اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

پلتفرم اختصاصی
مهندسی کنترل

https://controlengineers.ir

https://t.me/controlengineers

https://www.instagram.com/controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

دکتر محمدمهدی فاتح

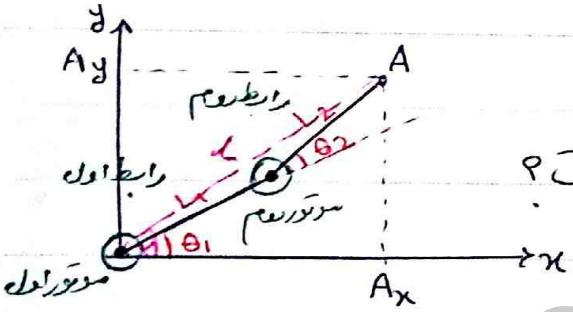
رباتیک

جلسه اول — سه‌شنبه ۱۷ بهمن — میانترم ۲ اردیبهشت

چرا رباتیک؟

سینماتیک
دینامیک
} ← مکانیک ربات می‌پردازیم. (مدل‌سازی مکانیکی ربات)

سینماتیک مستقیم:



نقطه A در موقعیتی در دستگاه مختصات xy است؟

$$A = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}$$

$$A_x = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$A_y = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

معادلات سینماتیک مستقیم ربات.

موقعیت A تابعی از زوایای θ_1 و θ_2 است.

← سینماتیک مستقیم ← با ازای هر مقدار از θ_1 و θ_2 مختصات نقطه A مشخص می‌شود.

← سینماتیک وارون ← با ازای هر مقدار از نقطه A مقادیر θ_1 و θ_2 مشخص می‌شود.

رابط اول متصل به بدنه موتور دوم می‌شود و رابط دوم متصل به محور موتور دوم می‌شود بدین ترتیب بازوی ربات

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

محور موتور ۲ رابط دوم نسبت به رابط اول می چرخد.

پایه متصل به بدنه موتور اول است و رابط اول متصل به محور موتور اول است. با چرخش موتور اول، رابط اول نسبت به پایه می چرخد.

بین زاویه θ_1 توسط موتور اول تنظیم می شود و زاویه θ_2 توسط موتور دوم تنظیم می شود.

← تعیین نقطه A:

- محاسبه θ_1 و θ_2 توسط سینماتیک وارون.

- کنترل موتورهای ۱ و ۲ برای دستیابی به زوایای θ_1 و θ_2

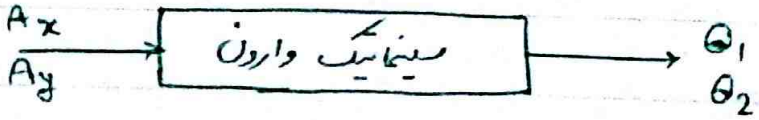
← مثلث با اضلاع l_1 و l_2 و l را در نظر بگیرید:

$$l^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2 l_1 l_2 \cos\theta_2 \qquad l^2 = A_x^2 + A_y^2$$

$$\cos\theta_2 = \frac{l^2 - l_1^2 - l_2^2}{2 l_1 l_2} = \frac{A_x^2 + A_y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2 l_1 l_2} \Rightarrow \theta_2 = \checkmark$$

$$\cos\alpha = \frac{l_1 + l_2 \cos\theta_2}{l} \Rightarrow \alpha = \checkmark$$

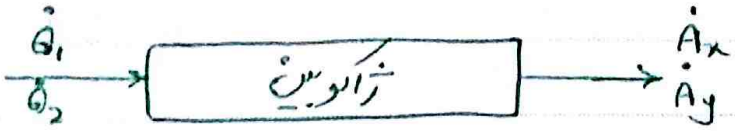
$$\tan(\theta_1 + \alpha) = \frac{A_y}{A_x} \Rightarrow \theta_1 + \alpha = \checkmark \Rightarrow \theta_1 = \checkmark$$



controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

← تعیین سرعت ها:



$$\begin{cases} A_x = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1+\theta_2) \\ A_y = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1+\theta_2) \end{cases}$$

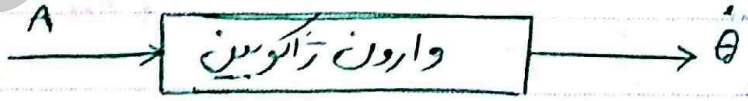
$$\begin{cases} \dot{A}_x = -l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 - l_2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \dot{A}_y = l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + l_2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\cos(\theta_1+\theta_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{A}_x = [-l_1\sin\theta_1 - l_2\sin(\theta_1+\theta_2)]\dot{\theta}_1 - l_2\sin(\theta_1+\theta_2)\dot{\theta}_2 \\ \dot{A}_y = [l_1\cos\theta_1 + l_2\cos(\theta_1+\theta_2)]\dot{\theta}_1 + l_2\cos(\theta_1+\theta_2)\dot{\theta}_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{A}_x \\ \dot{A}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1\sin\theta_1 - l_2\sin(\theta_1+\theta_2) & -l_2\sin(\theta_1+\theta_2) \\ l_1\cos\theta_1 + l_2\cos(\theta_1+\theta_2) & l_2\cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{A} = \begin{bmatrix} \dot{A}_x \\ \dot{A}_y \end{bmatrix} \quad \dot{\theta} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\dot{A} = J\dot{\theta}}$$

ماتریس ژاکوبین $J = \begin{bmatrix} -l_1\sin\theta_1 - l_2\sin(\theta_1+\theta_2) & -l_2\sin(\theta_1+\theta_2) \\ l_1\cos\theta_1 + l_2\cos(\theta_1+\theta_2) & l_2\cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix}$



$$\dot{\theta} = J^{-1}\dot{A}$$

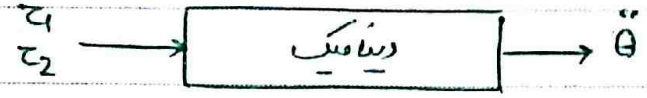
ماتریس ژاکوبین تابعی از θ_1 و θ_2 است.

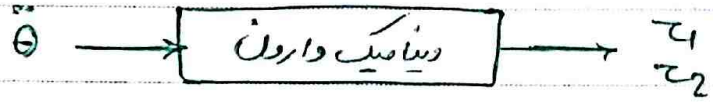
controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

رابطه بین نیروی اعمالی به مفاصل و موقعیت، سرعت و شتاب مفاصل توسط دینامیک

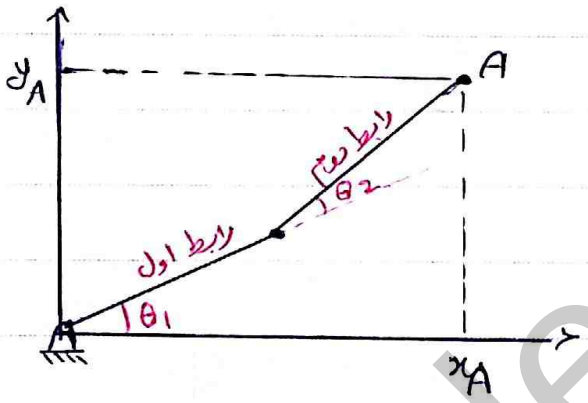
تعریف می‌شود.





جلسه دوم یکشنبه ۲۹ بهمن

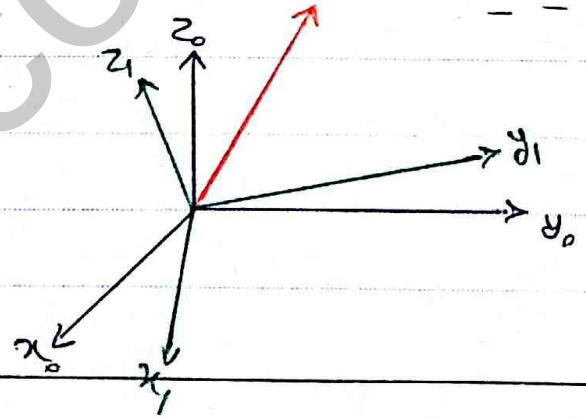
تبدیل های همگن:



بیان $\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ موقعیت نقطه A برحسب θ_1 و θ_2 را سینماتیک گویند.

ریاضیات برداری برای بدست آوردن معادلات سینماتیک کمک می‌کند.

تبدیل های همگن نقش موثری در مباحث سینماتیک دارد.



دوران:

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

دستگاه مختصات $x_0y_0z_0$ یا دستگاه ۰ را در نظر بگیرید. نقطه‌ی P در این دستگاه

$$\vec{P} = P_{x_0}\cdot\vec{i}_0 + P_{y_0}\cdot\vec{j}_0 + P_{z_0}\cdot\vec{k}_0$$

به صورت زیر توصیف می‌شود.

نقطه P در دستگاه ۱ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\vec{P} = P_{x_1}\cdot\vec{i}_1 + P_{y_1}\cdot\vec{j}_1 + P_{z_1}\cdot\vec{k}_1$$

$$P_{x_0} = \vec{P}\cdot i_0 = (P_{x_1}\cdot i_1 + P_{y_1}\cdot j_1 + P_{z_1}\cdot k_1)\cdot i_0$$

$$P_{y_0} = \vec{P}\cdot j_0 = (P_{x_1}\cdot i_1 + P_{y_1}\cdot j_1 + P_{z_1}\cdot k_1)\cdot j_0$$

$$P_{z_0} = \vec{P}\cdot k_0 = (P_{x_1}\cdot i_1 + P_{y_1}\cdot j_1 + P_{z_1}\cdot k_1)\cdot k_0$$

$$\begin{bmatrix} P_{x_0} \\ P_{y_0} \\ P_{z_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1\cdot i_0 & j_1\cdot i_0 & k_1\cdot i_0 \\ i_1\cdot j_0 & j_1\cdot j_0 & k_1\cdot j_0 \\ i_1\cdot k_0 & j_1\cdot k_0 & k_1\cdot k_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{x_1} \\ P_{y_1} \\ P_{z_1} \end{bmatrix} \Rightarrow P_0 = R_0^1 P_1$$

P_0 در دستگاه صفر $= \begin{bmatrix} P_{x_0} \\ P_{y_0} \\ P_{z_0} \end{bmatrix}$ P_1 در دستگاه یک $= \begin{bmatrix} P_{x_1} \\ P_{y_1} \\ P_{z_1} \end{bmatrix}$

R_0^1 ← ماتریس دوران. تبدیل دستگاه ۱ به دستگاه ۰.

R_0^1 بردار P_1 را به P_0 تبدیل می‌کند و این یک تبدیل خطی است.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} i_0.i_1 & i_0.j_1 & i_0.k_1 \\ j_0.i_1 & j_0.j_1 & j_0.k_1 \\ k_0.i_1 & k_0.j_1 & k_0.k_1 \end{bmatrix}$$

$$a.b = b.a$$

$$P_0 = R_0^1 P_1 \qquad P_1 = R_1^0 P_0$$

R_1^0 بردار P_0 را به بردار P_1 تبدیل می‌کند.

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} i_1.i_0 & j_0.i_1 & k_0.i_1 \\ i_0.j_1 & j_0.j_1 & k_0.j_1 \\ i_0.k_1 & j_0.k_1 & k_0.k_1 \end{bmatrix}$$

مقایسه R_0^1 و R_1^0 نشان می‌دهد

$$R_1^0 = R_0^{1\,T}$$

$$R_1^0 = R_0^{1\,-1} \quad (4)$$

(1) $P_0 = R_0^1 P_1$

(2) $P_1 = R_1^0 P_0$

(3) $R_1^0 = R_0^{1\,T}$

جایگذاری (2) در (1) می‌دهد:

$$P_0 = R_0^1 R_1^0 P_0 \qquad R_0^1 R_1^0 = I$$ ماتریس همانی

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

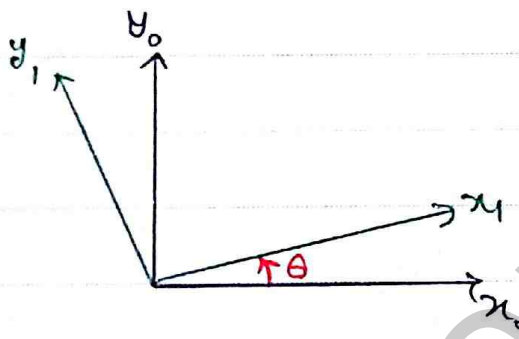
از قضیه 3 و 4 داریم:

$$R_0^{1\,T} = R_0^{1\,-1}$$

R_0^1 دوران دستگاه 1 نسبت به دستگاه صفر است.

R_0^1 دوران بردار P_1 را نسبت به P_0 نشان می‌دهد.

R_0^1 بردار P_1 را به بردار P_0 تبدیل می‌کند.

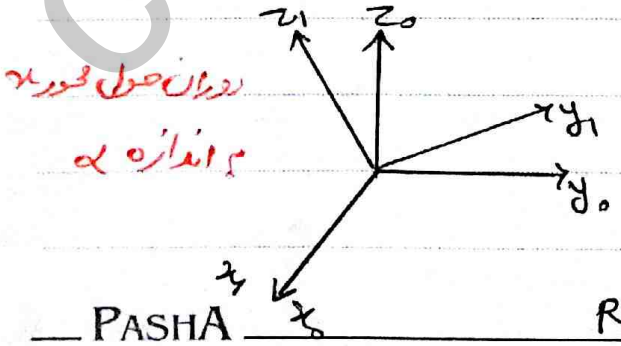


$$R_0^1 = \begin{bmatrix} i_0 \cdot i_1 & i_0 \cdot j_1 & i_0 \cdot k_1 \\ j_0 \cdot i_1 & j_0 \cdot j_1 & j_0 \cdot k_1 \\ k_0 \cdot i_1 & k_0 \cdot j_1 & k_0 \cdot k_1 \end{bmatrix}$$

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_{z,\theta}$ دوران حول محور z به اندازه زاویه θ به صورت بالا بیان می‌شود.

دوران حول محور x به اندازه α

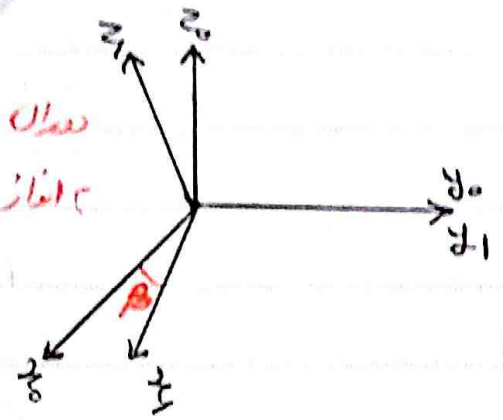


$$R_0^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$R_{x,\alpha}$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers



$R_{y,\beta}$

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$R_{x,\theta}\ R_{x,-\theta} = I$$

$$R_{x,\theta_1} \cdot R_{x,\theta_2} = R_{x,\theta_1+\theta_2}$$

$R_{x,\theta}\ R_{y,\beta} = ?$

$R_{y,\beta}\ R_{x,\theta} = ?$

$R_{x,\theta}\ R_{y,\beta}\ R_{z,\alpha} = ?$

$$P_0 = R_0^1 P_1 \qquad P_1 = R_1^2 P_2$$

$$P_0 = R_0^1 R_1^2 P_2$$

$R_0^1 R_1^2$ دو دوران پی در پی را نشان می دهد.

$$P_0 = R_0^2 P_2$$

$$\boxed{R_0^2 = R_0^1 R_1^2}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

$$R_{x,\theta}\,R_{y,\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

- دستگاه یک نسبت به دستگاه صفر دوران یافت. R_0^1 دوران اول

- دستگاه دو نسبت به دستگاه یک دوران یافت. R_1^2 دوران دوم

نتیجه: دستگاه دو نسبت به دستگاه صفر دوران یافت. $R_0^2 = R_0^1 R_1^2$

دوران های پی در پی:

نسبت به دستگاه صفر:

R_0^1 دوران دستگاه 1 نسبت به دستگاه صفر

R_0^2 دوران دستگاه 2 نسبت به دستگاه صفر

دوران اول $R_{x,\theta}$ در دستگاه صفر

دوران دوم $R_{y,\beta}$ در دستگاه صفر

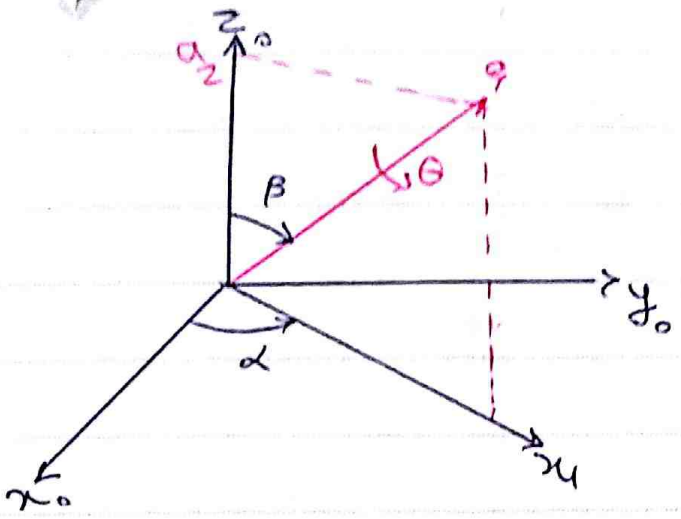
دوران های پی در پی در دستگاه $R = R_{y,\beta}\,R_{x,\theta}$

دوران پی در پی در دستگاه متحرک $R = R_{x,\theta}\,R_{y,\beta}$

$$R_{x,\theta}\,R_{x,-\theta}\,R_{y,\beta}\,R_{x,\theta} = R_{y,\beta}\,R_{x,\theta}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers



دوران حول بردار a با زاویه θ

$$R_{a,\theta} = R_{z,\alpha}\, R_{y,\theta}\, R_{z,\theta}, R_{y,-\beta}$$

$$R_{y,-\theta}$$

α و β را جزء بردار a مشخص کنید.

