سایت اختصاصی
مهندسی کنترل

https://controlengineers.ir

@controlengineers

سلام!

۱. لطفاً قسمت درس این جزوهٔ خلاصه را خیلی خیلی سریع نخوانید! (مثلاً حداکثر در یکساعت).

۲. لطفاً تستهای این جزوهٔ خلاصه را موشکافانه و با دقت بخوانید! (یا تستی را حل نکنید، یا اگر حل می‌کنید، با تمام وجود! درکش کنید).

۳. به قسمتهایی که با تیترِ : «نکته بسیار مهم» و «اشتباهات رایج» مشخص کرده‌ام، بسیار دقت کنید (حتی با وجودیکه بسیاری از عزیزان از این نکات آگاهند، باز هم در جلسه کنکور، …). تنها راه حل این مشکل، تست زدن است.

۴. دنبال ابداع روشهای تستی جدید نباشید! تنها رهیافتهای شما برای حل تست، عبارتند از :

درک کامل تئوری +حل مثالهای متعدد +مرور آموخته‌ها

۵ اکیداً توصیه می‌کنم تستهای ۵ سال گذشته را چندین مرتبه مرور کنید.

با توجه به فرصت بسیار اندکی که برای تهیهٔ این جزوه در اختیار داشتیم، احتمال بروز اشتباهات چاپی در آن وجود دارد. سپاسگزار خواهم شد اگر از طریق ایمیل و … ، این خطاهای احتمالی را گوشزد کنید.

امیدوارم به همهٔ آرزوهای پاکتان برسید …

ارادتمند شما، مصطفی تقوی کنی

در جدول ذیل دروس به سرفصلهای مهم آن طبقه بندی شده و مشخص شده است که در هر سال از هر مبحث چند تست سوال شده است و دانشجوی محترم می تواند زمان باقیمانده تا کنکور را با توجه به اهمیت مباحث مدیریت نماید.

رشته: مهندسی برق	درس: سیستمهای کنترل خطی							
ردیف	مبحث	۱۳۸۵	۱۳۸۶	۱۳۸۷	۱۳۸۸	۱۳۸۹	مجموع ۵ سال	نسبت از کل
		تعداد تست	تعداد تست	تعداد تست	تعداد تست	تعداد تست		
1	تعریف سیستم و انواع سیستم	0	0	0	0	0	0	0%
2	مدل سازی به روش تابع تبدیل	0	0	1	0	0	1	1%
3	مدل سازی به روش سیگنال گذر جریان	2	2	0	0	2	6	8%
4	مدل سازی به روش بلوک دیاگرام	0	0	0	0	0	0	0%
5	مدل سازی به روش فضای حالت	2	1	1	2	0	6	8%
6	سیستمهای درجه اول	0	0	0	0	0	0	0%
7	حساسیت	1	0	0	1	0	2	3%
8	سیستمهای درجه دوم	3	2	1	1	1	8	11%
9	سیستمهای درجه سوم و بالاتر	1	0	0	0	0	1	1%
10	بدست آوردن خطای ماندگار	1	2	2	1	1	7	9%
11	تعریف حد بهره و حد فاز	0	2	2	1	2	7	9%
12	تعریف پایداری و تعادل	0	0	0	0	0	0	0%
13	بررسی پایداری به روش راوث	1	1	2	2	0	6	8%
14	بررسی پایداری به روش مکان هندسی ریشه ها	2	2	1	3	2	10	13%
15	بررسی پایداری به روش نایکوئیست	2	1	1	2	3	9	12%
16	بررسی پایداری به روش بود	0	1	1	1	2	5	7%
17	بررسی پایداری به روش نیکولز	0	0	1	0	0	1	1%
18	تعریف و خواص کنترل کننده ها	0	0	0	0	0	0	0%
19	طراحی کنترل کننده به روش زمانی	0	0	1	0	0	1	1%
20	طراحی کنترل کننده به روش فرکانسی	0	1	1	0	1	3	4%
21	مدل ریاضی سیستمهای مکانیکی	0	0	0	1	1	2	3%
22	مدل ریاضی سیستمهای هیدرولیکی	0	0	0	0	0	0	0%
جمع		15	15	15	15	15	75	100%

فصل ۱

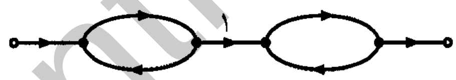
سیگنال فلوگراف و روش ساده سازی میسون

یکی از پایه‌ای‌ترین نیازها در درس «سیستم‌های کنترل خطی» محاسبهٔ سریع تابع تبدیل سیستم‌های کنترل خطی است. گرچه روش‌های متعددی (نظیر ساده سازی بلوکی، نوشتن روابط ریاضی شاخه ها و ...) برای این منظور وجود دارد، با این حال در عمل غالباً از روش میسون (به دلیل سرعت بالا) استفاده می‌کنیم. پیش از بیان کردن روش میسون، ابتدا به مرور چند نکته می‌پردازیم:

۱ـ «حلقه»، مسیر بسته‌ای است که از هیچ نقطهٔ آن بیش از یک بار عبور نکرده باشی.

۲ـ «حلقهٔ مستقل از یک مسیر» حلقه‌ای است که هیچ گره یا شاخهٔ مشترکی با آن مسیر نداشته باشد.

۳ـ «حلقه‌های مستقل از هم» حلقه‌هایی هستند که هیچ گره یا شاخهٔ مشترکی با همدیگر نداشته باشند.



«حلقه‌های مستقل از هم»

«حلقه‌های غیرمستقل از هم»

۴ـ منظور از «بهرهٔ مسیر»، حاصلضربِ کلیهٔ ترنسمیتانس‌هایِ شاخه‌های آن مسیر می‌باشد:

ترنسمیتانس‌های مسیر $\prod =$ بهرهٔ مسیر

۵ـ منظور از «بهرهٔ حلقه[1]» حاصلضربِ کلیهٔ ترنسمیتانس‌هایِ[2] شاخه‌های آن حلقه می‌باشد:

ترنسمیتانس‌های حلقه $\prod =$ بهرهٔ حلقه

۶ـ اگر ترنسمیتانس یک شاخه مشخص نشده بود، گین آن شاخه را به طور پیش‌فرض برابر با 1 در نظر بگیرید.

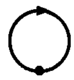
[1] - Loop Gain
[2] - Transmittance

۷ـ مفهوم $x \xrightarrow{1} y$ به‌معنی بافر می‌باشد. به عبارت دیگر حق یک کردنِ گره‌های x و y را نداریم!

۸ـ چنانچه گین شاخه‌ای منفی بود، این علامت منفی به هیچ عنوان به معنای تغییر جهت نمی‌باشد. به عبارت دیگر مجاز به ساده سازی زیر نیستیم:

$$x \xrightarrow{-1} y \Leftrightarrow x \xleftarrow{-1} y$$

۹ـ حلقه‌های «سوده» حتماً باید در تحلیل تابع تبدیل سیستم مورد بررسی قرار بگیرند و **نمی‌توانیم آن‌ها را حذف کنیم**. (حلقهٔ سوده، حلقه‌ای است که یک گره را مستقیماً به خودش متصل کند:


حلقهٔ سوده

برای نوشتن تابع تبدیل به روش میسون، می‌توانیم صورت و مخرج کسر را با استفاده از رابطهٔ تجربی زیر بنویسیم.

الف ـ صورت کسر : به ازای $i-$ امین مسیر پیشرو (از ورودی به خروجی)، $P_i(s)$ را بنویسید و سپس کلیهٔ P_iها را (به ازای مسیرهای پیشروی مختلف) با هم جمع کنید:

$P_i(s) =$ (بهرهٔ مسیر $i-$ ام) $\times [1-\Sigma$ (بهرهٔ حلقه‌های مستقل از این مسیر)

$+\Sigma$ (حاصلضرب بهرهٔ حلقه‌های دو به دو مستقل از هم در این مسیر)

$-\Sigma$ (حاصلضرب بهرهٔ حلقه‌های سه به سه مستقل از هم در این مسیر)

$\pm \cdots]$

ب ـ مخرج کسر: برای نوشتن مخرج تابع تبدیل، از رابطهٔ زیر استفاده کنید :

$Q(s) = 1-\Sigma$ (بهرهٔحلقه‌ها)

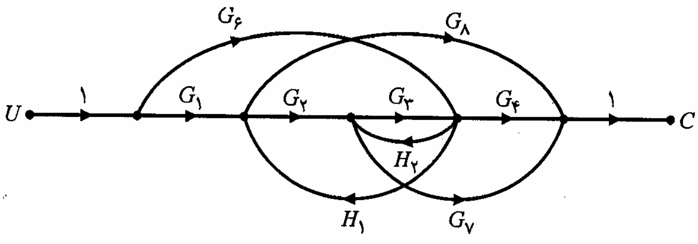
$+\Sigma$ (حاصلضرب بهرهٔ حلقه‌های دو به دو مستقل از هم)

$-\Sigma$ (حاصلضرب بهرهٔ حلقه‌های سه به سه متقل از هم)

$\pm \cdots$

گرچه ممکن است در اولین نگاه حجم محاسبات زیاد به نظر برسد، با این حال با کمی تمرین و ممارست، قادر خواهید بود با استفاده از روش فوق، تابع تبدیل هر سیستم پیچیده‌ای را به سرعت بنویسید. برای درک بهتر روش میسون، به بررسی چند نمونه در این قسمت می‌پردازیم.

مثال: **تعداد مسیرهای مستقیم از گره ورودی به خروجی (مسیرهای پیشرو) کدام است؟** **(مهندسی هسته‌ای ۸۱)**



۱) 4

۲) 5

۳) 6

۴) 7

حل :

در این گراف 7 مسیر پیشرو وجود دارد:

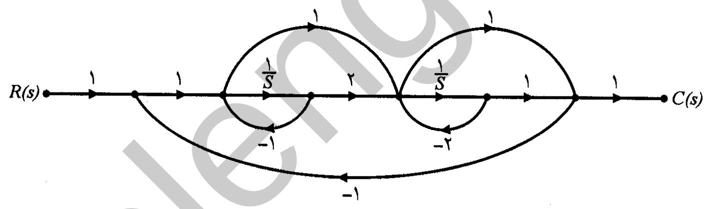
$$G_1G_2G_7\ ,\ G_1G_8\ ,\ G_6H_1G_2G_7\ ,\ G_6H_1G_8\ ,\ G_6H_2G_7\ ,\ G_6G_4\ ,\ G_1G_2G_3G_4$$

اشتباه رایج:

۱) $G_6H_2G_3G_4$ مسیر مستقیم نیست.

۲) مسیر $G_6H_2G_7$ را فراموش نکنید.

مثال: **تابع تبدیل $\frac{C}{R}$ سیستم نشان داده شده در SFG شکل زیر کدام است؟** **(مهندسی هسته‌ای ۸۱)**



۱) $\frac{s^2+2s+3}{2s^2+6s+2}$ ۲) $\frac{s^2+2s+3}{6s^2+2s+2}$ ۳) $\frac{s^2+3s+2}{2s^2+6s+4}$ ۴) $\frac{s^2+3s+2}{6s^2+2s+2}$

حل :

با توجه به گراف داده شده،4 مسیر پیشرو در این گراف وجو دارد:

اولین مسیر پیشرو : $1\times1\times\frac{1}{s}\times2\times\frac{1}{s}\times1\times1=\frac{2}{s^2}$

دومین مسیر پیشرو: $1\times1\times1\times1\times1=1$

سومین مسیر پیشرو : $1\times1\times1\times\frac{1}{s}\times1\times1=\frac{1}{s}$

چهارمین مسیر پیشرو : $1\times1\times\frac{1}{s}\times2\times1\times1=\frac{2}{s}$

با توجه به این که پس از حذف گره‌ها و شاخه‌های متناظر با هر یک از این مسیرهای پیشرو، هیچ حلقه‌ای باقی نمی‌ماند (جملاتِ داخل [...] مربوط به صورت کسر ظاهر نمی‌شوند)، و لذا هر یک از جملات فوق، در حقیقت همان $P_i(s)$ می‌باشند. بنابراین صورت کسر، به شکل زیر خواهد بود:

$$C(s) = \frac{2}{s^2} + 1 + \frac{1}{s} + \frac{2}{s}$$

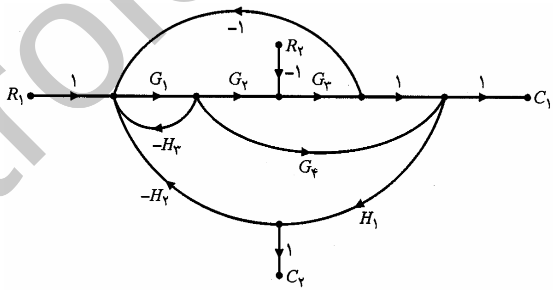
برای نوشتن مخرج کسر نیز، کلاً 6 حلقه در این گراف وجود دارد که از این 6 حلقه، تنها دو حلقهٔ $(-1)\times\frac{1}{s}$, $(-2)\times\frac{1}{s}$ مستقل از هم هستند (هیچ گره و شاخهٔ مشترکی ندارند). بنابراین مخرج کسر، به شکل زیر خواهد بود :

$$R(s) = 1 - \left[\frac{2}{s^2} - 1 - \frac{1}{s} - \frac{2}{s} - \frac{1}{s} - \frac{2}{s}\right] + \left[\frac{-1}{s} \times \frac{-2}{s}\right]$$

بنابراین تابع تبدیلِ این سیستمِ نسبتاً پیچیده، برابر خواهد بود با :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{2}{s^2} + 1 + \frac{1}{s} + \frac{2}{s}}{1 - \left(-\frac{2}{s^2} - 1 - \frac{1}{s} - \frac{2}{s} - \frac{1}{s} - \frac{2}{s}\right) + \left(\frac{-1}{s} \times \frac{-2}{s}\right)} = \frac{\frac{2}{s^2} + 1 + \frac{3}{s}}{2 + \frac{4}{s^2} + \frac{6}{s}} = \frac{s^2 + 3s + 2}{2s^2 + 6s + 4}$$

مثال: تابع تبدیل $\frac{C_2(s)}{R_2(s)}$ گراف گذر سیگنال (SFG) زیر کدام است؟ **(مهندسی برق ۸۰)**



۱) $\dfrac{-G_3H_1(1+G_1H_3)}{1+G_1H_3+G_1G_2H_3+G_1G_2G_3H_1H_2}$

۲) $\dfrac{-G_3H_1(1+G_1H_3)+G_3G_1G_4H_1}{1+G_1H_3+G_1G_2G_3+G_1G_2G_3H_1H_2+G_1G_2H_1H_2}$

۳) $\dfrac{G_3H_1(1+G_1H_3)+G_3G_1G_4H_1}{1+G_1H_3+G_1G_2G_3+G_1G_2G_3H_1H_2+G_1G_4H_1H_3}$

۴) $\dfrac{-G_3H_1(1+G_1H_3)+G_3G_1G_4H_1}{1+G_1H_3+G_1G_2G_3+G_1G_2G_3H_1H_2}$

حل :

اولین مسیر پیشرو: پس از حذف مسیر پیشروی $1\times H_1\times 1\times G_3\times(-1)$ ، تنها یک حلقهٔ مستقل از این مسیر بافی می‌ماند (حلقهٔ $(G_1\times(-H_3))$)، و لذا جملهٔ ناشی از این مسیر، به شکلِ $-G_3H_1\left[1-(-G_1H_3)\right]$ در صورتِ کسر ظاهر می‌گردد.

دومین مسیر پیشرو: پس از حذف مسیر پیشروی $1\times H_1\times G_4\times G_1\times(-1)\times G_3\times(-1)$، هیچ حلقه‌ای باقی نمی‌ماند، و لذا جملهٔ ناشی از این مسیر، به شکلِ $G_3G_1G_4H_1$ در صورت کسر ظاهر می‌گردد.

مخرج کسر: این گراف کلاً دارای 4 حلقه می‌باشد که هیچ یک ازآن‌ها مستقل از هم نیستند (زیرا لااقل در یک گره یا شاخه اشتراک دارند)، و لذا مخرج کسر به شکل زیر خواهد بود.

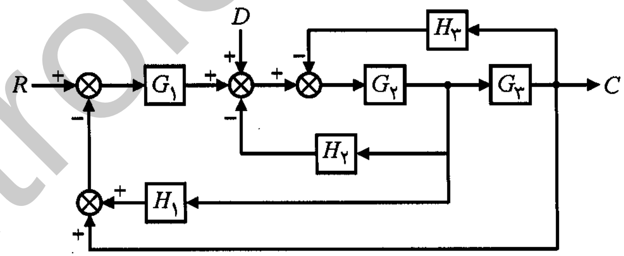
بنابراین، تابع تبدیل این سیستم، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{C_2}{R_2}=\frac{-G_3H_1\left[1-(-G_1H_3)\right]+G_3G_1G_4H_1}{1-[-G_1H_3-G_1G_2G_3H_1H_2-G_1G_4H_1H_2-G_1G_2G_3]}$$

لذا گزینه (۲) صحیح است.

☜ **نکته :** دترمینان گراف SFG ، معادلهٔ مشخصهٔ سیستم را نشان می‌دهد.

مثال: دیاگرام بلوکی سیستمی مطابق شکل می‌باشد، تابع تبدیل $\frac{D}{C}$ کدام است؟ (مهندسی برق ۸۱)



۱) $\dfrac{G_2G_3}{1+G_2H_2+G_2G_3H_3+G_1G_2H_1}$

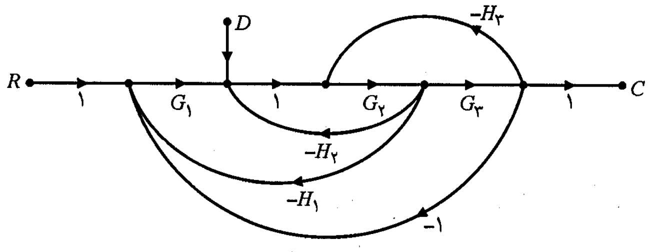
۲) $\dfrac{G_2G_3}{1+G_2H_2+G_1G_2H_1+G_1G_2G_3}$

۳) $\dfrac{G_2G_3}{1-G_2H_2-G_2G_3H_3-G_1G_2H_1-G_1G_2G_3}$

۴) $\dfrac{G_2G_3}{1+G_2H_2+G_2G_3H_3+G_1G_2H_1+G_1G_2G_3}$

حل : گزینه (۴) صحیح است.

به عنوان تمرین: ابتدا بلوک دیارگام را به SFG تبدیل می‌کنیم[1] :

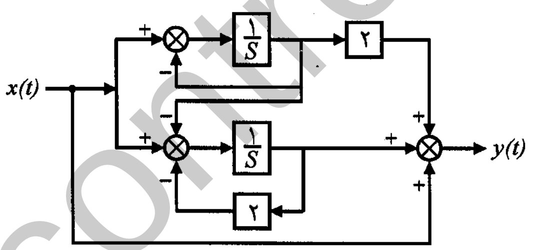


این گراف دارای یک مسیر پیشرو، و 4 حلقه می‌باشد. با توجه به غیر مستقل بودنِ این حلقه‌ها، تنها گزینه‌ای می‌تواند صحیح باشد که در مخرجش 5 جملهٔ مثبت داشته باشد. یعنی گزینهٔ ۴ !

$$\frac{D}{C}=\frac{G_2G_3}{1-\left[-G_1G_2H_2-G_1G_2G_3-G_2H_2-G_2G_3H_3\right]}$$

☜ **نکته :** برای پیشگیری از بروز اشتباه، پیش از نوشتن تابع تبدیل، علامت‌های منفیِ مربوط به جمع کننده‌ها را به کنار ترنسمیتانس شاخه‌ها منتقل کنید.

مثال: معادله دیفرانسیل ارتباط دهنده ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ در سیستم کنترل شکل زیر کدام است؟ (مهندسی برق ۷۸)



۱) $\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=\frac{d^2x}{dt^2}+6\frac{dx}{dt}+6x$

۲) $3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+y=\frac{d^2x}{dt^2}+6\frac{dx}{dt}+6x$

۳) $\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+3y=\frac{d^2x}{dt^2}+6\frac{dx}{dt}+7x$

۴) $\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=\frac{d^2x}{dt^2}+6\frac{dx}{dt}+7x$

حل : گزینه (۱) صحیح است.

این گراف دارای 4 مسیر پیشرو، و 2 حلقه می‌باشد که این دو حلقه، مستقل از یکدیگر هستند.

[1] ـ طبیعتاً در جلسهٔ کنکور، نباید این ترسیم مجدد را انجام دهید. مطمئن باشید که با کمی تمرین و ممارست، قادر خواهیدبود مستقیماً تابع تبدیل سیستم را بنویسید.

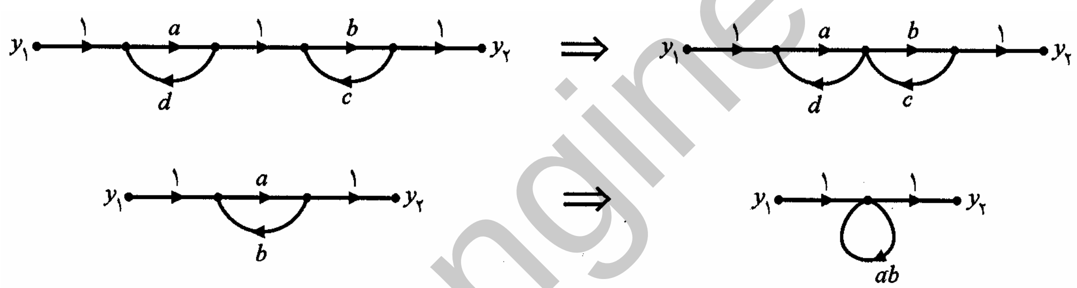
$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{\frac{2}{s}\left(1-\left(-\frac{2}{s}\right)\right)-\frac{1}{s}\times\frac{1}{s}+\frac{1}{s}\left(1-\left(-\frac{1}{s}\right)\right)+1\left[1-\left(-\frac{1}{s}-\frac{2}{s}\right)+\left(-\frac{1}{s}\right)\left(-\frac{2}{s}\right)\right]}{1-\left[\frac{-1}{s}-\frac{2}{s}\right]+\left(-\frac{1}{s}\right)\left(-\frac{2}{s}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{2(s+2)-1+(s+1)+\left(s^2+3s+2\right)}{s^2+3s+2}=\frac{s^2+6s+6}{s^2+3s+2}$$

اشتباه رایج: بسیاری از دانشجویان، دو جملهٔ آخرِ مربوط به صورتِ کسر فوق را نمی‌نویسند !

☜ **نکته :** به ازای $s\to\infty$ ، دو مسیر بالایی حذف می‌شوند و $Y(s)=X(s)$ می‌شود، لذا گزینه‌ای می‌تواند صحیح باشد که نسبت ضریبِ $''y''$ به ضریبِ $''x''$ در آن 1 باشد، با استفاده از این نکته، می‌توانستیم مستقیماً گزینه ۲ را حذف کنیم.

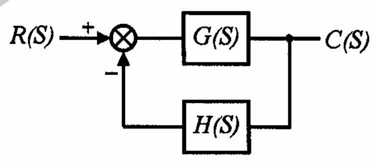
برخی از اشتباهات رایج هنگام ساده سازی SFG ها :



تعریف : تابع تبدیلِ $T(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{B_m s^m+B_{m-1}s^{m-1}+\cdots+B_1 s+B_0}{s^n+A_{n-1}s^{n-1}+\cdots+A_1 s+A_0}$:

- سره (مناسب) است اگر درجه مخرج بزرگتر یا مساوی درجه صورت باشد.
- ناسره (نامناسب) است اگر درجه صورت بیشتر از مخرج باشد.

این تابع تبدیل، می‌تواند از یک سیستم حلقه باز و یا یک سیستم حلقه بسته ناشی شده باشد. جدول زیر، به اختصار مزایا و معایب سیستم‌های کنترل حلقه باز و حلقه بسته را خلاصه می‌کند.

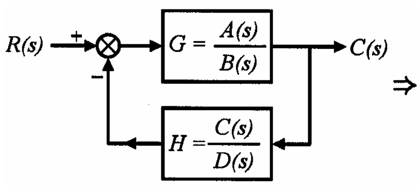


«سیستم حلقه بسته»

«سیستم حلقه باز»

سیستم کنترل حلقه باز	سیستم کنترل حلقه بسته
۱ـ طراحی ساده‌تر	۱ـ طراحی پیچیده‌تر
۲ـ دقت پائین	۲ـ دقت بالا
۳ـ حساسیت بالا به تغییرات (ورودی یا نویز)	۳ـ حساسیت پائین به تغییرات (ورودی یا نویز)
۴ـ پاسخ آهسته	۴ـ پاسخ سریع
۵ـ عدم قابلیت حذف نویز	۵ـ قابلیت حذف نویز

☜ **نکته :** در حالت خاصی که بلوک‌ها سازنۀ مسیرهای پیشرو و فیدبک به صورت کسری قابل بیان شدن باشند، می‌توانیم بنویسیم:



$\Rightarrow$

$$\Rightarrow\ T(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{AD}{AC+BD}=\frac{\text{حاصلضرب دورها}}{\text{مجموع حاصلضرب نزدیک‌ها}}$$

نتیجه : صفرهای حلقه بسته، $\left\{\begin{array}{l}\text{صفرهای } G\\ \text{و}\\ \text{قطب‌های } H\end{array}\right.$ هستند

نمایش صفر و قطبیِ تابع تبدیل

$$G(s)=\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots}$$

مفهوم صفر: اگر سیستمی را توسط یک ورودی با فرکانس مختلطِ z_i تحریک کردیم و خروجی سیستم صفر شد، آنگاه $s=z_i$ را یک صفر سیستم می‌نامیم.

مفهوم قطب : اگر سیستمی را توسط یک ورودی با فرکانس مختلطِ P_i تحریک کردیم و خروجی سیستم واگرا شد، آنگاه $s=P_i$ را یک قطب سیستم می‌نامیم.

☜ **نکات :**

۱ـ صفرها و قطب‌ها در حالت کلی اعدادی مختلط هستند. (مخلطِ مزدوج)

۲ـ محل صفر و قطب، تعیین کنندۀ پارامترهای سیستم می‌باشد.

۳ـ مرتبهٔ قطب : p_0 یک قطب مرتبهٔ n تابع تبدیل $G(s)$ است، اگر

$$\boxed{\lim_{s\to p_0} (s-p_0)^n G(s) = \text{محدود و مخالف صفر}}$$

مثال: در تابع $\frac{\sin(s)}{s^2}$ ، مرتبهٔ قطب $s=0$ چیست؟

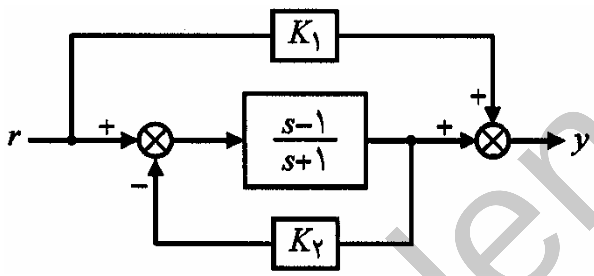
$$\lim_{s\to 0} s^1 . \frac{\sin(s)}{s^2} = 1 \quad \Rightarrow$$

$s=0$ یک قطب مرتبهٔ 1 است.

☜ **نکته :**

$$\boxed{s_{1,2} = a \pm bj \;\;\Rightarrow\;\; s^2 - 2as + \left(a^2 + b^2\right)}$$

مثال: به ازای چه مقادیری از K_1 و K_2 ، صفر سیستم حلقه ـ بستهٔ زیر در 1- قرار خواهد گرفت؟ (مهندسی هسته‌ای ۷۶)



۱) $K_2 = -1 \;\; , \;\; K_1 = 1$

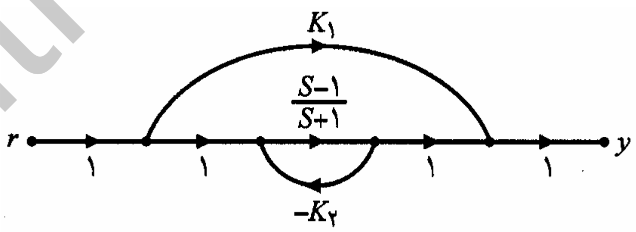
۲) $K_2 = 0 \;\; , \;\; K_1 = -1$

۳) $K_2 = 0 \;\; , \;\; K_1 = 1$

۴) $K_2 = 1 \;\; , \;\; K_1 = -1$

حل : گزینه‌های (۱) و (۴) صحیح است.

گراف SF متناظر با دیاگرام فوق، به صورت زیر می‌باشد:



با استفاده از روش میسون، تابع تبدیل سیستم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{Y}{R} = \frac{K_1\left[1+\frac{K_2(s-1)}{s+1}\right]+\frac{s-1}{s+1}}{1+\frac{K_2(s-1)}{s+1}} = \frac{s(K_1+K_1K_2+1)+(K_1-K_1K_2-1)}{s(K_2+1)+(1-K_2)}$$

برای این که $s=-1$ صفرِ سیستم حلقه بسته باشد، باید داشته باشیم:

$$K_1 + K_1K_2 + 1 = K_1 - K_1K_2 - 1 \;\;\Rightarrow\;\; K_1K_2 = -1$$

بنابراین هر یک از دو گزینه (۱) و (۴) می‌توانند صحیح باشند:

حالت اول : $\begin{cases} K_2 = -1 \\ K_1 = 1 \end{cases} \rightarrow \frac{Y}{R} = \frac{s+1}{2}$

حالت دوم : $\begin{cases} K_2 = 1 \\ K_1 = -1 \end{cases} \rightarrow \frac{Y}{R} = \frac{-(s+1)}{2}$

نکات تکمیلی :

۱ـ تابع تبدیل،تنها برای سیستم‌های LTI می‌تواند توصیف شود.

