}_n$

$\langle u, v\rangle = 0 \quad u \perp v \quad \|u\| = \sqrt{x_1\bar{x}_1 + \dots + x_n\bar{x}_n}, \quad d(u, v) = \|u - v\|$

$u = (2 + 3i, -1 + 5i)$

$v = (1 + i, -i)$

C^2

$$\langle u, v\rangle = (2+3i)(1+i) + (-1+5i)(i) = 0$$

$$\|u\| = \sqrt{39}$$

$$\|v\| = \sqrt{3}$$

$$d(u, v) = \|u - v\| = \|(1+2i, -1+6i)\| = \sqrt{42}$$

۴۰ امتحان نهایی B

$$\|u \pm v\|^2 = \|u\|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}\langle u, v\rangle + \|u\|^2$$

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2$$

$$\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Re}(-iv)$$

$$\langle u, v\rangle = \mathrm{Re}\langle u, v\rangle + i\,\mathrm{Im}\langle u, v\rangle$$

در حالت کلی

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2 + \frac{i}{4}\|u+iv\|^2 - \frac{1}{4}\|u-iv\|^2$$

قانون متوازی الاضلاع

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\| = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

هندسه تا اقلیدسی

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}, \quad \cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}, \quad d(u, v) = \|u-v\| = \sqrt{\langle u-v, u-v\rangle}$$