اگر $|a|=1$ آنگاه $\Rightarrow$

$$a_z = \cos\beta \qquad a_x = \sin\beta\cos\alpha$$

$$a_y = \sin\beta\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{a_y}{a_x} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\frac{a_y}{a_x}$$

$$\beta = \cos^{-1} a_z$$

* برنامه نویسی با متلب:

syms

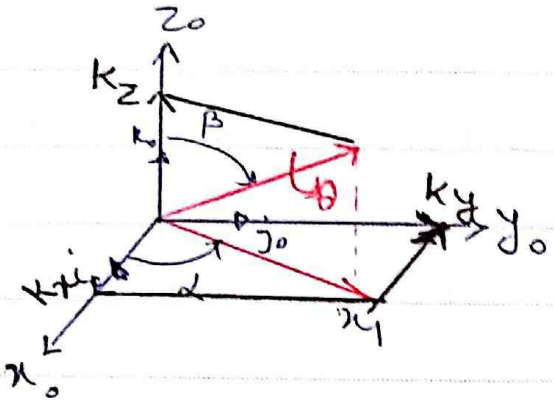
تمرین: فرمول بالا را با دستور syms محاسبه کنید.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

جلسه سوم یکشنبه ۱۶ اسفند

دوران حول محور دلخواه a با زاویه θ.



ماتریس دوران معادل به صورت زیر بدست می‌آید.

$$R_{a,\theta} = R_{z,\alpha} \cdot R_{y,\beta} \cdot R_{z,\theta} \cdot R_{y,-\beta} \cdot R_{z,-\alpha}$$

۹۶/۱۲/۶

تمرین ۱: با برنامه‌نویسی ماتریس معادل را بدست آورید.

$$\boxed{R =} \begin{bmatrix} k_x^2 v_\theta + c\theta & k_x k_y v_\theta - k_z s_\theta & k_x k_z v_\theta + k_y s_\theta \\ k_x k_y v_\theta + k_z s_\theta & k_y^2 v_\theta + c\theta & k_y k_z v_\theta - k_x s_\theta \\ k_x k_z v_\theta - k_y s_\theta & k_y k_z v_\theta + k_x s_\theta & k_z^2 v_\theta + c\theta \end{bmatrix}$$

از کجا اومده؟!

$$v_\theta = 1 - \cos\theta \qquad a = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix}$$

$$c_\theta = \cos\theta$$

$$s_\theta = \sin\theta$$

چنانچه ماتریس دوران به صورت عددی داده شود:

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

محور دوران و زاویه دوران چگونه بدست می‌آید؟

هر دوران با یک محور دوران و زاویه دوران معرفی می‌شود.

$$R_{11}+R_{22}+R_{33}=v_\theta(k_x^2+k_y^2+k_z^2)+3C\theta=1+2C\theta$$

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=1 \qquad v_\theta=1-C\theta$$

$$C\theta=\frac{R_{11}+R_{22}+R_{33}-1}{2} \longrightarrow \theta \text{ زاویه دوران} \checkmark$$

$$R_{32}-R_{23}=2k_x S\theta \longrightarrow k_x=\frac{R_{32}-R_{23}}{2S\theta}$$

$$R_{13}-R_{31}=2k_y S\theta \longrightarrow k_y=\frac{R_{13}-R_{31}}{2S\theta}$$

$$R_{21}-R_{12}=2k_z S\theta \longrightarrow k_z=\frac{R_{21}-R_{12}}{2S\theta}$$

$$S\theta=\sqrt{1-C\theta^2} \qquad a=\frac{1}{2S_\theta}\begin{bmatrix}R_{32}-R_{23}\\R_{13}-R_{31}\\R_{21}-R_{12}\end{bmatrix}$$

تمرین ۲: محور دوران و زاویه دوران در حالت سیس دوران زیر را بدست آورید.

$$R=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2\\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2\end{bmatrix}$$

controlengineers.ir

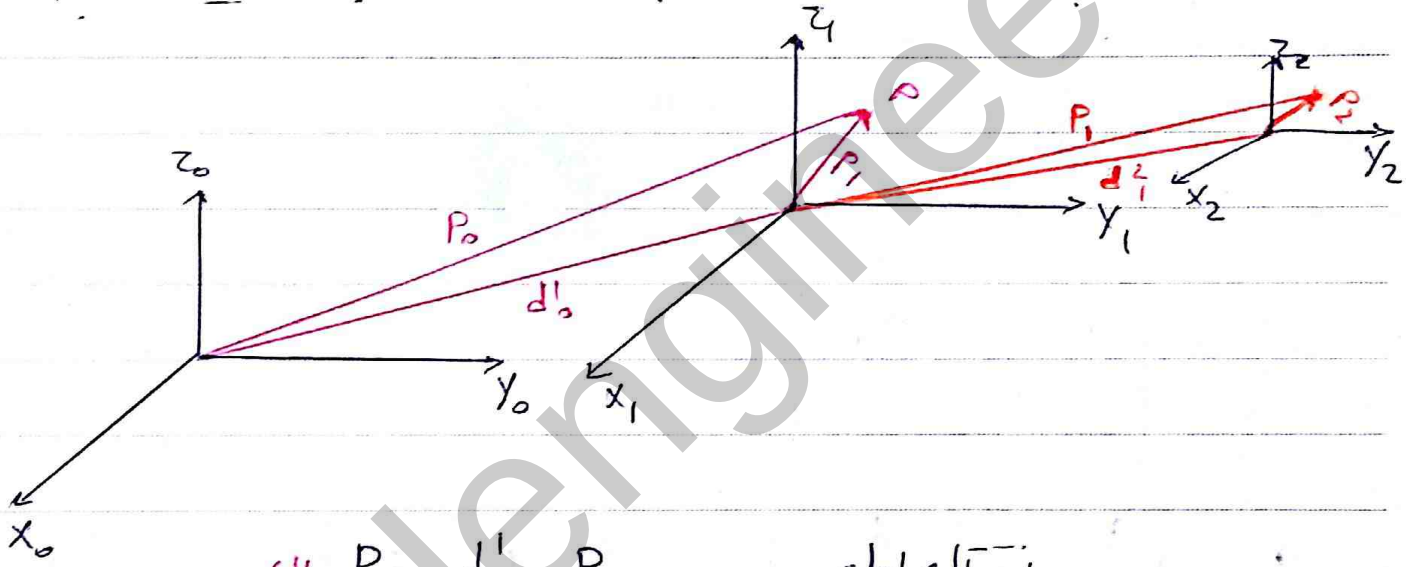
اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

$$c\theta = \frac{1 + \sqrt{3}/2 + \sqrt{3}/2 - 1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \theta = \pi/6$$

$$a = \frac{1}{2 \times 1/2} \begin{bmatrix} 1/2 + 1/2 \\ 0 - 0 \\ 0 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ محور x

انتقال

در انتقال مبدأ دستگاه مختصات جابجا می‌شود و محورها بدون تغییر خواهند بود.



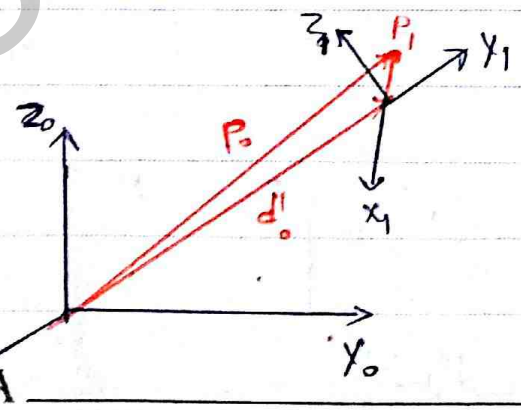
انتقال اول (1) $P_0 = d_0^1 + P_1$

انتقال دوم (2) $P_1 = d_1^2 + P_2$

(1) و (2) $\rightarrow P_0 = d_1^2 + P_2$

$$P_0 = d_0^1 + d_1^2 + P_2$$

$$d_0^2 = d_0^1 + d_1^2$$



تبدیل شامل انتقال و دوران:

$$P_0 = d_0^1 + R_0^1 P$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

نقطه دوران

$$P_0 = R^1_0 P_1$$

$$R^1_0 = I$$

$$P_0 = d^1_0 + R^1_0 P_1$$

$$1 = 1$$

نقطه انتقال

$$P_0 = d^1_0 + P_1$$

$$\begin{bmatrix} P_0 \\ 1 \end{bmatrix}_{4\times1} = \begin{bmatrix} R^1_0 & d^1_0 \\ \cdots & 1 \end{bmatrix}_{4\times4} \begin{bmatrix} P_1 \\ 1 \end{bmatrix}_{4\times1}$$

ماتریس تبدیل همگن شامل دوران و انتقال:

$$P^1_0 = \begin{bmatrix} R^1_0 & d^1_0 \\ \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

دو انتقال سری:

$$T^1_0 = \begin{bmatrix} I & d^1_0 \\ \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^2_0 = \begin{bmatrix} I & d^2_0 \\ \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_0 = R^1_0 P_1$$

$$P_1 = P_1 P_2$$

$$P_0 = P^1_0 P^2_1 P_2$$

داریم $\Rightarrow P_0 = P^2_0 P_2 \rightarrow \boxed{P^2_0 = P^1_0 P^2_1}$

$$T^2_0 = T^1_0 T^2_1 = \begin{bmatrix} I & d^2_1 + d^1_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T^2_0 = \begin{bmatrix} I & d^2_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{d^2_0 = d^2_1 + d^1_0}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

به طور کلی تبدیل های پی در پی در آخرین دستگاه :

$$T_0^2 = T_0^1 + T_1^2$$

ویژگی های تبدیل با به کارگیری ماتریس پادمتقارن :

ماتریس متقارن $R_{ij} = R_{ji}$

ماتریس پادمتقارن $R_{ij} = -R_{ji}$

S ماتریس پادمتقارن است هرگاه : $S + S^T = 0$

مثال) ماتریس متقارن $R = R^T$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad S^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow S + S^T = 0$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

$$a = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$$

ماتریس S روی بردار a به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$S(a) = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$$

اگر α یک اسکالر باشد:

$$S(\alpha a) = \alpha S(a)$$

اثبات:

$$S(\alpha a) = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha a_z & \alpha a_y \\ \alpha a_z & 0 & -\alpha a_x \\ -\alpha a_y & \alpha a_x & 0 \end{bmatrix} \qquad \alpha S(a) = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha a_z & \alpha a_y \\ \alpha a_z & 0 & -\alpha a_x \\ -\alpha a_y & \alpha a_x & 0 \end{bmatrix}$$

a و b بردار، α اسکالر، S ماتریس پادمتقارن.

$$S(\alpha(a+b)) = \alpha S(a) + \alpha S(b)$$

مشتق

$$\frac{d}{dt} S(a) = S\left(\frac{d}{dt} a\right)$$

انتگرال

$$\int S(a)\, dt = S\left(\int a\, dt\right)$$

وقتی بخواهیم از ماتریس مشتق یا انتگرال بگیریم باید از تک تک عناصر ماتریس مشتق یا انتگرال بگیریم.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

$$RR^{-1} = I$$

برای ماتریس دوران R: $R^{-1} = R^T$

$$\Rightarrow RR^T = I$$

$$\frac{dI}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}(RR^T) = 0$$

اثبات:

$$\frac{d}{dt}(RR^T) = \underbrace{\frac{dR}{dt}R^T}_{S} + \underbrace{R\frac{dR^T}{dt}}_{S^T}$$

$$\frac{dR}{dt}R^T = S$$

$$S^T = R\left(\frac{dR}{dt}\right)^T \Rightarrow S + S^T = 0$$

S یک ماتریس پاد متقارن است.

$$\frac{dR}{dt}R^T = S \qquad \frac{dR}{dt}R^TR = SR$$

$$\boxed{\frac{dR}{dt} = SR}$$

ماتریس پاد متقارن — ماتریس دوران

θ زاویه دوران ماتریس R است.

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dR}{dt} = SR \qquad \frac{dR}{d\theta}\dot{\theta} = SR \qquad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

$$RR^T = I$$

$$\frac{d}{d\theta}(RR^T) = 0$$

$$\underbrace{\frac{dR}{d\theta}}_{S} R^T + R \underbrace{\frac{dR^T}{d\theta}}_{S^T} = 0$$

$$\frac{dR}{d\theta} R^T = S$$

$$\frac{dR}{d\theta} = SR$$

سرعت های زاویه ای را با استفاده از ماتریس R و ماتریس پادمتقارن بدست آورید.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

جلسه چهارم — یکشنبه ۱۳ اسفند

ماتریس دوران R تابعی از زاویه دوران θ است ← عبارتی $R(\theta)$

ماتریس دوران متعامد است یعنی $RR^T = I$

$$\frac{dR(\theta)R(\theta)^T}{d\theta} = 0 \qquad \frac{dR(\theta)}{d\theta}R(\theta)^T + R(\theta)\frac{dR(\theta)^T}{d\theta} = 0$$

$$S \qquad S^T$$

$$\frac{dR(\theta)}{d\theta}R(\theta)^T = S \qquad \frac{dR(\theta)}{d\theta}R(\theta)^T R(\theta) = SR(\theta)$$

$$\boxed{\frac{dR(\theta)}{d\theta} = SR(\theta)} \qquad \boxed{S = \frac{dR(\theta)}{d\theta}R(\theta)^T}$$

$$\frac{dR(\theta)}{dt} = \frac{dR(\theta)}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dR(\theta)}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = SR(\theta)\frac{d\theta}{dt} \qquad \frac{dR(\theta)}{dt} = S\left(a\frac{d\theta}{dt}\right)R(\theta)$$

S تابعی از یک بردار است.

$a\frac{d\theta}{dt} = \omega$ — ω بردار سرعت زاویه‌ای

a محور دوران

$\frac{d\theta}{dt}$ اندازه سرعت زاویه‌ای

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \qquad a = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

$$\omega = a\frac{d\theta}{dt} \qquad \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

$$\frac{dR}{dt} = \dot{R} \qquad \boxed{\dot{R} = S(\omega)R}$$

ویژگی‌های ماتریس پادمتقارن S:

$$S + S^T = 0$$

$S(a)$ تابعی از بردار a است. برای α اسکالر و a بردار داریم:

$$S(\alpha a) = \alpha S(a)$$

$$\frac{dS(a)}{dt} = S\left(\frac{da}{dt}\right)$$

$$\int S(a)\,dt = S\left(\int a\,dt\right)$$

$$S(a)b = a \times b$$

با خصلت تبدیل اثبات می‌شود.

$$RS(a)R^T = S(Ra)$$

اثبات:

$$RS(a)R^T b = S(Ra)b$$

$$RS(a)R^T b = R(a \times R^T b)$$

$$= Ra \times RR^T b$$

$$= Ra \times b$$

$$= S(Ra)b$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

$$P_0 = d_0^1 + R_0^1 P_1 \qquad (1)$$

سرعت زاویه‌ای:

از (1) مشتق می‌گیریم:

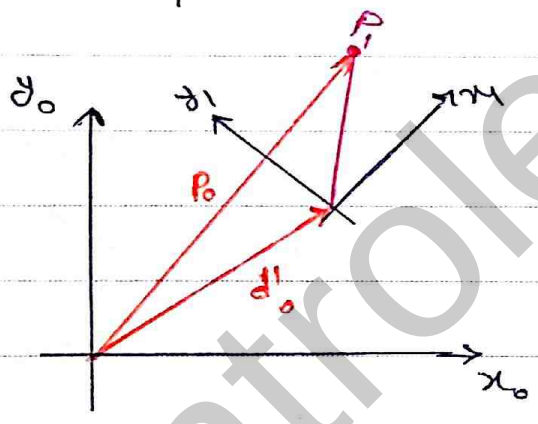
$$\dot{P}_0 = \dot{d}_0^1 + \dot{R}_0^1 P_1 + R_0^1 \dot{P}_1$$

$\dot{P}_0$ سرعت خطی نقطه P در دستگاه 0

$\dot{d}_0^1$ سرعت خطی مبدأ دستگاه 1 در دستگاه 0

$$\dot{R}_0^1 P_1 = S(\omega_0^1) R_0^1 P_1 = \omega_0^1 \times r \qquad r = R_0^1 P_1$$

$\dot{P}_1 = 0$ اگر نقطه P در دستگاه 1 ثابت باشد.



دستگاه 1 در دستگاه صفر حرکت می‌کند.
حرکت شامل انتقال و دوران.

سرعت خطی نقطه P در دستگاه صفر = سرعت انتقال و دوران دستگاه 1 نسبت به دستگاه صفر

بستگی دارد.