۲ـ تابع تبدیل، مستقل از ورودی سیستم می‌باشد (به ورودی بستگی ندارد).

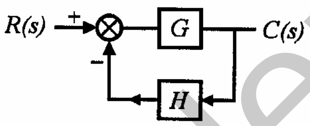
۳ـ برای محاسبهٔ تابع تبدیل یک سیستم، الزاماً باید شرایط اولیهٔ سیستم صفر در نظر گرفته شوند[1] (سیستم در حالت سکون باشد).

[1] ـ در حقیقت وجود شرایط اولیه، موجب غیر خطی شدن (نمواً خطی شدنِ) سیستم می‌گردد.

فصل دوم

حساسیت

یک سیستم خوب! سیستمی است که نسبت به تغییر پارامترهای سیستم واکنش نشان ندهد، اما نسبت به کوچکترین تغییر در ورودی، واکنش نشان دهد.



و $\rightarrow \quad T(s) = \dfrac{C(s)}{R(s)} = \dfrac{G}{۱ + GH}$

اگر P پارامتری از سیستم باشد، حساسیت تابع تبدیل حلقه بسته نسبت به پارامتر P به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{S_P^T = \frac{\dfrac{\partial T}{T}}{\dfrac{\partial P}{P}} = \frac{\partial(\ln T)}{\partial(\ln P)} \overset{*}{=} \frac{\partial T}{\partial P} \times \frac{P}{T}}$$

$\dfrac{\partial T}{T}$: تغییرات نسبی T در اثر P

$\dfrac{\partial P}{P}$: تغییرات نسبی P

قاعدهٔ زنجیری

$$\boxed{S_P^T = S_{G_1}^T \; S_{G_2}^{G_1} \; \cdots \; S_P^{G_n}}$$

به عنوان مثال با بکارگیری قاعدهٔ زنجیری در بلوک یاگرامِ سیستم حلقه بسته با فیدبک منفی، می‌توانیم بنویسیم:

$$\boxed{S_P^T = S_G^T \times S_P^G \; S_H^T \times S_P^H}$$

نکات :

۱ـ اگر پارامتر P فقط در مسیر پیشرو $\frac{1}{1+GH}$ قرار داشته باشد و در مسیر فیدبک وجود نداشت، حساسیت تابع تبدیل حلقه بسته برابر است با :

$$\boxed{S_P^T = \frac{1}{1+GH} \times \frac{\partial G}{\partial P} \times \frac{P}{G}}$$

۲ـ اگر پارامتر P در مسیر پیشرو وجود نداشت، و فقط در مسیر فیدبک $\left(H(s)\right)$ موجود باشد، حساسیت تابع تبدیل حلقه بسته برابر است با :

$$\boxed{S_P^T = \frac{1}{1+GH} \times \frac{\partial H}{\partial P} \times (-PG)}$$

۳ـ با توجه به روابط فوق، حساسیت سیستم حلقه بسته با فیدبک منفی با ضریب $\frac{1}{1+GH}$ ، کمتر از حساسیت سیستم حلقه باز می‌باشد.

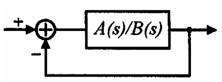
انواع حساسیت

در یک تقسیم‌بندی، حساسیت سستم را بر حسب فرکانس کار سیستم محاسبه می‌کنیم. بر این اساس، دو نوع حساسیت استاتیک و دینامیک قابل تعریف است.

استاتیک : مقدار حساسیت در فرکانس صفر $(s \to 0)$

دینامیک : مقدار حساسیت در کلیهٔ فرکانس‌ها بجز فرکانس صفر $(s \to j\omega)$

نکته : در سیستم‌های با فیدبک منفی واحد، معادله مشخصه برابراست با :



$\Rightarrow \; \Delta(s) = A(s) + B(s) =$ مخرج + صورت

مثال: **در یک سیستمی فیدبک واحد منفی با** $G(s) = \frac{1}{s(1+\tau s)}$ **چنانچه** τ **به میزان** 10% **افزایش یابد؟**

(مهندسی برق ۸۷)

۱) ξ به میزان 5 درصد کاهش می‌یابد.

۲) ξ به میزان 5 درصد افزایش می‌یابد.

۳) ξ به میزان 10 درصد کاهش می‌یابد.

۴) ξ به میزان 10 درصد افزایش می‌یابد.

حل : گزینه (۱) صحیح است.

$$\Delta(s)=\tau s^2+s+1=0 \;\Rightarrow\; \Delta(s)=s^2+\frac{1}{\tau}s+\frac{1}{\tau}$$

$$\omega_n^2=\frac{1}{\tau}\xrightarrow{2\xi\omega_n=\frac{1}{\tau}} 2\times\xi\times\sqrt{\frac{1}{\tau}}=\frac{1}{\tau}\;\Rightarrow\;\xi=\frac{1}{2\sqrt{\tau}}$$

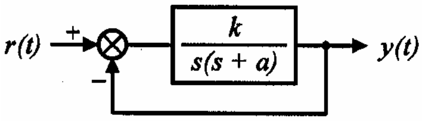
بنابراین اگر $\tau'=1.1\tau$ شود، خواهیم داشت:

$$\frac{\xi'}{\xi}=\sqrt{\frac{\tau}{\tau'}}=\sqrt{\frac{\tau}{1.1\tau}}=95.35\%$$

بنابراین ξ به اندازهٔ 4.65% کاهش می‌یابد.

مثال: در سیستم کنترل شکل زیر حساسیت خطای حالت دایمی به ورودی شیب واحد نسبت به k و a به ترتیب کدام است؟

(مهندسی برق ۸۳)



۱) 1 و -1

۲) 1 و 1

۳) -1 و 1

۴) -1 و -1

حل : گزینه (۳) صحیح است.

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+GH(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{s\times\frac{1}{s^2}}{1+\frac{K}{s(s+a)}}=\lim_{s\to 0}\frac{(s+a)}{s(s+a)+K}=\frac{a}{K}$$

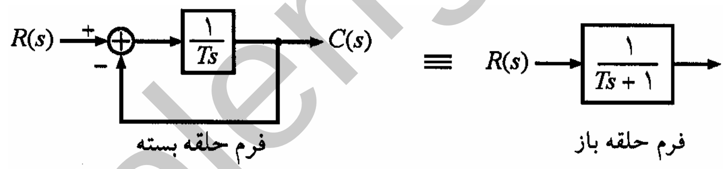
$$S_K^{e_{ss}}=\frac{\partial e_{ss}}{\partial K}\times\frac{K}{e_{ss}}=\frac{-a}{K^2}\times\frac{K}{\frac{a}{K}}=-1$$

$$S_a^{e_{ss}}=\frac{\partial e_{ss}}{\partial a}\times\frac{a}{e_{ss}}=\frac{1}{K}\times\frac{a}{\frac{a}{K}}=1$$

فصل سوم

پاسخ‌گذاری سیستم‌ها

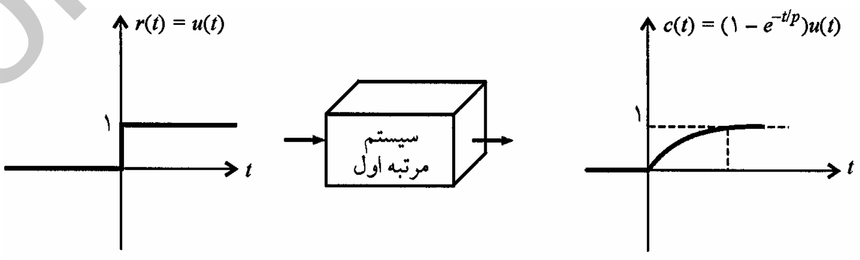
۱ـ سیستم مرتبه اول: سیستمی که معادله دیفرانسیل حاکم بر آن، از مرتبهٔ اول باشد، سیستم مرتبه اول نامیده می‌شود (سیستمی که یک انتگرال‌گیر دارد).



سیستم‌های مرتبه اول دارای یک پارامتر مشخصه می‌باشند:

T : ثابت زمانی سیستم

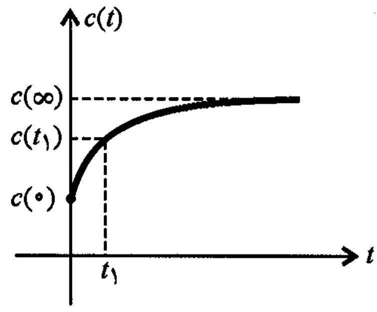
۱ـ۱) پاسخ پلهٔ سیستم مرتبه اول :



☜ **نکات :**

۱ـ مماس بر منحنی پاسخ پله در $t=0$ ، مقدار نهاییِ پاسخ پله را در زمان $t=T$ قطع می‌کند.

۲ـ برای محاسبهٔ T، می‌توانیم از رابطهٔ زیر نیز استفاده کنیم:



$$\Rightarrow e^{-\frac{t}{T}} = \frac{c(t_1)-c(\infty)}{c(0)-c(\infty)}$$

۳ـ میزان نزدیکیِ خروجی یک سیستم مرتبه اول به مقدار نهاییِ آن خروجی، در جدول زیر خلاصه می‌شود:

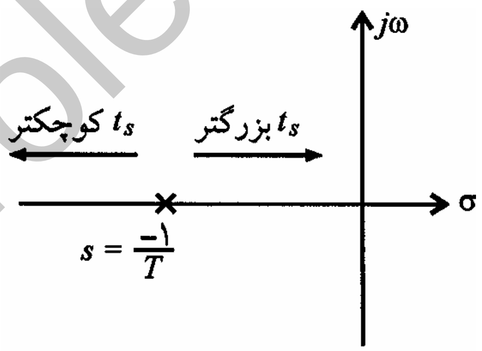
t	1T	2T	3T	4T	5T
$\frac{c(t)}{c(\infty)}$	%63	%86	%95	%98	%99

۴ـ در سیستم‌های مرتبه اول، پارامتری با نام زمان نشست[1] تعریف می‌شود. هر قدر مقدار این پارامتر بزرگتر باشد، سیستم دیرتر به مقدار نهایی‌اش می‌رسد. هر دو معیار زیر برای محاسبهٔ t_S به کار می‌روند:

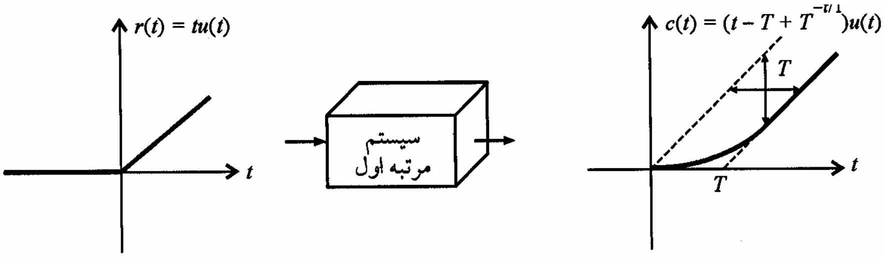
$$t_S = 4T \quad , \quad t_S = 5T$$

۵ـ پاسخ پلهٔ سیستم‌های مرتبه اول در صفحهٔ نیم لگاریتمی، به صورت زیر ساده می‌شود:

۶ـ با نزدیک شدن قطب سیستم مرتبه اول به مبدأ، زمان نشست سیستم نیز بزرگتر می‌شود. شکل زیر این مفهوم را به تصویر می‌کشد:



۱ـ۲) پاسخ شیب سیستم مرتبه اول:

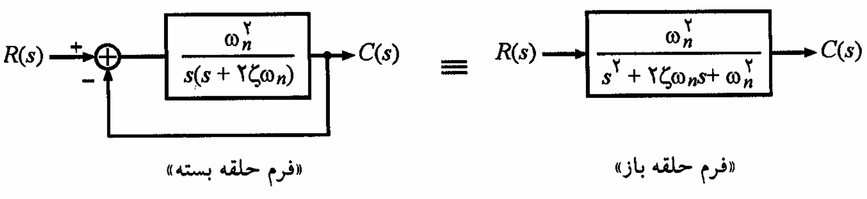


[1] - Settling

نکات:

۱ـ چون سیستم مرتبه اول یک سیستم تیپ یک محسوب می‌شود، ورودی شیب را با خطای ماندگارِ T دنبال می‌کند.

۲ـ سیستم مرتبه دوم ـ سیستمی که معادله دیفرانسیل حاکم بر آن، از مرتبهٔ دوم باشد، سیستم مرتبه دوم نامیده می‌شود.



نکته : صورت کسرِ سیستم‌های مرتبه دو، فقط در حالت استاندارد، ω_n^2 است (درحالت کلی می‌تواند به شکل $as+b$ باشد).

سیستم‌های مرتبه دوم، دارای دو پارامتر مشخصه می‌باشند:

ω_n یا فرکانس طبیعی نامیرا[1] $\left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$

α یا فرکانس میرایی[2] $\left(\frac{\text{Neper}}{\text{s}}\right)$

برحسب دو پارامتر فوق (و بسته به کاربرد)، معمولاً دو پارامتر دیگر نیز در سیستم‌های مرتبه دو محاسبه می‌شود:

ω_d یا فرکانس طبیعی میرا[3] $\left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$ که طبق تعریف برابر است با :

$$\boxed{\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2} = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

ξ یا نسبت میرایی (بدون بُعد) که طبق تعریف برابر است با :

$$\boxed{\xi = \frac{\alpha}{\omega_n}}$$

نکته: فرکانس طبیعی نامیرا، همواره بزرگتر یا مساویِ فرکانس طبیعی میرایی می‌باشد:

$$\omega_n \geq \omega_d$$

معادلهٔ مشخصهٔ حاکم بر سیستم‌های مرتبه دو: معادله مشخصهٔ کلیه سیستم‌های مرتبه دوم، می‌تواند به فرم استاندارد زیر نوشته شود:

$$\boxed{\Delta(s) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2}$$

[1] ـ «فرکانس نوسانات نامیرا» نیز می‌گویند.

[2] ـ «ضریب میرایی» نیز می‌گویند.

[3] ـ «فرکانس نوسانات میرا شونده» نیز می‌گویند.

ریشه‌های این معادله مشخصه استاندارد برابرند با :

$$\boxed{s_{1,2}=-\alpha\pm j\omega_d}$$

برحسب محل قرار گرفتن ریشه‌های معادله مشخصه، یک سیستم مرتبه دو، این سیستم‌ها دارای 4 نوع پاسخ می‌باشند. یکی از ابزارهایی که معمولاً در عمل برای کشف نوع سیستم به کار می‌رود، پاسخ پلهٔ سیستم‌های مرتبه دوم می‌باشد.

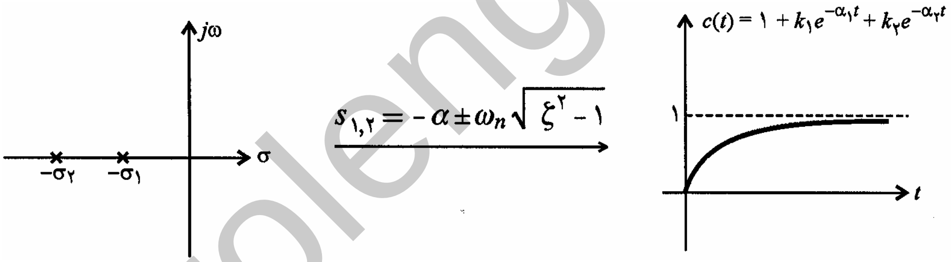
پاسخ پلهٔ سیستم‌های مرتبه دوم: چنانچه ورودی یک سیستم مرتبه دوم، تابع پله $u(t)$ باشد، پاسخ سیستم به این ورودی، همواره به فرم کلی زیر خواهد بود (α_1 و α_2 اعداد مختلط) :

$$c(t)=\left(1+k_1e^{-s_1t}+k_2e^{-s_2t}\right)$$

بر حسب محل قرار گرفتن ریشه‌های معادله مشخصهٔ سیستم، پاسخ پلهٔ سیستم دارای یکی از 4 حالت زیر خواهد بود.

حالت اول) حالت میرایی دید، در این حالت سیستم دارای دو ریشهٔ متمایز، حقیقی و منفی بوده و خاصیت میراییِ سیستم شدیدتر از خاصیت نوسان‌کنندگی آن می‌باشد.

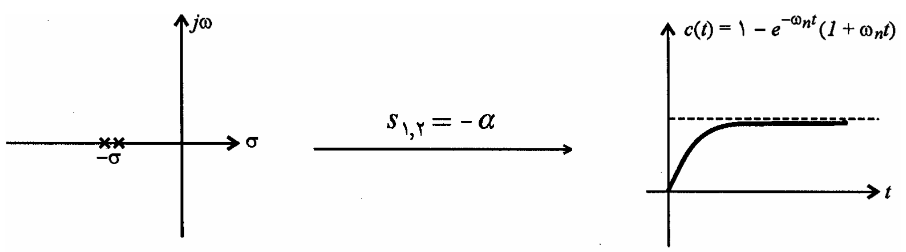
($\alpha>\omega_0$ یا $\xi>1$) :



☜ **نکته :** با توجه به تشابه پاسخ پله در حالت میرایی شدید با پاسخ پلهٔ سیستم‌های مرتبه اول، در بسیاری از کاربردها، سیستم مرتبه دوم را با یک سیستم مرتبه اول تقریب می‌زنیم.

حالت دوم) حالت میرایی بحرانی: در این حالت سیستم دارای دو ریشهٔ یکسان، حقیقی و منفی بوده و خاصیت میرایی سیستم، برابر با خاصیت نوسان کنندگی آن می‌باشد.

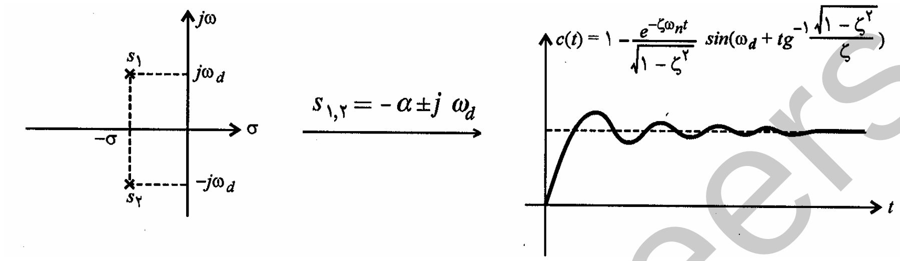
($\alpha=\omega_0$ یا $\xi=1$) :



☜ **نکته :** همان طور که در شکل فوق دیده می‌شود، در حالت میرایی بحرانی، پاسخ پله بدون هیچ گونه فراجهشی به مقدار نهایی $(u(t))$ میل می‌کند.[1]

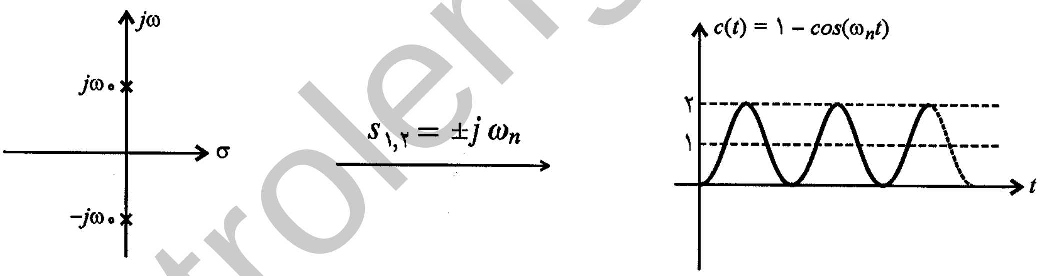
حالت سوم) حالت میرایی ضعیف: در این حالت سیستم دارای دو ریشهٔ مزدوج مختلط بوده و خاصیت میرایی سیستم، ضعیف‌تر از خاصیت نوسان کنندگی آن می‌باشد.

$(0<\xi<1$ یا $\alpha<\omega_0)$.

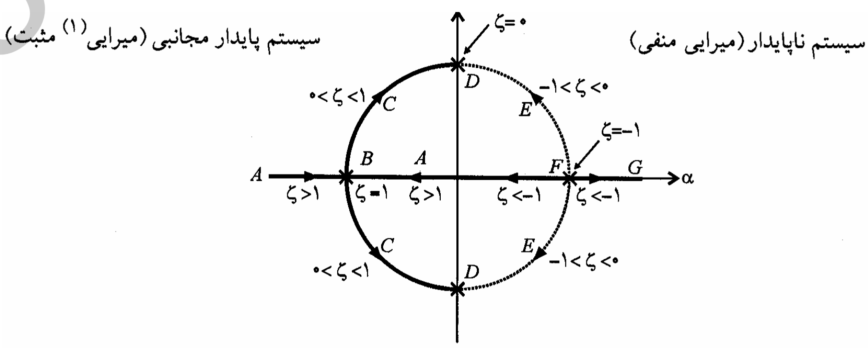


حالت چهارم) حالت نامیرا (نوسانی) : در این حالت سیستم دارای دو ریشهٔ موهومی محض بوده و خاصیت میرایی در سیستم وجود ندارد.

$(\alpha=0$ یا $\xi=0)$.



شکل زیر، مکان هندسی ریشه‌های یک سیستم مرتبه دو را به ازای مقادیر مختلف ξ به تصویر می‌کشد (حروف A تا E بر روی نمودار، چگونگی حرکت دو ریشهٔ معادلهٔ مشخصه را بر روی مکان هندسی ریشه‌ها به تصویر می‌کشد.)



[1] ـ اثبات این موضوع با مشتق‌گیری از $c(t)$ امکانپذیر است. از آنجایی که $c'(t)=\omega_n^2\,t.e^{-\omega_n t}$ همواره به ازای $t>0$ مخالفِ صفر است،لذا هیچگونه اکسترمم محلی در $t>0$ دیده نمی‌شود.

نکات :

۱ـ به ازای ξهای منفی، سیستم ناپایدار می‌گردد.

۲ـ فقط در حالت «میرایی ضعیف»، فرکانس نوسان سیستم ω_d است (در سایر حالاتی که نوسان وجود دارد، فرکانس نوسان، ω_n است).

۳ـ در بین این چهار حالت، حالت نوسانی تنها حالتی است که خطای حالت ماندگارش (به ورودی پله) صفر نمی‌شود.

۴ـ در حالت میرایی شدید و زمانی که $\xi \gg 1$ باشد، یکی از دو جملهٔ نهایی (که αی نزدیک‌تری نسبت به مبدأ دارد)، جملهٔ غالب است و لذا می‌توانیم $c(t)$ را فقط با در نظر گرفتن همان یک قطب تقریب بزنیم:

$$\alpha \gg \alpha_2 \;\Rightarrow\; c(t) \approx 1 - e^{-\alpha_1 t}$$

۵ـ هنگام تقریب زدن با استفاده از روش قطب غالب، تابع اصلی و تابع تقریبی هر دو باید دارای یک مقدار DC باشند.

مشخصه‌های پاسخ گذرا

۱ـ زمان تأخیر[1] (t_d) : مدت زمانِ لازم برای رسیدن خروجی به نصف مقدار نهایی‌اش، زمان تأخیر نامیده می‌شود. این زمان تقریباً برابر است با :

$$t_d \approx \frac{1+0.7\,\xi}{\omega_n}$$

۲ـ زمان صعود[2] (t_r): این کمیت که معیاری برای بررسی سرعت پاسخ گذاری سیستم‌ها می‌باشد، دارای دو تعریفِ رایج در کتب مرجع می‌باشد:

الف ـ زمان لازم برای رسیدن خروجی از 10% به 90% مقدار نهایی

ب ـ زمان لازم برای رسیدن خروجی از 0% به 100% مقار نهایی

برای محاسبهٔاین زمان، از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

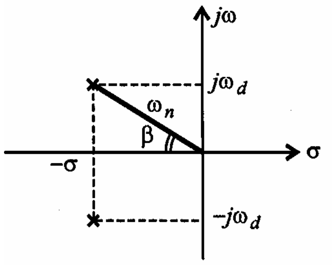
$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

که در آن β برابر است با :

$$\boxed{\beta = \cos^{-1}\xi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}}$$

نکته : با توجه به رابطهٔ فوق ، β معرف مکان هندسی نقاطی است که کلیهٔ آن نقاط، دارای ξ یکسانی می‌باشند:

[1] - Delay
[2] - Rise



$$\Rightarrow \tan\beta = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

۳ـ زمان پیک $\left(t_p\right)$: مدت زمان لازم برای رسیدن پاسخ سیستم به اولین مقدار ماکزیمم، زمن پیک نامیده می‌شود $\left(\left.\frac{dc(t)}{dt}\right|_{t=t_p}=0\right)$. این زمان برابر است با[1]:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

۴ـ زمان نشست[2] $\left(t_s\right)$: این کمیت که معیاری برای بررسی سرعت پاسخ ماندگار سیستم‌ها می‌باشد، نشان دهندهٔ مدت زمانی است که پس از آن زمان، پاسخ سیستم در باند معینی از خروجی قرار می‌گیرد:

تلورانس 5% : $$t_s = \frac{3}{\xi\omega_n}$$

تلورانس 2% : $$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n}$$

تلورانس α% : $$t_s = \frac{\ln\left(\frac{100}{a\sqrt{1-\xi^2}}\right)}{\xi\omega_n}$$

☜ **نکته :** معمولاً در تست‌های کنکور، زمان نشست با تلورانس 2% مورد سئوال قرار می‌گیرد.

۵ـ ماکزیمم جهش $\left(M_o\right)$: مقدار ماکزیمم خروجی می‌باشد و برابر است با :

$$M_o = c\left(t_p\right) = 1 + e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 1 + e^{-\frac{\pi}{\tan\beta}}$$

۶ـ جهش نسبی $\left(M_p\right)$: این کمیت که معمولاً بر حسب درصد بیان می‌شود، معرف بیشترین انحرافِ خرجی، نسبت به مقدارِ یک (ورودی پلهٔواحد) می‌باشد و برابر است با :

[1] ـ در حقیقت این زمان، نصف دوره تناوبِ پاسخ $c(t)$ می‌باشد.

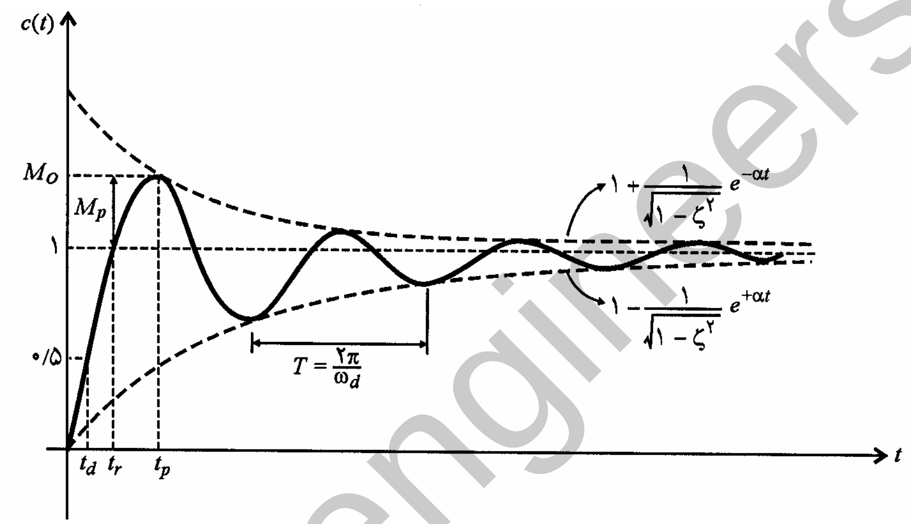
[2] - Settling time

$$M_p = M_o - 1 = e^{-\frac{\pi}{\tan\beta}}$$

در حالتی که ورودی پلهٔ غیر واحد باشد، این کمیت به صورتِ بیشترین انحراف خروجی از مقدار نهاییِ ورودی پلهٔ غیر واحد تعریف می‌گردد:

$$M_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)}$$

شکل زیر، مفاهیم مرتبط با مشخصه‌های پاسخ گذاری سیستم‌ها را به تصویر می‌کشد:

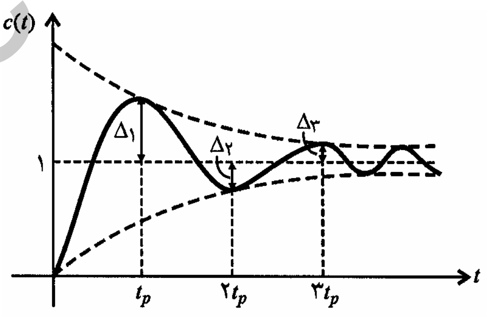


☜ **نکات تکمیلی:**

۱ـ پهنای باند یک سیستم درجه دو نوعی، می‌تواند از رابطهٔ زیر تقریب زده شود:

$$B.W. \approx \frac{2.2}{tr}$$

۲ـ فاصله منحنی $c(t)$ از مقدار ماندگارش در لحظاتِ $\begin{cases} t = nt_p \\ n \in Z \end{cases}$ ، می‌تواند از روابط زیر محاسبه شود:



$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \Delta_1 &= e^{-\frac{\pi}{\tan\beta}} \\ \Delta_2 &= e^{-\frac{2\pi}{\tan\beta}} \\ \Delta_3 &= e^{-\frac{3\pi}{\tan\beta}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta = e^{-\frac{n\pi}{\tan\beta}}$$

۳ـ با توجه به نمودار فوق می‌توانیم بنویسیم:

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta_2}=\frac{\Delta_2}{\Delta_3}=\frac{\Delta_3}{\Delta_4}=\cdots \Rightarrow x=e^{\frac{+2\pi}{\tan\beta}}$$

۴ـ برای محاسبهٔ ξ از روی M_p ، می‌توانیم از رابطهٔ زیر کمک بگیریم:

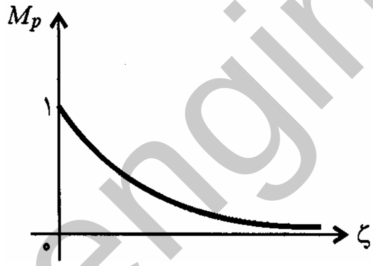
$$\xi=\frac{-\ln M_p}{\sqrt{\pi^2+\ln^2 M_p}}$$

۵ـ کمیت‌های t_r و M_p ، رفتار عکس یکدیگر دارند . به بیان دیگر:

ـ با افزایش M_p , t_r کاهش می‌یابد.

