

مقدمه

1- آشنایی با پدیده های غیر خطی (یاد آوری و تکمیل)

Stranded Costs

2- مبانی ریاضی (مهم)

آشنایی با پدیده های غیر خطی

اهداف:

- 1- مقایسه سیستمهای خطی و غیر خطی
- 2- آشنایی با پدیده های غیر خطی
- 3- آشنایی با برخی مفاهیم و تعاریف در سیستمهای غیر خطی

controlengineers.ir

منظور از کلمه غیرخطی (Nonlinear) در این درس چیست؟

مقدمه

~~نه خطی (Not Linear)~~

نه اجباراً "خطی" (Not Necessary Linear)

Stranded Costs

روشهای تحلیل و طراحی که در این درس آموخته می شوند برای سیستمهای خطی نیز قابل اعمال هستند.

انواع غیر خطیها

از نظر وجودی:

- غیر خطی طبیعی یا ذاتی: نیروی اصطکاک، نیروی گریز از مرکز و ...
این غیر خطیها اغلب اثرات نامطلوب دارند و لازم است را در مقابله با آنها جبران نمود .

- غیر خطی مصنوعی: این غیر خطیها توسط طراحان جهت بهبود رفتار سیستم عمداً به سیستم اضافه می شوند. مانند کنترل کننده های تطبیقی و کنترل بهینه
مانند کنترل Bang-Bang
از نظر خصوصیات ریاضی:

- پیوسته (نرم): قابلیت خطی شدن را دارند.

- ناپیوسته (سخت): قابلیت خطی شدن را ندارند .

وقتی که یک سیستم حول نقطه کاری کار می کند ممکن است خطی و یا غیر خطی نامیده شود. این بستگی به اندازه های غیر خطی سخت و اثرات آن بر رفتار سیستم دارد.

از نظر رابطه ورودی و خروجی:

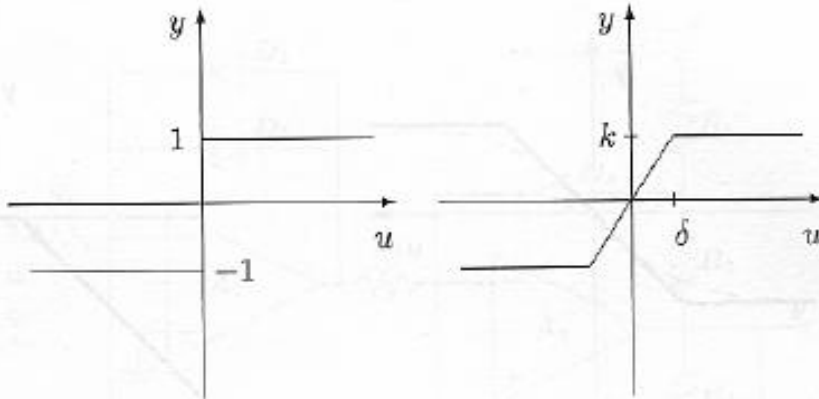
- غیرخطی استاتیک (بدون حافظه): (خروجی در هر لحظه فقط به ورودی در همان لحظه بستگی دارد. با تابعی غیرخطی از ورودی بیان می شود.

$$y = f(u)$$

- غیرخطی دینامیکی (با حافظه): (خروجی در هر لحظه به ورودیهای لحظه های قبل نیز بستگی دارد. با تابعی غیرخطی از ورودی و خروجی و مشتقات آنها بیان می شود. مانند:

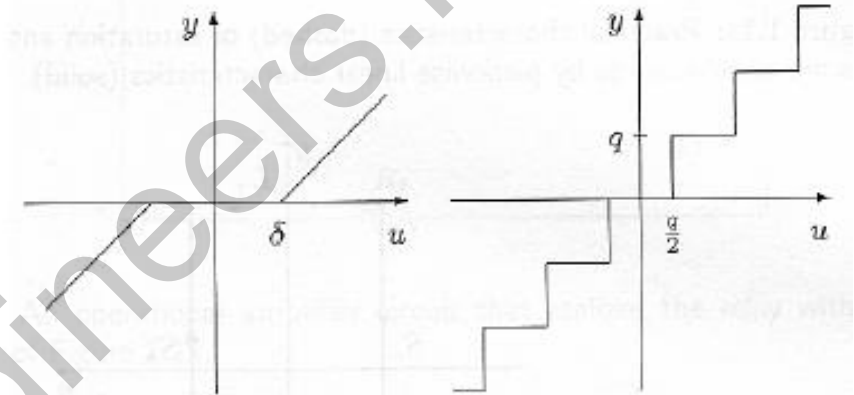
$$f(y^{(n)}, \dots, \dot{y}, y, u^{(m)}, \dots, \dot{u}, u) = 0$$

بعضی از غیر خطیهای استاتیک معمول



(a) Relay

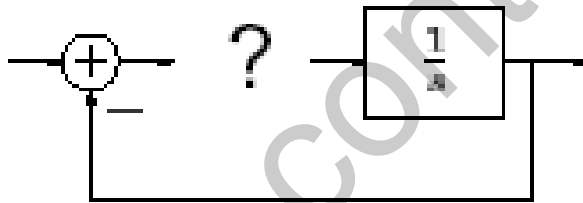
(b) Saturation



(c) Dead zone

(d) Quantization

(a) Sign



Rate Limiter?