شتاب خطی و شتاب زاویه‌ای:

$$\ddot{P}_0 = \ddot{d}_0^1 + \dot{R}_0^1 P_1 = \ddot{d}_0^1 + S(\omega_0^1) R_0^1 P_1$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

$$\ddot{P}_0 = \ddot{d}_0^1 + \dot{S}(\omega_0^1) R_0^1 P_1 + S(\omega_0^1)\dot{R}_0^1 P_1 + S(\omega_0^1) R_0^1 \dot{P}_1$$

($\dot{P}_1 \to 0$)

$$= \ddot{d}_0^1 + \dot{\omega}_0^1 \times r + S(v_0^1) S(\omega_0^1) R_0^1 P_1$$

$$= \ddot{d}_0^1 + \dot{\omega}_0^1 \times r + \omega_0^1 \times (\omega_0^1 \times r) \qquad r = R_0^1 P_1$$

$\ddot{d}_0^1$ شتاب خطی مبدأ دستگاه یک در دستگاه صفر

$\dot{\omega}_0^1$ شتاب زاویه‌ای ~ ~

ω_0^1 سرعت زاویه‌ای ~ ~

$\ddot{P}_0$ شتاب خطی نقطه P در دستگاه صفر

فرض کنید تعداد n دستگاه مختصات داریم:

ω_0^n را چگونه توصیف می‌کنید.

فرض کنید ω_0^1 و ω_1^2 و ... ω_{n-1}^n موجود است.

$$R_0^2 = R_0^1 R_1^2$$

$$\dot{R}_0^2 = \dot{R}_0^1 R_1^2 + R_0^1 \dot{R}_1^2$$

$$S(\omega_0^2) R_0^2 = S(\omega_0^1) R_0^1 R_1^2 + R_0^1 S(\omega_1^2) R_0^2$$

$$= S(\omega_0^1) R_0^1 \underbrace{R_1^0 R_0^1}_{I} R_1^2 + R_0^1 S(\omega_1^2) R_0^2$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

$$S(\omega_0^2)R_0^2 = S(\omega_0^1)R_0^2 + R_0^1 S(\omega_1^2)R_0^2$$

$$S(\omega_0^2)R_0^2 = S(\omega_0^1)R_0^2 + R_0^1 S(\omega_1^2)R_0^{1T} R_0^1 R_1^2$$

$$S(\omega_0^2)R_0^2 = S(\omega_0^1)R_0^2 + S(R_0^1\omega_1^2)R_0^2$$

$$S(\omega_0^2) = S(\omega_0^1) + S(R_0^1\omega_1^2)$$

$$S(\omega_0^2) = S(\omega_0^1 + R_0^1\omega_1^2)$$

$$\omega_0^2 = \omega_0^1 + R_0^1\omega_1^2$$

ω_0^2 سرعت زاویه‌ای برای دستگاه ۲ نسبت به دستگاه صفر

ω_0^1 ~ ~ ~ ۱ ~ ~ ~

با استقرا می‌توان نشان داد که:

$$\omega_0^n = \omega_0^1 + R_0^1\omega_1^2 + R_0^2\omega_2^3 + \cdots + R_0^{n-1}\omega_{n-1}^n$$

$\omega_0^2 \neq \omega_0^1 + \omega_1^2$ ← فرایند ← $R_0^1 = I$

$$R_0^3 = R_0^2 R_2^3$$

$$\rightarrow \omega_0^3 = \omega_0^2 + R_0^2\omega_2^3 \rightarrow \omega_0^3 = \omega_0^1 + R_0^1\omega_1^2 + R_0^2\omega_2^3$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

d_0^1 موقعیت مبدأ دستگاه ۱ نسبت به دستگاه صفر

$\dot{d}_0^1$ سرعت خطی " " "

$\ddot{d}_0^1$ شتاب خطی " " "

ω_0^1 سرعت زاویه ای دستگاه ۱ در دستگاه صفر

$\dot{\omega}_0^1$ شتاب زاویه ای " "

a محور دوران و $\dot{\theta}$ سرعت دوران باشد. $\omega = a\dot{\theta}$

$$R_{a,\theta} \rightarrow \dot{R}_{a,\theta} = S(\omega) R_{a,\theta}$$

$$\boxed{\dot{R}_{a,\theta} = S(a\dot{\theta}) R_{a,\theta}}$$

$$R_{a,\theta} \rightarrow S(a\dot{\theta})$$

d_0^n چگونه توصیف می‌شود؟

$$d_0^2 = d_0^1 + R_0^1 d_1^2$$

$$d_0^n = d_0^1 + R_0^1 d_1^2 + \cdots + R_0^{n-1} d_{n-1}^n$$

بردارها را هنگامی می‌توان با یکدیگر جمع کرد که همگی در یک دستگاه باشند.

تمرین: مسائل زوج فصل دوم حل شود. (۱۳/۱۲/۹۶)

controlengineers.ir

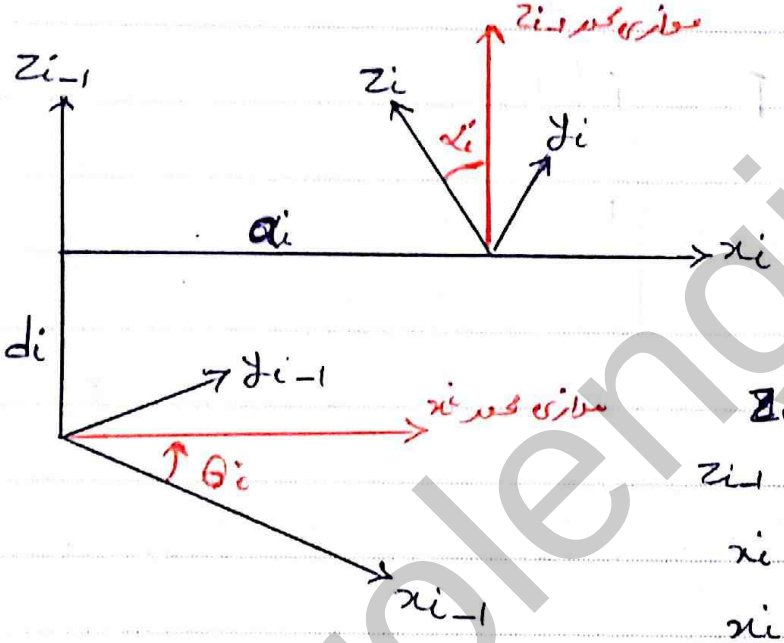
اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

جلسه پنجم ' سه‌شنبه ۱۵ اسفند

یک دستگاه مختصات را در دستگاه مختصات دیگر توصیف کنید.

$$T_{i-1}^{i} = \begin{bmatrix} R_{i-1}^{i} & d_{i-1}^{i} \\ \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

از این ماتریس تبدیل می‌توان دستگاه i را در دستگاه $i-1$ توصیف کرد.



حالت خاص:

محور z: عمود بر محور z_{i-1}

θ_i زاویه‌ای از x_{i-1} تا x_i حول z_{i-1}

d_i فاصله از x_{i-1} تا x_i در جهت z_{i-1}

a_i فاصله از z_{i-1} تا z_i در جهت x_i

α_i زاویه از z_{i-1} تا z_i حول x_i

$$T_{i-1}^{i} = \begin{bmatrix} R_{z,\theta_i} & \vdots \\ \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{x,\alpha_i} & \vdots \\ \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{z,\theta_i} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

controlengineers.ir

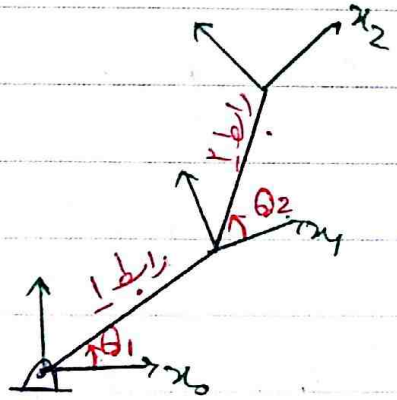
اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

$$R_{x,\alpha_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix}$$

تمرین ۱۵ ص ۹۶/۱۲ : ماتریس صفحه قبل را با برنامه نویسی محاسبه نمایید.

محاسبات سینماتیک :

معادلات سینماتیک مستقیم :



$$T_0^2 = T_0^1 T_1^2$$

$$T_0^2 = \begin{bmatrix} R_0^2 & d_0^2 \\ 0\,0\,0 & 1 \end{bmatrix}$$

T_0^2 توصیف دستگاه 2 در دستگاه صفر

d_0^2 مبدأ دستگاه 2 در دستگاه صفر (نقطه انتهای بازوی رباتیک)

R_0^2 محورهای دستگاه 2 در دستگاه صفر (جهت رابط آخر)

دستگاه 2 ← رابط 2 می‌شود.

" 1 ← رابط 1 "

" 0 ← رابط 0 "

ضابطه عمومی T_{i-1}^{i} معلوم باشد می‌توان با ضرب پی در پی T_0^n رسید.

controlengineers.ir

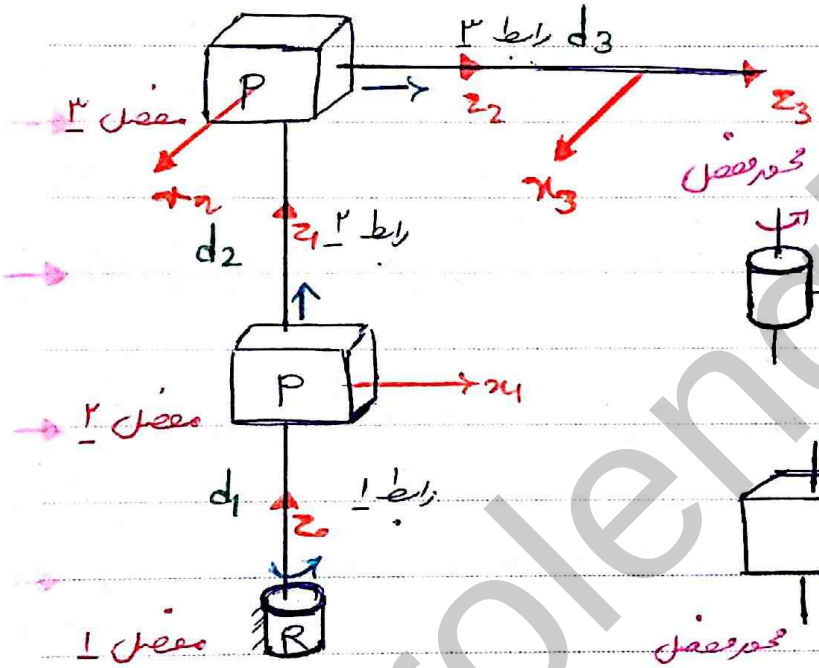
اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

$$T_0^n = T_0^1\, T_1^2 \cdots T_{n-1}^n$$

T_{i-1}^i فرمولی از d_i ، θ_i ، α_i و a_i است. فقط یکی از چهار عامل موقت متغیر است و بقیه ثابت هستند.

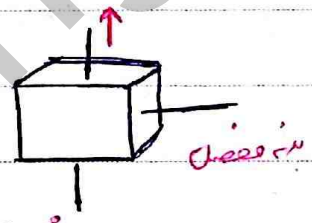
معادلات سینماتیک مستقیم توسط T_0^n توصیف می‌شود.

بازوی ربات استوانه‌ای:



مفصل لولایی ← حرکت چرخشی

مفصل کشویی ← حرکت طولی



پیکربندی RPR

هر مفصل بین دو رابط قرار دارد. رابط دوم نسبت به رابط اول

در جهت محوری چرخد (مفصل لولایی) یا حرکت طولی دارد (مفصل کشویی)

از آنجایی که یک فضای استوانه‌ای را پوشش می‌دهد به همین دلیل به پیکربندی RPP استوانه‌ای می‌گویند.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

نحوه انتخاب دستگاه های مختصات:

محور z_{i-1} در دستگاه $i-1$ در جهت محور مفصل i

محور z_{i-1} عمود و متقاطع با محور x_i

{ مفاصل از شماره ۱ نامگذاری می شوند تا n
رابط ها از شماره ۰ نامگذاری می شوند تا n

محورهای x_0 و z_n انتخابی هستند.

← z_0 در جهت محور مفصل ۱ . x_0 انتخابی است.

← z_1 در جهت محور مفصل ۲ . x_1 عمود و متقاطع با z_0

← z_2 در جهت محور مفصل ۳ . x_2 عمود و متقاطع با z_1

← z_3 انتخابی است ولی معمولاً هم جهت با محور قرار می دهند. x_3 عمود و متقاطع با z_2 .

* محور z_i به رابط i ام متصل است.

نمایش پارامترهای دیناویت هاتنبرگ DH

		زاویه مفصل θ_i	انحراف مفصل d_i	پیچش رابط α_i	طول رابط a_i
T_0^1	رابط ۱	θ_1	d_1	0	0
T_1^2	رابط ۲	0	d_2	$-\pi/2$	0
T_2^3	رابط ۳	0	d_3	0	0

θ_2 و d_2 و d_3 متغیر هستند. (در هر سطر یکی متغیر است)

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

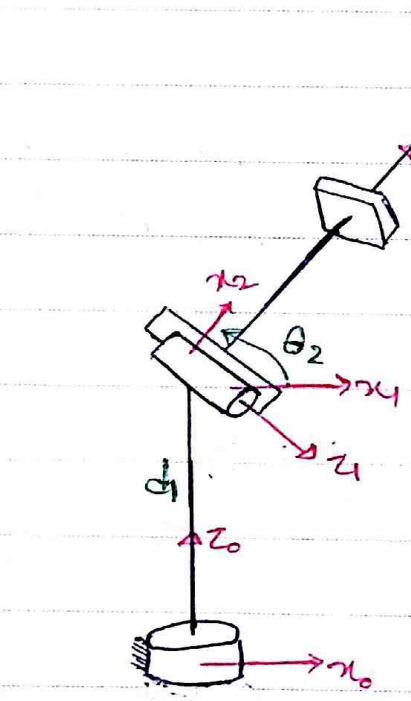
معادلات سینماتیک به صورت زیر محاسبه میشوند.

$$T_1^3 = T_0^1 T_1^2 T_2^3$$

تمرین ۹۶/۱۲/۱۵: معادلات بالا را با برنامه نویسی بدست آورید.

فصل ششم — کتاب ۲۰ اسفند

بدست آوردن معادلات سینماتیک مستقیم:



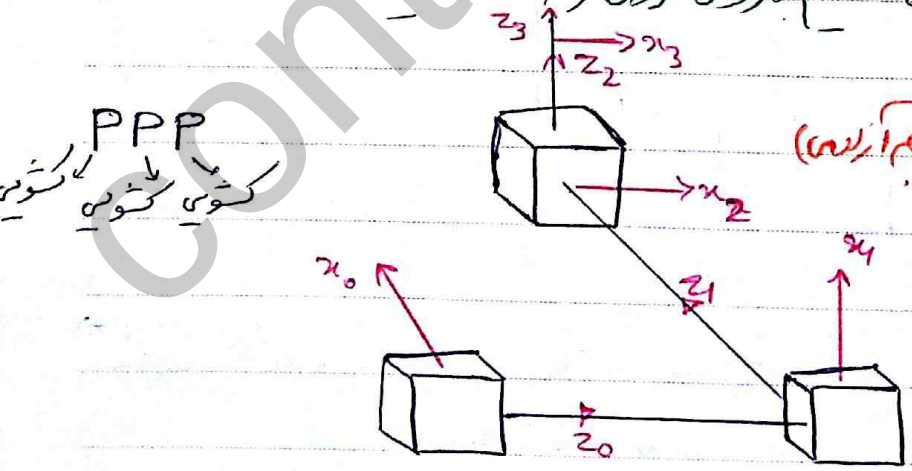
ربات کروی

θ_1 ، θ_2 ، d_3 متغیر هستند.

		θ_i	d_i	a_i	α_i
T_0^1 →	رابط ۱	θ_1	d_1	۰	$\pi/2$
T_1^2 →	رابط ۲	θ_2	۰	۰	$\pi/2$
T_2^3 →	رابط ۳	۰	d_3	۰	۰

RRP
لولایی ← لولایی ← کشویی

تمرین ۹۶.۱۲.۲۰: معادلات سینماتیک مستقیم بازوی کروی را بدست آورید.



PPP
کشویی ← کشویی ← کشویی

ربات مکانی (۳ درجه آزادی)

d_1 ، d_2 ، d_3 متغیر هستند.

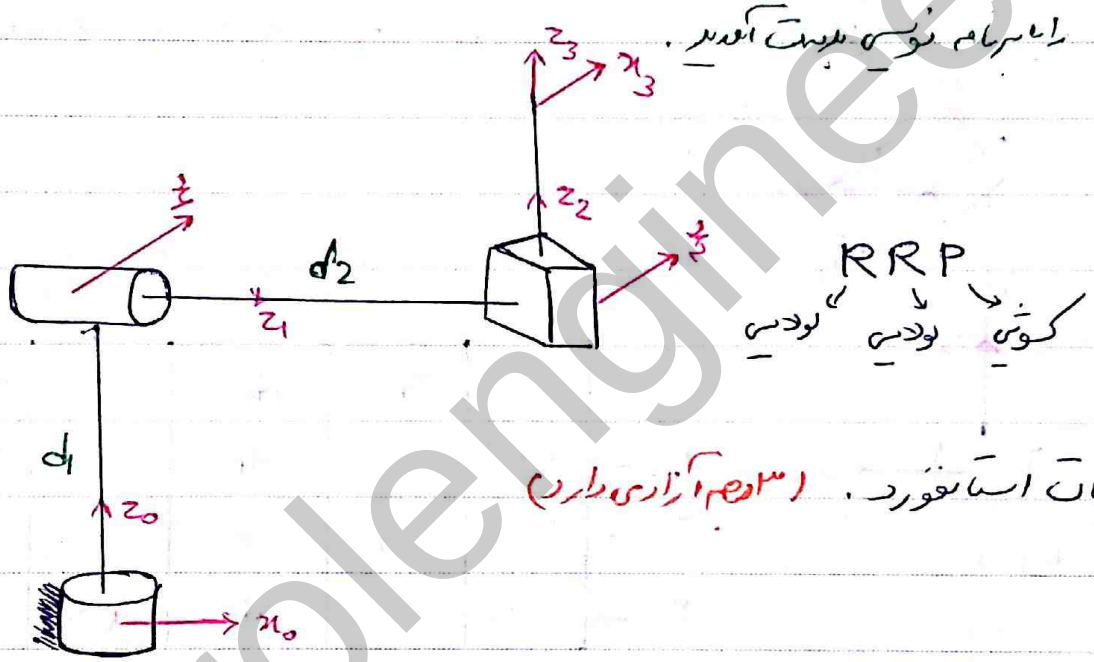
controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

		θ_i	d_i	a_i	α_i
T_0^1 →	رابط ۱	$\pi/2$	d_1	۰	$\pi/2$
T_1^2 →	رابط ۲	$\pi/2$	d_2	۰	$\pi/2$
T_2^3 →	رابط ۳	۰	d_3	۰	۰

دستگرد ← مثبت
مستقر ← منفی

تمرین ۹۶.۱۲.۲۵ : معادلات سینماتیک مستقیم بازوی رباتیک مقابل - $T_0^3 = T_0^1 T_1^2 T_2^3$ را با روش دناویت هارتنبرگ بدست آورید.