ـ با کاهش M_p , t_r افزایش می‌یابد.

۶ـ افزایش ξ ، موجب کاهش M_p می‌گردد (دقت کنید که M_p فقط تابع ξ است):



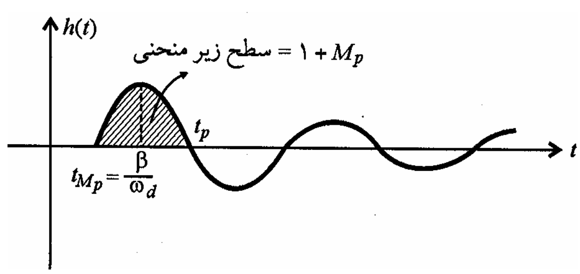
۷ـ به ازای ξ های بین 0.4 تا 0.8 ، سیستم‌های زیر میرا سریع‌ترین سرعت را در رسیدن به مقدار نهایی دارا می‌باشند، و بیان دقیق‌تر در مورد سرعت رسیدن به پاسخ نهایی در سیستم‌های مرتبه دو می‌توانیم بگوییم:

فوق میرا > میرای بحرانی > زیر میرا

۸ـ افزودن صفر حلقه بسته به یک سیستم، موجب افزایش M_p می‌گردد. هر مقدار این صفر بـه مبـدأ نزدیکتـر باشـد، M_p نیـز مقـدار بیشتری به خود می‌گیرد:

$$M_p\uparrow \Rightarrow \xi M \Rightarrow t_r\downarrow \Rightarrow t_s\uparrow$$

پاسخ ضربهٔ سیستم‌های مرتبه دوم



فصل چهارم

خطا در حالت ماندگار

تابع تبدیل حلقه ـ باز $G(s)$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$G(s)=\frac{K(T_a s+1)\cdots(T_z s+1)}{s^N(T_1 s+1)\cdots(T_p s+1)}$$

نوعِ (تیپ) سیستم: توانِ N در جمله S^N در مخرج کسر، نشان دهندهٔ تعداد انتگراتورهای سیستم بوده و از روی تابع تبدیل حلقه باز سیستم مشخص می‌شود.

مرتبه (درجه) سیستم: مرتبهٔ چند جمله‌ایِ مخرج تابع حلقه ـ بستهٔ سیستم (معادلهٔ مشخصه) بوده و از روی تابع تبدیل حلقه ـ بستهٔ سیستم مشخص می‌شود.

تعریف موقعیت، سرعت و شتاب (صرفنظر از دیمانسیونِ خروجی)

موقعیت: خروجی سیستم را «موقعیت» می‌نامیم.

سرعت: تغییراتِ موقعیت سیستم را «سرعت» می‌نامیم.

شتاب: تغییرات سرعت را «شتاب» می‌نامیم.

☜ **نکته :** برای بررسی دقت یک سیستم، معیارهای مختلفی در نظر گرفته می‌شود. برخی از ابتدایی‌ترین و در عین حال مهمترین این معیارها عبارتند از:

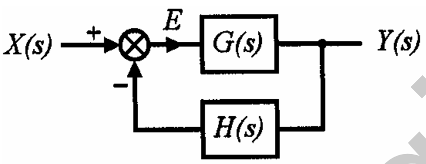
معیارهای بررسی دقت سیستم

- ۱) خطای حالت ماندگار (تعادل
- ۲)ضرایب خطایِ
  - موقعیت (K_p)
  - سرعت (K_v)
  - شتاب (K_a)

☜ **نکته :** پیش از ورود به این بحث، یک نکتهٔ مهم را به خاطر بسپارید: خطا و دقت یک سیستم زمانی مورد بررسی قرار می‌گیرد که آن سیستم پایدار باشد. بنابراین اگر سیستمی ناپایدار بود، تعریف خطا برای آن سیستم، نادرست است.

خطای حالت ماندگار

✓ **تعریف اول :** در یک تعریف می‌توانیم خروجی مقایسه کننده $(E = X - YH)$ رابه عنوان سیگنال خطا در نظر بگیریم:



$$\Rightarrow \quad E = X - YH$$

با توجه به تعریف فوق،پس از یک مرحله ساده سازی، می‌توانیم بنویسیم:

$$\boxed{E(s) = \frac{X(s)}{1+GH(s)} \;\Rightarrow\; e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{sX(s)}{1+GH(s)}}$$

☜ **نکته :** پرواضح است که چنانچه حالت ماندگار خروجی[1] $y(t)$ را بخواهیم، صورت کسر فوق در G هم ضرب می‌شود:

$$y_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{X(s)G(s)}{1+GH(s)}$$

✓ **تعریف دوم :** در تعریفی دیگر، می‌توانیم اختلاف ورودی و خروجی سیستم را به عنوان خطای سیستم در نظر بگیریم:

$$\boxed{E(s) = X(s) - Y(s) \;\Rightarrow\; e_{ss} = \lim_{s\to 0} sX(s)\left(1 - T(s)\right)}$$

اینکه از کدامیک از این دو تعریف برای محاسبهٔ خطای حالت ماندگار استفاده کنیم، در صورت سئوال مشخص می‌شود.

☜ **نکته :** در حالت خاصی که $H(s) = 1$ باشد، این دو تعریف، معادل با یکدیگر خواهند بو.

[1] - steady - state

۲ـ ضرایب خطا (اعداد شایستگی Figure of Merit)

✓ ضریب خطای موقعیت K_p :

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s)H(s)$$

✓ ضریب خطای سرعت K_v :

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s)H(s)$$

✓ ضریب خطای شتاب K_a :

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2G(s)H(s)$$

☜ **نکات :**

۱)خطای حالت ماندگار (تعریف اول)، به دو عامل بستگی دارد: ۱) نوع سیستم، ۲) ورودی

۲) با توجه به تعریف اول خطای حالت ماندگار، ضرایب خطا می‌توانند برای محاسبهٔ e_{ss} به کار بروند:

ورودی / نوع سیستم	پله $u(t)$	شیب $tu(t)$	سهمی $t^2u(t)$
$N=0$	$\frac{1}{1+K_p}$	∞	∞
$N=1$	0	$\frac{1}{K_v}$	∞
$N=2$	0	0	$\frac{2}{K_a}$
$N\geq 3$	0	0	0

☜ **نکته مهم:** این جدول با فرض پایداری سیستم به دست آمده است! به عبارت دیگر چنانچه سیستمی ناپایدار باشد، بحث در مورد خطای حالت ماندگار، بی‌معناست.

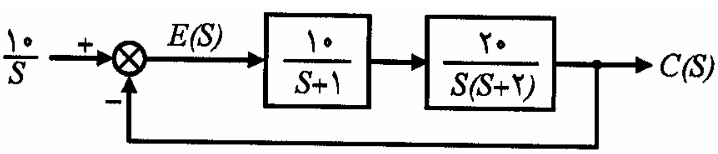
۳) در حالت کلی و به ازای هر ورودی دلخواه و هر نوع سیستم، می‌توانیم بنویسیم:

$t^m u(t)$ → سیستم تیپ N → خروجی ⇒

$$\begin{cases} e_{ss} = 0 & \text{به ازای } m \text{ های کمتر از } N^{(1)} \\ e_{ss} = \text{محدود} & \text{به ازای } m=N \\ e_{ss} \to \infty & \text{به ازای } m \text{ های بیشتر از } N^{(2)} \end{cases}$$

۴) هر قدر نوع سیستم بالاتر می‌رود، خطای حالت ماندگار (به قیمت کاهش پایداری)، کمتر می‌شود.

مثال: برایسیستم زیر پاسخ حالت دائمی $c(t\to\infty)$ و خطای حالت دائمی $e(t\to\infty)$ به ترتیب کدام است؟
(مهندسی برق ۸۰)



۱) 10 و 0

۲) 10 و 0.0975

۳) 10 و 1000

۴) ∞ و ∞

حل : گزینه (۱) صحیح می‌باشد.

با توجه به واحد بودنِ فیدبک، تعاریف اول و دوم خطا معادلند، به عنوان مثال اگر از تعریف اول خطا استفاده کنیم.

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{s\times\frac{10}{s}}{1+\frac{200}{s(s+1)(s+2)}}=\frac{10}{1+\infty}=0$$

$$c(\infty)=\lim_{s\to 0}\frac{s\times\frac{10}{s}\times\frac{200}{s(s+1)(s+2)}}{1+\frac{200}{s(s+1)(s+2)}}=\frac{2000}{200}=10$$

توجه کنید که رابطهٔ $c(\infty)$ در حقیقت همان رابطهٔ e_{ss} است که فقط صورتش در $G(s)$ ضرب شده است.

☜ **نکته :** با توجه به جدول صفحهٔ قبل، چون سیستم تیپ 1 است و ورودی نیز از نوع پله است، بدون هیچگونه محاسبه‌ای نیز می‌توانستیم بگوییم $e_{ss}=0$ خواهد شد.

مثال: تابع تبدیل حلقه بستهٔ سیستمی با پس خور واحد به صورت زیر است:

$$M(s)=\frac{4(s+1)}{s^3+2s^2+4s+4}$$

خطای حالت دائمی (ماندگاری) این سیستم به ورودی $r(t)=\left(3-t+\frac{t^2}{4}\right)u(t)$ برابر کدام است؟ (مهندسی برق ۷۷)

۱) صفر

۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{1}{4}$

۴) $\frac{1}{8}$

حل : گزینه (۳) صحیح است.

روش اول ـ با توجه به واحد بودنِ فیدبک، تعاریف اول و دوم خطا معادلند. به عنوان مثال با استفاده از این تعریف خواهیم داشت:

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}sX(s)\big(1-M(s)\big)$$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} s\left[\frac{3}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{2}{4s^3}\right]\left[1-\frac{4(s+1)}{s^3+2s^2+4s+4}\right]=\frac{1}{4}$$

☜ **نکته مهم :** در سیستم‌های حلقه بسته با فیدبک واحدِ منفی، تابع تبدیل حلقه ـ باز، به سادگی از روی تابع تبدیل حلقه ـ بسته به دست می‌آید. بدین منظور کافیست از تفاضل در مخرج استفاده کنیم.

$$T(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)}\ \Rightarrow\ \boxed{G=\frac{G(s)}{1+G(s)-G(s)}=\frac{\text{صورتِ } T}{\text{مخرجِ } T-\text{صورتِ } T}}$$

روش دوم ـ با توجه به نکته گفته شده ، تابع تبدیل حلقه ـ بازِ این سیستم عبارتست از:

$$G(s)=\frac{4(s+1)}{\left(s^3+2s^2+4s+4\right)-4(s+1)}=\frac{4(s+1)}{s^3+2s^2}=\frac{4(s+1)}{s^2(s+2)}$$

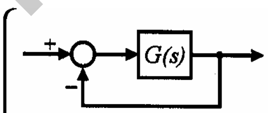
با توجه به ضابطهٔ $G(s)$ ، این سیستم تیپ 2 است و در نتیجه خطای ماندگار به ورودی های $2u(t)$ و $-tu(t)$ صفر است. در مورد خطای حالت ماندگار به ورودی شیبِ $\frac{3^2}{4}u(t)$ نیز می‌توانیم بنویسیم:

$$e_{ss}\Big|_{t^2u(t)}=\frac{2}{K_a}=\frac{2}{\lim\limits_{s\to 0}s^2G(s)}=\frac{2}{4.2}=1\ \Rightarrow\ e_{ss}\Big|_{\frac{t^2}{4}u(t)}=\frac{1}{4}$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

☜ **نکته :** چنانچه تابع تبدیل حلقهٔ بستهٔ سیستمی دلخواه، به صورت $T(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}$ مشخص شده بود، می‌توانیم این سیستم را با استفاده از یک سیستم با فیدبک واحد، به صورت زیر مدلسازی کنیم:

$$T(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}\Rightarrow$$



$$G(s)=\frac{P(s)}{Q(s)-P(s)}$$

مثال: تابع تبدیل مدار بسته سیستم کنترلی با فیدبک واحد به صورت زیر است. کدام گزینه صحیح می‌باشد؟
(مهندسی برق ۷۵)

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{b_0 s^m+b_1 s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m}{s^n+a_1 s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n} \qquad m<n$$

۱)اگر $a_n=b_m$ و $a_{n-1}=b_{m-1}$ باشد خطای حالت ماندگار به ورودی شیب صفر است.

۲) اگر $a_n \neq b_m$ و $a_{n-1} \neq b_{m-1}$ باشد خطای حالت ماندگار به ورودی شیب صفر است.

۳) اگر $a_n=b_m$ و $a_{n-1} \neq b_{m-1}$ باشد خطای حالت ماندگار به ورودی شیب صفر است.

۴) اگر $a_n \neq b_m$ و $a_{n-1}=b_{m-1}$ باشد خطای حالت ماندگار به ورودی شیب صفر است.

حل : گزینه (۱) صحیح است.

چون فیدبک واحد است، تابع تبدیل حلقه باز به سادگی با استفاده از تفاضل در مخرج به دست می‌آیدً

$$G(s)=\frac{b_0 s^m+b_1 s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m}{s^n+a_1 s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n-b_0 s^m-b_1 s^{m-1}-\cdots-b_{m-1}s-b_m} \quad , \quad m<n$$

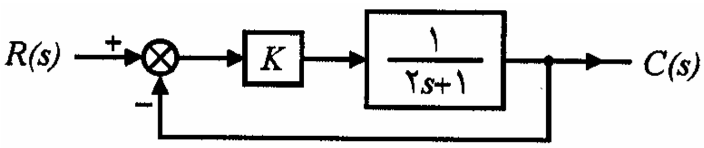
اما ترجمهٔ گزینه‌ها: خطای حالت ماندگار به ورودی شیب واحد چه زمانی صفر می‌شود؟ پاسخ بسیار ساده است: زمانی که سیستم تیپ ۲ باشد و این اتفاق زمانی رخ می‌دهد که در مخرج $G(s)$ ، بتوانیم ازیک s^2 فاکتور بگیریم، واضح است که این اتفاق زمانی رخ می‌دهد که:

$$a_m=b_m \quad \text{And} \quad a_{n-1}=b_{m-1}$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

نکته : قضیهٔ مقدار نهایی در مورد توابعی که حد یکتا ندارند (نظیر توابع متناوب)، نباید به کار برد.

مثال: در سیستم فیدبک زیر به ازاء چه مقدار K،سیستم بسته در پاسخ به ورودی $\sin(t)$ در حالت ماندگاری دارای دامنه 0.5 خواهد بود؟ **(مهندسی هسته‌ای ۷۴)**



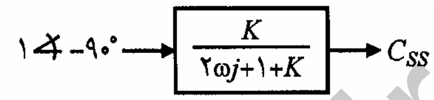
۱) $\sqrt{\frac{5}{3}}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) $\frac{25}{9}$

حل : گزینه (۲) صحیح است.

با توجه به نکته فوق، حق نداریم از رابطه $C_{ss}=\lim\limits_{s\to 0} s\times\dfrac{1}{s^2+1}\times\dfrac{C(s)}{R(s)}$ برای محاسبهٔ مقدار ماندگار C_{ss} استفاده کنیم. با این وجود از آن‌جایی که می‌توانیم در حالت ماندگار سینوسی به جای s، $j\omega$ قرار دهیم، می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{C}{R}=\frac{K}{2s+1+K}\ \Rightarrow$$

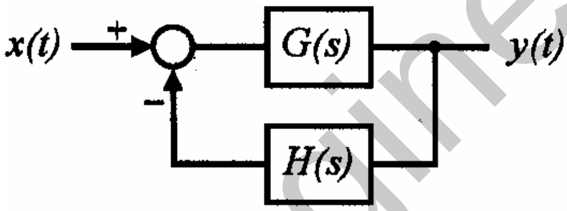
$\Rightarrow$



$$\left|C_{ss}\right|=1\times\left|\frac{K}{2j+1+K}\right|=\frac{K}{\sqrt{4+(1+K)^2}}=0.5\ \Rightarrow\ K=\frac{5}{3}$$

لذا گزینه (۲) صحیح است.

☜ **نکته :** اگر خطای لحظه‌ایِ سیستمی به ورودی $x(t)$ را با $e(t)$ نمایش دهیم، آنگاه سطح زیر منحنی $e(t)$ برابر خواهد بود با :



$$\begin{cases} x(t)=u(t)\ \Rightarrow\ \int_0^\infty e(t)dt=\dfrac{1}{K_\upsilon}= \text{خطای حالت ماندگار به ورودی شیب} \\ x(t)=r(t)\ \Rightarrow\ \int_0^\infty e(t)dt=\dfrac{1}{K_a}= \text{خطای حالت ماندگار به ورودی سهمی} \end{cases}$$

فصل پنجم

پایداری

بررسی پایداری: بررسی پایداری سیستم‌ها به روش‌های مختلفی می‌تواند انجام بگیرد. برخی از این روش‌ها بر مبنای تابع تبدیل حلقه بسته، و برخی دیگر بر مبنای تابع تبدیل حلقه باز عمل می‌کنند:

۱ـ با استفاده از تابع تبدیل حلقه بسته : راوث ـ هورویتز

۲ـ با استفاده از تابع تبدیل حلقه باز : معیار نایکوئیست

انواع پایداری: از یک دیدگاه، پایداری می‌تواند به دو نوعِ نسبی و مطلق تقسیم شود:

۱ـ پایداری نسبی: بررسی پایداری یک سیستم نسبت به سیستم دیگر

۲ـ پایداری مطلق: این که سیستم صرفنظر از ورودیِ تحمیل شده، پایدار است یا نه

☜ **نکته :** پایداری (مطلق) به ذات سیستم بستگی داشته و تابع ورودی نیست.

انواع پایداری: از دیدگاهی دیگر، پایداری می‌تواند نسبت به شرایط اولیه یا نسبت به ورودی مورد بررسی قرار بگیرد.

۱ـ انواع پایداری نسبت به شرایط اولیه (پایداری لیاپانوف)

الف) پایداری مجانبی: در این حالت، قطب‌های حلقه بسته سمت چپ محور $j\omega$ قرار می‌گیرند و داریم:

$$\lim_{t\to\infty} h(t)=0$$

ب) پایداری مرزی (نوسانی): در این حالت، سیستم حلقه بسته دارای قطب‌های ساده (مرتبه اول) روی محور $j\omega$ می‌باشد و سایر قطب‌های سیستم حلقه بسته، سمت چپ محور $j\omega$ قرار می‌گیرند و داریم:

$$0<\lim_{t\to\infty}\left|h(t)\right|<\infty$$

ج) ناپایدار: در این حالت قطب‌های حلقه بسته سیستم، در طرف راست محور $j\omega$ قرار می‌گیرند، و یا در حالتی دیگر، قطب‌های حلقه بسته سیستم، به صورت قطب‌های مکرر بر روی محور $j\omega$ ظاهر می‌شوند. در این حالت، داریم:

$$\lim_{t\to\infty} h(t) \rightarrow \infty$$

۲ـ انواع پایداری نسبت به ورودی

الف) پایداری مجانبی

ب) پایداری مرزی

ج) ناپایداری

انواع سیستم

سیستم مینیمم فاز: سیستمی که تمام صفرها و قطب‌هاِ تابع تبدیل حلقهٔ بستهٔ آن، سمت چپ محور $j\omega$ قرار می‌گیرند.

سیستم غیر مینیمم فاز: سیستمی که حداقل یک صفر یا قطب تابع تبدیل حلقه بسته آن،سمت راست محور $j\omega$ قرار می‌گیرند.

قضیه: اگر تمامی قطب‌های تابع تبدیل حلقه بستهٔ یک سیستم در طرف چپ محور $j\omega$ قرار داشته باشند، آنگاه اولاً کلیهٔ ضرایب معادلهٔ مشخصهٔ سیستم موجودند (مخالف صفرند) و ثانیاً کلیهٔ این ضرایب هم علامتند:

۱)تمام ضرایب $\Delta(s)$ موجودند. ۲ـ تمام ضرایب $\Delta(s)$ هم علامتند.	$\Rightarrow$	کلیهٔ ریشه‌های $\Delta(s)$ سمت چپ محور $j\omega$ قرار داشته باشند.

نتیجه: اگر حتی یکی از دو شرط فوق برقرار نباشد، انگاه سیستم الزاماً ناپایدار است.

❖ **تذکر مهم:** قضیهٔ فوق یک قضیه یک طرفه می‌باشد! به بیان دیگر، ممکن است تمام ضرایب $\Delta(s)$ موجود بوده و هم علامت هم باشند اما $\Delta(s)$ ریشه‌ای در طرف راست محور $j\omega$ داشته باشد، معیار راوث، مکمل این قضیه می‌باشد.

محک راوث ـ هورویتز: معیار راوث ـ هورویتز، روشی برای تعیین موقعیت ریشه‌های یک چند جمله‌ای با ضرایب حقیقی و ثابت است، که در آن نیازی به حل و محاسبهٔ دقیق ریشه‌های چند جمله‌ای نمی‌باشد.

مراحل بکارگیری معیار پایداری راوث ـ هورویتز (RH)[۱]

۱ـ به دست آوردن معادلهٔ مشخصه $\Delta(s)$

$$\Delta(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_3 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0 \qquad (a_n \neq 0)$$

۲ـ تشکیل جدول راوث ـ هورویتز

$$\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\
s^{n-2} & \dfrac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} & \dfrac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_3} & \cdots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \\
s^2 & \alpha_1 & \alpha_2 & & \\
s^1 & \alpha_3 & & & \\
s^0 & \alpha_2 & & &
\end{array}$$

☜ **قواعد :**

۱)تعداد تغییر علامت‌های ستون اول[۲]،با تعداد ریشه‌های واقع در نیم صفحهٔ راست صفحهٔ s برابر است.

۲) برای $\Delta(s)$ های با ضرایب غیر حقیقی (مثل سیستم‌هایی که تأخیر زمانی دارند) معیار راوث ـ هورویتز نمی‌تواند به کار برود.

۳) معیار RH در مورد فاصلهٔ ریشه‌ها تا مبداء (درجهٔ ناپایداری سیستم) اطلاعی به دست نمی‌دهد.

حالات خاص جدول راوث ـ هورویتز

حالت خاص ۱ـ فقط یک صفر در ستون اول (و نه کل سطر) وجود داشته باشد:

۱)روش ε گیری: تعیین علامت، وقتی که پارامتر K هم وجود داشته باشد دشوار است.

۲) روش جاگذاری $\frac{1}{s}$ به جای s : فقط ترتیب نوشتن ضرایب برعکس می‌شود.

۳) روش ضرب در $(s+a)$

حالت خاص ۲ـ کل ضرایب یک سطر صفر باشند:

۱) روش تشکیل معادلهٔ کمکی و مشتق گیری ازآن

☜ **نکات :**

[1] - Routh – Hurwitz

[2] ـ هیچ الزامی برای فرد بودنِ تعداد این تغییر علامت‌ها وجود ندارد و تعداد تغییر علامت‌های ستون اول،در حالت کلی می‌تواند عددی زوج یا فرد باشد.

در حالتی که کل یک سطر کاملاً صفر می‌شود:

۱)ریشه‌های معادلهٔ کمکی و در نتیجه ریشه‌های $\Delta(s)$ نسبت به مبدأ متقارنند بنابراین در صورتی که ریشه‌های متقارنِ $\Delta(s)$ را خواستید، کافیست ریشه‌های معادله کمکی را بیابید.

۲) همواره سطری می‌تواند به طور کامل صفر شود که دارای اندیس فرد باشد (سطر صفر = سطر فرد)

۳) تعداد ریشه‌های متقارن نسبت به مبدأ، یک واحد بیشتر از اندیس سطرِ صفر شده می‌باشد.

(1 + شماره سطر صفر شده = تعداد ریشه‌های متقارن نسبت به مبدأ)

۴)معادلهٔ مشخصه سیستم، مضربی از معادلهٔ کمکی می‌باشد.

($\Delta(s) =$ معادلهٔ کمکی $\times F(s)$)

۵) تعداد ریشه‌های غیرمتقارنِ معادله مشخصه (نسبت به مبدأ) ، برابر است با تعداد تغییر علامت‌های پیش از سطری که صفر شده است

(تعداد ریشه‌های غیرمتقارن = تعداد تغییر علامت‌های پیش از سطرِ صفر).

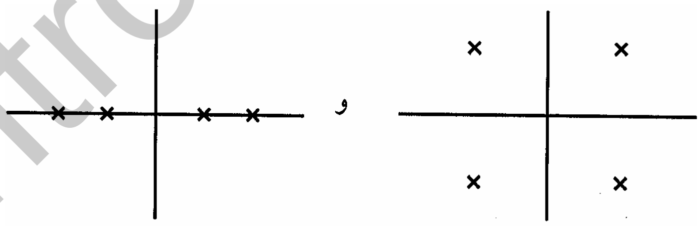
۶) در حالتی که فقط یک صفر در ستون اول وجود داشته باشد، نمی‌توانیم از «معادلهٔ کمکی» استفاده کنیم.

۷) اگر عنصر اول یک سطر صفر باشد و عنصر دیگری هم وجود نداشته باشد، حالت خاص 2 رخ داده است (و نه حالت خاصِ 1 !) .

مثال : s^3+2s^2+s+2

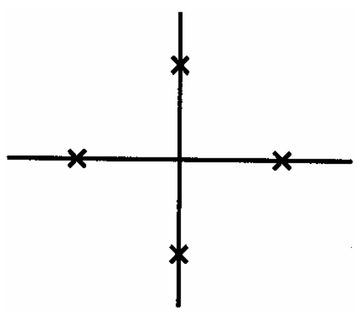
بررسی حالات مختلف مکان ۴ ریشه متقارن

۱)سطر s^3 کاملاً صفر شده و دو تغییر علامت نیز رخ داده است. (ناپایدار)



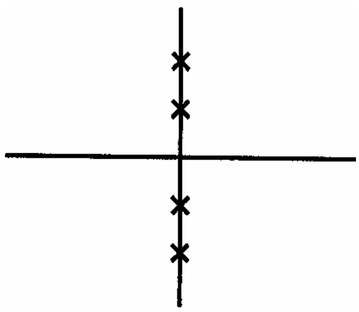
۲) سطر s^3 صفر شده و یک تغییر علامت بعد از سطر s^3 رخ داده است. (ناپایدار)

مثال : $s^4+1=0$



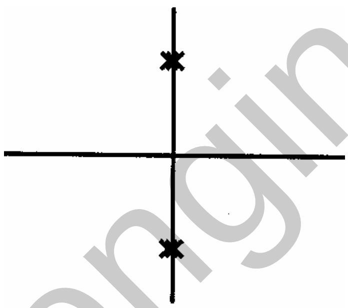
۳) سطرهای s^3 صفر شده است. بدون تغییر علامت. (پایداری مرزی)

مثال : s^4+5s^2+4



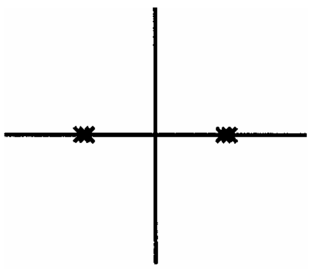
۴) سطرهای s^3 و s^1 صفر شده‌اند. بدون تغییر علامت (ناپایدار).

مثال : $\left(s^2+1\right)^2$



۵) سطرهای s^3 و s^1 صفرشده‌اند. دو تغییر علامت (ناپایدار).