انواع نیروهای اصطکاک

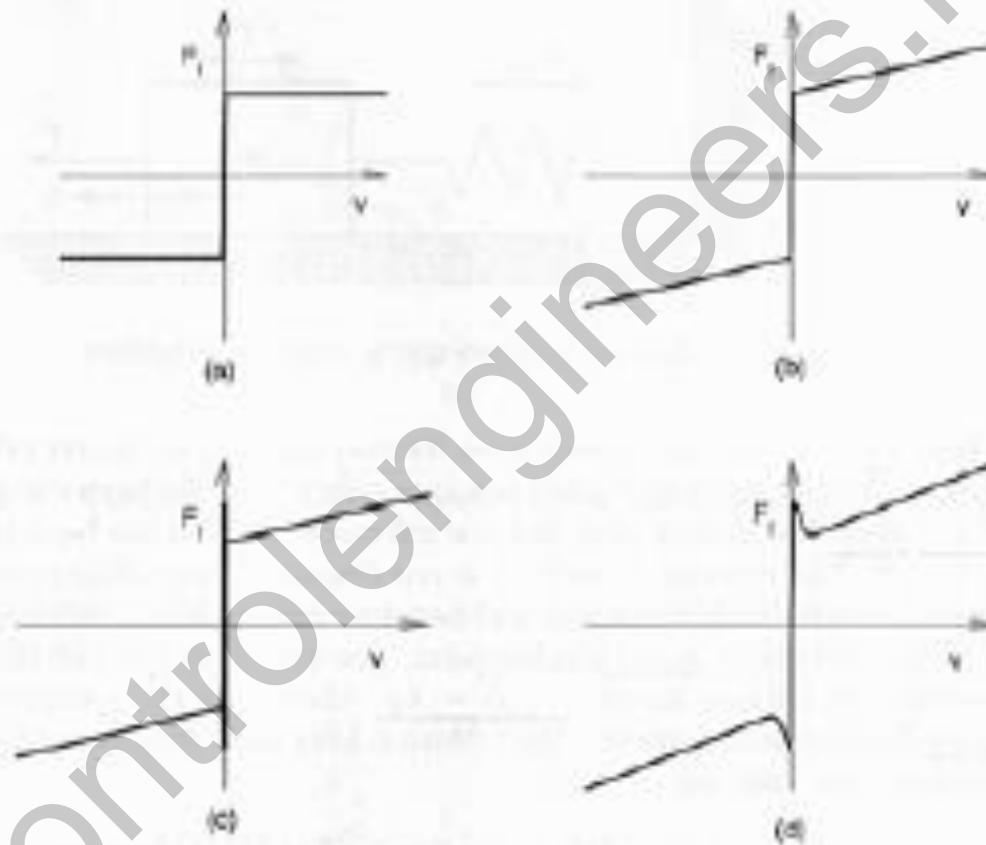
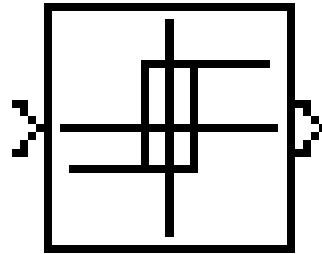
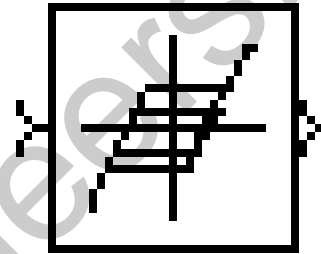


Figure 1.6: Examples of friction models. (a) Coulomb friction; (b) Coulomb plus linear viscous friction; (c) static, Coulomb, and linear viscous friction; (d) static, Coulomb, and linear viscous friction—Stribeck effect.

بعضی از غیرخطیهای دینامیکی معمول



Relay



Backlash

Hysteresis

controlengineers.ir

روشهای توصیف سیستمهای غیرخطی دینامیکی:

زمان پیوسته

State-Space Models

State x , input u , output y

General:	$f(x, u, y, \dot{x}, \dot{u}, \dot{y}, \dots) = 0$
Explicit:	$\dot{x} = f(x, u), \quad y = h(x)$
Affine in u :	$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad y = h(x)$
Linear:	$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$

$$X_{k+1} = f_k(X_k, U_k) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{زمان گسسته:}$$

$$X \in R^n \quad U \in R^m$$

$$f : R^n \times R^m \times R^+ \rightarrow R^n$$

$$f : R^n \times R^m \times I \rightarrow R^n$$

بحث را روی سیستمهای پیوسته متمرکز

می کنیم در حالی که می دانیم برای

سیستمهای گسسته نیز برقرارند.