RRP
کروی ← دورانی ← دورانی

بازوی ربات استانفورد. (۳ درجه آزادی دارد)

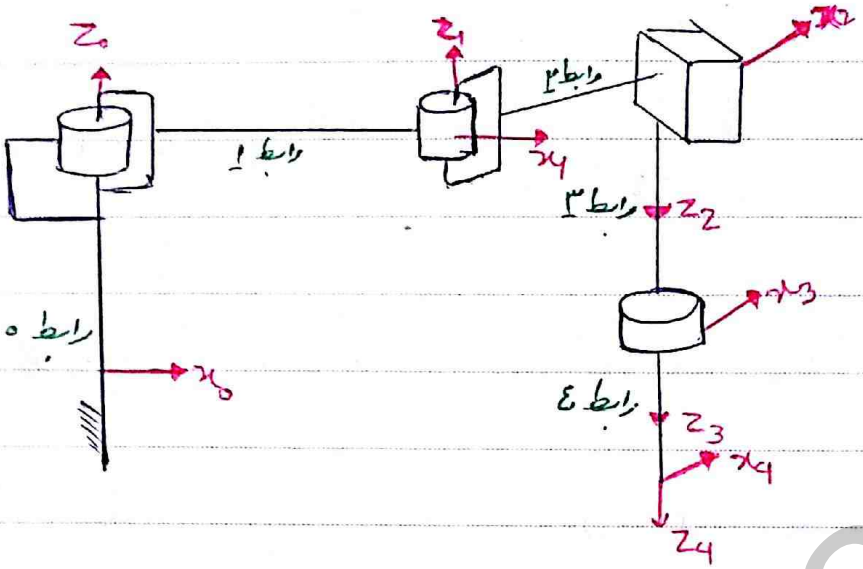
		θ_i	d_i	a_i	α_i
T_0^1	رابط ۱	θ_1	d_1	۰	$\pi/2$
T_1^2	رابط ۲	θ_2	d_2	۰	$-\pi/2$
T_2^3	رابط ۳	۰	d_3	۰	۰

$T_0^3 = T_0^1 T_1^2 T_2^3$

تمرین ۹۶.۱۲.۲۵ : معادلات سینماتیک مستقیم بازوی ربات استانفورد را با استفاده از روش دناویت هارتنبرگ بدست آورید.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers



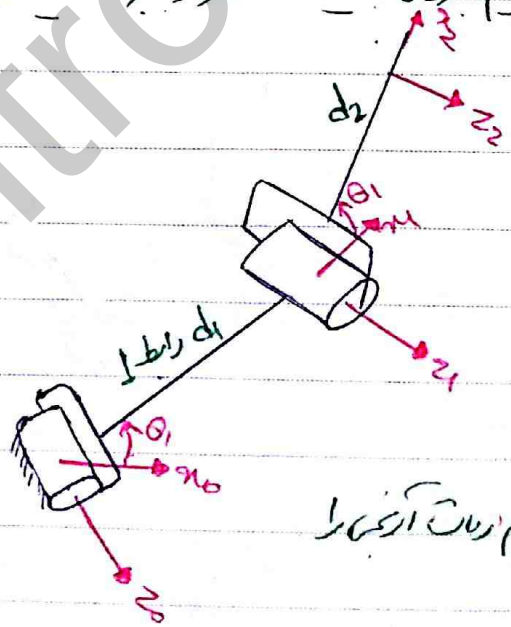
ربات اسکارا

		θ_i	d_i	a_i	α_i
T_0^1	رابط ۱	θ_1	d_1	a_1	۰
T_1^2	رابط ۲	θ_2	۰	a_2	۳
T_2^3	رابط ۳	۰	d_3	۰	۰
T_3^4	رابط ٤	θ_4	d_4	۰	۰

θ_1 ، θ_2 ، d_3 و θ_4 متغیرند.

$$T_0^4 = T_0^1 T_1^2 T_2^3 T_3^4$$

تمرین ۹۶.۱۲.۲۰ معادلات سینماتیک مستقیم بازوی ربات اسکارا را با برنامه نویسی بدست آورید.



بازوی ربات استوانه‌ای

θ_1 و θ_2 متغیرهستند.

تمرین ۹۶.۱۲.۲۰ معادلات سینماتیک مستقیم ربات استوانه‌ای را با برنامه نویسی بدست آورید.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

		θ_i	d_i	a_i	α_i
T_0^1	رابط 1	θ_1	0	a_1	0
T_1^2	رابط 2	θ_2	0	a_2	0

$$T_0^2 = T_0^1 T_1^2$$

تعداد درجات آزادی کوچکتر یا مساوی تعداد مفاصل است.

سه درجه آزادی مختص محورهاست (x و y و z) و سه درجه آزادی مختص گردش حول محورهاست.

مسائل فصل سوم حل شود.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year. Month.

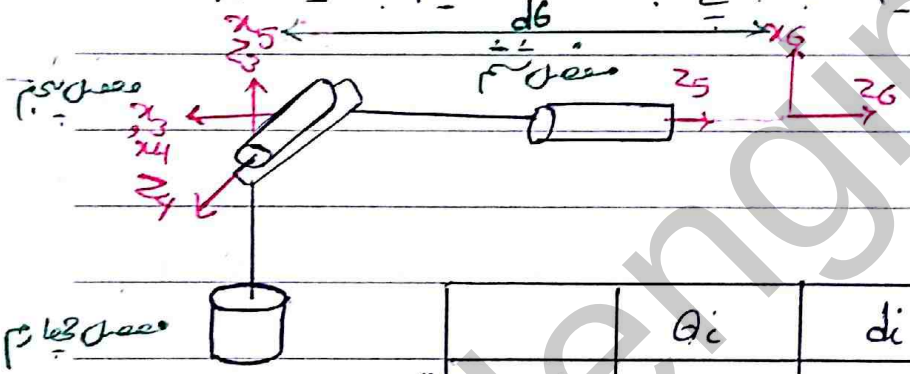
جلسه هفتم یکشنبه ۱۹ فروردین ۹۷

مچ کروی پیکره ربات از دو بخش بازو و مچ تشکیل می‌شود.

درانتها مجری نهایی یا ابزارکار قرار می‌گیرد.

- بازو به منظور تنظیم موقعیت نقطه انتهایی مچ به منظور تنظیم جهت ابزار استفاده می‌شود.

- سینماتیک مستقیم بازو را شروع کردیم. همانجا مچ را هم آن اضافه کنیم هم باید کرد ۱۲



		θ_i	d_i	a_i	α_i
T_3^4	رابط چهارم	θ_4	0	0	$-\pi/2$
T_4^5	رابط پنجم	θ_5	0	0	$\pi/2$
T_5^6	رابط ششم	θ_6	d_6	0	0

$$T_3^6 = T_3^4 T_4^5 T_5^6$$

سه مفصل ① و ② و ③ مربوط به بازو هستند.

روی سه محور دهم آزادی دارد.

X_4 عمود و متقاطع با Z_3

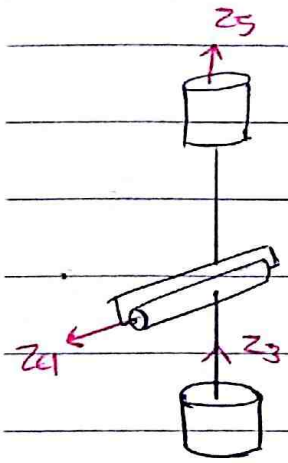
X_5 عمود و متقاطع با Z_4

X_6 عمود و متقاطع با Z_5

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year. Month.



حالت تکین z_5 همراستا با z_3 شده است.

تمرین ۹۷/۱/۱۹: برنامه‌ای بنویسید که سینماتیک مستقیم مچ کروی را فرمول نماید.

برنامه‌ای بنویسید که سینماتیک مستقیم ربات‌های زیر را بدست آورد.

الف) بازوی استانفورد و مچ کروی.

ب) بازوی استوانه‌ای و مچ کروی.

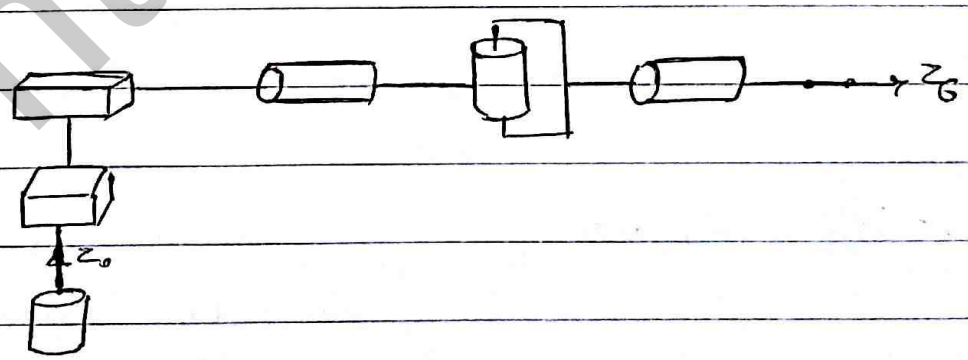
ج) بازوی دکارتی و مچ کروی.

الف) بازوی استانفورد T_0^3

مچ کروی T_3^6

بازوی استانفورد + مچ کروی: $T_0^6 = T_0^3 T_3^6$

ب)



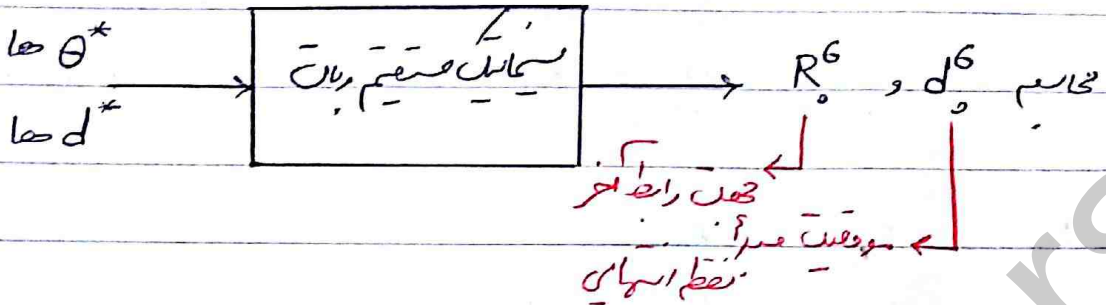
تمرینات زوج فصل سوم حل گردد.

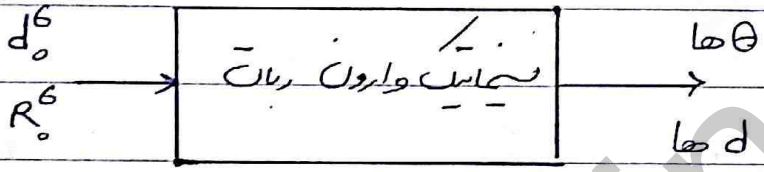
controlengineers.ir

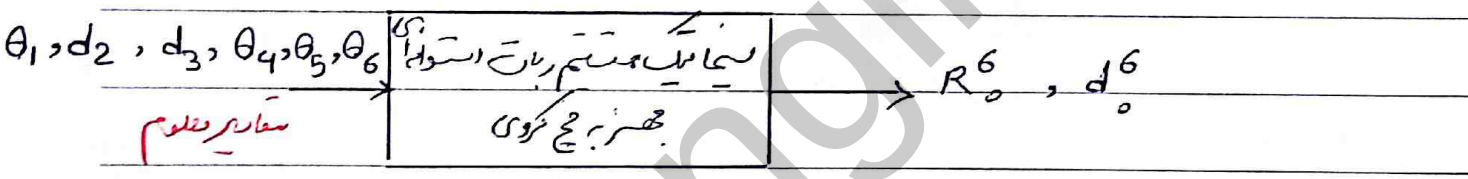
اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

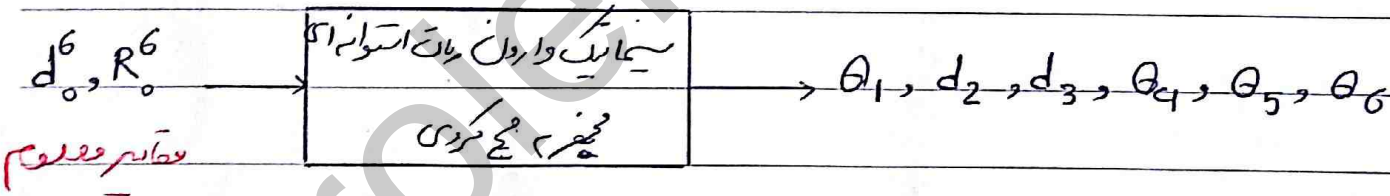
Subject :
Year. Month.

فصل چهارم — سینماتیک وارون ربات



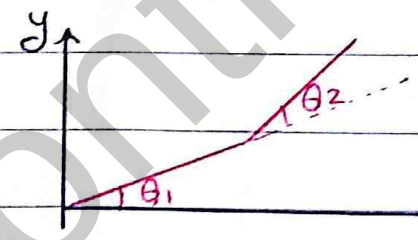






حل مسئله سینماتیک وارون:

معادلات سینماتیک مستقیم



$$\begin{cases} x = f_1(\theta_1, \theta_2) \\ y = f_2(\theta_1, \theta_2) \end{cases}$$

معادله غیرخطی است.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year. Month.

معادلات سینماتیک وارون:

$$\begin{cases} \theta_1 = g_1(x, y) \\ \theta_2 = g_2(x, y) \end{cases}$$

بدست آوردن معادلات فوق دشوار است به دلیل غیرخطی بودن معادلات سینماتیک مستقیم.

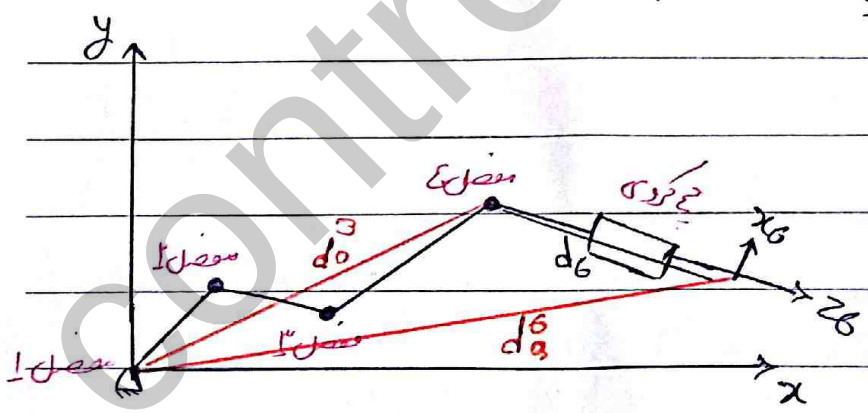
$$R_0^6 = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}$$

سینماتیک مستقیم. $R_{ij} = f_{ij}(\theta_1, d_2, d_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6)$

حل تحلیلی سخت است. $\theta_1 = g(R_0^6, d_0^6)$

چه راه حل دیگری وجود دارد؟!

چنانچه بازوی رباتیک به یک مچ کروی متصل باشد



مسئله سینماتیک وارون: d_0^6 و R_0^6 معلوم است. حال متغیرهای مفاصل ۱ تا ۶ را بدست آورید

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year. Month.

$$d_0^3 + d_6 z_6 = d_0^6$$

$$R_0^6 = [x_6 \quad y_6 \quad z_6] \qquad z_6 = R_0^6 k$$

$$k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نحوه بدست آوردن d_0^3 $\quad d_0^3 = d_0^6 - d_6 z_6$

از d_0^3 می‌توان با اعمال سینماتیک وارون موقعیت بازو سه متغیر مفصل ①، ②، ③ را محاسبه کرد. سپس با استفاده از سینماتیک مستقیم بازو و داشتن سه متغیر مفاصل R_0^3 را محاسبه می‌کنیم. حال با استفاده از $R_0^6 = R_0^3 R_3^6$ ، $R_3^6 = R^{3T} R_0^6$ می‌توانیم

(↓ معلوم، ↓ معلوم)

R_3^6 را محاسبه کنیم. سینماتیک وارون را برای هچ حل می‌کنیم و در نتیجه سه متغیر مفاصل ۴، ۵ و ۶ بدست می‌آید. کافیست سینماتیک وارون بازو و سینماتیک وارون هچ را حل کنیم.