مثال : s^4-2s^2+1



پایداری مطلق و پایداری نسبی

در بحث «پایداری مطلق» پایداری یک سیستم را نسبت به محور $j\omega\left(\delta=0\right)$ می‌سنجیم، اما مواردی نیز وجود دارند که برایمان مطلوب است که پایداری یک سیستم را نسبت به محوری دیگر به جز محور $j\omega$ (مثلاً محور $\delta=\alpha$) بسنجیم، این پایداری اصطلاحاً «پایداری نسبی» نامیده می‌شود. به منظور بررسی پایداری یک سیستم نسبت به خط $\delta=\alpha$ ، کافیست در معادلهٔ مشخصه، جانشانیِ $s\rightarrow s+\alpha$ را انجام داده و معیار پایداری راوث ـ هورویتز را بکار ببریم.

مثال: اگر سیستمی دارای تابع تبدیل $H(s)=\dfrac{24(s-2)}{s^6+4s^5+11s^4+32s^3+40s^2+64s+48}$ باشد، آنگاه این سیستم همواره .... است. (مهندسی برق ۸۶)

۱) پایدار ۲) پایدار مجانبی ۳) پایدار مرزی ۴) ناپایدار

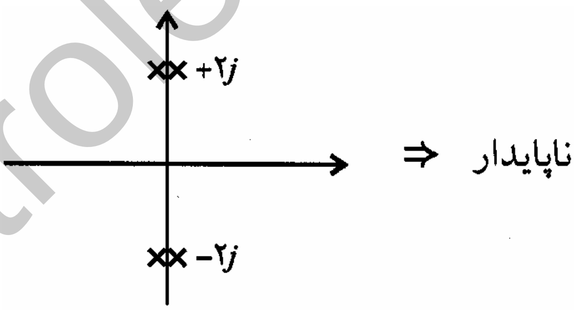
حل : گزینه (۴) صحیح است.

$$
\begin{array}{c|cccc}
s & 1 & 11 & 40 & 48 \\
s^5 & \cancel{4} & \cancel{32} & \cancel{64} & \\
 & 1 & 8 & 16 & \\
s^4 & \cancel{3} & \cancel{24} & \cancel{48} & \\
 & 1 & 8 & 16 & \\
s^3 & \cancel{4} & \cancel{16} & & \\
 & 1 & 4 & & \\
s^2 & \cancel{4} & \cancel{16} & & \\
 & 1 & 4 & & \\
s^1 & 2 & & & \\
s^0 & 4 & & &
\end{array}
$$

$\rightarrow$ معادله کمکی : $s^4+8s^2+16=0 \xrightarrow{\frac{d}{ds}} 4s^3+16s=0$

$\rightarrow$ معادله کمکی : $s^2+4=0 \xrightarrow{\frac{d}{ds}} 2s=0$

با توجه به صفر شدنِ سطر s^3، این سیستم دارای 4 قطب متقارن نسبت به مبدأ می‌باشد، که به دلیل دو بار صفر شدنِ سطرهای s^3, s^1، این قطب‌ها مکرر از مرتبه 2 می‌شوند (پر واضح است که عدم تغییر علامت در ستون اول، مانعِ رفتن قطب‌های سیستم به طرف راست محور $j\omega$ می‌گردد).



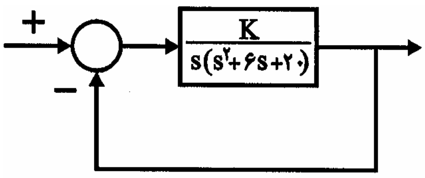
☜ **نکته :** معادله مشخصهٔ $\Delta=a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0$ (با فرض هم علامت بودن کلیهٔ ضرایب)، به شرطی پایدار است که :

$$\boxed{\underbrace{a_1\,a_2}_{\text{حاصلضرب وسطی‌ها}} > \underbrace{a_0\,a_3}_{\text{حاصلضرب کناری‌ها}}}$$

☜ **نکته :** در حالتی که تساوی $a_1a_2=a_0a_3$ رخ بدهد، سیستم به حالت نوسانی (مرز پایداری و ناپایداری) وارد می‌شود.

☜ **نکته :**در صورتی که بررسی پایداری نسبی یک سیستم نسبت به خط $\delta=-\delta_0$ مطلوبست، ابتدا در معادلهٔ مشخصه سیستم s را به $(s-\delta_0)$ تبدیل می‌کنیم و سپس معیار راوث را به معادلهٔ مشخصهٔ جدید اعمال کنید.

مثال: در سیستم کنترل مدار بسته شکل زیر برای آن که تمام قطب‌های مدار بسته در سمت چپ خط $\sigma=-1$ قرار گیرد حداکثر مقدار K چست؟ (مهندسی برق ۶۷)



۱) 48 ۲) 15 ۳) 120 ۴) 288

حل : گزینه (۱) صحیح است.

در حقیقت در این سئوال، پایداری نسبی سیستم، نسبت به خط $\delta=-1$ مورد سئوال قرار گرفته است. معادلهٔ مشخصً سیستم برابر است با :

$$\Delta(s)-s^3+6s^2+20s+K \xrightarrow{s\to s-1} \Delta'=(s-1)^3+6(s-1)^2+20(s-1)+K$$

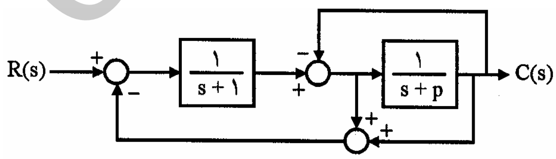
$$=s^3+3s^2+11s+K-15$$

حال کافیست شرط پایداری را برای معادلهٔ مشخصه سیستم جدید (Δ') بنویسیم:

$$\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 11 \\
s^2 & 3 & K-15 \\
s^1 & \dfrac{33-K+15}{3} & \Rightarrow\ K<48 \\
s^0 & K-15 & \Rightarrow\ K>15
\end{array} \ \Big\}\ \rightarrow\ 15<K<48$$

بنابراین شرط پایداری سیستم جدید، $15<K<48$ است، که ماکزیمم مقدار آن $K=48$ می‌باشد.

مثال: در سیستم شکل مقابل حدود p متناظر یک سیستم پایدار برابر است با : (مهندسی برق ۸۸)



۱) $p>0$

۲) $p>-1$

۳) $-3<p<-1$

۴) $-3<p<1$

حل : گزینه (۲) صحیح است.

ابتدا با استفاده از روش میسون،تابع تبدیل سیستم را می‌یابیم:

$$\frac{C}{R}=\frac{\dfrac{1}{(s+1)(s+p)}}{1-\left[\dfrac{-1}{s+1}-\dfrac{1}{(s+1)(s+p)}-\dfrac{1}{s+p}\right]}=\frac{1}{s^2+(s+p)+(2p+2)}$$

با توجه به این که معادله مشخصهٔ این سیستم از مرتبهٔ دوم است، حتی بدون نیاز به استفاده از آرایهٔ راوث و به صورت مستقیم نیز می‌توانیم شرط پایداری آن را بنویسیم:

$$\text{شرط پایداری}:\begin{Bmatrix} 3+p>0 & \to & p>-3 \\ 2P+2>0 & \to & p>-1 \end{Bmatrix} \to \; p>-1$$

مثال: آرایه راوث (Routh) زیر ر در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{c|cccc}
s^7 & a & b & c & d \\
s^6 & e & f & g & h \\
s^5 & i & x & x & x \\
s^4 & l & x & x & \\
s^3 & \overset{0}{\cancel{n}} & 0 & 0 & \\
s^2 & p & x & & \\
s^1 & \overset{0}{\cancel{q}} & 0 & & \\
s^0 & h & & &
\end{array}$$

مثال: دقت کنید که ضرایب سطر s^3 و s^1 در ابتدا همگی صفر بوده‌اند. در مورد پایداری سیستم کدام عبارت صحیح است؟ (همه پارامترهای جدول مثبت می‌باشند.) (مهندسی برق ۸۸)

۱)ناپایدار

۲) پایدار

۳) پایدار مرزی

۴) بدون دانستن مقادیر عددی نمی‌توان اظهار کرد.

حل : گزینه (۱) صحیح است.

با توجه به صفر شدنِ دو سطر به طور کامل، سیستم دارای دو جفت قطبِ مکررِ متقارن نسبت به مبدأ روی محور $j\omega$ هست و بنابراین ناپایدار خواهد بود و لذا گزینه (۱) صحیح است.

فصل ششم

مکان هندسی ریشه‌ها (ایوانس)

همان طور که می‌دانیم، محل قطب‌های حلقه بسته، تعیین کنندهٔ مشخصات پاسخ گذاری سیستم هستند. در روش RL نیز به دنبال این هستیم که اثر تغییر یکی از پارامترهایِ سیستم (مثلاً گین حلقه باز) را بر محل ریشه‌های معادله مشخصه در صفحهٔ s بررسی کنیم.

مکان هندسی ریشه‌ها[1] (Rl) روشی است که درآن،ریشه‌های معادلهٔ مشخصه سیستم به ازای تمام مقادیر یک پارامتر سیستم (معمولاً بهره) رسم می‌شود.

فواید استفاده از RL

۱ـ پیش‌بینی اثر تغییر گین captured بررفتار سیستم

۲ـ پیش‌بینی اثر افزودن قطب‌های حلقه باز بر رفتار سیستم

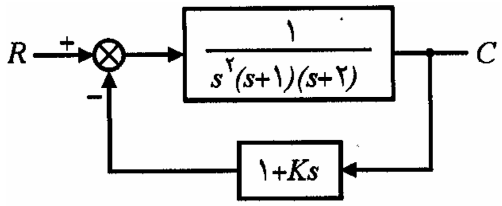
۳ـ پیش‌بینی اثر افزودن صفر بر رفتار سیستم

مسیر ریشه: تقریباً همان روش مکان هندسی ریشه‌هاست، با این تفاوت که «مسیر ریشه‌ها» می‌تواند تأثیر بش از یک پارامتر را بر مکان ریشه‌های سیستم تعیین کند.

☜ **نکته بسیار مهم :** برای رسم RL، پیش از هر کار، ابتدا پارامترِ در حال تغییر (مثلاً K) را به صورت KG بازنویسی کنید! (G تابع تبدیل حلقه باز) به بیان دیگر، هنگام رسمِ RL، K باید حتماً ضریبِ صورتِ تابع تبدیل حلقه باز G باشد.

[1] - Root Locas

مثال: تابع تبدیل حلقه باز سیستم زیر، $GH(s)=\dfrac{1+Ks}{s^2(s+1)(s+2)}$ **می‌باشد.**



برای بازنویسی تابع تبدیل حلقه باز به صورت KG،کافیست:

۱ـ معادلهٔ مشخصهٔ سیستم را تشکیل دهید.

۲ـ معادلهٔ مشخصه را به صورت $\Delta(s)=1+KGH=0$ بازنویسی کنید.

$$\Delta(s)=s(s+1)(s+2)+(1+Ks)=0$$

بنابراین پس از یک مرحله ساده سازی خواهیم داشت:

$$\Delta(s)=s^3+3s^2+2s+Ks+1=0 \;\Rightarrow\; \Delta(s)=1+\frac{Ks}{s^3+3s^2+2s+1}=0$$

☜ **نکته بسیار مهم :** بر حسب (۱) **علامت پارامترِ K** و (۲) **نوع فیدبک،** چهار نوع RL قابل رسم است که دو به دو مشابهند.

۱ـ علامت پارامتر K ،جهتِ RL را تعیین می‌کند :

$K>0$: حرکت از قطب‌ها[2] به سمت صفرها[3] (با تغییر K از صفر تا ∞)

$K<0$: حرکت از صفرها به سمت قطب‌ها (با تغییر K از $-\infty$ تا صفر) .

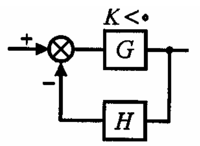
۲ـ (علامت مقایسه کننده) × (علامتِ K) ، شرط زاویه (یا نوع فیدبک) را تعیین می‌کند:

منفی (فیدبک منفی) : مضرب فردِ $\measuredangle GH=\pi$

مثبت (فیدبک مثبت) : مضرب زوجِ $\measuredangle GH=\pi$

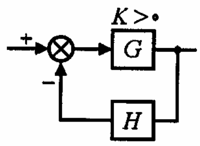
شکل‌های زیر همین مفاهیم را به تصویر می‌کشند:

[2] - Poles
[3] - Zeros



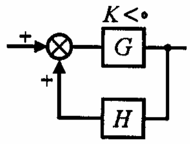
$\measuredangle GH=\pi$ مضرب زوج

جهت RL از Z به P



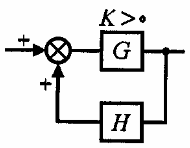
$\measuredangle GH=\pi$ مضرب فرد

جهت RL از P به Z



$\measuredangle GH=\pi$ مضرب فرد

جهت RL از Z به P



$\measuredangle GH=\pi$ مضرب زوج

جهت RL از P به Z

مجدداً به این نکته توجه کنید که **شرط زاویه**، به هر دو عاملِ : **علامت K** و علامت **مقایسه‌کننده** بستگی دارد (و فقط تابع علامت مقایسه‌کننده نیست!).

☜ **نکته :** با توجه به شرط اندازه در $RL\left(K=\dfrac{1}{|GH|}\right)$، برای یافتن K متناظر با ریشه‌ای خاص مانند s_1 ، دو روش وجود دارد:

۱ـ روش ترسیمی : $K=\dfrac{\text{فاصله قطب‌ها تا } s_1}{\text{فاصلهٔ صفرها تا } s_1}$

۲ـ روش تحلیلی : $K=\dfrac{1}{|GH|}$

☜ **نکته مهم :** هنگام یافتن K متناظر با ریشه‌ای خاص مانند s_1 ، چنانچه سیستم صفر یا قطب نداشت، در رابطهٔ $K=\dfrac{\text{فاصلهٔ قطب‌ها تا } s_1}{\text{فاصلهٔ صفرها تا } s_1}$ به ترتیب مخرج یا صورت را یک فرض کنید.

مراحل رسم مکان هندسی ریشه‌ها در حالت فیدبک منفی

چنانچه حاصلضربِ : (علامت مقایسه‌کننده) ×(علامت K)، منفی باشد، برای رسم مکان هندسی ریشه‌ها، از قواعد زیر برای رسم RL استفاده می‌کنیم. در این حالت، از حل معادله مشخصه چنین سیستمی، خواهیم داشت:

$$\Delta(s)=1+KGH=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} |GH|=\dfrac{1}{K} \\ \measuredangle GH=\pi \ \text{مضرب فردِ} \end{cases}$$

۱ـ تشکیل فرم استاندارد تابع حلقه باز (تعیین معادله مشخصه و جداسازی پارامتر K) :

$$\boxed{GH(s)=\frac{\prod(s+Z_i)}{\prod(s+P_i)}}$$

۲ـ رسم Z و Pهای حلقه باز و تعیین تعداد شاخه‌های RL

$$\boxed{\text{RL تعداد شاخه‌های} = \max(m,n)}$$

نکته : فرمول فوق برای کلیهٔ سیستم‌ها (حتی سیستم‌های ناپایدار) قابل بکارگیری است (m و n به ترتیب معرفِ درجهٔ صورت و مخرجِ GH هستند).

۳ـ تعیین RL روی محور حقیقی

نقطهٔ A روی RL قرار دارد، اگر و فقط اگر تعداد کل صفر و قطب‌های حقیقی[۴] سمت راست نقطهٔ A، تعدادی فرد باشد.

نکته : RL روی محور حقیقی، لزوماً به صورت خطوط یک در میان قرار نمی‌گیرد !

۴ـ بررسی مجانب‌ها

$$\text{تعداد مجانب‌ها} = n-m$$

$$\text{زاویهٔ مجانب‌ها} = \frac{\pi}{n-m}$$

$$\text{محل تقاطع مجانب‌ها} = \delta_0 = \frac{\sum Real(P_i)-\sum Real(Z_i)}{n-m}$$

نکات :

۱ـ امکان قطع شدنِ مجانب توسط RL وجود دارد.

۲ـ فقط در حالت خاصی که $(n-m)$ فرد باشد، یکی از مجانب‌ها، π است.

[4] ـ در حقیقت از آنجایی که Z و Pهای مختلط همشه در شرط زاویه صادقند، صفر و قطب‌های مختلط در این مرحله نقشی ایفا نمی‌کنند.

۵ـ بررسی نقاط شکست

نقاط شکست، نقاطی هستند که $\Delta(s)$ در آن نقاط دارای ریشهٔ مضاعف می‌باشد (محل تقاطع حداقل 2 شاخه). برای محاسبهٔ نقاط شکست، دو روش وجود دارد:

روش اول ـ حل یکی از دو معادله زیر:

$$\boxed{\frac{dK}{ds}=\frac{d}{ds}\left(\frac{-1}{GH}\right)=0 \qquad \text{or} \qquad \frac{dK}{ds}=\frac{d(GH)}{ds}=0}$$

روش دوم ـ حل معادلهٔ زیر :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{b+Z_i}-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{b+P_j}=0}$$

نکات :

۱ـ اگر ریشهٔ به دست آمده از مشتق‌گیری، ریشه‌ای حقیقی باشد، با توجه به این که RL روی محور حقیقی مشخص است (مرحله ۳)، نیازی به جاگذاری s در رابطهٔ $K=\frac{-1}{GH(s)}$ نیست. (مگر این که بخواهیم مقدار K را بیابیم.)

۲ـ نقطهٔ شکست تنها در صورتی مختلط است که :

الف) معادلهٔ مشخصه حداقل درجهٔ 4 باشد (زیرا حداقل دو جفت قطب مختلط باید وجود داشته باشد).

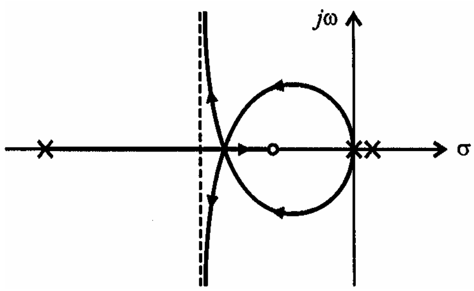
ب) K متناظر با این نقطهٔ شکست، حقیقی و مثبت باشد.

۳ـ بین هر دو قطب حقیقی روی RL ، حداقل یک نقطهٔ شکست از نوع break away وجود دارد.

۴ـ بین هر دو صفر حقیقی روی RL، حداقل یک نقطهٔ شکست از نوع break in وجود دارد. [5]

۵ـ بین هر صفر و قطب حقیقی روی RL
- یا نقطهٔ شکست وجود ندارد
- یا دو نقطهٔ شکست وجود دارد.

[5] (شاید یکی از صفرها در ∞ باشد)



۶ـ اگر $\frac{dK}{ds}$ در s_1 ریشهٔ مکرر از مرتبهٔ 2 داشت $\left(\frac{d^2K}{ds^2}=0\right)$ ، آنگاه s_1 ریشهٔ 3 گانهٔ $\Delta(s)$ می‌باشد (و به همین ترتیب).

۶ـ تعیین زوایای ورود و خروج $(m \in \mathbb{Z})$

الف) زاویه خروج از قطب (ϕ) :

$$\phi=\pi-\sum\phi_i+\sum\theta_i+2m\pi$$

ب) زاویه ورود به صفر (θ) :

$$\theta=\pi-\sum\theta_i+\sum\phi_i+2m\pi$$

☜ **نکات :**

۱ـ اگر صفر یا قطب مکرر داشتیم، مرتبهٔ آن صفر یا قطب،ضریب ϕ یا θ (در طرف چپ معادله) خواهد بود.

۲ـ صفر و قطب‌های مختلط تأثیری در زاویه صفر و قطب‌های حقیقی ندارند.

۳ـ برای صفر و قطب‌های مختلط، یافتن زاویهٔ θ یا ϕ ، تنها برای یکی از جفت صفر و قطب‌های مختلط کافی است (به دلیل تقارن RL نسبت به محور حقیقی).

۷ـ تعیین محل برخورد با محور موهومی

روش اول : معیار پایداری راوث

روش دوم : حل معادلهٔ مشخصه به ازای $s=j\omega$

مراحل رسم مکان هندسی ریشه‌ها در حالت فیدبک مثبت

$$\Delta=1-KGH=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} |GH|=\dfrac{1}{K} \\ \measuredangle GH = \text{مضرب زوج } \pi \end{cases}$$

۱ـ تشکیل فرم استاندارد تابع OL (تعیین معادله مشخصه و جدا سازی پارامترِ K)

$$\boxed{GH(s)=\frac{\prod(s+Z_i)}{\prod(s+P_i)}}$$

۲ـ رسم Z و Pهای OL و تعیین تعداد شاخه‌های RL

$$\text{تعداد شاخه‌های RL} = \max(m, n)$$

۳ـ تعیین RL روی محور حقیقی

نقطهٔ A روی RL قرار دارد، اگر و فقط اگر تعداد کل صفر و قطب‌های حقیقی سمت راست A، زوج باشد.

۴ـ بررسیِ مجانب‌ها

$$\text{تعداد مجانب‌ها} = n - m$$

$$\text{زاویهٔ مجانب‌ها} = \frac{2\pi}{n-m}$$

$$\text{محل تقاطع مجانب‌ها} = \frac{\sum \mathrm{Real}(P_i) - \sum \mathrm{Real}(Z_i)}{n-m}$$

۵ـ بررسیِ نقطه شکست

۶ـ تعیین زوایای ورود و خروج $(m \in \mathbb{Z})$

الف) زاویه خروج از قطب (ϕ) :

$$\phi = -\sum \phi_i + \sum \theta_i + 2m\pi$$

ب) زاویه ورود به صفر (θ) :

$$\theta = -\sum \theta_i + \sum \phi_i + 2m\pi$$

۷ـ تعیین محل برخورد با محور $j\omega$

سیستم پایدار مشروط : سیستمی که تنها به ازای برخی از مقادیر K پایدار می‌باشد، سیستم پایدار مشروط نامیده می‌شود.

☜ **نکات سیستم‌های پایدار مشروط :**

۱ـ احتمال خرابی سیستم‌های با پایداری مشروط بیشتر است.

۲ـ امکان اشباع شدن و عملکرد غیر خطی سیستم‌های پایدار مشروط وجود دارد.

۳ـ با افزودن جبرانساز مناسب، پایداری مشروط قابل پیشگیری است.

☜ **نکات تکمیلی:** مربوط به RL در سیستم‌های دارای فیدبک منفی:

۱ـ افزودن قطب (یا دافع) به نیمهٔ چپ صفحه s , RL را به سوی نیم ـ صفحهٔ راست می‌راند. (کاربرد درطراحی جبرانساز)

۲ـ افزودن صفر (یا جاذب) به نیمهٔ چپ صفحهٔ s , RL را به سوی نیم ـ صفحهٔ چپ می‌راند. (کاربرد طراحی جبرانساز)

۳ـ در حقیقت همواره کل محور حقیقی جزو RL است، با این تفاوت که قسمتی از محور حقیقی مختص $K > 0$ و قسمت دیگر مختص $K < 0$ می‌باشد.

۴ـ ماکزیمم مقدار K روی محور حقیقی، Kی مربوط به نقطهٔ شکست است. (به ازای مقادیر بزرگتر از این K، ریشه‌ها مختلط می‌شوند).

۵ـ اگر تعداد قطب‌های حلقه باز دست کم 3 تا بیشتر از صفرهای حلقه باز بود، امکان ورود RL به نیم صفحهٔ راست وجود دارد. (پایداری مشروط)

۶ـ اگر صفر و قطبی قابل ساده سازی باشد، تأثیری در رسم RL ندارد و قابل چشم پوشی است (ولی در بحث پایداری و جبرانسازی به هیچ عنوان قابل چشمپوشی نیست !)

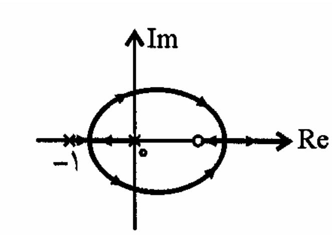
۷ـ شرط زاویه برای رسم RL کافیست. (شرط اندازه فقط برای محاسبهٔ مقدار K در یک نقطهٔ خاص به کار می‌رود.)

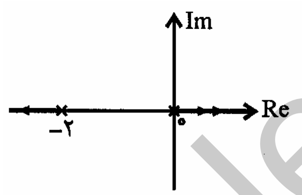
۸ـ از آن جایی که همواره RL به ازای $K=0$ روی قطب و به ازای $K \to \pm\infty$ روی صفر قرار می‌گیرد،[6] آنچه جهتِ منحنی RL را تعیین می‌کند، حدود K است (و نه نوع فیدبک). پس به طور خلاصه می‌توانیم بگوییم:

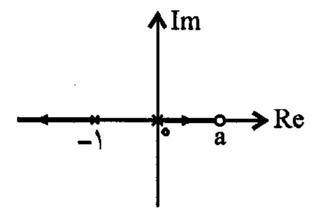
$$K>0 \;:\; \overset{K=0}{\times}\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}\overset{K\to\infty}{\bigcirc}$$

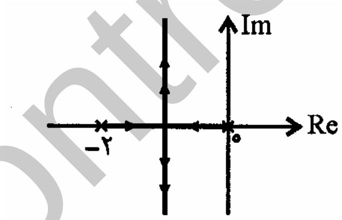
$$K<0 \;:\; \overset{K=0}{\times}\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}\overset{K\to-\infty}{\bigcirc}$$

مثال: مکان هندسی ریشه‌های تابع تبدیل حلقه بسته سیستمی با فیدبک واحد منفی و تابع تبدیل حلقه باز $G(s)=\frac{s-a}{s(s+1)}$ به ازای تغییرات a $(a\geq 0)$ کدام است؟ **(مهندسی برق ۸۶)**

۱)


۲)


۳)


۴)


[6] ـ اثبات این مطلب به راحتی توسط رابطهٔ $|K|=\left|\frac{1}{GH}\right|$ قابل اثبات است.

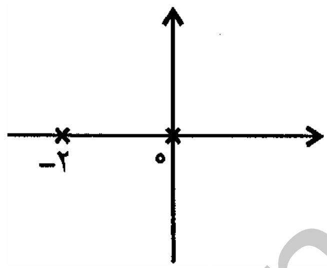
حل : گزینه (۲) صحیح است.

$$G(s)=\frac{s-a}{s(s+1)} \rightarrow \Delta=s^2+s+s-a=s^2+2s-a=0$$

$$\rightarrow \Delta(s)=1-\frac{a}{s(s+1)}$$

$$\rightarrow \Delta(s)=1+\frac{K}{s(s+2)} \quad , \quad K<0$$

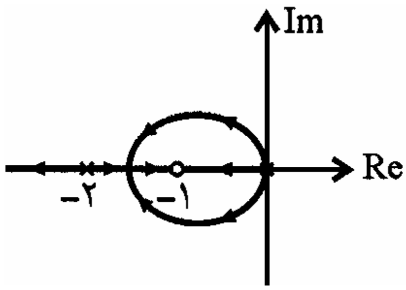
آرایش صفر و قطب نشان می‌دهد که، یکی از دو گزینه ۲ یا ۴ صحیح است.



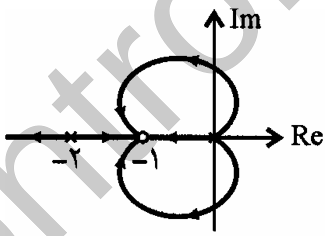
از طرفی با توجه به این که علامت مقایسه کننده و پارامترِ K هر دو منفی هستند، پس قوانین فیدبک مثبت بر نمودار RL حاکم است و لذا گزینه (۲) درست است. (کافیست محل RL روی محور حقیقی را تشخیص بدهیم).

مثال: **کدام گزینه مکان هندسی تقریبی ریشه‌های معادله مشخصه سیستمی با تابع تبدیل حلقه باز** $GH=\frac{K(s+1)^4}{s^3(s+2)^2}$ **را وقتی** K **از** 0 **تا** $+\infty$ **تغییر می‌کند، معرفی می‌کند؟** **(مهندسی برق ۸۶)**

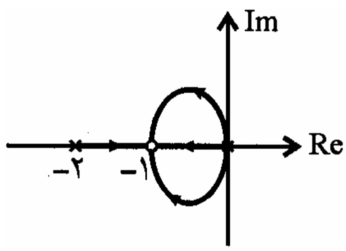
۱)



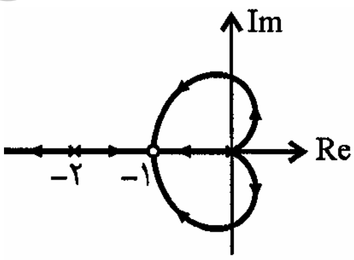
۲)



۳)



۴)



حل : گزینه (۴) صحیح است.

☜ **نکته :** وقتی نوع فیدبک را در سئوال مشخص نکرده بود، آن‌را منفی در نظر بگیرید.