دو مسئله تحلیل (آنالیز و طراحی) (سنتز):

Problem

Modeling

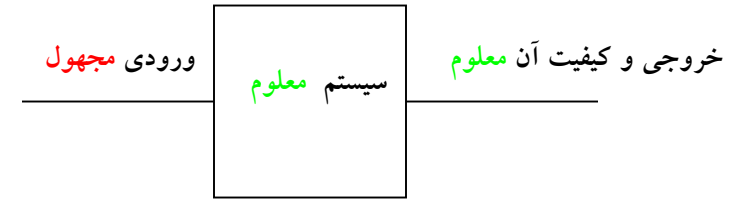
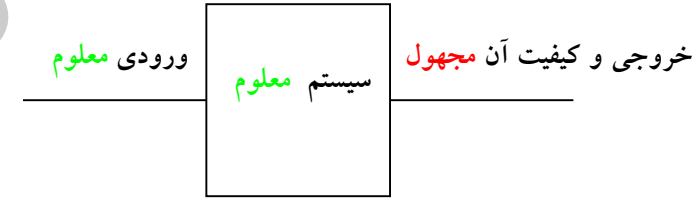
Analysis

Design
(Control)

- **Mathematics, Statistics:**
 - Differential Equations, Linear Algebra, Probability, Stochastic Processes
- **Physics, Chemistry:**
 - Electronics, Electrical Circuits, Electromagnetics, Dynamics, Thermodynamics, Heat Transfer
- **Linear v.s. Nonlinear**

- **Stability**
- **Performance**
- **Robustness**

- **Hardware vs Software**
- **Optimization vs Control**
 - Optimal Control, Robust Control, Adaptive Control, Nonlinear Control



طبقه بندی سیستمها از نظر ورودی

$$\dot{X} = f(t, X, U) \quad \text{Forced System}$$

$$\dot{X} = f(t, X) \quad \text{Unforced System}$$

طبقه بندی سیستمها از نظر وابستگی به زمان

$$\dot{X} = f(t, X, U) \quad \text{nonautonomous}$$

$$\dot{X} = f(X, U) \quad \text{autonomous}$$

در صورتی که تابع f بطور واضح به زمان بستگی داشته باشد سیستم را nonautonomous می نامند وگرنه autonomous نامیده می شود.

چگونه می توان این سیستمهای بالا را به هم تبدیل نمود؟

نقطه تعادل (نقطه کار):

Equilibria

Definition: A point (x^*, u^*, y^*) is an equilibrium, if a solution starting in (x^*, u^*, y^*) stays there forever.

equilibrium point- stationary point – critical point- singular point

Corresponds to putting all derivatives to zero:

General: $f(x^*, u^*, y^*, 0, 0, \dots) = 0$

Explicit: $0 = f(x^*, u^*), \quad y^* = h(x^*)$

Affine in u : $0 = f(x^*) + g(x^*)u^*, \quad y^* = h(x^*)$

Linear: $0 = Ax^* + Bu^*, \quad y^* = Cx^*$

Often the equilibrium is defined only through the state x^*

نقطه X_0 از فضای حالت را نقطه تعادل سیستم $\dot{X} = f(t, X)$

می نامند اگر برای هر $t \geq t_0$, $\dot{X}_0 = f(t, X_0) = 0$

باشد

آیا نقطه تعادل می تواند تابعی از زمان باشد؟

Examples of Nonlinear Models

- **Examples:**
 - Pendulum Equation
 - Tunnel-Diode Circuit
 - Mass-Spring System
 - Negative-Resistance Oscillator
 - Artificial Neural Network

Pendulum - 1

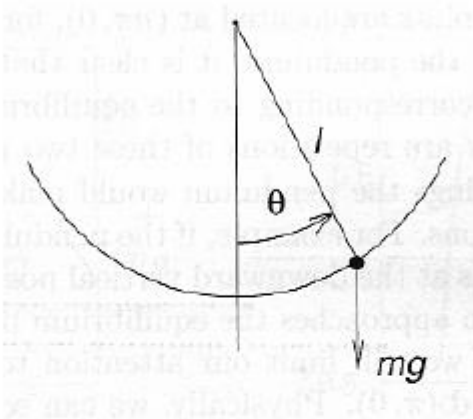


Figure 1.1: Pendulum.

Using Newton's Second Law,
Write the equation of motion
in the tangential direction:

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta - kl\dot{\theta}$$

State model (let $x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}$):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2 \end{aligned}$$

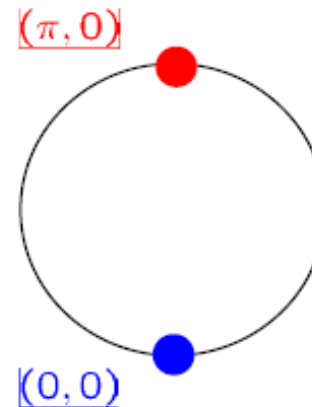
Pendulum - 2

Equilibrium points (let $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$):

$$\begin{aligned} 0 &= x_2 \\ 0 &= -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2 \end{aligned}$$

Equilibrium points are $(n\pi, 0), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$,
or, physically, $(0, 0)$ and $(\pi, 0)$.

Question? Which one is stable or unstable?