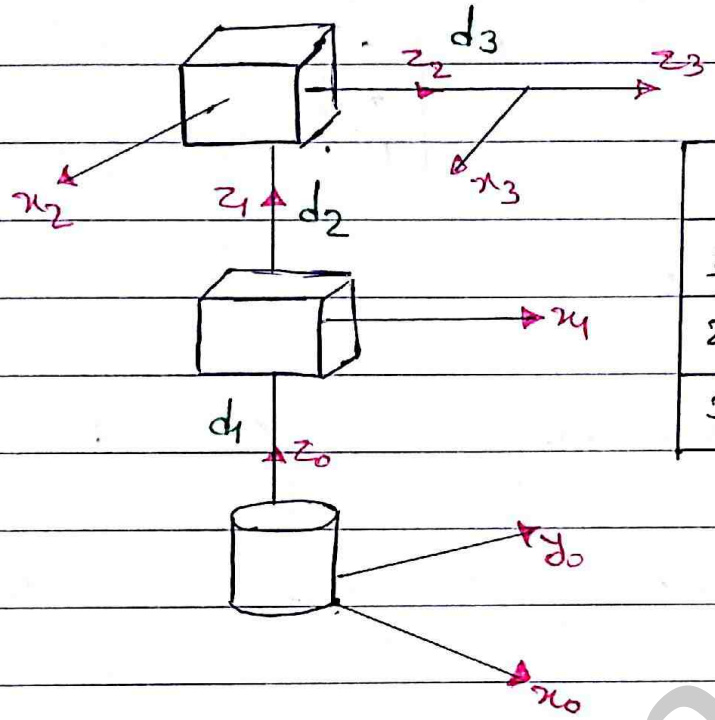
controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year. Month.

جلسه هشتم — یکشنبه ۲۶ فروردین ۹۷

سینماتیک وارون بازوی استوانه ای:



	θ_i	d_i	a_i	α_i	
رابط 1	θ_1^*	d_1	0	0	T_0^1
رابط 2	$-\frac{\pi}{2}$	d_2^*	0	$-\pi/2$	T_1^2
رابط 3	0	d_3^*	0	0	T_2^3

* متغیرها.

معادلات سینماتیک مستقیم:

$$T_0^3 = T_0^1 \, T_1^2 \, T_2^3$$

$$T_0^3 = \begin{bmatrix} R_0^3 & d_0^3 \\ \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

حل مسئله سینماتیک وارون موقعیت بازو: فرض کنید که d_0^3 معلوم است حال

θ_1 و d_2 و d_3 را می یابید.

$$d_0^3 = \begin{bmatrix} f_1(\theta_1, d_2, d_3) \\ f_2(\theta_1, d_2, d_3) \\ f_3(\theta_1, d_2, d_3) \end{bmatrix}$$

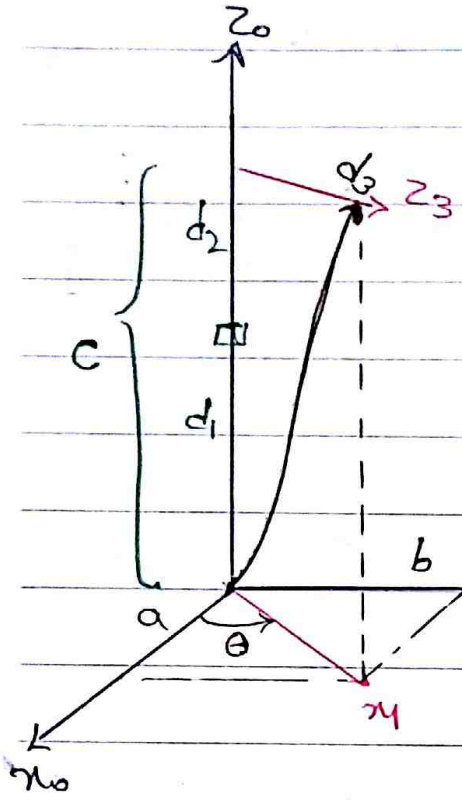
سه معادله با سه مجهول حل آن چون مشکل است.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year. Month.

روش های هندسی :



$$d_0^3 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

a, b, c معلوم

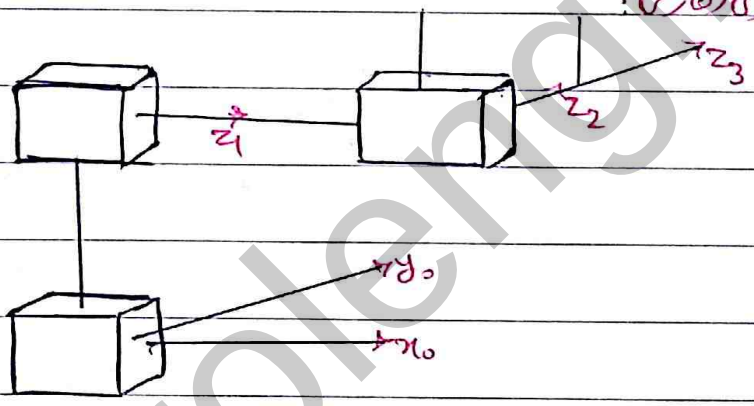
d_1 مجهول

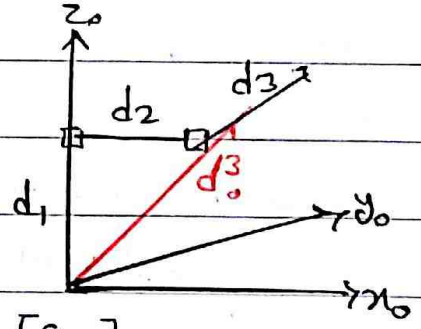
$$\theta_1 = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

$$d_2 = c - d_1$$

$$d_3 = \sqrt{a^2+b^2}$$

سه بازوی دارای موقعیت بازوی رباتی :





$d_1 = c$ معلوم است. $d_0^3 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

d_1, d_2, d_3 را محاسبه نمایید.

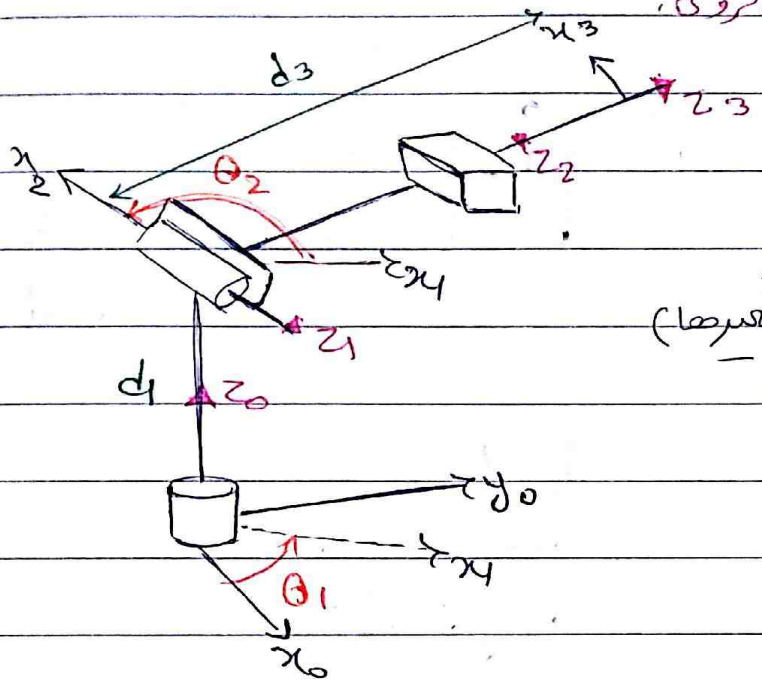
$$\begin{cases} d_1 = c \\ d_2 = a \\ d_3 = b \end{cases}$$ راه حل

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

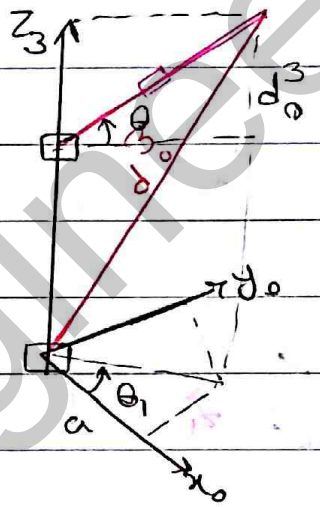
Subject :
Year. Month.

سینماتیک وارون موقعیت بازوی کروی،



فرض کنید $d_0^3 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

هدف محاسبه θ_1 ، θ_2 ، d_3 (متغیرها)

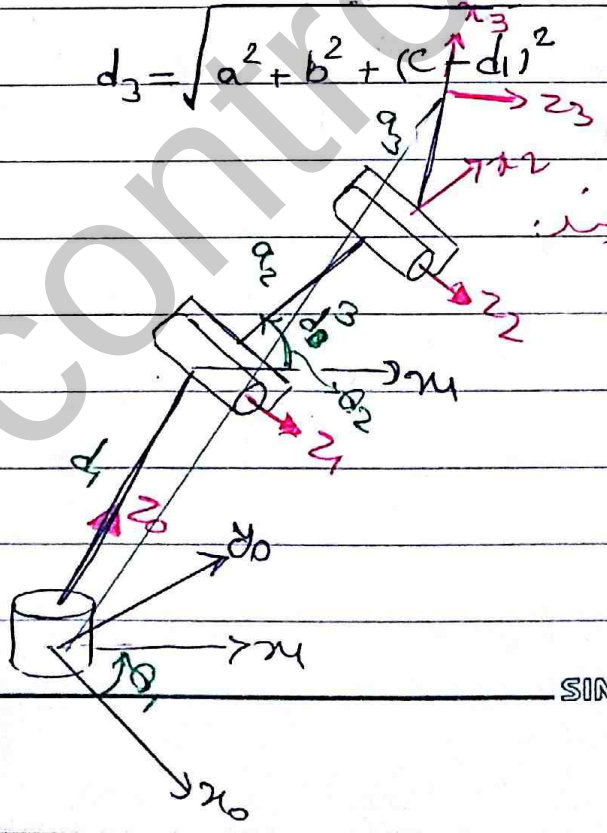


$$\theta_1 = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

$$\theta_2 = \theta + \pi/2$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{c-d_1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$d_3 = \sqrt{a^2+b^2+(c-d_1)^2}$$



سینماتیک وارون موقعیت بازوی حامل هنرمند:

b_{i-1}	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	d_1	0	$\pi/2$
2	θ_2	0	a_2	0
3	θ_3	0	a_3	0

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year. Month.

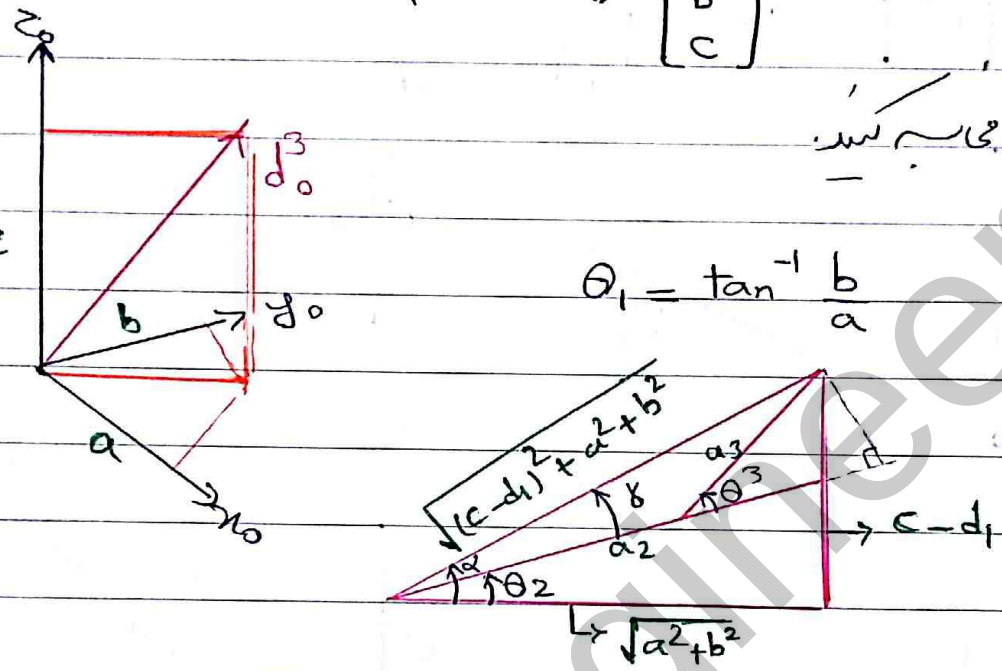
سینماتیک مستقیم

$$T_0^3 = T_0^1 T_1^2 T_2^3$$

سینماتیک وارون

معلوم است. $d_0^3 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ را محاسبه کنید.



$$\theta_1 = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

$$a_2^2 + a_3^2 + 2a_2a_3\cos\theta_3 = (c-d_1)^2 + a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow \cos\theta_3 = \frac{(c-d_1)^2 + a^2 + b^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} \Rightarrow \theta_3 = \checkmark\checkmark$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{c-d_1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\frac{a_3\cos\theta_3 + a_2}{\sqrt{(c-d_1)^2 + a^2 + b^2}} = \cos\gamma \Rightarrow \gamma = \checkmark\checkmark$$

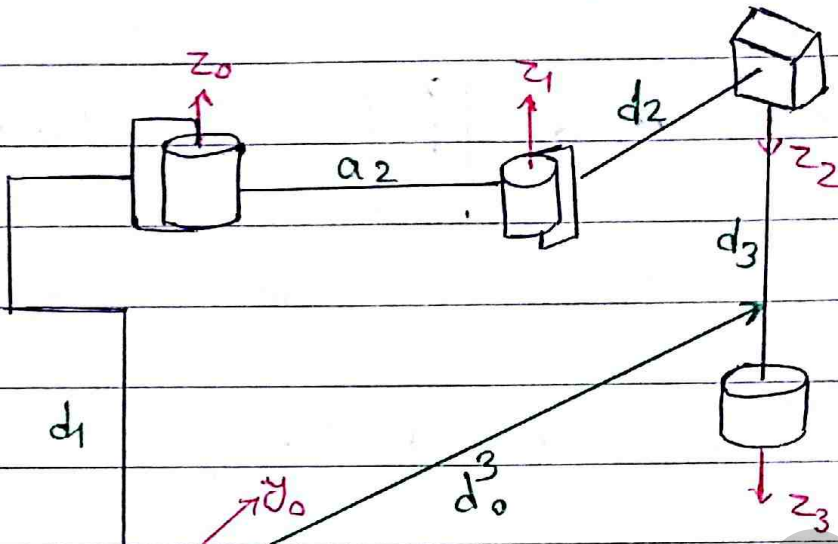
$$\theta_2 = \alpha - \gamma \Rightarrow \theta_2 = \checkmark\checkmark$$

controlengineers.ir

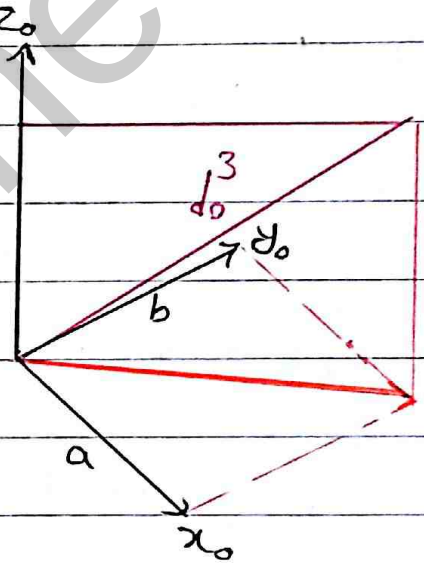
اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year. Month.

۱- سینماتیک وارون موقعیت بازوی اسکارا :

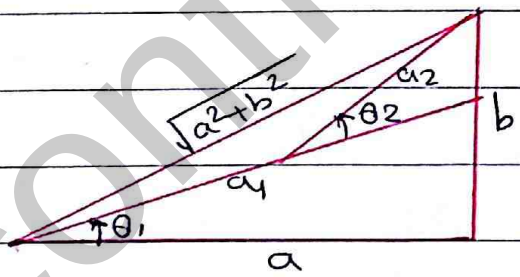


$$d_0^3 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$



$$-d_3 = d_1 - c$$

$$\Rightarrow d_3 = c - d_1 \quad \surd\surd$$



$$a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos\theta_2 = a^2+b^2$$

$$\theta_2 = \surd\surd$$

مانند روش قبل θ_1 نیز بدست می‌آید.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year. Month.

جلسه نهم

تکلیف ۹ ارسال شد.

حل سینماتیک وارون بازوی ربات:

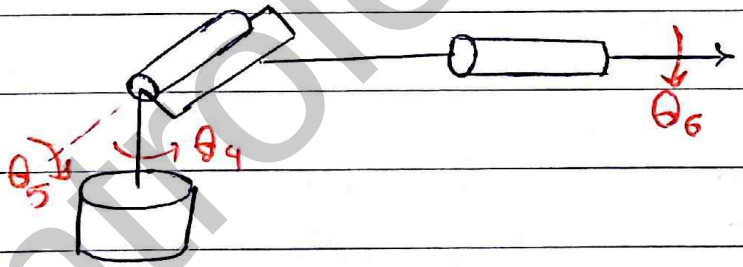
ساده شده حل ← سینماتیک وارون موقعیت بازو

موقعیت مچ

در جلسات گذشته راه حل سینماتیک وارون موقعیت بازو و بازوی هندسی را آموختیم.