زاویه خروجی از قطب $s=0$ برابر است با :

$$3\phi_0 = 180-(0\times2)+(0\times4) \;\Rightarrow\; \phi_0 = 60^\circ + \frac{2m\pi}{3} = \pm60^\circ\;,\,180^\circ$$

بنابراین تا اینجا گزینه‌های (۱) و (۳) حذف می‌شوند تا از طرفی زاویهٔ ورود به صفر $s=-1$ برابر است با :

$$4\theta_{-1} = 180-(0)+\left(3\times180+2\times0^\circ\right)+2m\pi \;\Rightarrow\; \theta_{-1} = 180^\circ \pm \frac{2m\pi}{4} = 0,\pm90^\circ,180^\circ$$

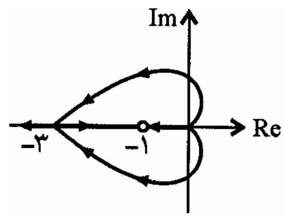
بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

مثال: تابع تبدیل حلقه سیستمی به صورت زیر است:

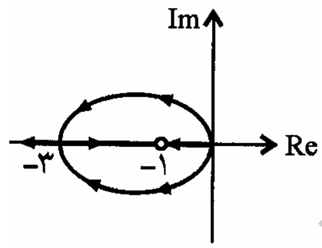
$$KG(s)H(s) = \frac{K(s+1)^2}{s^3}$$

مکان ریشه‌های حلقه بسته این سیستم برای $K>0$ کدام است؟ **(مهندسی برق ۸۷)**

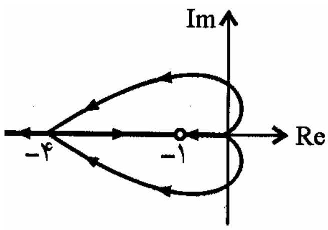
۱)



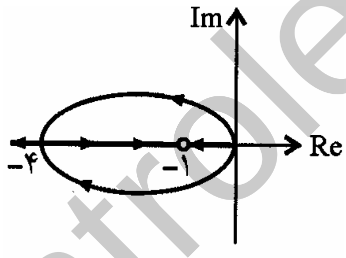
۲)



۳)



۴)



حل : گزینه (۱) صحیح است.

☜ **نکته :** منظور از عبارتِ «تابع تبدیل حلقه» در کلیهٔ سئوالات سال ۸۷ به بعد! همان «تابع تبدیل حلقه باز» می‌باشد!

با محاسبهٔ زاویهٔ خروج از قطب $s=0$ ، دو گزینه حذف می‌شود:

$$3\phi_0 = 180-(0)+(0) \;\rightarrow\; \phi_0 = 60^\circ$$

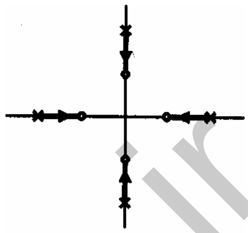
تا اینجا گزینه‌های ۲ و ۴ حذف می‌شوند. در مرحلهٔ بعد، کافیست نقطهٔ زینی را بیابیم:

$$\frac{dK}{ds}=0 \;\Rightarrow\; \frac{2(s+1)s^3-3s^2(s+1)^2}{\text{مخرج}^{\,2}}=0 \;\rightarrow\; s=-3$$

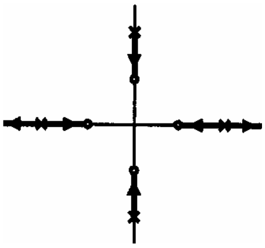
بنابراین گزینه (۱) صحیح می‌باشد.

مثال: تابع تبدیل حلقه سیستمی به صورت $G(s)=\dfrac{K(s^2+5)(s^2-3)}{(s^2+6)(s^2-4)}$ **مکان ریشه‌های حلقه بسته سیستم برای** $K<0$ **کدام است؟ (مهندسی برق ۸۸)**

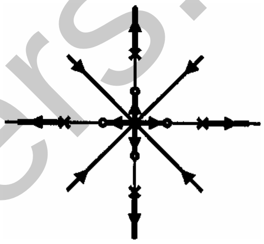
۱)



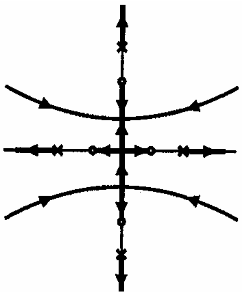
۲)



۳)

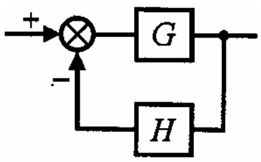


۴)



حل: گزینه (۴) صحیح است.

لطفاً دقت کنید $K<0$ است! با توجه به این که در صورت سئوال حرفی از علامتِ مقایسه کننده نزده، پیش فرضِ ما سیستم زیر است:



بنابراین RL با توجه به قوانین فیدبک مثبت رسم می‌شود $\xrightarrow{K<0}$

بنابراین روی محور حقیقی، RL نقاطی خواهد بود که تعدادی زوج صفر وقطب سمت راست آن قرار گرفته باشد و در نتیجه گزینه‌های ۱ و ۲ حذف می‌شوند. از طرفی، تفاوت‌های گزینه‌هی ۳ و ۴ در نقطهٔ شکست می‌باشد:

$$G(s)=K\frac{s^4+2s^2-15}{s^4+2s^2-24}\xrightarrow{\frac{dK}{ds}=0}$$

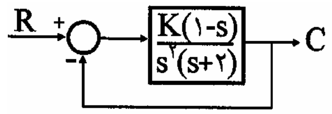
$$=\frac{(4s^3+4s)(s^4+2s^2-24)-(4s^3+4s)(s^4+2s^2-15)}{(s^4+2s^2-24)^2}=0$$

از حل معادلهٔ فوق، نقاط شکست برابر خواهند بود با :

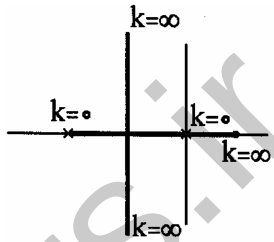
$$4sh3+4s=0 \Rightarrow s=0 \ , \ s=+j \ , \ s=-j$$

لذا گزینه (۴) صحیح است.

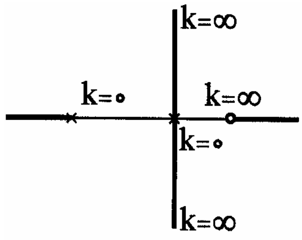
مثال: مکان هندسی ریشه‌های معادله مشخصه سیستم حلقه بسته شکل زیر برای تغییرات بهره K از صفر تا بی‌نهایت کدام گزینه است؟ **(مهندسی برق ۷۶)**



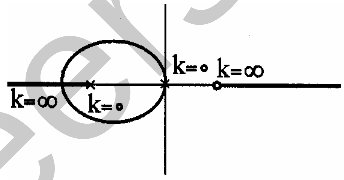
۱)



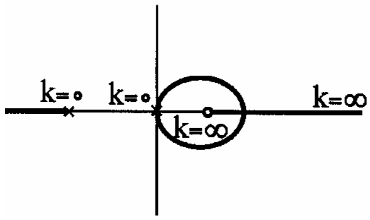
۲)



۳)

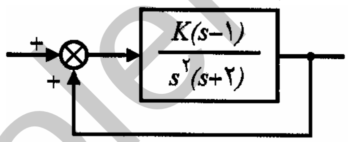


۴)



حل : گزینه (۴) صحیح است.

پس از هر کار، باید تابع تبدیل حلقه باز را به فرم استاندارد درآوریم. البته دقت کنید در این فرایند بهتر است علامت (K) را تغییر بدهید، (زیرا طبق صورت سئوال، علامت K همواره مثبت است):



با توجه به مثبت بودنِ فیدبک، و با استفاده از وضعیت مکانی هندسی ریشه‌ها روی محور حقیقی، گزینه‌های ۱ و ۳ حذف می‌شوند.

از طرفی از آنجایی که تعداد کل[7] صفرها همواره با تعداد کل قطب‌ها برابر است، بنابراین سیستم دارای دو صفر در $s \to +\infty$ و $s \to -\infty$ می‌باشد و از آنجایی که :

همواره بین هر دو صفر ، یک نقطه break وجود دارد.[8]

بنابراین حتماً بین صفرهای واقع در $s = +1$ و $s \to \infty$ یک نقطهٔ شکست وجود دارد و لذا گزینه ۴ صحیح است.

البته می‌توانیم مختصات این نقطهٔ زینی را محاسبه هم کنیم:

$$\frac{dK}{ds} = 0 \;\to\; 2s^2 - s - 4 = 0 \;\to\; \begin{cases} s_1 = 1.69 \;\leftrightarrow\; K_1 = 15.27 \;\checkmark \\ s_2 = -0.52 \;\leftrightarrow\; K_2 = -0.52 \;\times \end{cases}$$

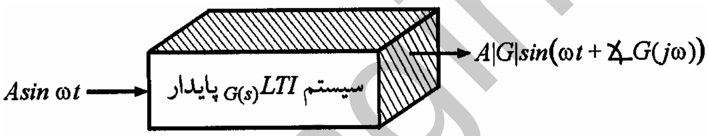
متأسفانه زاویهٔ خروج از قطب در این تست اشتباه رسم شده بود. $\left(\phi_\circ = \pm 90^\circ\right)$

[7] ـ متناهی و نامتناهی

[8] ـ با این تفاوت که برای $K>0$ این نقطه، نقطه break in و برای $K<0$ این نقطه، نقطه break away است.

فصل هفتم

پاسخ فرکانسی



۱ـ منحنی بود[1] (لگاریتمی) : با استفاده از پاسخ فرکانسیِ .O.L، پایداریِ سیستمِ .C.L را بررسی می‌کند.

۲ـ منحنی نایکوئیست[2] (قطبی) : با استفاده از پاسخ فرکانسیِ .O.L پایداریِ سیستم .C.L را بررسی می‌کند.

۳ـ منحنی نیکولز

تعریف پاسخ فرکانسی: به سیستم ورودیِ سینوسی می‌دهیم و خروجیِ حالت ماندگار آن را بررسی می‌کنیم.

مزایای پاسخ فرکانسی

۱ـ ساده بودن

۲ـ قابل به کارگیری در کاربردهای عملی

۳ـ مینیمم کردن اثر نویز در طراحی سیستم‌ها

۴ـ مینیمم کردن اثر اغتشاش در طراحی سیستم‌ها

[1] - Bode Diagram
[2] - Nyquist Diagram

معایب پاسخ فرکانسی

۱ـ رابطهٔ غیرمستقیمِ پاسخ فرکانسی و پاسخ گذرا (به جز در سیستم‌های مرتبه دوم)

نمودارهای بودی[1]

در روش آقای Bode،برای تلحیل تابع حلقه باز $G(\omega)$ ، از دو منحنی استفاده می‌شود:

۱ـ منحنی $|G(j\omega)|$: در این منحنی $20\log|G(j\omega)|$ را بر حسب ω رسم کنید.

۳ـ منحنی $\measuredangle G(j\omega)$: در این منحنی $\measuredangle G(j\omega)$ را بر حسب درجه یا رادیان رسم کنید.

روش عمومی رسم نمودار Bode

۱ـ بازنویسی تابع به فرم استاندارد: کلیهٔ «عوامل پایه» را به صورت $1+\cdots$ بنویسید (این کار باعث می‌شود مجانب فرکانس پایینِ «عوامل پایه»، خط $0\,\text{dB}$ باشد.)

۲ـ به دست آوردن فرکانس‌های گوشه‌های

۳ـ رسم نمودار تقریبی دامنه

۴ـ رسم نمودار تقریبی فاز

عوامل پایه در نمودار Bode

۱ـ عامل گین : K

۲ـ عوامل مشتق‌گیری (صفر در مبدأ) و انتگرال‌گیری (قطب در مبدأ) : $s^{\pm n}$

۳ـ عوامل مرتبه اول (صفر و قطب‌های ساده) : $(1+Ts)^{\pm 1}$

۴ـ عوامل مرتبه دوم (صفر و قطب‌های مختلط): $\left(1+\dfrac{2\xi}{\omega_n}s+\dfrac{1}{\omega_n^2}s^2\right)^{\pm 1}$

منحنی دامنه
- به ازای $K>1$ ، منحنی دامنه به اندازه $20\log|K|$ بالا می‌رود.
- به ازای $K<1$ ، منحنی دامنه به اندازهٔ $20\log|K|$ پائین می‌رود.

---

[1] ـ نمودارهای بودی می‌توانند توسط دستگاهی به نام Digital Signal Analyser ترسیم شوند.

۱ـ عامل گین K

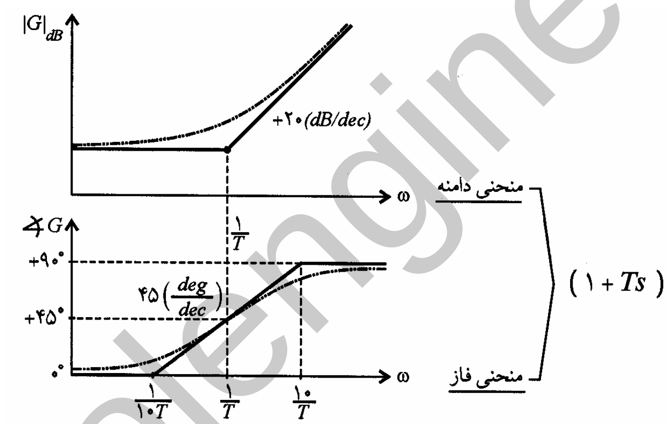
منحنی فاز:
- $K>0$ ، تأثیری بر منحنی فاز ندارد.
- $K<0$ ، منحنی فاز را 180 درجه جابجا می‌کند، (بالا و پائین فرقی ندارد)

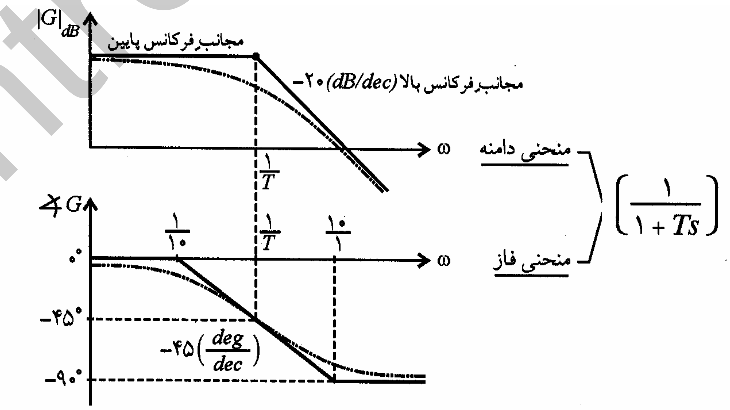
۲ـ الف) عامل مشتق‌گیری $\left(s^n\right)$

- منحنی دامنه: یک منحنی با شیب $+20n\left(\frac{dB}{dec}\right)$ است. (در کلیهٔ فرکانس‌ها)
- منحنی فاز : زاویهٔ فاز همواره $+90n$ است. (در کلیهٔ فرکانس‌ها)

۲ـ ب) عامل انتگرال‌گیری $\left(\frac{1}{s^n}\right)$

- منحنی دامنه: یک منحنی با شیب $-20n\left(\frac{dB}{dec}\right)$ است. (در کلیهٔ فرکانس‌ها)
- منحنی فاز : زاویهٔ فاز همواره $-90n$ است. (در کلیهٔ فرکانس‌ها)

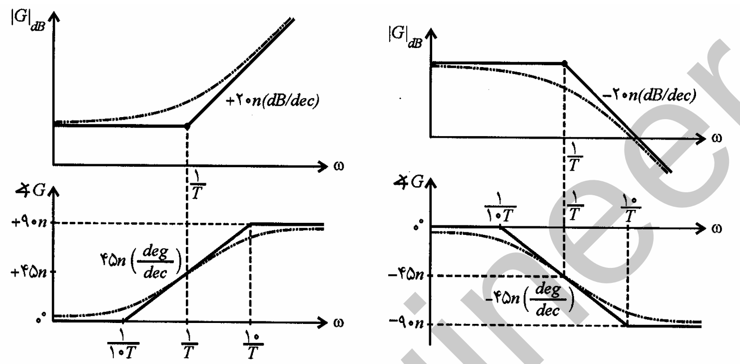




فرکانس گوشه‌ای (شکست cutoff ، نیم قدرت)

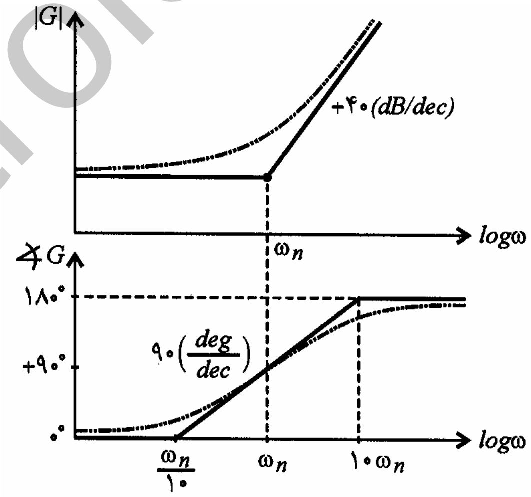
فرکانس محل برخوردِ دو مجانب را فرکانس گوشه‌ای می‌نامند. این فرکانس، پاسخ فرکانسی را به دو ناحیهٔ فرکانس بالا و فرکانس پائین تقسیم می‌کند. ماکزیمم خطا بین نمودار مجانبی و نموار دقیق، در این فرکانس رخ می‌دهد و برای عوامل مرتبه اول $\pm 3\text{dB}$ است.[1]

☜ **نکته :** با توجه به خواص $\log A_1 A_2 = \log A_1 + \log A_2$ و $\log \dfrac{A_1}{A_2} = \log A_1 - \log A_2$، منحنی‌های Bode مربوط به توابع $(1+Ts)^{\pm n}$ به صورت زیر به دست می‌آیند:



☜ **نکته :** در منحنی‌های فوق، خطا در هر فرکانس،n برابر در حالت $n=1$ است.

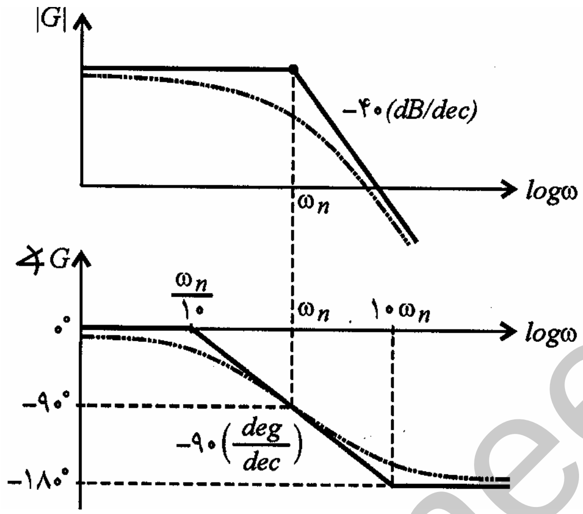
۴ـ الف) صفر مختلط $\left(1+\dfrac{2\xi}{\omega_n}s+\dfrac{1}{\omega_n^2}s^2\right)$



---

[1] ـ فقط در حالت خاصی که با عامل مرتبه اول کار می‌کنیم، می‌توانیم «فرکانس گوشه‌ای» را «فرکانس 3dB» هم بنامیم.

۴ـ ب) قطب مختلط $\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{2\xi}{\omega_n}s+\dfrac{1}{\omega_n^2}s^2}\right)$



نکته ۱ : مقدار دقیق منحنی دامنه در عوامل مرتبه دوم، در فرکانس گوشه‌ایِ $\omega=\omega_n$ برابر است با :

$$\boxed{A=\pm\left(6+20\log\xi\right)}$$

نکته ۲ : منحنی دامنه در عوامل مرتبه دوم، ممکن است دارای قله باشد، این قله در فرکانسی به نام ω_r رخ می‌دهد و اندازهٔ این قله، M_r است. این قله فقط در سیستم‌هایی با $0<\xi<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ رخ می‌دهد:[1]

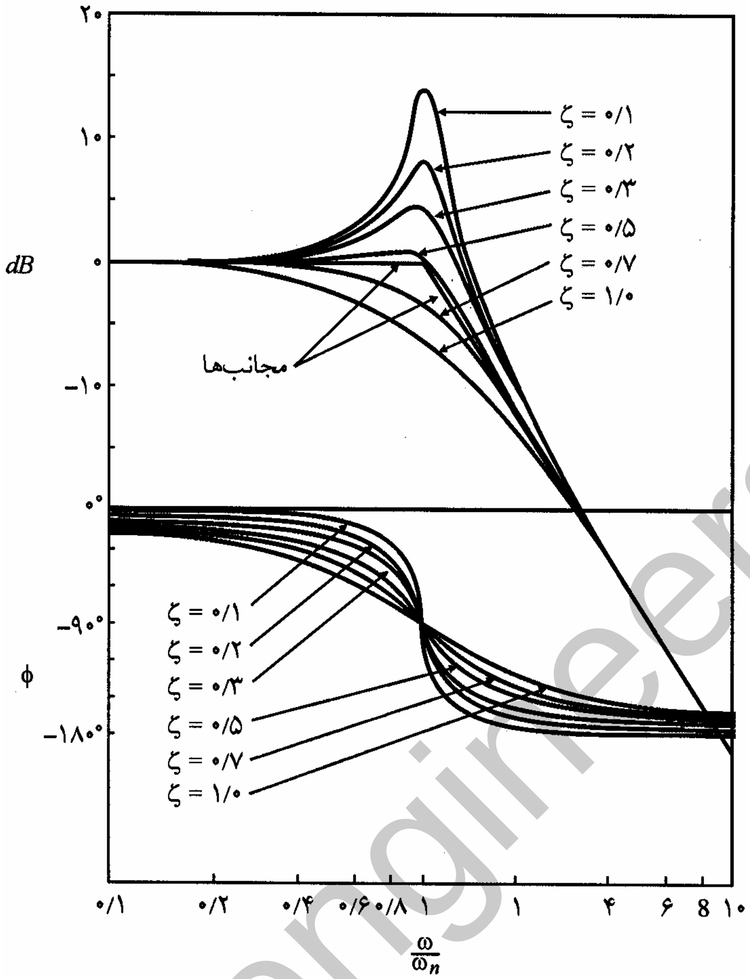
$$\begin{cases}\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2}\ ,\ \ 0<\xi<\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ M_r=\left|G\left(\omega=\omega_r\right)\right|=\dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}\end{cases}$$

توجه کنید! رابطهٔ فوق M_r را بر حسب dB بیان کرده است.

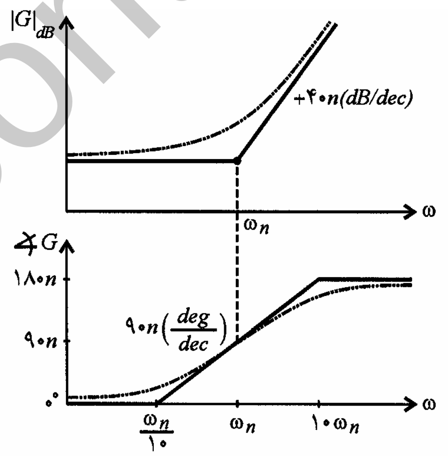
نکته ۳ : ω_r همواره اندکی کوچکتر از ω_n است یعنی قله (در صورت وجود)، کمی قبل از فرکانس گوشه‌ای رخ می‌دهد. هر قدر ξ بزرگتر باشد، فاصلهٔ ω_r و ω_n هم بیشتر می‌شود. در حالت کلی:

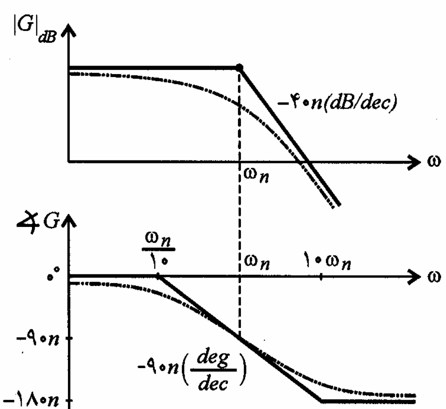
$$\boxed{\omega_r<\omega_d<\omega_n}$$

[1] ـ در حقیقت به ازای سایر ξ ها، دیگر قله‌ای وجود نخواهد داشت.



☜ **نکته ۴:** با توجه به $\log A_1 A_2 = \log A_1 + \log A_2$ و $\log\frac{A_1}{A_2} = \log A_1 - \log A_2$ منحنی‌های Bode مربوط به توابع $\left(1+\frac{2\xi}{\omega_n}s+\frac{1}{\omega_n^2}s^2\right)^{\pm n}$ به صورت زیر در می‌آیند[1]





[1] ـ در حالت خاصی که $\xi = 0$ باشد، فاز چنین سیستمی یا 0 است یا -180° (و هیچ مقدار میانی‌ای نمی‌تواند داشته باشد).

«منحنی بودِ عاملِ $\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{2\xi}{\omega_n}s+\dfrac{1}{\omega_n^2}s^2\right)^n}$ »

«منحنی بودِ عاملِ $\left(1+\dfrac{2\xi}{\omega_n}s+\dfrac{1}{\omega_n^2}s^2\right)^n$ »

☜ **نکته :** در منحنی‌های فوق، خطا در هر فرکانس، n برابر خطا در حالتِ $n=1$ است.

عوامل پایه Bode (روابط دقیق)

	دامنه	فاز
K	$20\log\|K\|$	صفر یا 180°
$s^{\pm n}$	$\pm 20n\log\|\omega\|$	$\pm 90n$
$(1+Ts)^{\pm n}$	$\pm 20n\log\sqrt{1+T^2\omega^2}$	$\pm n\tan^{-1}(\omega T)$
$\left(1+\dfrac{2\xi}{\omega_n}s+\dfrac{1}{\omega_n^2}s^2\right)^{\pm n}$	$\pm 20n\log\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(\dfrac{2\xi}{\omega_n}\omega\right)^2}$	$\pm n\tan^{-1}\left(\dfrac{\dfrac{2\xi}{\omega_n}\omega}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right)$

سیستم‌های مینیمم فاز و غیرمینیمم فاز

سیستم مینیمم فاز: سیستمی که در نیم صفحهٔ راست، دارای صفر یا قطب نمی‌باشد.

مفهوم سیستم مینیمم فاز: تعدادی سیستم با مشخصهٔ دامنظ یکسان داریم. بین این سیستم‌ها، سیستمی را «مینیمم فاز» گویند که تغییرات منحنی فازش، از بقیهٔ سیستم‌ها کمتر باشد. (مینیممِ تغییرات فاز را داشته باشد).

روش تشخیص سیستم‌های غیر مینیمم فاز

۱)سیستمی که در نیم صفحهٔ راست صفر یا قطب دارد.

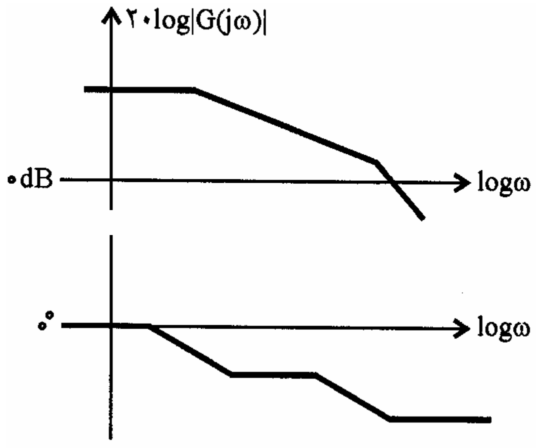
۲) سیستمی که دست کم یک عنصر غیر مینیمم فاز داشته باشد. (مانند عنصر تأخیر: e^{-Ts}).

۳) سیستمی که دارای حلقهٔ داخلی ناپایدار می‌باشد.

۴) سیستمی که در $\omega\to\infty$ ، شیب منحنی دامنه‌اش $-20(n-m)$ است ولی زاویهٔ فازش $-90(n-m)$ نیست.

☜ **نکته :** اگر سیستمی مینیمم فاز باشد، منحنی دامنه برای توصیف کامل سیستم کافی است و نیازی به منحنی فاز نیست.

مثال: دیاگرام بدی سیستمی در شکل مقابل داده شده است. تابع تبدیل این سستم کدام است؟



۱) $\dfrac{1}{(s+1)(s+100)}$

۲) $\dfrac{1000}{(s+1)(s+100)}$

۳) $\dfrac{100}{(s+0.1)(s+100)}$

۴) $\dfrac{1000}{(s+1)(s+1000)}$

حل : گزینه (۳) صحیح است.

منحنی اندازه، از نقطه‌ای بالاتر از $0\,\text{dB}$ آغاز شده، بنابراین گزینه‌های 1 و 4 حذف می‌شوند (زیرا در فرکانس‌های پائین $(s\to 0)$، گینِ dc این دو گزینه به ترتیب $20\log 0.01=-40\,\text{dB}$ و $20\log 1=0$ می‌باشد. توجه کنید گین dc هر دو گزینهٔ ۲ و ۳ $20\log 10=20\,\text{dB}$ می‌باشد.