Tunnel-Diode Circuit - 1

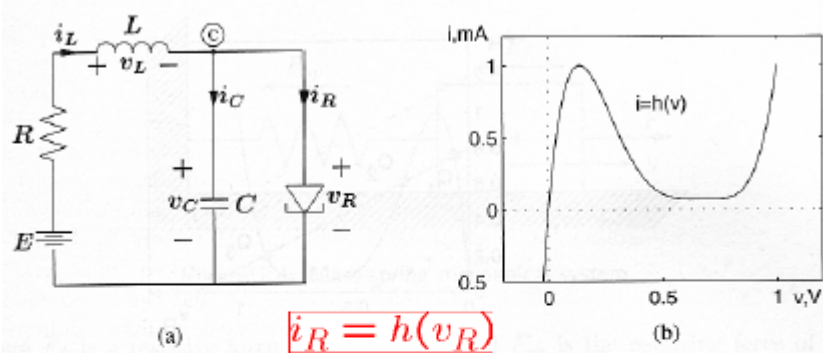


Figure 1.2: (a) Tunnel-diode circuit; (b) Tunnel-diode v_R - i_R characteristic.

Kirchhoff's current/voltage law:

$$\begin{aligned} i_C + i_R - i_L &= 0 \quad (\text{KCL}) \\ v_C - E + Ri_L + v_L &= 0 \quad (\text{KVL}) \end{aligned}$$

State model:

- state: $x_1 = v_C, x_2 = i_L$, and input: $u = E$,
- $i_C = C \frac{dv_C}{dt}, v_L = L \frac{di_L}{dt}$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{1}{C}[-h(x_1) + x_2] \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{L}[-x_1 - Rx_2 + u] \end{aligned}$$

Tunnel-Diode Circuit - 2

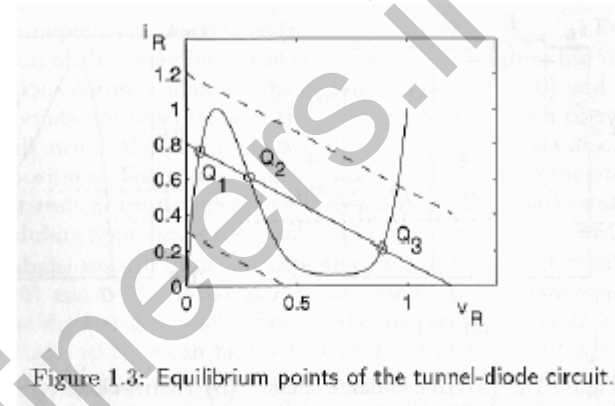


Figure 1.3: Equilibrium points of the tunnel-diode circuit.

Equilibrium points:

$$\begin{aligned} 0 &= -h(x_1) + x_2 \\ 0 &= -x_1 - Rx_2 + u \end{aligned}$$

That is, the roots of:

$$h(x_1) = \frac{E}{R} - \frac{1}{R}x_1$$

Mass-Spring System - 1

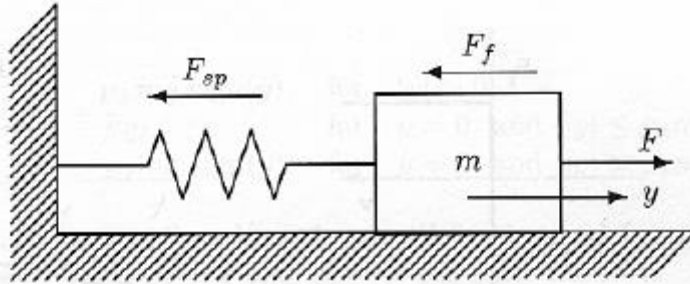


Figure 1.4: Mass-spring mechanical system.

Newton's Law of motion:

$$m\ddot{y} + F_f + F_{sp} = F$$

F_f due to friction:

$$\begin{aligned}
 \text{Static} &= \text{limit to } \pm \mu_s mg \\
 \text{Coulomb} &= \begin{cases} -\mu_k mg, & \text{for } v < 0 \\ \mu_k mg, & \text{for } v > 0 \end{cases} \\
 \text{Viscous} &= h(v) \approx cv
 \end{aligned}$$

Mass-Spring System - 2

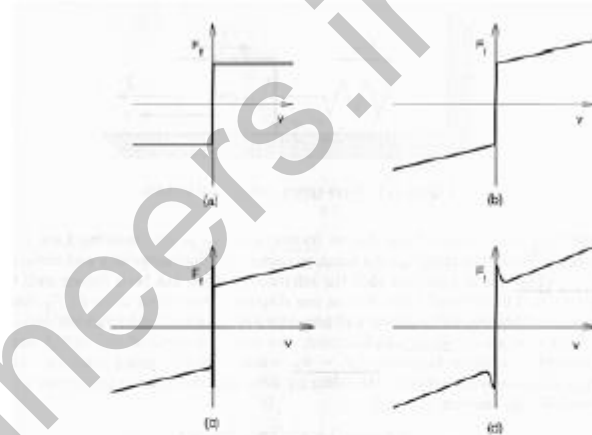


Figure 1.5: Examples of friction models. (a) Coulomb friction; (b) Coulomb plus linear viscous friction; (c) static, Coulomb, and linear viscous friction; (d) static, Coulomb, and linear viscous friction—Stribeck effect.