سینماتیک وارون جهت مچ:

به روش تحلیلی، ابتدا سینماتیک مستقیم را بدست آورید. (قبلاً حل کرده ایم)



معادلات سینماتیک مستقیم: $R^6_3 =$

$$\begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 + s_4c_6 & c_4s_5 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 & s_4s_5 \\ -s_5c_6 & s_5s_6 & c_5 \end{bmatrix}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year. Month.

اطلاعات معلوم $R_3^6 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$

$\tan\theta_4 = \frac{r_{23}}{r_{13}} \rightarrow \theta_4 = \tan^{-1}\left(\frac{r_{23}}{r_{13}}\right)$

$\tan\theta_5 = \frac{-r_{32}}{r_{31}} \rightarrow \theta_5 = \tan^{-1}\left(\frac{-r_{32}}{r_{31}}\right)$

$\theta_5 = \cos^{-1}(r_{33})$

حالت خاص:

$C_5 = 1 \Rightarrow S_5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_{31} = 0 \\ r_{32} = 0 \\ r_{13} = 0 \\ r_{23} = 0 \end{cases}$

← حالت تکین

← محور مفصل 6 و مفصل 4 هم راستا شده است.

$$R_3^6 = \begin{bmatrix} C_4C_6 - S_4S_6 & -C_4S_6 - S_4C_6 & 0 \\ S_4C_6 + C_4S_6 & -S_4S_6 + C_4C_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_3^6 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_4+\theta_6) & -\sin(\theta_4+\theta_6) & 0 \\ \sin(\theta_4+\theta_6) & \cos(\theta_4+\theta_6) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\theta_4 + \theta_6 = \tan^{-1}\left(\frac{r_{21}}{r_{22}}\right)$

۹,۲,۹۷ ← تمرینات زوج فصل ۴

SINACO

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year. Month.

فصل پنجم — سینماتیک سرعت

هم رابطه‌ای بین سرعت نقطه‌ی انتهایی و سرعت مفاصل ربات وجود دارد؟!

هم رابطه‌ای بین سرعت زاویه‌ای رابط T و سرعت مفاصل ربات وجود دارد؟!

$$\omega_0^n = \omega_0^1 + R_0^1 \omega_1^2 + \cdots + R_0^{n-1} \omega_{n-1}^n$$

ω_0^n ؛ سرعت زاویه‌ای رابط آخر در دستگاه صفر.

مفصل دورانی $\omega_{i-1}^i = \dot{\theta}_i \vec{k}$ $\quad \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

مفصل کشویی $\omega_{i-1}^i = 0$

ω_{i-1}^i سرعت زاویه‌ای دستگاه i در دستگاه $i-1$

☑ اگر متغیر مفصل iام را با اسم q_i بنامیم

اگر کشویی باشد $\Leftarrow \theta_i$
اگر دورانی باشد $\Leftarrow d_i$

$$\omega_{i-1}^i = \rho_i \dot{q}_i k$$

$$\begin{cases} \text{مفصل دورانی} \rightarrow \rho_i = 1 \\ \text{مفصل کشویی} \rightarrow \rho_i = 0 \end{cases}$$

$$\omega_0^n = \rho_1 \dot{q}_1 \vec{k} + R_0^1 \rho_2 \dot{q}_2 k + \cdots + R_0^{n-1} \rho_n \dot{q}_n k$$

$$\omega_{i-1}^i = \rho_i \dot{q}_i k$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year. Month.

$$R_0^{i-1}\,\omega_{i-1}^{i} = R_0^{i-1}\,\rho_i \dot{q}_i k = \rho_i \dot{q}_i R_0^{i-1} k = \rho_i \dot{q}_i z_{i-1}$$

$$R_0^{i-1} = \begin{vmatrix} x_{i-1} & y_{i-1} & z_{i-1} \end{vmatrix}$$

$$\omega_0^n = \begin{vmatrix} \rho_1 z_0 & \cdots & \rho_n z_{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{vmatrix}$$

$$\omega_0^n = \rho_1 z_0 \dot{q}_1 + \rho_2 z_1 \dot{q}_2 + \cdots + \rho_n z_{n-1} \dot{q}_n \quad \surd\surd$$

$$\dot{q} = \begin{vmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{vmatrix} \qquad jw = \begin{vmatrix} \rho_1 z_0 & \cdots & \rho_n z_{n-1} \end{vmatrix}$$

↳ ماتریس ژاکوبین سرعت زاویه‌ای.

$$\boxed{\omega_0^n = jw\,\dot{q}}$$

یافتن رابطه بین سرعت نقطه انتهایی و سرعت مفاصل:

$$d_0^n = d_0^1 + R_0^1 d_1^2 + \cdots + R_0^{i-1} d_{i-1}^{i} + \cdots + R_0^{n-1} d_{n-1}^{n}$$

$$\dot{d}_0^n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial d_0^n}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

d_0^n تابعی از q_1 و ... و q_n است.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year. Month.

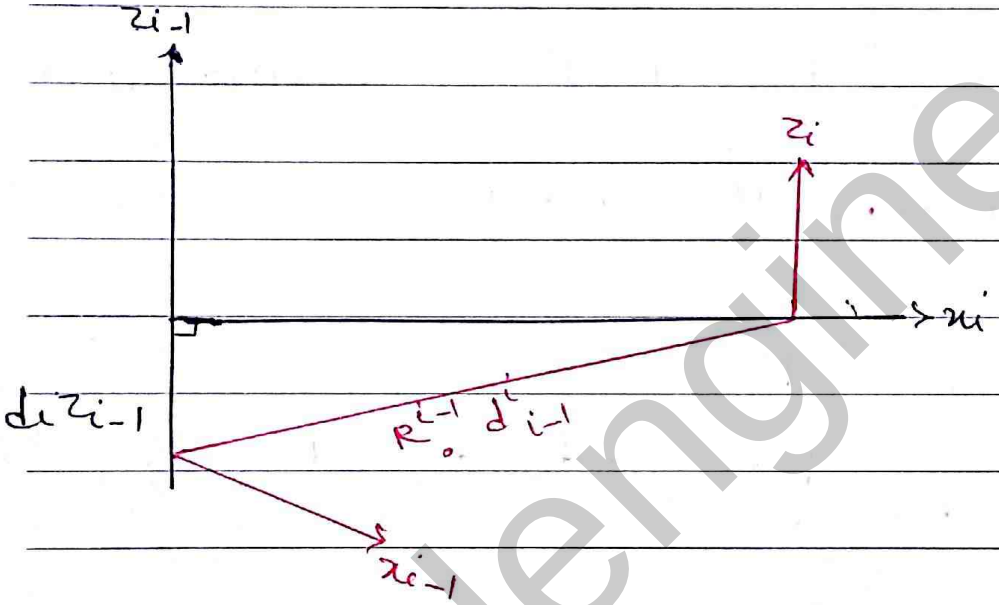
مثال)

$f(x_1, x_2)$

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\dot{x}_2$$

$$\dot{f} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial x_i}\dot{x}_i$$

$\frac{\partial d_0^n}{\partial q_i}$ با متغیر فرض کردن q_i و ثابت فرض کردن سایر متغیرها بدست می‌آید.



$$d_{i-1}^i = d_i \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} + a_i R_{i-1}^i \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$R_0^{i-1} d_{i-1}^i = R_0^{i-1} d_i \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} + a_i \underbrace{R_0^{i-1} R_{i-1}^i}_{R_0^i} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$R_0^{i-1} d_{i-1}^i = d_i z_{i-1} + a_i x_i$$

$$R_0^{i-1} d_{i-1}^i = d_i z_{i-1} + a_i x_i \rightarrow$$ به شکل جلسه درآمده است!!!

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year. Month.

$\dot{r} = r \times \omega$

$\dot{z}_{i-1} = z_{i-1} \times \dot{q}_i \vec{k}$ فرض کنید فقط q_i متغیر است.

$\dot{d}^n_0 = R^{i-1}_0 \dot{d}^i_{i-1} = R^{i-1}_0 \dot{d}_i z_{i-1} = \dot{q}_i z_{i-1}$ اگر مفصل کشویی باشد.

یعنی: $\frac{\partial d^n_0}{\partial q_i} = z_{i-1}$

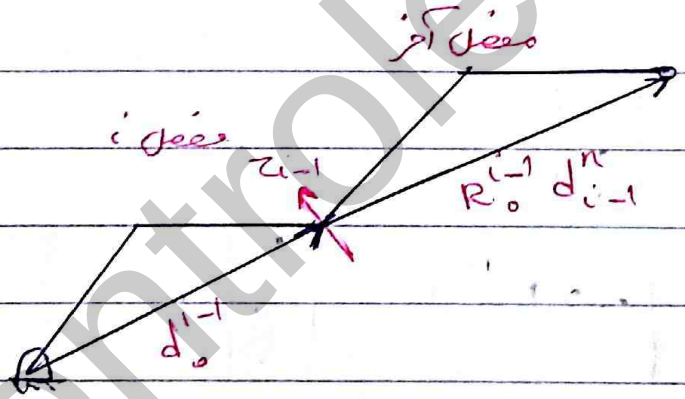
$d^n_0 = d^1_0 + \cdots + R^{i-1}_0 \underbrace{d^i_{i-1} + R^i_0 d^n_i}$: مفصل iام متغیر.

استاد این قسمت را پاک کرد و به جایش نوشت: d^n_{i-1}

$\Rightarrow d^n_0 = \underbrace{d^1_0 + \cdots +} R^{i-1}_0 d^n_{i-1}$

$\Rightarrow d^n_0 = d^{i-1}_0 + R^{i-1}_0 d^n_{i-1}$

دوباره پاک کرد و نوشت: d^{i-1}_0



فقط q_i را متغیر بگیرید:

$\dot{d}^n_0 = d^{i-1}_0 \dot{d}^n_{i-1} = R^{i-1}_0 (d^n_{i-1} \times \omega^n_{i-1})$

$= R^{i-1}_0 d^n_{i-1} \times R^{i-1}_0 \omega^n_{i-1}$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year. Month.

$$= R_0^{i-1} d_{i-1} \times R_0^{i-1} q_i k = \dot{q}_i R_0^{i-1} d_{i-1}^n \times z_{i-1}$$

نتیجه: $\frac{\partial d_0^n}{\partial q_i} = R_0^{i-1} d_{i-1}^n \times z_{i-1}$

اگر مفصل i دورانی باشد. ⇒

$$= (d_0^n - d_0^{i-1}) \times z_{i-1}$$

$$\dot{d}_0^n = \frac{\partial d_0^n}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial d_0^n}{\partial q_n} \dot{q}_n$$

$$\Rightarrow \dot{d}_0^n = \begin{vmatrix} \frac{\partial d_0^n}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial d_0^n}{\partial q_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{vmatrix}$$

$$\dot{d}_0^n = J_v \dot{q}$$

ماتریس ژاکوبین سرعت خطی ←

اگر مفصل i ام کروی باشد $\frac{\partial d_0^n}{\partial q_i} = z_{i-1}$

اگر مفصل i ام دورانی باشد $\frac{\partial d_0^n}{\partial q_i} = (d_0^n - d_0^{i-1}) z_{i-1}$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year. Month.

جلسه دهم سه‌شنبه 11 اردیبهشت

ماتریس ژاکوبین بین سرعت خطی.

$$\dot{J}_0^n = J_v \dot{q}$$

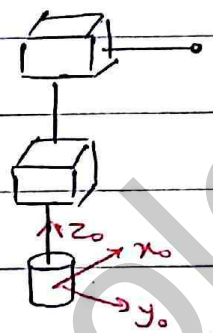
$$J_v = \begin{bmatrix} \frac{\partial d_0^n}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial d_0^n}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

$\frac{\partial d_0^n}{\partial q_i} = z_{i-1}$ ، هرگاه مفصل i ام کشویی باشد.

$\frac{\partial d_0^n}{\partial q_i} = (d_0^n - d_0^{i-1}) \times z_{i-1}$ ؛ هرگاه مفصل i ام لولایی باشد.

تمرین: همه ریاضیات را با برنامه نویسی بدست آورید.

مثال) بازوی رباتیک استوانه‌ای:



$i=1$ مفصل لولایی

$i=2$ مفصل کشویی

$i=3$ مفصل کشویی

ابتدا دیاگرام را رسم کرده و جدول دناویت هانتبرگ را تشکیل دهید سپس محاسبات سینماتیک مستقیم را انجام دهید.

$$T_0^3 = T_0^1 T_1^2 T_2^3 \rightarrow T_0^3 = \begin{bmatrix} R_0^1 & d_0^1 \\ \cdots & 1 \end{bmatrix} \rightarrow d_0^3$$

$$z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad T_0^1 = \begin{bmatrix} R_0^1 & d_0^1 \\ \cdots & 1 \end{bmatrix} \rightarrow R_0^1 \rightarrow z_1 = R_0^1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس ژاکوبین سرعت خطی ، $J_v = \begin{bmatrix} d_0^3 \times z_0 & z_1 & z_2 \end{bmatrix}$

$$T_0^2 = T_0^1 T_1^2 \qquad T_1^2 = \begin{bmatrix} R_0^2 & d_0^2 \\ \cdots & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow R^2 \rightarrow R_0^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = z_2$$

SINACO

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year. Month.

$\omega_0^n = J_\omega \dot{q}$ ماتریس ژاکوبین سرعت زاویه ای

$J_\omega = [\rho_1 z_0 \cdots \rho_i z_{i-1} \cdots \rho_n z_{n-1}]$

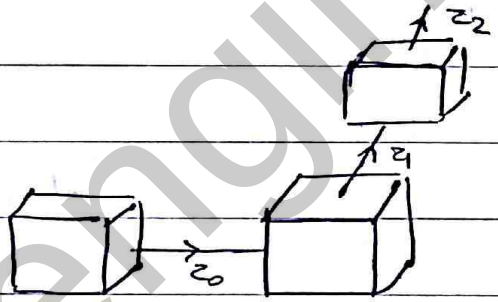
اگر مفصل i ام دورانی باشد $\rho_i = 1$

$\rho_i = 0$ ... انتقالی ...

ماتریس ژاکوبین سرعت زاویه ای بازوی ربات استوانه ای،

$J_\omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $J_\omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

بازوی ربات دکارتی:



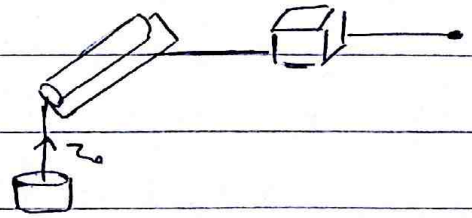
$J_v = [z_0 \quad z_1 \quad z_2]$

از محاسبات سینماتیک مستقیم (جدول D-H)

$T_0^1 \rightarrow R_0^1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = z_1$ $T_0^2 \Rightarrow R_0^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = z_2$ $z_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$J_\omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

بازوی ربات کروی،



$J_v = [d_0^3 \times z_0 \quad (d_0^3 - d_0^1) \times z_1 \quad z_2]$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year. Month.

$T_0^3 \longrightarrow d_0^3$

$T_0^1 \longrightarrow d_0^1 , R_0^1$

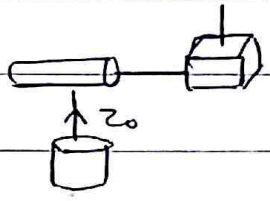
$R_0^1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = z_1$

$R_0^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = z_2$

$\longrightarrow z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$J_\omega = \begin{bmatrix} z_0 & z_1 & \vdots \end{bmatrix}$

بازوی ربات استاتفورد :



$J_v = \begin{bmatrix} d_0^3 \times z_0 & (d_0^3 - d_0^1) \times z_1 & z_2 \end{bmatrix}$

$J_\omega = \begin{bmatrix} z_0 & z_1 & \vdots \end{bmatrix}$

از جدول دناویت هارتنبرگ

T_0^1 , T_1^2 , T_2^3 $\quad T_0^2 = T_0^1 T_1^2 \quad T_0^2 = \begin{bmatrix} R_0^2 & d_0^2 \\ \cdots & 1 \end{bmatrix}$

$T_0^3 = T_0^1 \; T_1^2 \; T_2^3$

$T_0^3 = \begin{bmatrix} R_0^3 & d_0^3 \\ \cdots & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow d_0^3$

$T_0^1 = \begin{bmatrix} R_0^1 & d_0^1 \\ \cdots & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow R_0^1 , d_0^1$

$R_0^1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = z_1 \qquad z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

برنامه نویسی

```
for i = 1:3
for j = 1:3
R30(i,j) = T30(j,j)
end
end
```

SINACO

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year. Month.

$$d^n_0 = J_v \dot{q}$$
$$\omega^n_0 = J_\omega \dot{q}$$

$$\begin{bmatrix} d^n_0 \\ \omega^n_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_v \\ J_\omega \end{bmatrix} \dot{q}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} d^n_0 \\ \omega^n_0 \end{bmatrix} \qquad J = \begin{bmatrix} J_v \\ J_\omega \end{bmatrix} \qquad \dot{x} = J\dot{q}$$

ماتریس ژاکوبین بازو

روش وارون:

محاسبه سرعت‌های مفاصل با داشتن سرعت خطی انتهای بازو و سرعت زاویه‌ای رابط آخر $\dot{x}$

$\dot{q} = J^{-1}\dot{x}$
$\dot{q} = J_v^{-1} d^n_0$
$\dot{q} = J_\omega^{-1} \omega^n_0$

اگر داریم $\dot{q}$ را بدست آوریم:

اگر d^n_0 داریم $\dot{q}$ را بدست آوریم:

اگر ω^n_0 داریم $\dot{q}$ را بدست آوریم:

محاسبه شتاب مفاصل:

$$\dot{x} = J\dot{q}$$
$$\ddot{x} = \dot{J}\dot{q} + J\ddot{q}$$
$$J\ddot{q} = \ddot{x} - \dot{J}\dot{q}$$
$$\ddot{q} = J^{-1}(\ddot{x} - \dot{J}\dot{q})$$

اگر $\ddot{x}$ داریم ← $\ddot{q}$ را بدست آوریم.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year. Month.