از طرفی با توجه به این که همواره تغییرات منحنی فاز، از یک دهه قبل از فرکانس گوشه‌ای تا یک دهه پس از آن وجود دارد، برای داشتن یک قسمتِ بدون تغییر روی منحنی فاز، فاصلهٔ فرکانس‌های گوشه‌ای باید بیش از دو دهه باشد. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

تذکر : گاهاً به جای نمایش منحنی‌های بودی روی بازه‌های فرکانسی $\omega_2=10\omega_1$ (دهه‌های فرکانسی)، از بازه‌های فرکانسی $\omega_2=2\omega_1$ (اکتاوهای فرکانسی) استفاده می‌کنیم. به عنوان مثال برای تابع $G(s)=\dfrac{1}{1+Ts}$ ، در یک اکتاو می‌توانیم بنویسیم.

$$\omega_2=2\omega_1 \;\Rightarrow\; 20\log|G(\omega_2)|-20\log|G(\omega_1)|=20\log\frac{1+\omega_1 T}{1+\omega_2 T}$$

$$\approx 20\log\frac{\omega_1}{2\omega_1}\approx -6.021\left(\frac{\text{dB}}{\text{oct}}\right)$$

$$\omega_2=10\omega_1 \;\Rightarrow\; 20\log|G(\omega_2)|-20\log|G(\omega_1)|=20\log\frac{1+\omega_1 T}{1+\omega_2 T}$$

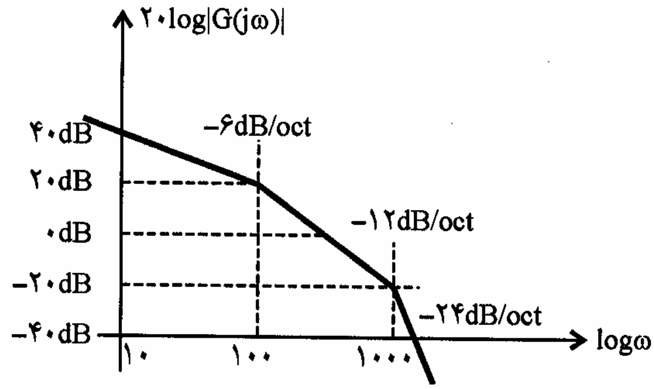
$$\approx 20\log\frac{\omega_1}{10\omega_1}\approx -20\left(\frac{\text{dB}}{\text{dec}}\right)$$

نتیجه: شیب خط مجانب در تابع $G(s)=\dfrac{1}{1+Ts}$ ، حدود $-6\dfrac{\text{dB}}{\text{oct}}$ یا $-20\dfrac{\text{dB}}{\text{dec}}$ است.

نکته : با توجه به تذکر فوق، شیب‌های زیر،معادل یکدیگرند:

$$\pm 6.02\frac{dB}{oct} \equiv \pm 20\frac{dB}{dec}$$
$$\pm 12.04\frac{dB}{oct} \equiv \pm 40\frac{dB}{dec}$$
$$\pm 18.06\frac{dB}{oct} \equiv \pm 60\frac{dB}{dec}$$
$$\pm 24.08\frac{dB}{oct} \equiv \pm 80\frac{dB}{dec}$$

مثال: منحنی دامنه بد در شکل زیر داده شده است. تابع تبدیل $G(s)$ آن کدام است؟



۱) $\dfrac{10^8}{s(s+100)(s+1000)^2}$

۲) $\dfrac{10^8}{s(s+100)(s+1000)}$

۳) $\dfrac{10^9}{(s+100)(s+1000)}$

۴) $\dfrac{10^{11}}{s(s+100)(s+1000)^2}$

حل: گزینه (۴) صحیح است.

اولاً از آنجایی که فقط منحنی اندازه داده شده است و تابع تبدیل سیستم خواسته شده به این «فرضِ ضمنی» پی می‌بریم که سیستم «مینیمم فاز» است.

سیستم در فرکانس‌های پائین با شیب $-6\frac{dB}{oct}$ وارد شده، پس در $s=0$ یک قطب ساده وجود دارد. در فرکانس $100\left(\frac{rad}{s}\right)$، شیب منحنی مجانبی[1] به اندازه $6\frac{dB}{dec}$ کاهش یافته، بنابراین در $s=100$ ،یک قطب سادهٔ دیگر فعال می‌گردد. به همین ترتیب، در فرکانسِ $1000\left(\frac{rad}{s}\right)$، شیب منحنی مجانبی به اندازه $12\frac{dB}{dec}$ کاهش یافته، که نشان دهندهٔ وجود یک قطب مضاعف در $s=1000$ می‌باشد.

بنابراین فرم کلی تابع تبدیل عبارتست از:

$$G(s)=\frac{K}{s\left(1+\frac{s}{100}\right)\left(1+\frac{s}{1000}\right)^2}$$

[1] - Asymptotic

برای محاسبه گین dc (و در نتیجه حذف یکی از گزینه‌های 1 یا 4)، کافیست رفتار فرکانس پایین سیستم را بررسی کنیم. در فرکانس‌های پایین فقط جملهٔ $\frac{1}{s}$ تعیین کنندهٔ رفتار منحنی Bode است. به ازای $\frac{1}{s}, s=1$ در $0(\text{dB})$ قرار دارد،پس یک دهه بعدش $(\omega=10)$ باید به $-20(\text{dB})$ رسیده باشد. اما با توجه به شکل داده شده، منحنی اندازه از $+40\,\text{dB}$ شروع می‌شود ($60\,\text{dB}$ شیفت به بالا داشته‌ایم). بنابراین سیستم دارای گینِ dc به میزان $60\,\text{dB} = 20\log|K|$ می‌باشد. به عبارت دیگر، $K=1000$ می‌باشد:

$$G(s)=\frac{10^3}{s\left(1+\frac{s}{100}\right)\left(1+\frac{s}{1000}\right)^2}=\frac{10^3\times10^8}{s(s+100)(s+1000)^2}$$

☜ **نکته :** برای شیفت دادن نمودار اندازه به اندازهٔ $a(\text{dB})$ ، باید ضریب بهرهٔ سیستم را روی $K=10^{\left(\frac{\pm a}{20}\right)}$ نظیم کنیم. (علامت مثبت برای بالا بردن، و علامت منفی برای پائین آوردن).

☜ **نکته :** در عباراتی نظیر $G(s)=a^2-s^2$ که دارای یک صفر سمت راست (با تغییر فاز خالصِ -90°) و یک صفر سمت چپ (با تغییر فاز خالص $+90^\circ$) هستند، این دو صفر اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند و در نتیجه همواره $\measuredangle G(s)=0$ خواهد بود.

نتیجهٔ مهم: از نظر منحنی فاز،قطبِ سمت راست، معادلِ صفرِ سمت چپ، و صفرِ سمت راست، معادلِ قطب سمت چپ می‌باشد.

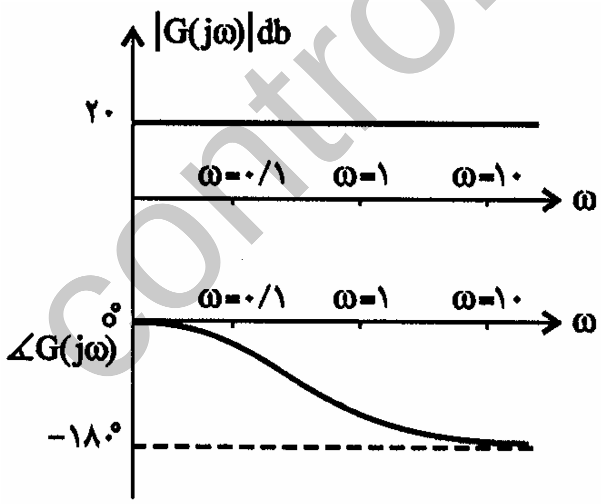
مثال: دیاگرام بودی (Bode) یک سیستم به صورت تقریبی در شکل زیر رسم گردیده است. تابع انتقال این سیستم کدام است؟

۱) $G(s)=10\frac{s+1}{1-s}$

۲) $G(s)=10\frac{1-s}{s+1}$

۳) $G(s)=10\frac{s-1}{s+1}e^{-s}$

۴) $G(s)=10\frac{s+1}{s-1}e^{-s}$



حل : گزینه (۲) صحیح است.

از آن جایی که فاز فرکانس‌های بالا، دارای مجانبِ -180° است، لذا سیستم نمی‌تواند دارای جملهٔ e^{-Ts} باشد. پس گزینه‌های ۳ و ۴ حذف می‌شوند. (برای رد گزینهٔ ۳ می‌توانستیم به این صورت هم استدلال کنیم که چون منحنی فاز از 0° شروع می‌شود، بنابراین گین dc سیستم باید عددی مثبت باشد. در حالی که در گزینهٔ ۳، گین dc سیستم 10- است.)

همچنین از آن جایی که از نظر منحنی فاز صفر (قطب) سمت راست، معادل قطب (صفر) سمت چپ عمل می‌کند، رفتار منحنی فاز گزینهٔ ۱ مانند رفتار منحنی فاز تابع $(s+1)^2$ است (از صفر تا 180°) و لذا گزینهٔ ۱ هم حذف می‌شود. به همین ترتیب، رفتار منحنی فاز گزینهٔ ۲ مانند رفتار منحنی فاز تابع $\dfrac{1}{(s+1)^2}$ است (از 0 تا -180°) و لذا گزینهٔ ۲ پاسخ صحیح است.

تذکر : با توجه به تساوی $|s+1|=|1-s|=|s-1|$ ، و با توجه به این که $\left|e^{-Ts}\right|=1$ می‌باشد، منحنی اندازهٔ هر چهار گزینه دارای مقدار ثابتِ $20\log|K|=20(dB)$ می‌باشند. (K گین dc سیستم).

نکته : این سیستم، به نوعی همان فیلتر all pass آنالوگ است!

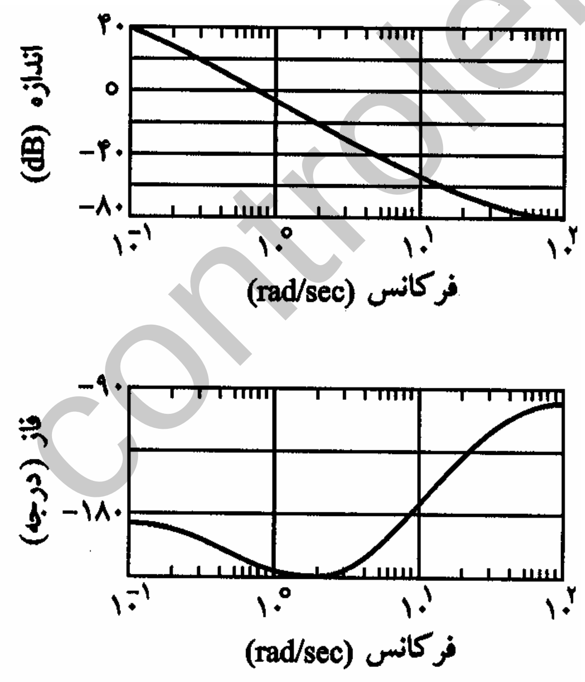
مثال: منحنی‌های اندازه و زاویه فاز تابع تبدیل $G(s)$ (منحنی‌های بودی) در شکل مقابل داده شده است. تابع تبدیل $G(s)$ متناظر کدام است؟

۱) $\dfrac{s+10}{10s(s+1)}$

۲) $\dfrac{s+10}{100s^2(s+1)}$

۳) $\dfrac{(s+10)^2}{100s(s+1)^2}$

۴) $\dfrac{(s+10)^2}{100s^2(s+1)}$

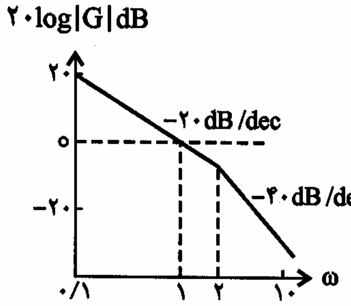


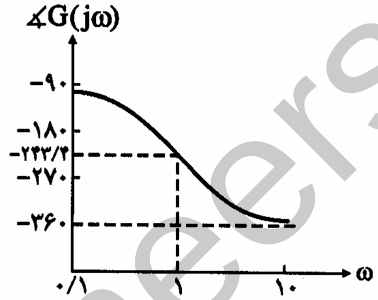
حل : گزینه (۴) صحیح است.

منحنی اندازه با شیب $-40\left(\frac{dB}{dec}\right)$ آغاز می‌شود، بنابراین مخرج کسر باید شامل جملهٔ s^2 باشد و گزینه‌های ۱ و ۳ حذف می‌شوند.

گزینهٔ ۲ هم نمی‌تواند صحیح باشد زیرا فاز نهاییِ گزینه ۲ : $-180^\circ=(-90)(3-1)$ می‌باشد. لذا گزینه (۴) صحیح است.

مثال: پاسخ فرکانسی یک سیستم غیر می‌نیمم فاز (non – minimum phase) در شکل زیر ترسیم شده است. تابع انتقال سیستم برابر کدام است؟





۱) $G(s)=\frac{(s-0.5)}{s(s+0.5)(s+2)}$

۲) $G(s)=\frac{2(s-0.5)}{s(s+0.5)(s+2)}$

۳) $G(s)=\frac{2}{s(s+2)}$

۴) $G(s)=\frac{1}{s(s+2)}$

حل : گزینه (۲) صحیح است.

با توجه به فرض غیر مینیمم فاز بودن سیستم، گزینه‌های ۳ و ۴ حذف می‌شوند.

از طرفی با توجه به واحد بودنِ اندازه فیلتر All pass، (یعنی $\left|\frac{s-0.5}{s+0.5}\right|=1$)، فقط گزینه ۲ می‌تواند صحیح باشد زیرا در این فرکانس اندازه، اندازه گزینه ۲، $0\,dB=1$ می‌باشد:

$$\left|\frac{2}{1\times\sqrt{1^2+2^2}}\right|=\frac{2}{\sqrt{5}}=0.894\approx 1$$

☜ **نکات :**

۱)ضرب هر تابع تبدیل در فیلتر All pass، فقط و فقط مشخصهٔفاز را تغییر می‌دهد.

۲) رفتار منحنی فاز سیستم غیرمینیمم فاز $\frac{2(s-0.5)}{s(s+0.5)(s+2)}$ مشابه رفتار منحنی مینیمم فاز سیستم $\frac{2}{s(s+0.5)^2(s+2)}$ می‌باشد.

۳) اگر منحنی فاز گزینهٔ ۲ را توسط نرم افزار MATLAB رسم کنید، به همین منحنی ولی در محدوده -90° تا -180° می‌رسید.

رابطه بین نوع سیستم و منحنی اندازه Bode

ضرایب استاتیک K_a, K_v, K_p به ترتیب رفتار فرکانس پایین سیستم‌های نوع 0، 1 و 2 را توصیف می‌کنند. هر قدر خطای محدودِ ایستا، بزرگتر باشد، بهرهٔ حلقه در فرکانس‌های پایین بیشتر خواهد بود.

تعیین ثابت‌های خطای ایستا از روی منحنی[1] Lm

۱ـ منحنی Lm در سیستم‌های نوع 0 با شیب $0\,dB$ شروع می‌شود. بنابراین مجانب فرکانس پایین در منحنی Lm یک سیستم نوع صفر، برابر با $20\log K_p$ است.

۲ـ منحنی Lm در سیستم‌های نوع 1 با شیب $-20\dfrac{dB}{dec}$ شروع می‌شود. بنابراین:

الف ـ محل برخورد خط $\omega=1$ با منحنی Lm (یا امتدادش) $20\log K_v$ است.

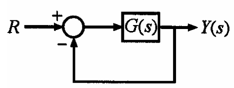
ب ـ محل برخورد خط $0\,dB$ با منحنی Lm (یا امتدادش) $\omega_v=K_v$ است.

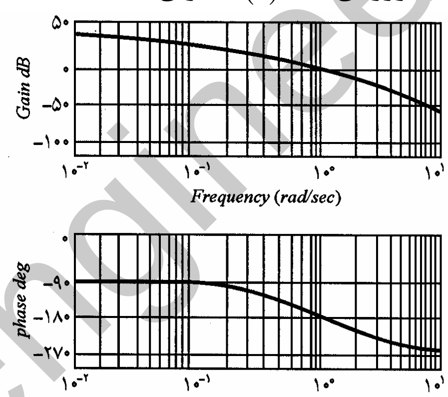
۳ـ منحنی Lm در سیستم‌های نوع 2 با شیب $-40\dfrac{dB}{dec}$ شروع می‌شود. بنابراین:

الف ـ محل برخورد خط $\omega=1$ با منحنی دامنه (یا امتدادش)، $20\log K_a$ است.

ب ـ محل برخورد خط افقی $0\,dB$ با منحنی دامنه (یا امتدادش) $\omega_a=\sqrt{K_a}$ است.

مثال: دیاگرام Bode تابع تبدیل مدار باز یک سیستم مدار بسته با فیدبک واحد منفی در شکل مقابل نشان داده شده است. پاسخ سیستم مدار بسته به ورودی $r(t)=t$ دارای ....





۱)خطای نامحدود است.

۲) خطای ماندگار صفر است.

۳) خطای ماندگار $e_{ss}=1$ است.

۴) خطای ماندگار محدود است، ولی با استفاده از اطلاعات داده شده نمی‌توان مقدار خطا را محاسبه کرد.

حل : گزینه (۳) صحیح است.

به دلیل شروع منحنی فاز از -90° ، سیستم نوع 1 است:

$$\omega_v=K_v=1 \Rightarrow e_{ss}=\frac{1}{K_v}=\frac{1}{1}=1$$

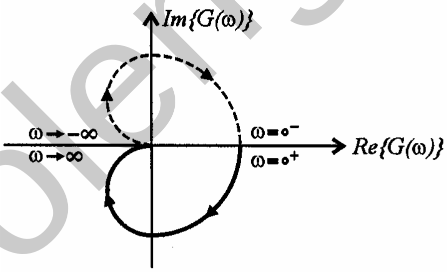
لذا گزینه (۳) صحیح است.

[1] - Log - Magnitude

فصل هشتم

پاسخ فرکانسی و نمودارهای قطبی (دیاگرام نایکوییست)

در روش آقای نایکوئیست، برای تحلیل تابع حلقهٔ باز $G(\omega)$ ، از منحنی قطبیِ تابع تبدیل حلقه باز استفاده می‌شود که در آن، قسمت موهومیِ $G(j\omega)$، بر حسب قسمت حقیقی $G(j\omega)$ ترسیم می‌شود.



برای رسم نمودار قطبی، روش‌های متعددی وجود دارد:

۱ـ بیان نمودن تابع تبدیل حلقهٔ باز در فرم دکارتیِ $G(j\omega)=\text{Re}\{G(j\omega)\}+j\,\text{Im}\{G(j\omega)\}$ و سپس رسم نمودار قطبی.

۲ـ بیان نمودن تابع تبدیل حلقه باز در فرم قطبیِ $G(j\omega)=|G(j\omega)|\measuredangle G(j\omega)$ و سپس رسم نمودار قطبی.

۳ـ روش برداری.

کاربرد اصلی نمودار قطبی،تشخیص پایداری مطلق و یا نسبی حلقه بسته، از روی پاسخ فرکانسیِ سیستم حلقه باز می‌باشد.

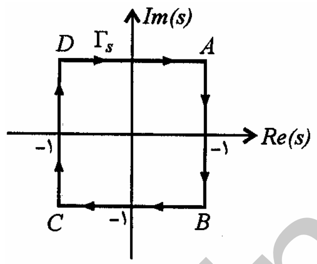
پایداری حلقه باز: اگر کلیهٔ قطب‌های تابع تبدیل حلقه باز در نیم صفحهٔ چپ باشند، سیستم را «پایدار حلقه باز» می‌نامیم.

پایدار حلقه بسته: اگر کلیهٔ قطب‌های تابع حلقه بسته در نیم صفحهٔ چپ باشند، سیستم را «پایدار حلقه بسته» می‌نامیم.

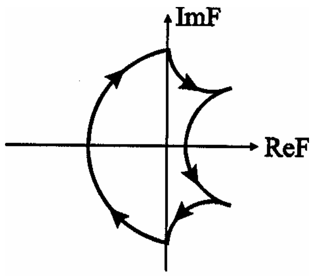
«تئوری کوشی» یا «قضیه آرگومان» یا «قضیهٔ نگاشت»

قضیه: فرض کنید منحنی ساعتگرد و بستهٔ C_S در صفحه s، در برگیرندهٔ Z صفر و P قطب از تابعِ $F(s)$ باشد[1] (و ازروی هیچ صفر و قطبی عبور نکند). منحنی C_S تحت نگاشت $F(s)$،به یک منحنی ساعتگرد در صفحهٔ s مانند C_F نگاشت می‌شود، به قسمتی که C_F , $N = Z - P$ مرتبه، مبدأ صفحه F را دور می‌زند.

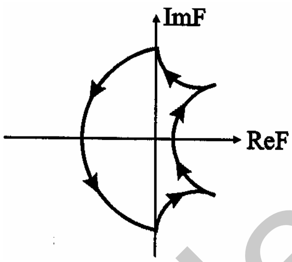
مثال: اگر مسیر بسته مستطیلی Γ_S ، نشان داده شده در شکل مقابل را توسط تابع $F(s)=\dfrac{s+2}{s^2}$ به صفحه $F(s)$ نگاشت کنیم. کدام یک از مسیرهای نشان داده شده حاصل می‌شود؟ (مهندسی برق ۸۰)



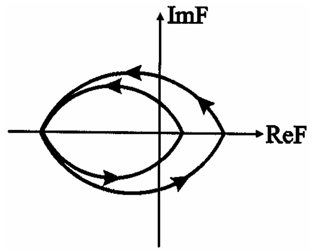
۱)



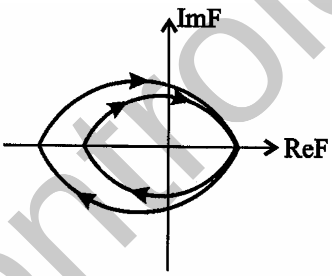
۲)



۳)



۴)



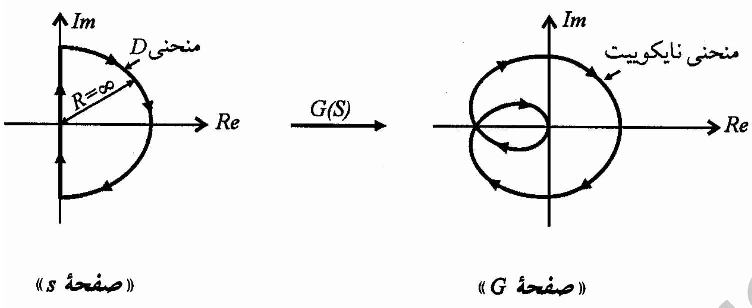
حل : گزینه (۳) صحیح است.

از آنجایی که Γ_S دو عدد از قطب‌های F را در بر گرفته، بنابراین منحنی نگاشت Γ_F, $N = 0 - 2 = -2$ مرتبه مبدأ صفحهٔ F را دور می‌زند (یعنی دو مرتبه در جهت پاد ساعتگرد) بنابراین گزینه (۳)صحیح است.

[1] ـ در شمارشِ صفرها و قطب‌ها، چندگانه بودن یک صفر یا قطب نیز منظور می‌شود.

معیاری پایداری نایکوئیست[۱]

برای بررسی پایداری سیستم حلقه بسته، ابتدا کانتور نایکوئیست[۲] را تحت تبدیل G نگاشت می‌کنیم.



تعداد قطب‌های سیستم حلقه بسته واقع در نیم صفحهٔ راست برابر است با :

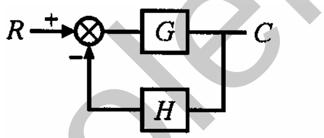
$$\boxed{Z = N + P = P_{u,Cl} = N + P_{u,Ol}}$$

N : تعداد دوران‌های ساعتگرد منحنی قطبی حول نقطه[۳] (-1)

P : تعداد قطب‌های تابع تبدیل حلقه باز در نیمهٔ راست صفحه s .

Z : تعداد قطب‌های تابع تبدیل حلقه بسته در نیمهٔ راست صفحهٔ s (صفرهای معادله مشخصه).

☜ **نکته :** در حقیقت «معیار پایداری نایکوئیست» چیزی نیست جز همان «قضیهٔ آرگومان» :



$$\Rightarrow \quad \frac{C}{R} = \frac{G}{1 + GH}$$

با این تفاوت که چون نقطهٔ صفر در صفحه $F = 1 + GH$ ، معادلِ نقطه (-1) در صفحهٔ GH می‌باشد، به جای نگاشت کردن منحنی D تحت تابع F و محاسبهٔ تعداد دوران‌های منحنی F حول مبدأ صفحهٔ F ، (N_F) ، منحنی D را تحت تابع سادهٔ GH نگاشت می‌کنیم و تعداد دوران‌های منحنی GH حول نقطهٔ (-1) را در نظر می‌گیریم.

☜ **نکته :** برای به دست آوردن N در منحنی نایکوئیستِ کامل شده، 2 روش رایج است. در هر دو روش، ابتدا از نقطهٔ (-1) ، برداری به طرف منحنی نایکوئیست رسم می‌کنیم، طوری که ابتدای بردار روی نقطهٔ (-1) و انتهای آن منحنی نایکوئیست را قطع کند:

---

[1] ـ بیان اصلی معیار پایدار نایکوئیست: یک سیستم فیدبک پایدار است اگر و فقط اگر، تعداد دوران‌های پاد ساعتگردِ دیاگرام نایکوئیست حول نقطهٔ (-1) ،با تعداد قطب‌های با قسمت حقیقیِ مثبت تابع تبدیل حلقه باز برابر باشد $(N = -P)$.

[2] ـ منحنی D را «مسیر نایکوئیست» نیز می‌نامند.

[3] ـ به همین ترتیب برای تحلیل پایداری سیستم‌های با فیدبک مثبت، N تعداد دوران‌های حول نقطه (+1) می‌باشد.

روش اول: با تغییر ω از $-\infty$ تا $+\infty$ ، کل تیغیر فازی را که به وجود آمده محاسبه می‌کنیم. به ازای هر دوران ساعتگرد $N,360^\circ$ یک واحد زیاد می‌شود.

روش دوم : تعداد تقاطع‌های این بردار را با منحنی نایکوئیست می‌شماریم. بدین ترتیب که تقاطع با دوران‌های ساعتگرد را مثبت، و تقاطع با دوران‌های پاد ساعتگرد را منفی در نظر می‌گیریم. جمع جبری این تقاطع، N را به دست می‌دهد.[1]

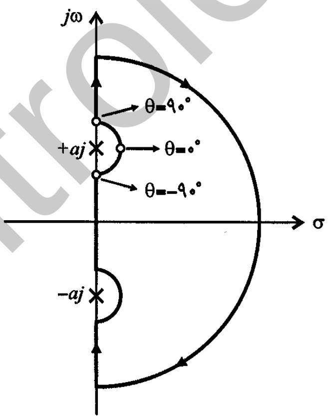
رسم منحنی قطبی[2]

روش کلاسیکِ ترسیم منحنی نایکوئیست، بازنویسی تابع مورد نظر به فرم دکارتی یا قطبی و سپس استفاده از نقطه یابی می‌باشد. با توجه به این که روش نقطه یابی،روش نسبتاً طولانی و زمانبر است، رهیافت کلّی زیر می‌تواند سرعت رسم منحنی قطبی را افزایش بدهد:

۱ـ نگاشت نمودنِ[3] نقطهٔ $\omega = 0^+$ (بررسی رفتار فرکانس پایین تابع)

۲ـ بررسی رفتار منحنی قطبی در حوالی صفر یا قطب واقع بر محور $j\omega$ ، و در نقطهٔ $s = \pm aj$ $\left(s = \underset{r \to 0}{ja} + re^{j\theta} \right)$. این کار در دو حالت می‌تواند انجام بگیرد:

حالت اول ـ exclude کردنِ صفر یا قطب واقع بر محور $j\omega$: در این حالت، منحنیِ نایکوئیست (D) به نحوی صفر یا قطبِ واقع بر محور $j\omega$ را دور می‌زند که این صفر یا قطب، درونِ منحنی D قرار نمی‌گیرند. همان طور که در شکل نیز نشان داده‌ایم. معمولاً در این مرحله، نگاشتِ سه نقطهٔ مشخص شده، (در حالی که $r \to 0$ میل می‌کند)، محاسبه می‌گردد:



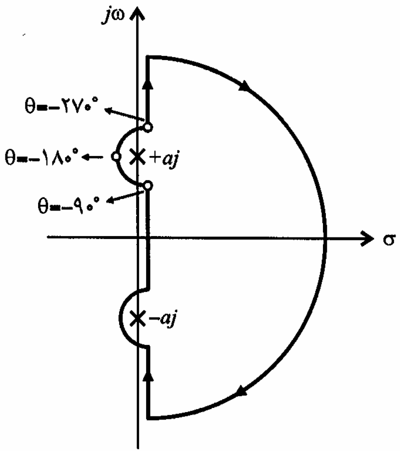
$$\Rightarrow \lim_{\substack{r \to 0 \\ -90^\circ < \theta < 90^\circ}} GH(s)$$

[1] ـ این بردار هر جهتی می‌تواند داشته باشد.

[2] ـ لطفاً اشتباه نکنید! منحنی نایکوئیست همان منحنی D (در صفحهٔ s) است در حالی که منحنی قطبی یا دیاگرام نایکوئیست ۰که در صفحهٔ GH رسم می‌شود)، نگاشتِ منحنیِ نایکوئیست تحت تابع GH می‌باشد.

[3] ـ البته به شرطی که s=0 قطب GH نباشد (اگر s=0 قطب GH بود، به مرحله 2 می‌رویم.