F_{sp} due to the spring ($= g(y)$):

$$\begin{aligned}
 g(y) &= ky, \text{ (small } y) \\
 &= k(1 - a^2 y^2)y, |ay| < 1, \\
 &\quad \text{(softening spring)} \\
 &= k(1 + a^2 y^2)y, \\
 &\quad \text{(hardening spring)}
 \end{aligned}$$

Mass-Spring System - 3

Linear spring, static friction, Coulumb friction,
 linear viscous friction, $F = 0$:

$$m\ddot{y} + ky + c\dot{y} + \eta(y, \dot{y}) = 0$$

where:

$$\eta(y, \dot{y}) = \begin{cases} \mu_k mg \operatorname{sign}(\dot{y}), & \text{for } |\dot{y}| > 0 \\ -ky, & \text{for } \dot{y} = 0 \text{ and } |y| \leq \mu_s mg/k \\ -\mu_s mg \operatorname{sign}(y), & \text{for } \dot{y} = 0 \text{ and } |y| > \mu_s mg/k \end{cases}$$

State model (let $x_1 = y, x_2 = \dot{y}$):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 - \frac{1}{m}\eta(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Remark:

1. An equilibrium set, rather than points;
2. A discontinuous function of the state.

Negative-Resistance Oscillator - 1

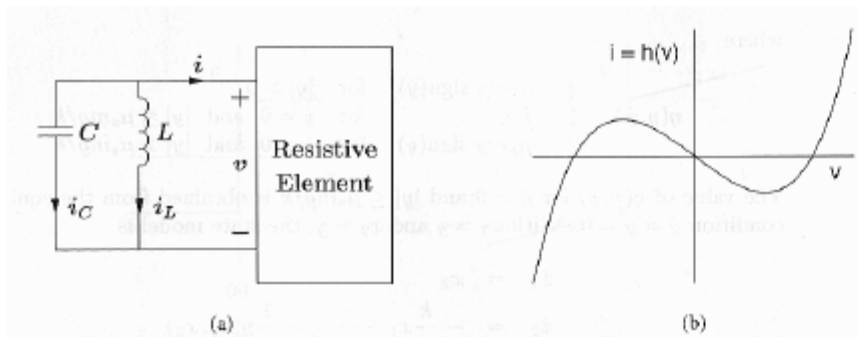


Figure 1.6: (a) Basic oscillator circuit; (b) Typical driving-point characteristic.

Kirchhoff's current law:

$$i_C + i_L + i = 0 \text{ or}$$

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(s) ds + h(v) = 0$$

(dt) and ($\times L$):

$$CL \frac{d^2v}{dt^2} + v + Lh'(v) \frac{dv}{dt} = 0$$

$$\begin{aligned}
 h(0) &= 0 \\
 h'(0) &< 0 \\
 h(v) &\rightarrow \infty \text{ as } v \rightarrow \infty \\
 h(v) &\rightarrow -\infty \text{ as } v \rightarrow -\infty
 \end{aligned}$$

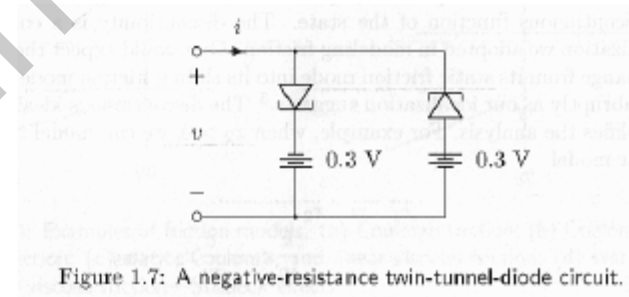


Figure 1.7: A negative-resistance twin-tunnel-diode circuit.

Negative-Resistance Oscillator - 2

Let $\tau = t/\sqrt{CL}$, $\epsilon = \sqrt{L/C}$:

$$\ddot{v} + \epsilon h'(v)\dot{v} + v = 0$$

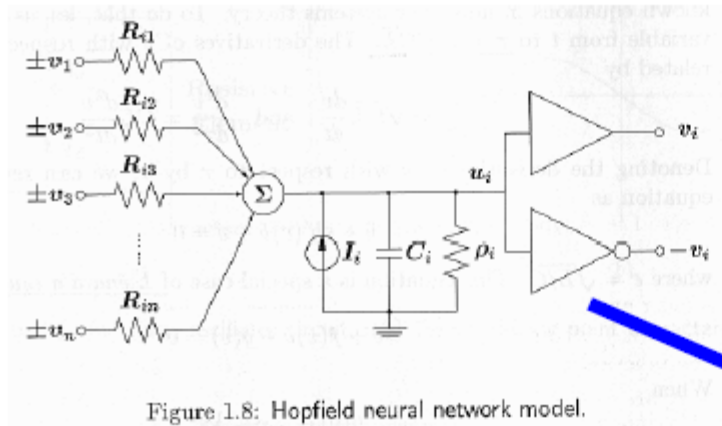
The Lienard's equation:

$$\ddot{v} + f(v)\dot{v} + g(v) = 0$$

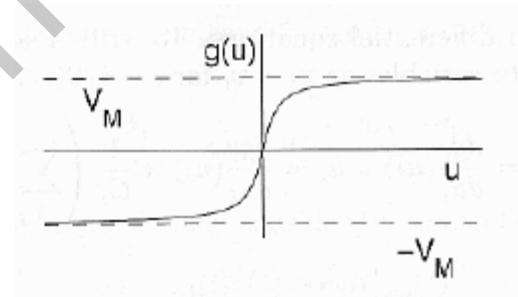
The Van der Pol equation:

$$\ddot{v} - \epsilon(1 - v^2)\dot{v} + v = 0$$

Artificial Neural Network (ANN) - 1



$$v_i = g_i(u_i)$$



$g_i(\cdot)$: a sigmoid function:

$$g_i(u_i) = \frac{2V_M}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{\lambda \pi u_i}{2V_M}\right), \lambda > 0$$

$$g_i(u_i) = V_M \frac{e^{\lambda u_i} - e^{-\lambda u_i}}{e^{\lambda u_i} + e^{-\lambda u_i}} = V_M \tanh(\lambda u_i), \lambda > 0$$

Artificial Neural Network (ANN) - 2

Kirchhoff's current law:

$$\begin{aligned}
 C_i \frac{du_i}{dt} &= \sum_j \frac{1}{R_{ij}} (\pm v_j - u_i) - \frac{1}{\rho} u_i + I_i \\
 &= \sum_j T_{ij} v_j - \frac{1}{R_i} u_i + I_i
 \end{aligned}$$

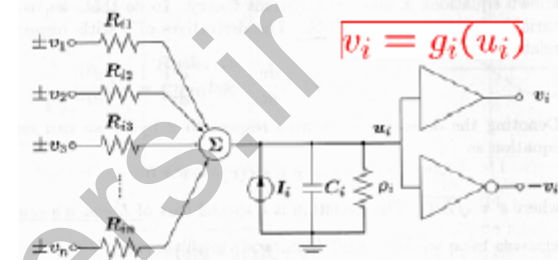


Figure 1.8: Hopfield neural network model.

State model (let $x_i = v_i, i = 1, 2, \dots, n$):

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_i &= \frac{dg_i}{du_i}(u_i) \times \dot{u}_i \\
 &= \frac{dg_i}{du_i}(u_i) \times \frac{1}{C_i} \left[\sum_j T_{ij} x_j - \frac{1}{R_i} u_i + I_i \right]
 \end{aligned}$$

Let $h_i(x_i) = \frac{dg_i}{du_i}(u_i)|_{u_i=g_i^{-1}(x_i)}$,
 and $h_i(x_i) > 0, \forall x_i \in (-V_M, V_M)$

Equilibrium points

$$0 = \sum_j T_{ij} x_j - \frac{1}{R_i} g^{-1}(x_i) + I_i$$

برای اینکه سیستم $\dot{X} = f(t, X)$ یک سیستم فیزیکی را بیان کند چه شرایطی باید داشته باشد؟

- 1- معادله حداقل یک جواب داشته باشد. شرط وجود جواب ()
- 2- معادله به ازای مقادیر به اندازه کافی کوچک t دقیقاً "دارای یک جواب باشد). شرط وجود جواب منحصر بفرد محلی ()
- 3- معادله به ازای هر t در بازه $(0, \infty)$ دقیقاً دارای یک جواب باشد .
(شرط وجود جواب منحصر بفرد همه جایی (global)
- 4- معادله به ازای هر t در بازه $(0, \infty)$ دقیقاً دارای یک جواب باشد و جواب آن بطور پیوسته به شرایط اولیه X_0 بستگی داشته باشد). شرط مناسب بودن ()

شرایط از 1الی 4قویتر می شوند و بطور ایده ال باید آرزو کرد که سیستم تحت بررسی در شرط 4صدق کند. بدون قید روی تابع f هیچکدام از شرایط بالا قابل ارضا نخواهد بود.

مثال: $\dot{X} = -\text{sign}(X) \quad \forall t \geq 0, X(0) = 0$

هیچ تابع مشتق پذیری وجود ندارد که در معادله بالا صدق کند پس شرط 1 برقرار نیست.

$$\dot{X} = \frac{1}{2X} \quad \forall t \geq 0, X(0) = 0$$

$$X(t) = \pm\sqrt{t}$$

Stranded Costs

شرط 1 برقرار ولی شرط 2 برقرار نیست.

$$\dot{X} = 1 + X^2 \quad \forall t \geq 0, X(0) = 0$$

$$X(t) = \tan(t)$$

شرط 1 و 2 برقرار ولی شرط 3 برقرار نیست.