هنگام بازوی ربایتک سه مفصل داشته باشد ماتریس ژاکوبین سرعت خطی و سرعت زاویه‌ای هر یک 3x3 هستند. وارون هر یک وجود دارد.

چنانچه بازوی ربایتک مثلاً اسکارا چهار مفصل داشته باشد،

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} J_v \\ J_\omega \end{bmatrix} \dot{q} \qquad J_v \Rightarrow 3\times 4 \qquad J_\omega \Rightarrow 3\times 4$$

آیا J_v^{-1} وجود دارد؟

آیا برای ماتریس‌های مربعی، ماتریس وارون وجود دارد؟

$$\dot{d}_o^n = J_v \dot{q}$$

$$J_v^T \dot{d}_o^n = J_v^T J_v \dot{q} \qquad [J_v^T J_v]^{-1} J_v^T \dot{d}_o^n = \dot{q}$$

$$J^T \dot{d}_o^n = \dot{q}$$

$$J^+ = [J_v^T J_v]^{-1} J_v^T$$ ماتریس وارون مجازی

$$\omega_o^n = J_\omega \dot{q}$$

$$J_\omega^T \omega_o^n = J_\omega^T J_\omega \dot{q} \qquad J_\omega^+ \omega_o^n = \dot{q}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year. Month.

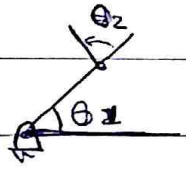
$$J_w^{+} = \left[J_w^T J_w\right]^{-1} J_w^T$$ ماتریس وارون مجازی J_w

یافتن وضعیت تکین:

در وضعیت تکین مقداری از درجات آزادی از دست می‌رود. در این حالت دترمینان ماتریس ژاکوبین صفر می‌شود.

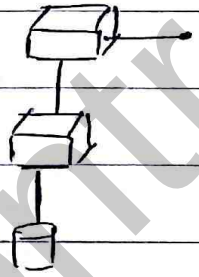
حالت تکین بازو: $\det(J_v) = 0 \longrightarrow$ محاسبه متغیرها

حالت تکین $\begin{cases} \theta_1 = 0 \\ \theta_2 = 0 \end{cases}$



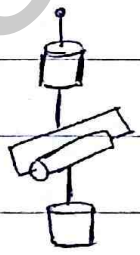
$\theta_1 = 0 \qquad \theta_2 = \pi$

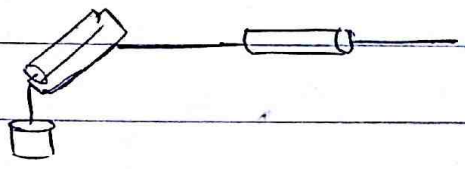
تمرین: آیا محاسبات نشان می‌دهد که $\det(j_v) \neq 0$



حالت تکین ندارد

حالت تکین مچ: $\det(j_w) = 0$





حالت تکین مچ

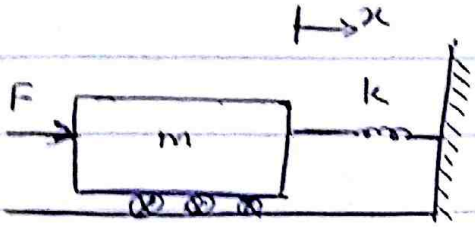
controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year. Month.

جلسه یازدهم یکشنبه ۱۶ اردیبهشت

دینامیک ربات:



$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F$$

x و $\dot{x}$ و $\ddot{x}$ تابعی از F هستند. معادله مذکور دینامیک حرکت جسم را نشان می‌دهد.

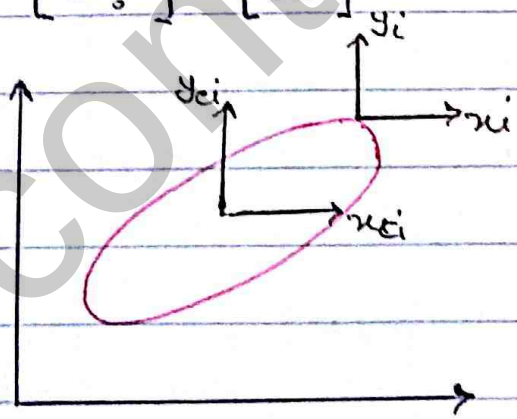
معادله حرکت را دینامیک یا معادله دینامیکی می‌نامند.

پیش از این معادلات سینماتیک را بدست آورده‌ایم:

$$T_0^n = \begin{bmatrix} R_0^n & d_0^n \\ \cdots & 1 \end{bmatrix}$$ سینماتیک مستقیم

معادلات سرعت‌های خطی و زاویه‌ای را بدست آوردیم:

$$\begin{bmatrix} \dot{d}_0^n \\ \omega_0^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_v \\ J_w \end{bmatrix} \dot{q}$$ معادلات دینامیکی ربات چگونه بدست می‌آید.



رابط i را که دستگاه i به آن متصل است را در نظر بگیرید. دستگاه c_i بنام دستگاه مرکز جرم است که مبدأ آن روی مرکز جرم رابط i قرار دارد و به رابط i متصل است.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year. Month.

$$P_0 = d_0^{ci} + R_0^{ci} P_{ci}$$

محورهای دستگاه c_i، موازات محورهای دستگاه i است.

$$R_0^{ci} = R_0^i$$

$$\begin{cases} \dot{P}_0 = \dot{d}_0^{ci} + \dot{R}_0^{ci} P_{ci} \\ \dot{P}_0 = \dot{d}_0^{ci} + \dot{R}_0^{i} P_{ci} \end{cases}$$

P_0 ← موقعیت نقطه P در دستگاه صفر

P_{ci} ← موقعیت نقطه P در دستگاه مرکز جرم

d^{ci} ← توصیف مبدأ دستگاه مرکز جرم در دستگاه صفر

R_0^i ← توصیف دستگاه i در دستگاه صفر.

$$\begin{cases} \dot{R}_0^i = S(\omega_0^i) R_0^i \\ \dot{P}_0 = \dot{d}_0^{ci} + S(\omega_0^i) R_0^i P_{ci} \end{cases}$$

$\dot{P}_0$ ← سرعت خطی نقطه P در دستگاه صفر

ذره dm در موقعیت P_0 در نظر گرفته شده، سرعت ذره dm برابر $\dot{P}_0$ است

انرژی جنبشی ذره dm

$$dk = \frac{1}{2} \dot{P}_0^T \dot{P}_0 \, dm$$

انرژی جنبشی رابط i:

$$k = \frac{1}{2} \int_{\text{جسم}} \dot{P}_0^T \dot{P}_0 \, dm$$

$$k = \frac{1}{2} \int (\dot{d}_0^{ci} + S(\omega_0^i) R_0^i P_{ci})^T (\dot{d}_0^{ci} + S(\omega_0^i) R_0^i P_{ci}) \, dm$$

$$k = \frac{1}{2} \int \dot{d}_0^{ciT} \dot{d}_0^{ci} \, dm + \frac{1}{2} \int \dot{d}_0^{ciT} S(\omega_0^i) R_0^i P_{ci} \, dm + \star$$

$$\frac{1}{2} \int (S(\omega_0^i) R_0^i P_{ci})^T \dot{d}_0^{ci} \, dm + \frac{1}{2} \int (S(\omega_0^i) R_0^i P_{ci})^T R_0^i P_{ci} \, dm$$

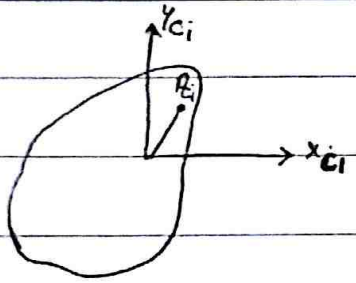
($\star$: تراتیاده رابطه $\circ$)

$$k = \frac{1}{2} m \dot{d}_0^{ciT} \dot{d}_0^{ci} + \frac{1}{2} \int P_{ci}^T R_0^{iT} S(\omega_0^i)^T S(\omega_0^i) R_0^i P_{ci} \, dm$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year. Month.



* دلیل صفر شدن

$$\int \rho_{ci}\, dm = m r_{ci}$$

r_{ci} سنت صفر جرم مرکز جرم رابط i در دستگاه مرکز جرم

$$\int \rho_{ci}\, dm = 0$$

$$\int \dot{J}_o^{ci\,T} S(\omega_o^i) R_o^i \rho_{ci}\, dm =$$

$$\dot{J}_o^{ci\,T} S(\omega_o^i) R_o^i \int \rho_{ci}\, dm = 0$$

k اطهر

$$S(\omega_o^i) R_o^i \rho_{ci} = -S(R_o^i \rho_{ci})\, \omega_o^i$$

$$S(a)b = a \times b$$

$$S(b)a = b \times a$$

$$a \times b = -b \times a$$

$$\frac{1}{2} \int \rho_{ci}^T R_o^{i\,T} S(\omega_c^i)^T S(\omega_o^i) R_o^i \rho_{ci}\, dm$$

$$= \frac{1}{2} \int \omega_o^{i\,T} S(R_o^i \rho_{ci})^T S(R_o^i \rho_{ci}) \omega_o^i\, dm = \frac{1}{2} \omega_o^{i\,T} \left[\int S(R_o^i \rho_{ci})^T S(R_o^i \rho_{ci})\, dm\right] \omega_o^i$$

$$= \frac{1}{2} \omega_o^{i\,T} \left[\int S(R_o^i \rho_{ci})^T S(R_o^i \rho_{ci})\, dm\right] \omega_o^i$$

خاصیت

$$S(R_o^i \rho_{ci}) = R_o^i\, S(\rho_{ci})\, R_o^{i\,T}$$

$$S(R_o^i \rho_{ci})^T = R_o^i\, S^T(\rho_{ci})\, R_o^{i\,T}$$

$$= \frac{1}{2} \omega_o^{i\,T} R_o^i \left[\int S^T(\rho_{ci}) S(\rho_{ci})\, dm\right] R_o^{i\,T} \omega_o^i$$

$$\int S^T(\rho_{ci}) S(\rho_{ci})\, dm = I_{ci} \longrightarrow R_o^i I_c R_o^{i\,T} = I_i$$

تانسور اینرسی رابط i در دستگاه o

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year. Month.

انرژی جنبشی رابط i

$$\boxed{K_i = \frac{1}{2} m\, \dot{d}_0^{c_i T} \dot{d}_0^{c_i} + \frac{1}{2} \omega_0^{i T} R_0^i I_{c_i} R_0^{i T} \omega_0^i} \rightarrow$$ خیلی مهم

$$I_{c_i} = \int S^T(P_{c_i}) S(P_{c_i})\, dm$$

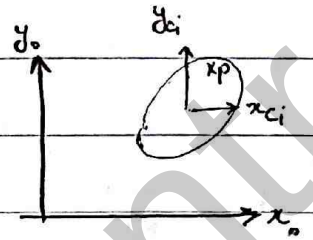
I_{c_i} تانسور اینرسی رابط i در دستگاه مرکز جرم

$$P_{c_i} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad S(P_{c_i}) = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \qquad S(P_{c_i})^T = \begin{bmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{bmatrix}$$

$$S(P_{c_i})^T S(P_{c_i}) = \begin{bmatrix} z^2+y^2 & -xy & -xz \\ -xy & z^2+x^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{bmatrix}$$

$$\int S(P_{c_i})^T S(P_{c_i})\, dm = I_{c_i}$$

$$\begin{bmatrix} \int (z^2+y^2)\,dm & -\int xy\,dm & -\int xz\,dm \\ -\int xy\,dm & \int (z^2+x^2)\,dm & -\int yz\,dm \\ -\int xz\,dm & -\int yz\,dm & \int (x^2+y^2)\,dm \end{bmatrix}$$



θ بردار شتاب جاذبه

انرژی پتانسیل

$$\int g^T P_0\, dm = g^T \int P_0\, dm = g^T \int (d_0^{c_i} + R_0^i P_{c_i})\, dm = g^T \int d_0^{c_i}\, dm + g^T R_0^i \cancelto{0}{\int P_{c_i}\, dm}$$

انرژی پتانسیل $V_i = g^T \int d_0^{c_i}\, dm = m g^T d_0^{c_i}$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year. Month.

انرژی جنبشی ربات

$$K = \sum_{i=1}^{n} K_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{d}_o^{ci\,T} \dot{d}_o^{ci} +$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \omega_o^{i\,T} R_o^i I_{ci} R_o^{i\,T} \omega_o^i$$

انرژی پتانسیل ربات:

$$v = g^T \sum_{i=1}^{n} m_i d_o^{ci}$$

معادلات اویلر - لاگرانژ:

لاگرانژین

$$L = K - v$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \psi_i$$

$$\dot{d}_o^{ci} = J_{vi} \dot{q}$$

$$\omega_o^i = J_{wi} \dot{q}$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} m_i \dot{q}^T J_{vi}^T J_{vi} \dot{q} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \dot{q}^T J_{wi}^T R_o^i I_{ci} R_o^{i\,T} J_{wi} \dot{q}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \dot{q}^T \left[m_i J_{vi}^T J_{vi} + J_{wi}^T R_o^i I_{ci} R_o^{i\,T} J_{wi} \right] \dot{q}$$

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T D \dot{q}$$

انرژی جنبشی ربات

$$D = \sum_{i=1}^{n} m_i J_{vi}^T J_{vi} + J_{wi}^T R_o^i I_{ci} R_o^{i\,T} J_{wi}$$

ماتریس اینرسی ربات D

SINACO

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year. Month.

جلسه دوازدهم ، یکشنبه ۹۷/۲/۲۳

انرژی جنبشی ربات:

$$K = \frac{1}{2}\dot{q}^T D \dot{q}$$

انرژی پتانسیل ربات:

$$v = g^T \sum_{i=1}^{n} m_i d_{\circ}^{ci}$$

لاگرانژین:

$$L = K - v$$

معادلات اویلر - لاگرانژ یا معادلات دینامیکی ربات:

$$\frac{d}{dt}\frac{dL}{d\dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \Psi_k$$

ماتریس D تابعی از q است:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial v}{\partial \dot{q}_k}\right) - \left(\frac{\partial K}{\partial q_k} - \frac{\partial v}{\partial q_k}\right) = \Psi_k$$

بنابراین از q است پس

$$\frac{\partial v}{\partial \dot{q}_k} = 0$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial K}{\partial q_k} + \frac{\partial v}{\partial q_k} = \Psi_k} \quad (1)$$

ماتریس D متقارن است.

$$D_{ij} = D_{ji}$$

$$K = \frac{1}{2}\dot{q}^T D \dot{q} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \dot{q}_i D_{ij} \dot{q}_j$$

$$\frac{\partial K}{\partial q_k} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} D_{kj}\dot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i D_{ik}$$

$$\frac{\partial K}{\partial q_k} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial D_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_j \quad (2)$$

SINACO

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year. Month.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} D_{kj}\dot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} D_{kj}\ddot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\ddot{q}_i D_{ik}$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i \dot{D}_{ik}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} D_{kj}\ddot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} D_{kj}\dot{q}_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\dot{D}_{ik}\dot{q}_i \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{n} D_{kj}\ddot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\dot{D}_{kj}\dot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\dot{D}_{ik}\dot{q}_i$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_i\dot{q}_j\frac{\partial D_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial v}{\partial q_k} = \psi_k \quad (4)$$

$$\dot{D}_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial D_{kj}}{\partial q_i}\dot{q}_i \qquad \dot{D}_{ik} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial D_{ik}}{\partial q_j}\dot{q}_j \quad (5)$$

جایگذاری 5 در 4 و ساده:

$$\sum_{j=1}^{n} D_{kj}\ddot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial D_{kj}}{\partial q_i}\dot{q}_i\dot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial D_{ik}}{\partial q_j}\dot{q}_j\dot{q}_i$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial D_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_i\dot{q}_j + \frac{\partial v}{\partial q_k} = \psi_k$$

$$\sum_{j=1}^{n} D_{kj}\ddot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial D_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial D_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial D_{ij}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j + \frac{\partial v}{\partial q_k} = \psi_k$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial D_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial D_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial D_{ij}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i = C_{kj}$$

معادلات دینامیکی ربات

$$\sum_{j=1}^{n} D_{kj}\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} C_{kj}\dot{q}_j + \frac{\partial v}{\partial q_k} = \psi_k$$

SINACO

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year. Month.