حالت دوم ـ include کردنِ صفر یا قطب واقع بر محور $j\omega$: در این حالت، منحنی نایکوئیست (D) به نحوی صفر یا قطبِ واقع بر محور $j\omega$ را دور می‌زند که این صفر یا قطب، درون منحنی D قرار می‌گیرند. همان طور که در شکل نیز نشان داده‌ایم، معمولاً در این مرحله، نگاشتِ سه نقطه مشخص شده (در حالیکه $r \to 0$ میل می‌کند)، محاسبه می‌گردد:



$$\Rightarrow \lim GH(s) \quad \begin{cases} r \to ۰ \\ -۲۷۰° < \theta < -۹۰° \end{cases}$$

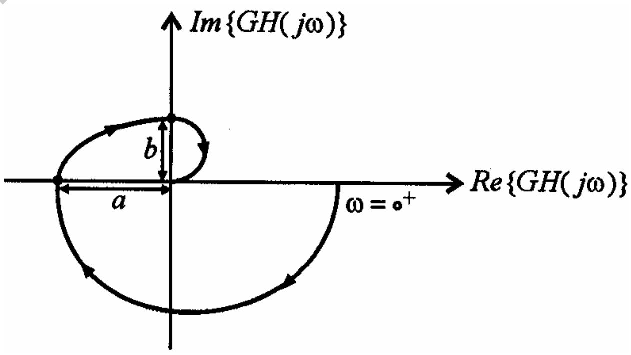
۳ـ یافتن نگاشتِ باقیماندهٔ محور $j\omega$ $(\omega \to \infty)$: $\lim_{\omega \to \infty} GH(j\omega)$

۴ـ یافتن نگاشت نیمدایره عظیمه، ω از $\omega = +\infty$ تا $\omega = -\infty$: $\lim_{r \to \infty} GH(s)\Big|_{s=re^{j\theta}}$

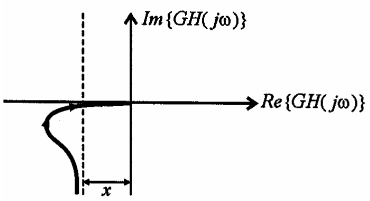
☜ **نکات تکمیلی :** به منظور رسم دقیق‌ترِ دیاگرام‌های نایکوئیست، می‌توانیم از نکات زیر نیز استفاده کنیم:

۱ـ برای یافتن محل تلاقیِ منحنی قطبی و محور حقیقی، کافیست پس از حلِ معادلهٔ $\operatorname{Im}\{G(j\omega)\}=0$ و یافتن فرکانس قطعِ $\omega=\omega_1$ مقدار $a=\operatorname{Re}\{G(j\omega_1)\}$ را محاسبه کنیم.

۲ـ برای یافتن محل تلاقیِ منحنی قطبی و محور موهومی، کافیست پس از حلِ معادلهٔ $\operatorname{RE}\{G(j\omega)\}=0$ و یافتن فرکانس قطع $\omega=\omega_1$، مقدار $b=\operatorname{Im}\{G(j\omega_1)\}$ را محاسبه کنیم.



۳ـ برای یافتن ضابطهٔ منحنی قطبی از محور موهومی، می‌توانیم از روش زیر استفاده کنیم (این فاصله، معمولاً در فرکانس $\omega = 0$ محاسبه می‌شود) :



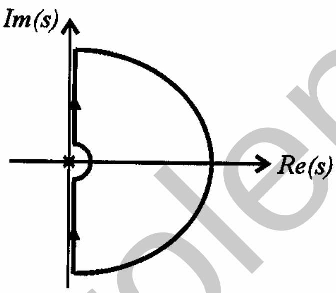
$$\Rightarrow \quad \boxed{x = \lim_{\omega \to 0} Re\left\{GH(j\omega)\right\}}$$

مثال: دیاگرام قطبیِ متناظر با تابع تبدیلِ حلقهٔ $GH(s) = \dfrac{1}{s(\tau s+1)}$ **را رسم کنید.**

حل :

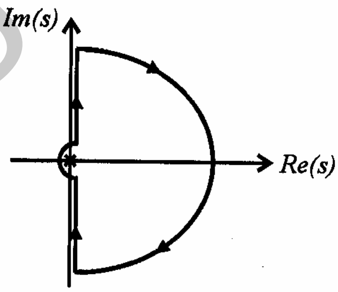
مرحله اول ـ با توجه به اینکه $s = 0$ جزو دامنهٔ تابع تبدیلِ‌حلقه $GH(s)$ نمی‌باشد، امکان نگاشت کردنِ آن وجود ندارد و به مرحلهٔ دوم می‌رویم.

مرحلهٔ دوم ـ $s = 0$ قطب سیستم می‌باشد. از طرفی طبق قضیهٔ کوشی، منحنی نایکوئیست (D) نباید از روی هیچ صفر یا قطبی عبور کند، بنابراین منحنی نایکوئیست به هر یک از داو شکل زیر می‌تواند انتخاب شود:



«حالت اول: exclude کردنِ قطب»

یا



«حالت دوم: include کردنِ قطب»

☜ **نکته :** گرچه include[1] یا exclude[2] کردنِ صفر و قطبی که روی محور $j\omega$ قرار گرفته باعث تفاوت در شکل نهایی منحنی قطبی می‌شود، اما تأثیری در بررسی پایداری سیستم ندارد (حالت پیش‌فرض، حالت exlude کردنِ قطب می‌باشد.)

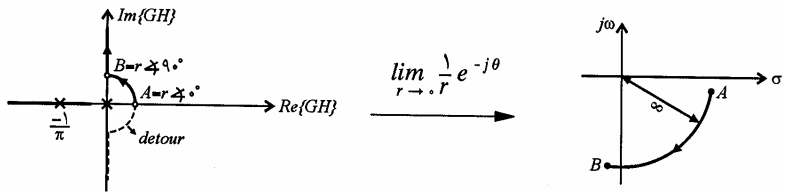
با فرض exclude کردنِ $s = 0$ ، به بررسیِ رفتار منحنی قطبی در حوالی $s = 0$ می‌پردازیم:

$$\lim_{r\to 0} GH(s) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{s(\tau s+1)} \approx \lim_{r\to 0} \frac{1}{s} = \lim_{r\to} \frac{1}{re^{j\theta}} = \lim_{r\to 0} \frac{1}{r} e^{-j\theta}$$

---

[1] - include = شامل بودن، در بر داشتن

[2] - exclude = خارج کردن، مستثنی کردن



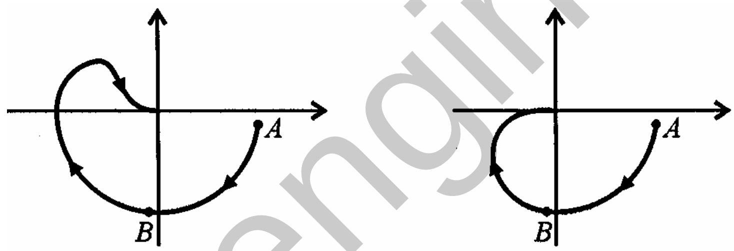
دلیل انحراف اندکِ نقطه B به سمت چپِ محور موهومی، وجودِ جملهٔ $(\tau s+1)$ در مخرج تابع تبدیل می‌باشد.[1]

مرحله سوم ـ برای یافتن نگاشت باقیمانده محور $\left(0^+<\omega<\infty\right) j\omega$ ، پس از جانشانی $s=j\omega$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$GH(j\omega)=\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{j\omega(j\omega\tau+1)}=\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{\omega\sqrt{(\tau\omega)^2+1}}\measuredangle-\left(90^\circ+\tan^{-1}\frac{\omega\tau}{1}\right)$$

همان طور که می‌بینیم، با میل کردنِ $\omega\to\infty$ ، منحنی نایکوئیست با زاویه‌ای حدود -179° به مبدأ نزدیک می‌شود. توجه کنید که تشخیص دقیق زاویه‌ها گاهاً می‌تواند کمک بزرگی برای حل تست باشد!

مثلاً



«شکل ۱» «شکل ۲»

همان طور که در دو شکل فوق می‌بینیم، زاویهٔ ورود به مبدأ در شکل ۱ حدوداً -181° می‌باشد و در نتیجه، منحنی قطبی قطعاً باید محور Re را قطع کرده باشد در حالی که شکل ۲، منحنی قطبی سیستمی را نشان می‌دهد که زاویهٔ ورود به مبدأی در حدود -179° دارد و بنابراین می‌تواند بدون قطع نمودن محور Re به مبدأ وارد شود.

مرحله چهارم ـ برای یافتن نگاشت نیمدایره عظیمه، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\lim_{r\to\infty} GH(s)=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{\tau s^2+s}\approx\lim_{r\to\infty}\frac{1}{\tau^2}=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{\tau r^2 e^{+j2\phi}}$$

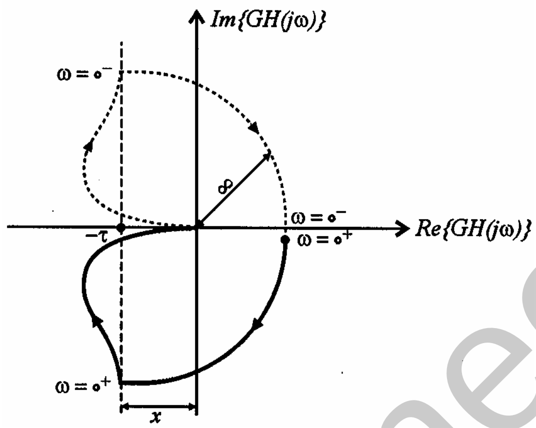
با توجه به رابطهٔ فوق، کل نیمدایرهٔ عظیمه به مبدأ صفحه GH نگاشت می‌شود.

[1] ـ برای اثبات این موضوع، می‌توانید از مفهوم بردارها استفاده کنید. در حقیقت از آنجایی که مجموع زاویهٔ بردارهایی که از هر یک از دو قطب، به نقطه B متصل می‌شود، کمی بیش از 90° می‌باشد (مثلاً 91)، لذا نگاشت یافتهٔ نقطهٔ B نیز وارد ربع سوم می‌شود.

نکته : برای رسم دقیق‌تر مننی قطبی، می‌توانیم برای فاصلهٔ منحنی قطبی از محور موهومی را نیز محاسبه کنیم:

$$x=\lim_{\omega\to 0}\text{Re}\left\{\frac{1}{j\omega(j\tau\omega+1)}\right\}=\lim_{\omega\to 0}\frac{-\tau}{(\tau\omega)^2+1}=-\tau$$

شکل زیر منحنی قطبی تکمیل شدهٔ این سیستم را به تصویر می‌کشد. (قسمت نقطه چین، نگاشت فرکانس‌های منفی را نشان می‌دهد).



با توجه ه این تست می‌توانیم نکات کلی زیر را نتیجه بگیریم:

نکته ۱:

۱)برای رسم منحنی قطبی، تنها کافیست که نگاشت را به ازای فرکانس‌های مثبت $\left(0^+<\omega<\infty\right)$ رسم کنیم. نگاشتِ فرکانس‌های منفی $\left(-\infty<\omega<0^-\right)$ ، قرینهٔ نگاشتِ فرکانس‌های مثبت نسبت به محور Re خواهد بود. (در حقیقت به همین دلیل بود که نگاشت قسمتی پایینیِ detour [1] را به دست نیاوردیم).

۲) برای بررسی رفتار منحنی قطبی در اطراف صفر یا قطبِ $s=\pm a\,j$ فقط جملهٔ مربوط به آن صفر یا قطب (یعنی s^2+a^2) را هنگام حدگیری از تابع تبدیل در نظر می‌گیریم. (در حقیقت در این حالت اندزه و فازِ سایر صفرها و قطب‌ها روی detour تقریباً ثابت است).

۳) از روی رفتار منحنی قطبی یک سیستم در $\omega=0^+$ ، به هیچ وجه نمی‌توانیم ناسره، سره یا اکیداً سره بودنِ سیستم را تشخیص دهیم.

نکته ۲:

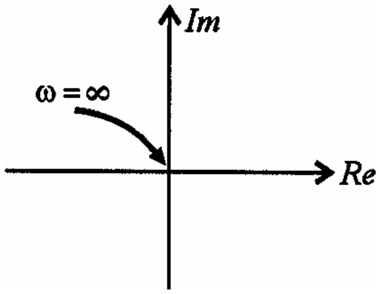
۱)رفتار منحنی قطبی در $\omega\to\infty$ ،به یکی از سه شکل زیر است[2]:

الف) توابع اکیداً سره: منحنی قطبی در $\omega=\infty$ ، وارد مبدأ می‌شود. (این ورود، از هر طرف می‌تواند انجام شود):

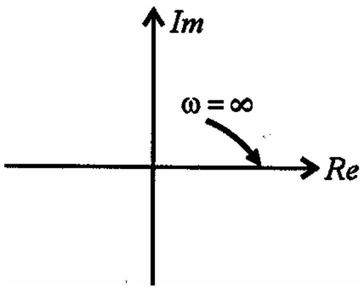
---

[1] ـ برای آن که نشان دهیم مسیرِ نایکوئیستی که برای صفر و قطب‌های واقع بر محور $j\omega$ در نظر می‌گیریم اندکی با مسیر اصلی نایکوئیست (کایکوئیست) متفاوت است، مسیر نیکوئیست در اطراف اینگونه صفر و قطب‌ها را detour (دیتور) می‌نامیم (detour در لغت به معنای «انحراف از خط مسیر اصلی» می‌باشد).

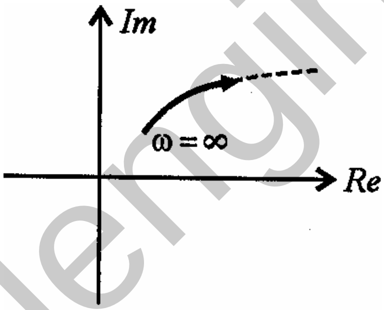
[2] ـ این نکته شامل رفتار منحنی قطبی به ازای نگاشت نیمدایرهٔ عظیمه نیز می‌شود.



ب) توابع سره: منحنی قطبی در $\omega=\infty$، به نقطه‌ای محدود روی محور حقیقی، (به جز مبدأ) وارد می‌شود:



ج)توابع ناسره: کمنحنی قطبی در $\omega=\infty$ ، به نقطه‌ای در بی‌نهایت میل می‌کند:



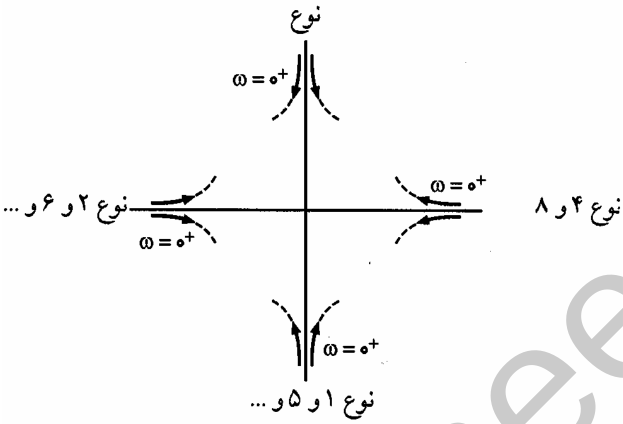
۲) در کلیهٔ سیستم‌ها (ناسره،سره و اکیداً سره) ،زاویه GH به ازای $\omega\to\infty$, $-90(n-m)$ می‌باشد. (n درجهٔ مخرج، m درجهٔ صورت). توجه کنید این نکته هیچگونه ارتباطی به مینیمم فاز بودن سیستم ندارد (اثبات این نکته با استفاده از مفهوم بردارها می‌تواند انجام شود).

☜ **نکته ۳:**

۱)چنانچه GH تابع تبدیل حلقهٔ یک سیستم «نوع N» باشد (GH دارای عاملِ $\frac{1}{S^N}$ باشد)، منحنی قطبی در $\omega=0^+$ (نقطهٔ بالاییِ دیتور)، از یک محل دور و مجانب با خط عمودی‌ای که در زاویهٔ $-90N$ درجه قرار دارد، شروع می‌گردد.[1] (نگاشتِ نقطهٔ $\omega=0^+$)

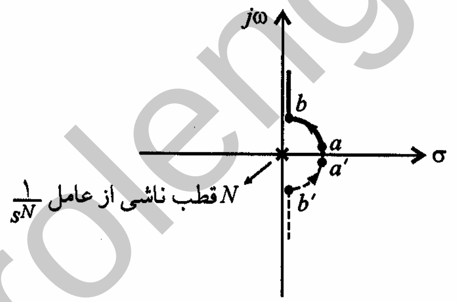
[1] - $N\neq 0$

۲) چنانچه GH تابع تبدیل حلقهٔ‌یک سیستم «نوع N» باشد (GH دارای عامل $\frac{1}{S^N}$ باشد)، نگاشت یافتهٔ نقطه $\omega = 0^-$، توسط یک دوران ساعتگرد $180N$ درجه‌ای (به شعاع بی‌نهایت)، به نگاشت یافتهٔ نقطهٔ $\omega = 0^+$ وصل می‌شود (این قسمت، همان نگاشتِ کل دیتور، از $\omega = 0^-$ تا $\omega = 0^+$ است).

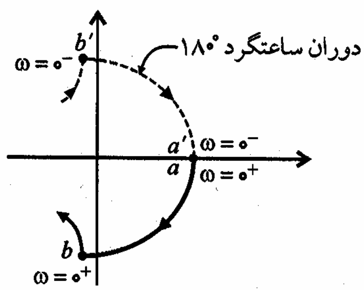


مثال‌های زیر کاربرد دو نکتهٔ فوق را نشان می‌دهند (در این اشکال، فقط نگاشت دیتور را نمایش داده‌ایم):

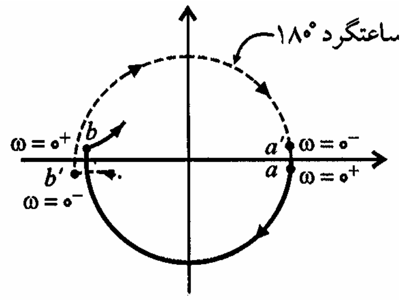
برای درکِ بهترِ چگونگی نگاشت شدن نقاط دیتور، هر یک از این نقاط را با یک نام نشان داده‌ایم:



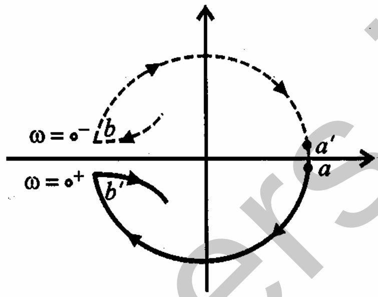
$$GH(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad \Rightarrow$$



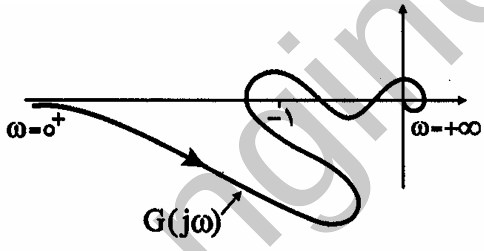
$$GH(s)=\frac{۱}{s^{۲}(s+۵)} \Rightarrow$$



$$GH(s)=\frac{s+۰/۱}{s^{۲}(s+۱۰۰)} \Rightarrow$$



مثال: نمودار نایکوئیست یک سیستم در شکل زیر نشان داده شده است :



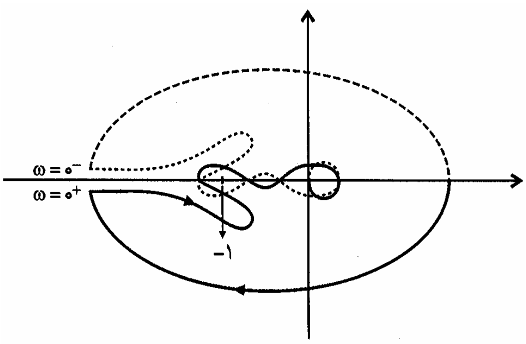
تعداد صفرها و قطب‌های ناپایدار سیستم صفر است آنگاه : **(مهندسی برق ۷۰)**

۱)تعداد قطب ناپایدار سیستم 2 است. ۲) سیستم پایدار است.

۳) تعداد قطب‌های ناپایدار سیستم 1 است. ۴) هیچکدام

حل : گزینه (۱) صحیح است.

☜ **نکته :**عادت کنید! پیش از هر کار، ابتدا منحنی نایکوئیست را تکمیل کنید:



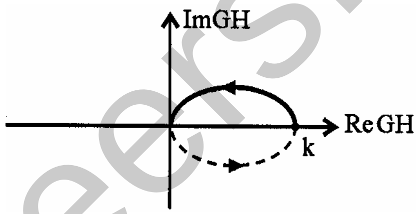
با توجه به شکل فوق، $N=2$ است. از طرفی با توجه به این که در صورت سئوال فرض شده تعداد قطب‌های حلقه بازِ سیستم صفر است $(P=0)$، خواهیم داشت:

$$Z=N+P=2$$

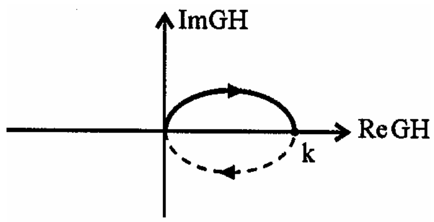
یعنی سیستم دارای دو قطب ناپایدار است.

مثال: کدام گزینه دیاگرام نایکوئیست تابع تبدیل حلقه باز $GH=\dfrac{ks(s+1)}{s^2+2s+2}$ را به ازای $k<0$ نشان می‌دهد؟ (مسیر متعارف نایکوئیست را انتخاب کنید.) **(مهندسی برق ۸۵)**

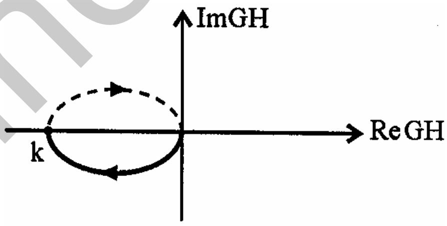
۱)



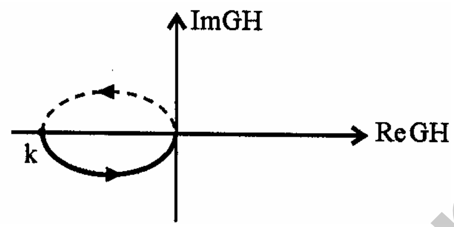
۲)



۳)



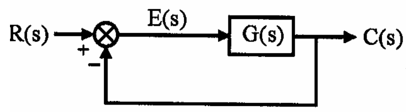
۴)

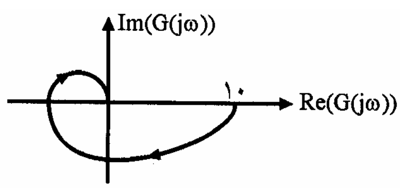


حل: گزینه (۳) صحیح است.

با توجه به «سره» بودنِ سیستم، در $\omega=\infty$ منحنی قطبی باید به نقطه‌ای محدود (به جز مبدأ) روی محور Re برسد، بنابراین گزینه ۱ و ۴ حذف می‌شوند. از طرفی پر واضح است که چون $K<0$ است، این نقطهٔ محدود، روی محور $Re<0$ قرار دارد. لذا گزینه (۳) صحیح است.

مثال: سیستم کنترل حلقه بسته مقابل را در نظر بگیرید، که نمودار نایکوئیست $G(s)$ آن به صورت زیر داده شده است. خطای حالت ماندگار به ورودی پله واحد عبارتست از: **(مهندسی برق ۸۵)**





۱) 0

۲) $\dfrac{1}{11}$

۳) $\dfrac{1}{10}$

۴) اطلاعات داده شده کافی نیست.

حل : گزینه (۲) صحیح است.

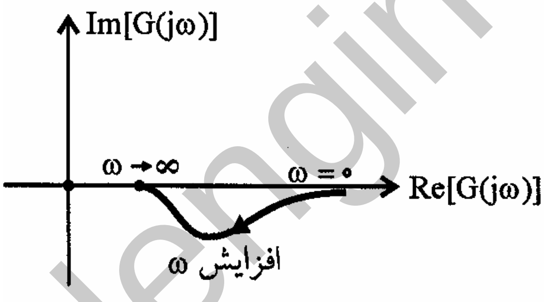
با توجه به این که $GH(0)=10$ می‌باشد،خطای حالت ماندگار این سیستم «نوع صفر» برابر با $e_{ss}=\frac{1}{1+K_p}=\frac{1}{1+GH(0)}=\frac{1}{11}$ خواهد بود. لذا گزینه (۲) صحیح است.

یادآوری: (۱) باز هم به تناظِر بین دو مفهوم «حالت ماندگار» و «رفتار فرکانس پایین سیستم» توجه کنید.

(۲) با توجه به صورت سئوال، فرض ضمنیِ وجود خطایِ محدودِ حالت ماندگار، به معنای پایداری سیستم حلقه بسته می‌باشد.

(۳) در حالتی که سیستم از نوع «فیدبک واحد» باشد، تعریف اول خطای حالت ماندگار (خروجی مقایسه کننده) و تعریف ددوم خطای حالت ماندگار (اختلاف ورودی و خروجی سیستم) ، هم ارزند. (بنابراین می‌توانستیم بدون استفاده از مفهوم «ضرایب خطا»، مستقیماً از تعریف دوم خطای حالت ماندگار نیز به همین جواب برسیم.)

مثال: دیاگرام قطبی سیستمی در شکل زیر داده شده است. کمترین تعداد قطب‌ها و صفرهای سیستم چیست. چه تعدادی از قطب‌های حلقه بسته با فیدبک منفی واحد در سمت راست قرار دارد؟ (مهندسی برق ۸۴)



۱)یک صفر و یک قطب دارد ـ قطب حلقه بسته ناپایدار ندارد.

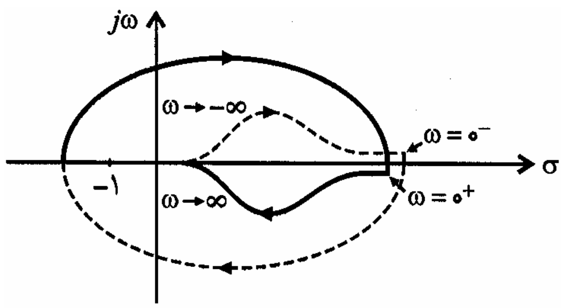
۲) صفر ندارد و چهار قطب دارد ـ یکی از قطب‌های حلقه بسته ناپایدار است.

۳) دو صفر و دو قطب دارد ـ یکی از قطب‌های حلقه بسته ناپایدار است.

۴) صفر ندارد و دو قطب دارد و بهرهٔ فرکانس بالا منفی است ـ حلقه بسته یک قطب ناپایدار دارد.

حل : گزینه (۳) صحیح است.

با توجه به ختم شدنِ منحنی قطبی به نقطه‌ای محدود (و غیر صفر) روی محور حقیقی، سیستم باید سره باشد. بنابراین گزینه‌های ۲ و ۴ نمی‌توانند صحیح باشند. برای تشخیص تعداد قطب‌های حلقه بستهٔ ناپایدار، ابتدا باید نمودار قطبی را تکمیل کنیم:



توجه کنید برای این که منحنی قطبی از نقطه‌ای دور مجانب با یک خط افقی شروع شود،باید سیستم «نوعِ زوج» باشد. لذا گزینهٔ ۱ نمی‌تواند صحیح باشد و فقط گزینهٔ ۳ باقی می‌ماند. با توجه به این گزینه، سیستم «نوع دو» می‌باشد، و $\omega=0^-$ ، توسط یک دورانِ ساعتگرد 2×180 درجه‌ای به $\omega=0^+$ متصل می‌گردد.

با توجه به منحنی قطبی $N=+1$ می‌باشد و در نتیجه در مورد قطب‌های حلقه بسته می‌توانیم بنویسیم:

$$Z=N+P=1+0=1$$

لذا گزینه (۳) صحیح است.

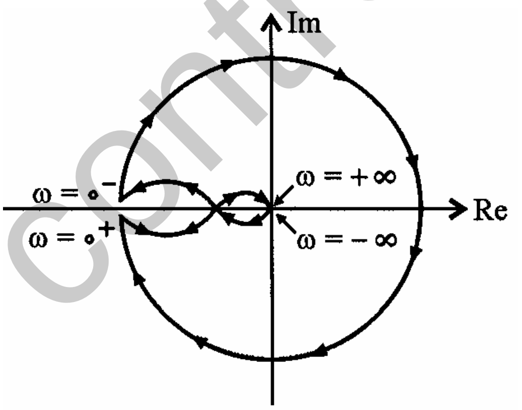
☜ **نکات :**

۱)منحنی قطبی ترسیم شده در این سئوال، می‌تواند مربوط به تابع تبدیل حلقهٔ سیستم $GH(s)=\dfrac{(s-1)(s+10)}{s^2}$ باشد. (صفرِ سمت راست نزدیکتر از صفرِسمت چپ نسبت به مبدأ).

۲) نرم افزار MATLAB هنگام ترسیم نمودار قطبی سیستم‌هایی که در مبدأ دارای قطب هستند، با الگوریتمی متفاوت کار می‌کند و در نتیجه نمودار MATLAB و نموداری که به روش دستی ترسیم می‌شود، اندکی متفاوتند.