Example: The differential equation

$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = x_0$$

has solution

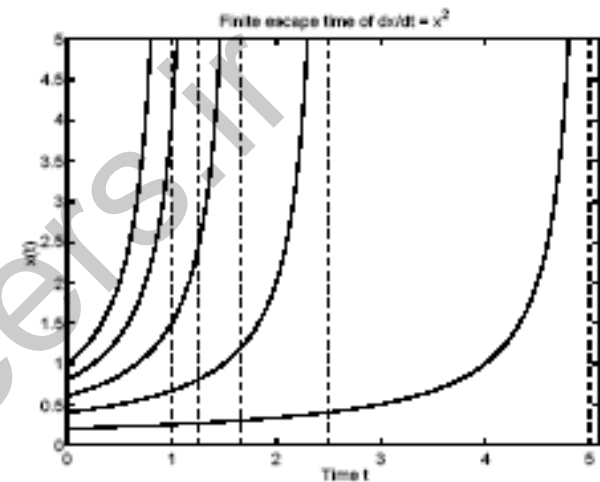
$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}, \quad 0 \leq t < \frac{1}{x_0}$$

Solution not defined for

$$t_f = \frac{1}{x_0}$$

Solution interval depends on initial condition!

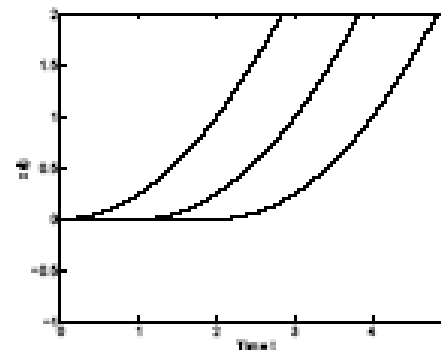
Simulation for various initial conditions x_0



Uniqueness Problems

Example: $\dot{x} = \sqrt{x}, x(0) = 0$, has many solutions:

$$x(t) = \begin{cases} (t - C)^2/4 & t > C \\ 0 & t \leq C \end{cases}$$



Physical Interpretation

Consider the reverse example, i.e., the water tank lab process with

$$\dot{x} = -\sqrt{x}, \quad x(T) = 0$$

where x is the water level. It is then impossible to know at what time $t < T$ the level was $x(t) = x_0 > 0$.

Stranded Costs

پس شرایط تابع f چیست؟

جواب در قسمت مقدمات ریاضی خواهد آمد .

خصوصیات و رفتار سیستمهای خطی 1

Linear Systems

Definition: Let M be a signal space. The system $S : M \rightarrow M$ is linear if for all $u, v \in M$ and $\alpha \in \mathbb{R}$

$$S(\alpha u) = \alpha S(u) \quad \text{scaling}$$

$$S(u + v) = S(u) + S(v) \quad \text{superposition}$$

Example: Linear time-invariant systems

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad x(0) = 0$$

$$y(t) = g(t) \star u(t)$$

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

خصوصیات و رفتار سیستمهای خطی 2

- دارای پاسخ بسته هستند و اگر پاسخ سیستم خطی غیر متغیر با زمان برای یک ورودی غیر صفر معلوم باشد پاسخ برای هر ورودی دیگر قابل محاسبه است.

- ابزار ریاضی فراوانی برای تحلیل و طراحی آنها (غیر متغیر وجود دارد و روشهای کلاسیکی برای طراحی کنترل کننده ها خطی (با زمان ...تبدیل لاپلاس، فوریه، مکان هندسی ریشه ها و) ارائه شده است

- ریاضیات لازم برای تحلیل و طراحی کنترل کننده های خطی نسبتا ساده است.