$D\ddot{q}_r + C\dot{q}_r + G = \Psi$ $\quad k = 1, \ldots, n$ برای

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & \cdots & D_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ D_{n1} & \cdots & D_{nn} \end{bmatrix} \qquad \Psi = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_n \end{bmatrix} \qquad \dot{q}_r = \begin{bmatrix} \dot{q}_{r1} \\ \vdots \\ \dot{q}_{rn} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_n \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial q_{r1}} \\ \vdots \\ \frac{\partial V}{\partial q_{rn}} \end{bmatrix}$$

$$\dot{D}_{kj} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial D_{kj}}{\partial q_{ri}} \dot{q}_{ri}$$

$$N_{kj} = \dot{D}_{kj} - 2C_{kj} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial D_{ik}}{\partial q_{rj}} + \frac{\partial D_{ij}}{\partial q_{rk}} \right) \dot{q}_{ri}$$

$$N_{jk} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{-D_{jk}}{\partial q_{rk}} + \frac{\partial D_{ik}}{\partial q_{rj}} \right) \dot{q}_{ri}$$

$N = \dot{D} - 2C$ یک ماتریس پادمتقارن است.

$N_{kj} + N_{jk} = 0 \longrightarrow$ $\boxed{N + N^T = 0}$ پس N ماتریس پادمتقارن است.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year. Month.

ویژگی های ربات:

ماتریس D متقارن است. $D = D^T$

$$D = \sum_{i=1}^{n} \left(M_i J_{vci}^T J_{vci} + J_{wi}^T R_0^i I_{ci} R_0^{i\,T} J_{wi} \right)$$

I_{ci} متقارن است. ماتریس D معین مثبت است زیرا:

$$\begin{cases} \dot{q}^T D \dot{q} > 0 & \dot{q} \neq 0 \\ \dot{q}^T D \dot{q} = 0 & \dot{q} = 0 \end{cases}$$

ماتریس N با تعریف $N = \dot{D} - 2C$

پادمتقارن است: $N + N^T = 0$

راه دوم بدست آوردن معادلات دینامیکی ربات:

$$k = \frac{1}{2} \dot{q}^T D \dot{q} \qquad L = k - v$$

معادلات برای اویلر - لاگرانژ:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial h}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial h}{\partial q} = \psi$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial k}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial v}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial k}{\partial q} + \frac{\partial v}{\partial q} = \psi$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial k}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial k}{\partial q} + \frac{\partial v}{\partial q} = \psi$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year. Month.

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} = D\dot{q}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} = \dot{D}\dot{q} + D\ddot{q}$$

$$\frac{\partial K}{\partial q} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q}(\dot{q}^T D\dot{q})$$

$$D\ddot{q} + \dot{D}\dot{q} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q}(\dot{q}^T D\dot{q}) + \frac{\partial V}{\partial q} = \Psi \quad //$$

$$\dot{D}\dot{q} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q}(\dot{q}^T D\dot{q}) = C\dot{q}$$

تفسیر $\frac{\partial}{\partial q}$ ها:

$$\frac{\partial V}{\partial q} = \begin{bmatrix} \partial V/\partial q_1 \\ \vdots \\ \partial V/\partial q_n \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial}{\partial q}(\dot{q}^T D\dot{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{q}^T D\dot{q}}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \dot{q}^T D\dot{q}}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

مثال) ماتریس D ربات به صورت زیر داده شده است، معادلات دینامیکی ربات را بدست آورید.

$$V = \begin{bmatrix} \cos q_1 \\ \cos(q_1+q_2) \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} \sin q_1 & \sin(q_1+q_2) \\ \sin(q_1+q_2) & 10 \end{bmatrix}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year, Month,

$$\dot{D} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \cos q_1 & (\dot{q}_1+\dot{q}_2)\cos(q_1+q_2) \\ (\dot{q}_1+\dot{q}_2)\cos(q_1+q_2) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{q}^T D \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 & \dot{q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin q_1 & \sin(q_1+q_2) \\ \sin(q_1+q_2) & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \sin q_1 + \dot{q}_2 \sin(q_1+q_2) & \dot{q}_1 \sin(q_1+q_2) + 10\dot{q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{q}_1^2 \sin q_1 + \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(q_1+q_2) + \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(q_1+q_2) + 10\dot{q}_2^2$$

$$\frac{\partial}{\partial q}(\dot{q}^T D \dot{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{q}^T D \dot{q}}{\partial q_1} \\ \frac{\partial \dot{q}^T D \dot{q}}{\partial q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1^2 \cos q_1 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_1+q_2) \\ 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_1+q_2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sin q_1 & \sin(q_1+q_2) \\ \sin(q_1+q_2) & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{q}\cos q_1 & (\dot{q}_1+\dot{q}_2)\cos(q_1+q_2) \\ (\dot{q}_1+\dot{q}_2)\cos(q_1+q_2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year. Month.

$$-\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\dot{q}_1^2\cos q_1 + \dot{q}_1\dot{q}_2\cos(q_1+q_2) \\ \dot{q}_1\dot{q}_2\cos(q_1+q_2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sin q_1 \\ \sin(q_1+q_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$$

در مثلث ← دستور diff

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{diff}(f, x_1) = \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

$$\text{diff}(f, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\dot{x}_2$$

مشتق در مثلث $\Rightarrow$ $df = \text{diff}(f, x_1) * dx_1 + \text{diff}(f, x_2) * fx_2$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year. Month.

جلسه سیزدهم — شنبه ۹۷/۲/۲۵

طراحی مسیر: مسیرهای چندجمله‌ای

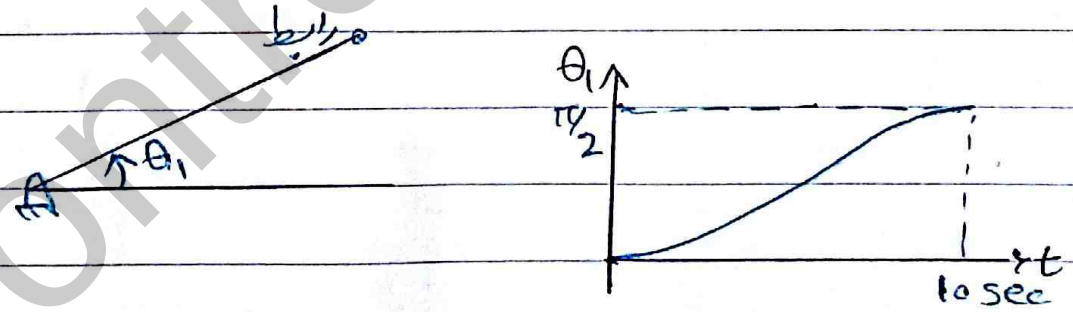
مسیرهای تکه‌ای

آیا مسیر به‌صورت تحلیلی ترسیم می‌شود؟

آیا مسیر برای شرط‌های مختلف مشخص می‌شود؟

پاسخ سوالات فوق:

θ_1 خود را از زاویه ۰ به زاویه $\pi/2$ برساند. این مسیر را در مدت 10s بیابید.



$$\theta = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$t=0 \rightarrow \theta = 0 \rightarrow a_0 = 0$

$$\theta = a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$t = 10 \quad \theta = \pi/2$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year. Month.

ادامه قبل $\frac{\pi}{2} = a_1 \times 10 + a_2 \times 100 + a_3 \times 1000$

$$\dot{\theta} = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$$

$t=0 \rightarrow \dot{\theta} = 0 \rightarrow a_1 = 0$

$t=10 \rightarrow \dot{\theta} = 0 \rightarrow \begin{cases} 2a_2 \times 10 + 3a_3 \times 100 = 0 \\ 100 a_2 + 1000 a_3 = \pi/2 \end{cases}$

از حل این معادلات مجهولات a_3 و a_2 بدست می‌آید.

شرایط:

موقعیت اولیه موقعیت نهایی سرعت اولیه.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year. Month.

جلسه چهاردهم — یکشنبه ۹۷/۲/۳۰

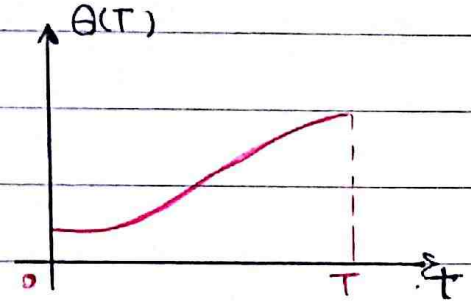
ادامه بحث طراحی مسیر،

حالت عمومی

فرض کنید $\theta(0)=\theta_0$ ، $\dot{\theta}(0)=\dot{\theta}_0$

$T \leftarrow$ مدت زمان مسیر،

و $\theta(T)=\theta_F$ ، $\dot{\theta}(T)=\dot{\theta}_F$



در تعریف مسیر $\theta(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3$

$$\dot{\theta}(t)=a_1+2a_2t+3a_3t^2$$

با استفاده از فیدبک می‌توان ضرایب تابع مسیر را مشخص کرد.

$$\theta_0=a_0$$
$$\theta_F=a_0+a_1T+a_2T^2+a_3T^3$$
$$\dot{\theta}_0=a_1+2a_2T+3a_3T^2$$

معادلات را برای محاسبه ضرایب مرتب کنید،

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & T & T^2 & T^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2T & 3T^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_F \\ \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_F \end{bmatrix}$$

SINACO
controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year. Month.

معلوم ← $Aa = b \longrightarrow a = A^{-1}b$

مجهول ، معلوم

$$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & T & T^2 & T^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2T & 3T^2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_F \\ \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_F \end{bmatrix}$$

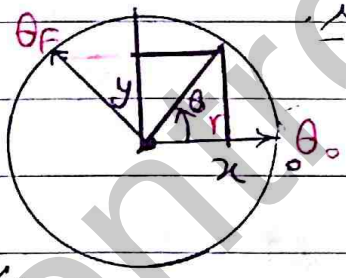
مسیر در فضای دکارتی $\xleftarrow{\text{متناظر}}$ مسیر در فضای مفاصل.

با طراحی مسیر در فضای مفصلی مسیر مورد نظر در فضای دکارتی پیموده می‌شود.

معادلات سینماتیک مستقیم رابطه بین مسیر در فضای دکارتی و مفصلی را برقرار می‌کند.

طراحی مسیر در فضای دکارتی:

فرض کنید که می‌خواهیم نقطه نهایی یک ربات یک مسیر دایره‌ای را بپیماید.



فرضیات:

$\theta(T) = \theta_F \quad , \quad \theta(0) = \theta_0$

$\dot{\theta}(T) = \dot{\theta}_f \quad , \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$

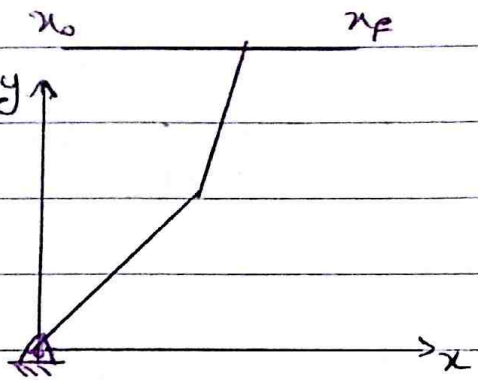
متغیر کمکی

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= T\cos(\theta(t)) \\ y(t) &= T\sin(\theta(t)) \end{aligned}\right\} \text{مسیر در فضای دکارتی}$$

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year. Month.



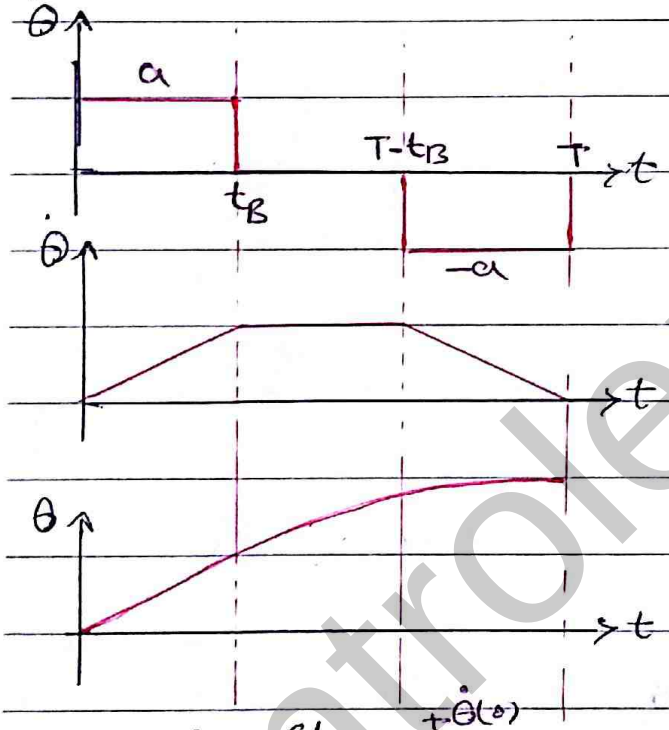
فرض کنید نقطه انتهایی ربات می‌خواهد از x_0 به x_F خود را برساند در مدت زمان T.

$$\dot{x}(T)=\dot{x}_F \quad , \quad \dot{x}(0)=\dot{x}_0$$

ضرایب مانند قبل محاسبه می‌شود.

مشخصات مسیر

$$\begin{cases} y=y_0 \\ x=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3 \end{cases}$$



مسیر خطی بر سرهای سهموی:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}=a & 0<t<t_B \\ \ddot{\theta}=0 & t_B<t<T-t_B \\ \ddot{\theta}=-a & T-t_B<t<T \end{cases}$$

$$\dot{\theta}=\int_0^t \ddot{\theta}\,dt+\dot{\theta}(0)$$ سرعت

$$\theta=\int_0^t \dot{\theta}\,dt+\theta(0)$$ موقعیت

$$\dot{\theta}=\int_0^t a\,dt+\dot{\theta}(0)=at \qquad 0\leq t\leq t_b$$

$$\theta=\int_0^t \dot{\theta}\,dt+\theta(0)=\tfrac{1}{2}at^2+\theta_0($$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year. Month.

$$\dot{\theta} = \int_{t_b}^{t} 0 \times dt + \dot{\theta}(t_b) = a t_b \qquad t_b \leq t \leq T - t_b$$

$$\theta = \int_{t_b}^{t} a t_b \, dt + \theta(t_b) = a t_b (t - t_b) + \frac{1}{2} a t_b^2 + \theta_0$$

$$= a t_b t - \frac{1}{2} a t_b^2 + \theta_0$$

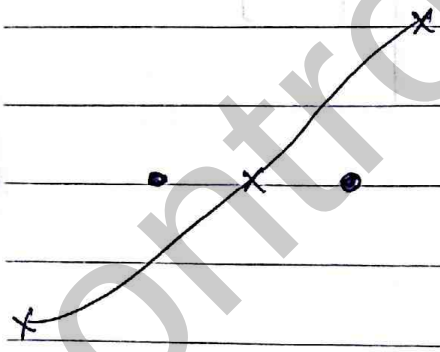
$$\dot{\theta} = \int_{T-t_b}^{T} (-a) \, dt + \dot{\theta}(T - t_b) = -a \times (t - T + t_b) + a t_b$$

$$= -at + aT$$

$$\theta = \int_{T-t_b}^{T} (-at + aT) \, dt + \theta(T - t_b)$$

$$= -\frac{1}{2} a t^2 + \frac{1}{2} a (t - t_b)^2 + aT \times (t - T + t_b) + a t_b \times (T - t_b)$$

$$- \frac{1}{2} a t_b^2 + \theta_0$$



عبور از موانع،
نیاز به طراحی تیکه تیکه است.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Subject :
Year. Month.

فصل پانزدهم

معادلات دینامیک ربات :

$$D\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = \psi$$

$$\ddot{q} = D^{-1}\left(-C(q,\dot{q})\dot{q} - G(q) + \psi\right)$$

مثال : پندول ساده .

$$I\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + c\sin\theta = \psi$$

$\psi \leftarrow$ گشتاور ورودی

$\theta \leftarrow$ زاویه مفصل

$I = 1$

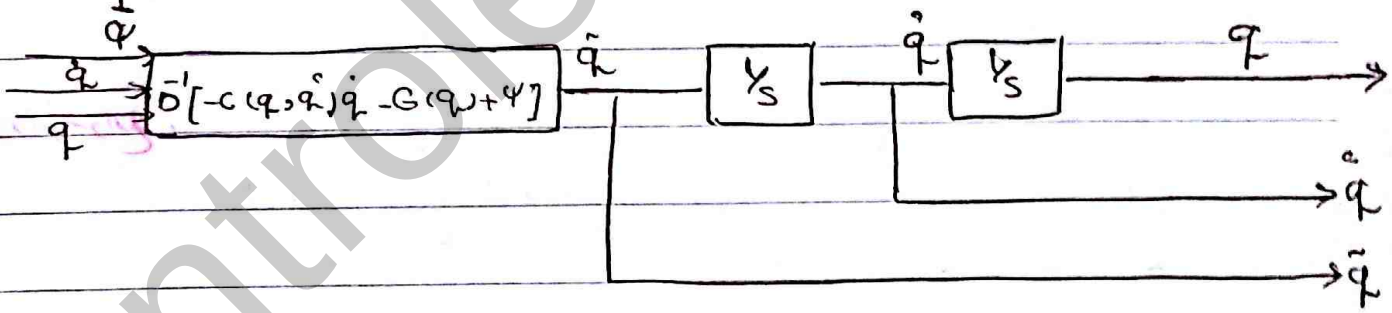
$b = 2$

$c = 3$

روش کار :

$$I\ddot{\theta} = -c\sin\theta - b\dot{\theta} + \psi$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{I}\left(-c\sin\theta - b\dot{\theta} + \psi\right)$$



controlengineers.ir