☜ **نکته :** اگر نمودار قطبی با نسبت تجانس a بزرگ (کوچک) شود، محورهای صفحهٔ GH با نسبت $\dfrac{1}{a}$ بزرگ (کوچک) می‌شوند. $\left(-1\rightarrow-\dfrac{1}{a}\right)$.

مثال: کدام گزینه بیانگر تابع تبدیل حلقه باز برای دیاگرام نایکوئیست داده شده است؟ **(مهندسی برق ۸۷)**



۱) $\dfrac{(s+1)}{s^3(s+10)}$

۲) $\dfrac{1}{s(s+10)(s+100)}$

۳) $\dfrac{1}{s^2(s+10)(s+100)}$

۴) $\dfrac{(s+1)}{s^2(s+10)(s+100)}$

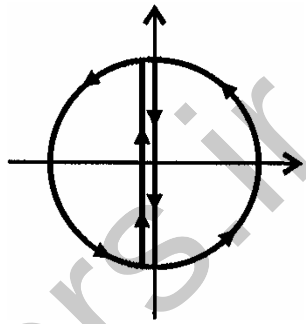
حل : گزینه (۴) صحیح است.

با توجه به این که منحنی قطبی سیستم در $\omega=0^+$ از نقطه‌ای دور و مجانب بایک خط افقی آغاز شده، نتیجه می‌گیریم سیستم از «نوع زوج» است. (و لذا گزینه‌های ۱ و ۲ حذف می‌شوند).

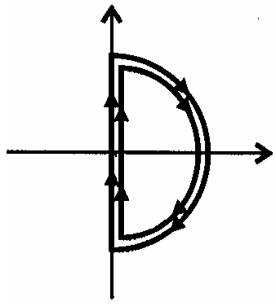
از طرفی از آنجایی که در $\omega \to \infty$ ، منحنی قطبی با زاویه -270° وارد مبدأ شده، بنابراین اختلاف درجهٔ صورت و مخرج تابع تبدیل باید $n-m=3$ باشد. بنابراین فقط گزینهٔ (۴) می‌تواند صحیح باشد و لذا فقط گزینهٔ ۴ صحیح است.

کدام دیاگرام نایکوئیست متناظر با یک مسیر نایکوئیست مناسب برای این سیستم می‌باشد؟ (مهندسی برق ۸۸)

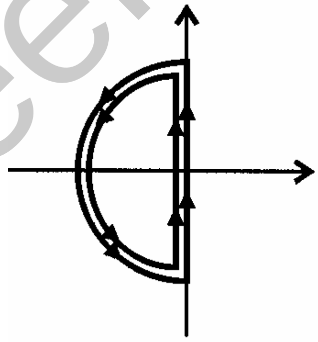
۱)



۲)



۳)



۴) هر دو گزینه ۲ و ۳ می‌تواند صحیح باشد.

حل : گزینه (۴) صحیح است.

معادله مشخصه سیستم مذکور، $\Delta(s)=s^2+Ks+1$ ، معرف یک سیستم همواره پایدار $(k>0)$ می‌باشد. بنابراین طبق معیار پایدرای نایکوئیست $Z=0$ می‌باشد $(Z=N+P)$.

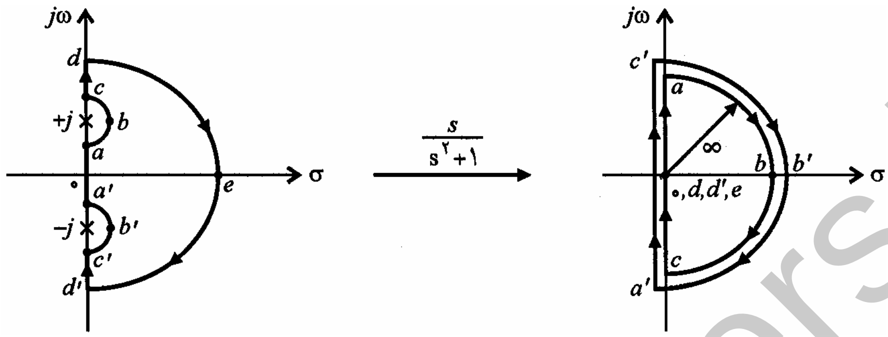
گزینه ۱، سیستمی با $N=-1$ را نشان می‌دهد. با توجه به رابطه $Z=N+P$ ، این سیستم زمانی می‌تواند پایدار شود که $P=1$ باشد. با این حال با توجه به تابع حلقهٔ داده شده، انتخاب چنین مسیری غیرممکن است.

گزینه ۲، سیستمی با $N=0$ را نشان می‌دهد. با توجه به راطه $Z=N+P$ ، این سیستم زمانی می‌تواند شود که $P=0$ باشد. بنابراین ازآن جایی که شرط $P=0$ ، با exclude کردن قطب‌های $s=\pm j$ قابل حصول است، گزینه ۲ می‌تواند صحیح باشد.

گزینه ۳، سیستمی با $N=-2$ را نشان می‌دهد. با توجه به رابطه $Z=N+P$، این سیستم زمانی می‌تواند پایدار شود که $P=2$ باشد.

بنابراین از آن جایی که شرط $P = 2$، با include کردن قطب‌های $s = \pm j$ قابل حصول است، گزینه ۳ هم می‌تواند صحیح باشد.

دیاگرام زیر جزئیات رسم دیاگرام نایکوئیست (در حالت exclude کردن) را به صورت دقیق‌تر به تصویر می‌کشد (برای نگاشتِ دیتورِ حول $s = j$ فرض کنید، $s = j + re^{j\theta}$ می‌باشد و سپس حد $\lim\limits_{r \to 0} GH(s)$ را بیابید.):



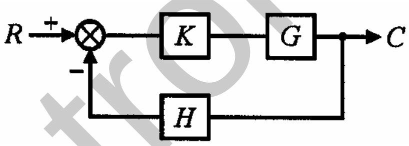
لذا گزینه (۴) صحیح است.

فصل نهم

حد بهره و حد فاز

حد بهره (حاشیه بهره[1])

سیستم پایدار شکل زیر را در نظر بگیرید. همان طور که می‌دانیم با تغییر مقدار K ، مکان ریشه‌های سیستم حلقه بسته تغییر می‌کند (و بنابراین سیستم ممکن است ناپایدار شود). می‌خواهیم مقدار Kای را که سیستم به ازای آن در مرز ناپایداری قرار می‌گیرد، به دست بیاوریم.



$$\Rightarrow \quad \frac{C}{R}=\frac{KG}{۱+KGH}$$

این سیستم زمانی در مرز ناپایداری قرار می‌گیرد که مخرج تابع تبدیل حلقه بسته، $1+KGH$ ، صفر شود:

$$1+KGH(j\omega)=0 \;\Rightarrow\; KGH(j\omega_c)=1\measuredangle 180^\circ$$

بنابراین Kای که به ازای آن حاصلِ $KGH(j\omega_p)$ دارای اندازه 1 و فاز 180° باشد، سیستم را در مرز ناپایداری قرار می‌دهد. بنابراین بهرهٔ سیستم (K) ، دارای یک حد با نام «حد بهره» یا «حاشیه بهره» است که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{K=GM=\frac{1}{|GH(j\omega_C)|} \;\leftrightarrow\; K(dB)=20\log\frac{1}{|GH(j\omega_C)|}}$$

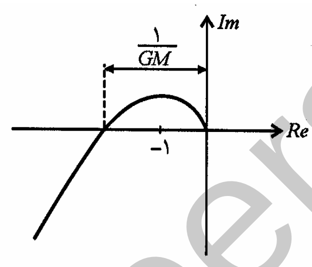
[1] - Gain Margin

فرکانس قطع فاز[۱] (ω_p)

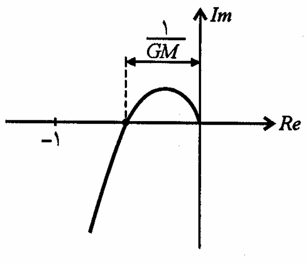
فرکانس خاصی که در آن فاز $GH(j\omega)$ برابر $\left(-180^{\circ}\right)$ می‌شود (توجه کنید K یک عدد ثابت است و تأثیری در فاز GH ندارد).

حد بهره و نمودارهای پاسخ فرکانسی

حد بهره و نمودار نایکوئیست

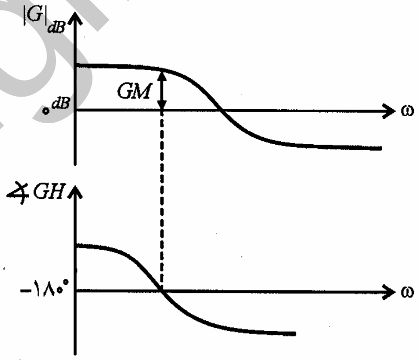


«حاشیه بهرهٔ منفی»

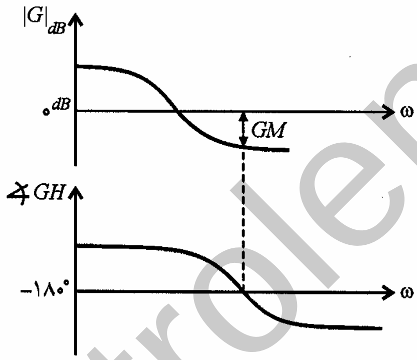


«حاشیهٔ بهرهٔ مثبت»

حد بهره و نمودار بود



«حاشیه بهرهٔ منفی»



«حاشیهٔ بهرهٔ مثبت»

الگوریتم محاسبه حد بهره

۱ـ محاسبهٔ فرکانس قطع فاز با استفاده از رابطه $\measuredangle GH = -180^{\circ}$ یا رابطه $\begin{cases} \operatorname{Im} GH(j\omega) = 0 \\ \operatorname{Re}\{GH(j\omega)\} < 0 \end{cases}$.

۲ـ محاسبهٔ $GM \dfrac{1}{\left|GH(j\omega_p)\right|}$ (و یا $GM^{dB} = 20\log\dfrac{1}{\left|GH(j\omega_p)\right|}$ ، در صورتی که GM بر حسب dB خواسته شده است).

---

[1] ـ کلاً فرکانس قطع را فرکانس Crossover نیز می‌نامند و آن را با ω_C نیز نمایش می‌دهند. این نمادگذاری، هم برای فرکانس قطع فاز، و هم برای فرکانس قطع بهره، به کار می‌رود.

مثال: اگر حد بهره (Gain Margin) در سیستمی با $H(s)=1$ و $G(s)=\frac{K}{s(s+1)(s+10)}$ برابر با 1.1 باشد، خطای ماندگار سیستم به ورودی $(t+1.1)u(t)$ که در آن $u(t)$ پله واحد است، کدام گزینه می‌باشد؟

۱) 0.1　　۲) 0.826　　۳) 0.91　　۴) $\frac{1}{11}$

حل : گزینه (۱) صحیح است.

با توجه به این که سیستم نوع یک می‌باشد، ورودی $1.1u(t)$ را بدون هیچگونه خطایی دنبال می‌کند. بنابراین تنها کافیست خطای ماندگارِ مربوط به ورودیِ $tu(t)$ ، یعنی $e_{ss}=\frac{1}{K_v}$ را بیابیم. برای محاسبهٔ K (و در نتیجه K_v) ، از GM استفاده می‌کنیم.[1]

$$\measuredangle GH(j\omega_p)=-180^\circ \Rightarrow]\left[90^\circ+\tan^{-1}\omega+\tan^{-1}\frac{\omega}{10}\right]=-180^\circ$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\omega+\tan^{-1}\frac{\omega}{10}=90^\circ$$

با تانژانت گرفتن از طرفین تساوی فوق خواهیم داشت:

$$\frac{\omega+\frac{\omega}{10}}{1-\frac{\omega^2}{10}}=\infty \Rightarrow 1-\frac{\omega^2}{10}=0 \Rightarrow \omega_p=\sqrt{10}\left(\frac{rad}{s}\right)$$

$$GM=\left|\frac{1}{GH(j\sqrt{10})}\right|=\left|\frac{-110+j\times 0}{K}\right|=1.1 \Rightarrow K=100$$

$$e_{ss}=\frac{1}{K_\upsilon}=\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} sGH(s)}=\frac{1}{\frac{100}{10}}=0.1$$

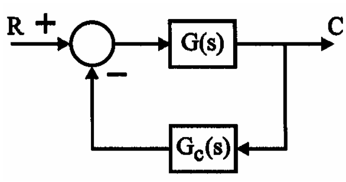
لذا گزینه (۱) صحیح است.

☜ **نکته :** در سوال فوق، برای محاسبهٔ ω_p ، می‌توانستیم ازحل معادلهٔ $\operatorname{Im}\{GH(j\omega)\}=0$ نیز کمک بگیریم (ولی طولانی‌تر می‌شد!)

---

[1] ـ یادآوری : $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\,\tan\beta}$

مثال: **در سیستم کنترل شکل مقابل داریم:**



$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)}$$

$$G_c(s)=\frac{1}{s+10}$$

اگر خطای حالت ماندگار $e(t)$ به ورودی شیب واحد برابر 0.2 باشد، حد بهره (Gain Margin) **سیستم چقدر است؟**

۱) 1.1 ۲) 2.2 ۳) 22 ۴) ∞

حل : گزینه (۲) صحیح می‌باشد.

با توجه به این که سیستم نوع یک می‌باشد، خطای حالت ماندگار به ورودی شیب واحد برابر است با :

$$e_{ss}=\frac{1}{K_\upsilon}=\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} sGH(s)}=\frac{K}{10}=0.2 \;\Rightarrow\; K=50$$

برای یافتن GM ، ابتدا باید فرکانس قطع فاز را بیابیم:

$$\measuredangle GH(j\omega_p)=-180^\circ \;\Rightarrow\; -\left[90^\circ+\tan^{-1}\omega+\tan^{-1}\frac{\omega}{10}\right]=-180^\circ \;\Rightarrow\; \omega_p=\sqrt{10}$$

بنابراین GM برابر خواهد بود با :

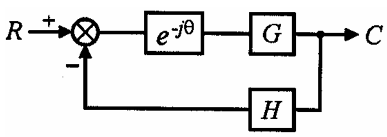
$$GM=\frac{1}{\left|GH(j\omega_p)\right|}=\left|\frac{-110}{50}\right|=2.2$$

و لذا گزینه (۲) صحیح است.

تذکر : گرچه در این سئوال خطا را به صورت دقیق تعریف کرده، اما اگر به جای خروجی مقایسه کننده، خطا را به صورت $e=r-c$ نیز تعریف می‌کردیم، باز هم به همین جواب می‌رسیدیم.

حد فاز (حاشیه فاز[1])

سیستم پایدار زیر مفروض است. می‌خواهیم مقدار تأخیر θای را که سیستم به ازای آن در مرز ناپایداری قرار می‌گیرد، به دست بیاوریم:



$$\Rightarrow \quad \frac{C}{R}=\frac{e^{-j\theta}G}{1+e^{-j\theta}GH}$$

سیستم زمانی در مرز ناپایداری قرار می‌گیرد که مخرج تابع تبدیل حلقه بسته، $1+e^{-j\theta}GH$ ، صفر شود:

$$1+e^{-j\theta}GH=0 \;\Rightarrow\; e^{-j\theta}GH(j\omega_g)=1\measuredangle-180^\circ$$

[1] - Phase Margine

بنابراین θای که به ازای آن حاصلِ $e^{-j\theta}GH\left(j\omega_g\right)$ دارای اندازه 1 و فاز -180° باشد، سیستم را در مرز ناپایداری قرار می‌دهد.

بنابراین تأخیر سیستم (θ) ، دارای یک حد است که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{\theta = PM = 180 + \measuredangle GH\left(j\omega_g\right)}$$

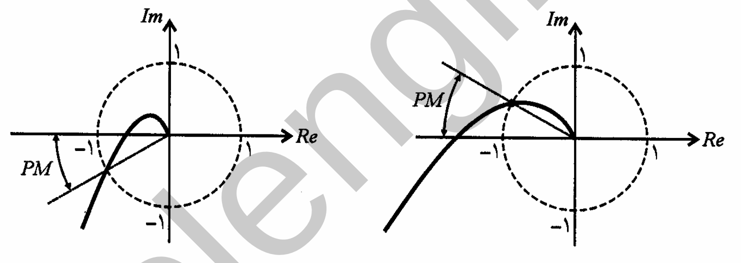
فرکانس قطع بهره $\left(\omega_g\right)$

فرکانس خاصی که درآن فرکانس، اندازه $GH(j\omega)$ برابر با یک (یا $0dB$) می‌شود (توجه کنید چون $\left|e^{j\theta}\right| = 1$ است، جملهٔ نمایی تأثیری در اندازه GH ندارد).

حد فاز و نمودارهای پاسخ فرکانسی

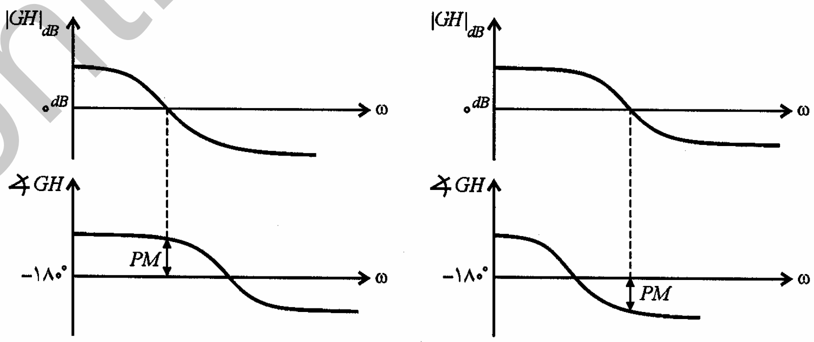
حد فاز و نمودار نایکوئیست

حد فاز و نمودار نایکوئیست



«PM مثبت» «PM منفی»

حد فاز و نمودار بود



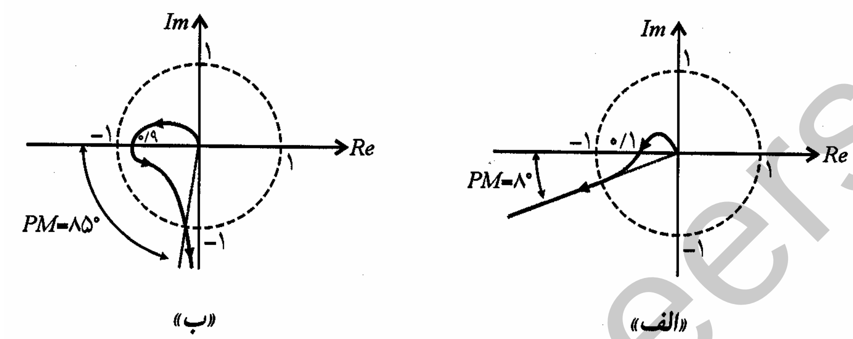
«PM مثبت» «PM منفی»

الگوریتم محاسبهٔ حد فاز

۱ـ محاسبهٔ فرکانس قطع بهره با استفاده از رابطه $|GH|=1$ (یا $|GH|_{dB}=0$)

۲ـ محاسبهٔ $PM=180^\circ+\measuredangle GH(\omega_g)$

مثال: آیا هر قدر GM سیستمی بزرگتر باشد، آن سیستم پایدارتر است؟



«ب» «الف»

با توجه به اشکال بالاف گرچه سیستم «الف» دارای GM بسیار بزرگتری نسبت به سیستم «ب» می‌باشد، اما اگر فاز سیستم «الف» اندک تغییر کند، سیستم ناپایدار می‌شود. این نتیجه مهم را در نکتهٔ زیر خلاصه می‌کنیم.

☜ **نکته :** در سیستم‌های مینیمم فاز، شرط پایداری، مثبت بودنِ هر دو کمیت GM و PM است.

مثال: تابع تبدیل حلقه باز سیستم به صورت $G(s)H(s)=\dfrac{(s+3)e^{-Ts}}{s(s+1)}$ است. برای آنکه سیستم پایدار باشد حداکثر مقدار T چقدر است؟

۱) $\dfrac{\pi}{3}$ ۲) $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$ ۳) $\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$ ۴) هیچکدام

حل : گزینه (۲) صحیح است.

برای پایدار ماندن این سیستم، کافیست PM مثبت باشد. بنابراین ابتدا به سراغ فرکانس قطع بهره می‌رویم:

$$\left|Gh(j\omega_g)\right|=1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{\omega^2+9}{\omega^2+1}}=1 \;\Rightarrow\; \omega_g=\sqrt{3}\left(\frac{rad}{s}\right)$$

بنابراین PM این سیستم برابر است با :

اگر زوایا را برحسب درجه می‌نوشتید،یک ضریب $\frac{180}{\pi}$ می‌گرفت.

$$PM=\pi+\left(ta^{-1}\frac{\omega}{3}-\underset{\uparrow}{T\omega}-\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\omega\right)\Bigg|_{\omega=\omega_c} \;\Rightarrow\; PM=\frac{\pi}{3}-T\sqrt{3}$$

برای پایدار ماندن سیستم، شرط $PM > 0$ را برقرار می‌کنیم:

$$T < \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

بنابراین گزینه (۲) پاسخ این تست می‌باشد.

مثال: تابع تبدیل حلقه باز بایستی سیستمی به صورت $GH(s)=\frac{1}{(s+1)^3}$ است. حد بهره و حد فاز سیستم کدام است؟

۱) $\frac{1}{\sqrt{8}}=$ حد بهره، $135^\circ=$ حد فاز

۲) $\sqrt{8}=$ حد بهره، $135^\circ=$ حد فاز

۳) $8=$ حد بهره ، $180^\circ=$ حد فاز

۴) $\frac{1}{8}=$ حد بهره، $180^\circ=$ حد فاز

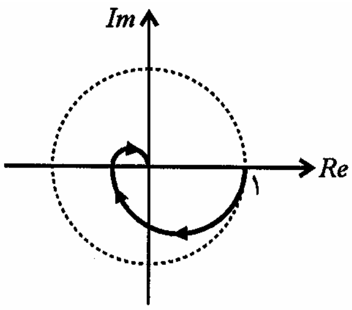
حل : گزینه (۳) صحیح است.

برای محاسبهٔ حد بهره، به سراغ فرکانس قطع فاز می‌رویم:

$$\measuredangle GH(j\omega_p)=-180^\circ \;\Rightarrow\; -3\tan^{-1}\omega=-180^\circ \;\Rightarrow\; \omega_p=\sqrt{3}\left(\frac{rad}{s}\right)$$

$$\left|GH(j\omega_p)\right|=\left.\frac{1}{\left(\omega^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\right|_{\omega=\sqrt{3}}=\frac{1}{8} \;\Rightarrow\; GM=8$$

برای محاسبهٔ حد فاز، با کمی زیرکی متوجه می‌شویم که منحنی نایکوئیست، دایره واحد را در $\omega=0$ قطع می‌کند و بنابراین $PM=180^\circ$ خواهد بود.



مثال: از سه تابع تبدیل داده شده زیر حد فاز کدام یک بیشتر است؟

الف) $G_1(s)=\frac{1}{s(s+1)(s+2)}$

ب) $G_2(s)=\frac{1}{s(s+1)(s+3)}$

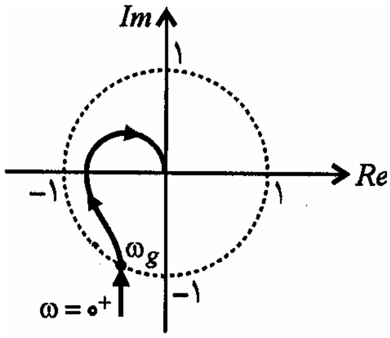
ج) $G_3(s)=\frac{1}{s(s+2)(s+3)}$

۱) ج　　　　۲) ب

۳) الف　　　　۴) حد فاز هر سه تابع یکسان است.

حل : گزینه (۱) صحیح است.

با توجه‌به توابع حلقهٔ داده شده، شکل کلی منحنی نایکوئیست هرسه تابع به صورت زیر می‌باشد:



ازطرفی اگر کمی دقت کنیم، تابع «ج» دارای کمترین گینِ فرکانس ـ پایین است و علاوه برآن، کلیهٔ توابع نیز با شیب $-20\left(\frac{dB}{dec}\right)$ آغاز می‌شوند. بنابراین تابع «ج» زودتر از بقیه توابع به $0(dB)$ می‌رسد و لذا ω_g و در نتیجه PM کمتری خواهد داشت. جدول زیر مقادیر دقیق PM ها را نشان می‌دهد:

	PM(Deg)	$\omega_g\left(\frac{rad}{s}\right)$
الف	53.4	0.45
ب	66.4	0.32
ج	82.1	0.17

لذا گزینه (۱) صحیح است.

مثال: دریک سیستم با فیدبک واحد منفی با $G(s)=\frac{K}{s(s+1)}$ حد فاز برابر 45° است. $(K>0)$ چنانچه به آن سیگنال $\sin\sqrt[4]{2}\,t$ اعمال شود پاسخ آن در حالت ماندگار کدام است؟

۱) $-\sqrt[4]{2}\cos\sqrt[4]{2}\,t$　　　　۲) $\sqrt{2}\sin t\sqrt[4]{2}\,t$

۳) $\sqrt[4]{2}\sin t\left(\sqrt[4]{2}\,t+\frac{\pi}{4}\right)$　　　　۴) $\sqrt[4]{2}\cos\sqrt[4]{2}\,t$

حل : گزینه (۱) صحیح است.

با توجه به فرض $PM=45^\circ$ ، فرکانس گذر بهره برابر خواهد بود با :

$$180^\circ+\left(-90^\circ-\tan^{-1}\omega_g\right)=45^\circ \;\Rightarrow\; \tan^{-1}\omega_g=45^\circ \;\Rightarrow\; \omega_g=1\left(\frac{rad}{s}\right)$$

بنابراین ، مقدار K،با استفاده از تعریف ω_g به دست می‌آید:

$$\frac{K}{\omega_g\sqrt{\omega_g^2+1}}=1 \xrightarrow{\omega_g=1} K=\sqrt{2}$$

بنابراین تابع تبدیل حلقه بستهٔ سیستم، برابر خواهد بد با :

$$T(s)=\frac{K}{s(s+1)+K} \;\Rightarrow\; T(j\omega)=\frac{\sqrt{2}}{\left(-\omega^2+\sqrt{2}\right)+j\omega} \;\Rightarrow\; T\left(j\sqrt[4]{2}\right)=-j\sqrt[4]{2}$$

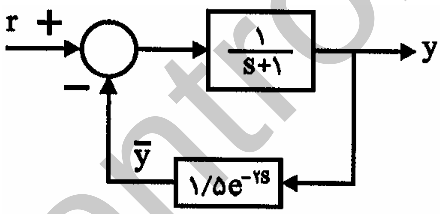
از آنجایی که پاسخ حالت ماندگار به ورودیِ با فرکانسِ $\omega=\sqrt[4]{2}$ خواسته شده، می‌توانیم بنویسیم:

$$y_{ss}(t)=T\left(j\sqrt[4]{2}\right)\times\sin\left(\sqrt[4]{2}\,t\right)=\sqrt[4]{2}\sin\left(\sqrt[4]{2}\,t-90^\circ\right)$$

$$=-\sqrt[4]{2}\cos\left(\sqrt[4]{2}\,t\right)$$

و بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

مثال: حد فاز و حد بهره از ورودی r به خروجی $\overline{y}$ در شکل زیر برابر $PM=3.7^\circ$ و $GM=1.01$ می‌باشد، مقادیر حد فاز و حد بهره از ورودی r به خروجی y چقدر هستند؟



۱) $GM=1.01 \;,\; PM=3.7^\circ$

۲) $GM=1.52 \;,\; PM=3.7^\circ$

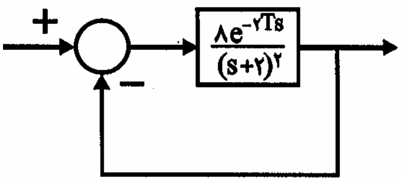
۳) $GM=1.52 \;,\; PM=3.81^\circ$

۴) حدود خواسته شده از حدود داده قابل حصول نیست.

حل : گزینه (۱) صحیح است.

با توجه به این که تابع تبدیل حلقه باز در هر دو حالت $\frac{y}{r}$, $\frac{\overline{y}}{r}$ یکسان است، بنابر PM و GM نیز در هر دو حالت یکسان خواهند بود. و لذا گزینه (۱) صحیح است.

مثال: به ازای چه مقادیری از T تابع انتقال حلقه بسته زیر ناپایدار است؟



۱) $T > \dfrac{\pi}{16}$

۲) $T > \dfrac{\pi}{8}$

۳) به ازای تمام مقادیر T

۴) پایداری حلقه بسته ربطی به T ندارد.

حل : گزینه (۲) صحیح است.

ابتدابه محاسبهٔ ω_g می‌پردازیم:

$$\frac{8}{\omega_s^2+1}=1 \;\Rightarrow\; \omega_g = 2\left(\frac{rad}{s}\right)$$

شرط ناپایدار شدن این سیستم، منفی شدنِ PM است (توجه کنید که GM همواره بیش از یک است و لذا نیازی به بررسی شرط GM نیست.):

$$PM = \pi + \left(-2T\omega - 2\tan^{-1}\frac{\omega}{2}\right)\Bigg|_{\omega=2} = \frac{\pi}{2} - 4T \xrightarrow{PM>0} T > \frac{\pi}{8}$$

و بنابراین گزینه (۲) صحیح است.