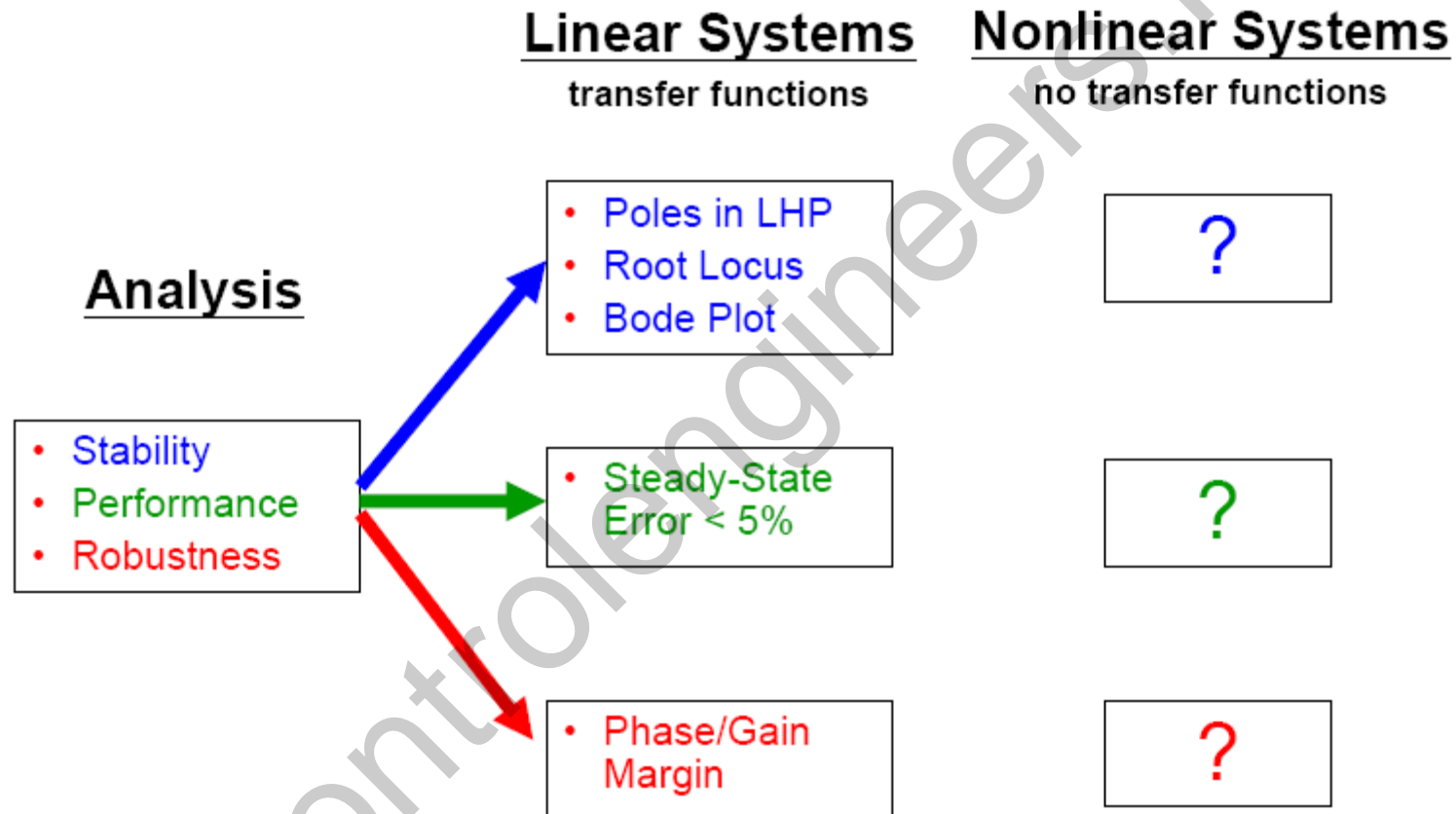
- در صورتی که $\det(A) \neq 0$ باشد فقط دارای یک نقطه تعادل هستند.

$(\det(A)=0)$ ؟)

خصوصیات و رفتار سیستمهای خطی 3

- نقطه تعادل پایدار است اگر و فقط اگر تمام مقادیر مشخصه ماتریس A اکیدا سمت چپ قرار داشته باشد.
- پایداری مجانبی محلی معادل پایداری مجانبی همه جایی است و پایداری ورودی محدود و خروجی محدود را نتیجه می دهد. (؟)
- پاسخ گذرای سیستم ترکیبی از مودهای سیستم است. *Stranded Cuts*
- پاسخ نسبت به ورودیها و شرایط اولیه دارای خاصیت جمع آثار است.
- ورودی سینوسی در سیستم خطی غیر متغیر با زمان و پایدار مجانبی (ورودی خروجی حالت ماندگار با همان فرکانس ورودی است.) (؟)

4 خصوصیات و رفتار سیستمهای خطی



چرا لازم است سیستمهای غیرخطی را مورد مطالعه قرار دهیم؟

- تقریباً همه سیستمهای فیزیکی غیرخطی هستند (تحت شرایطی می توان رفتار آنها را حول نقطه تعادل با مدل خطی بیان نمود و این زمانی است که سیستم خیلی نزدیک به نقطه کار باقی بماند و غیرخطی در نقطه کار مشتق پذیر باشد. به این جهت سیستمهای خطی اهمیت قابل ملاحظه ای در کنترل دارند.)

- دینامیک مدل‌های خطی به اندازه کافی برای توصیف بعضی از پدیده ها غنی نیست (نقطه تعادل چندگانه، سیگل حدی و ...)

Linear Models are not Enough

Example: Positioning of a ball on a beam



Approximate nonlinear model $\ddot{x}(t) = mg \sin \phi(t)$ gives linear model:

$$\ddot{x}(t) = \frac{5g}{7} \phi(t)$$

Can the ball move 0.1 meter in 0.1 seconds from steady state?

Linear model gives

$$x(t) \approx \frac{50}{7} \frac{t^2}{2} \phi_0 \approx 0.04 \phi_0$$

so that

$$\phi_0 \approx \frac{0.1}{0.04} = 2.5 \text{ rad} = 143^\circ$$

Clearly outside linear region!

Must consider nonlinearities such as centripetal force, saturation, friction etc

چرا غیر خطی؟

• می توان سیستمهای کنترل موجود را اصلاح کرد. اگر سیستم از نقطه کار بیشتر از حیثه خطی خارج شود کنترل کننده خطی توانایی بهبود عملکرد سیستم را از دست خواهد داد در حالی که کنترل کننده های غیر خطی در حوزه وسیعتری عملکرد سیستم را تضمین می کند). مثال: نیروی جذب به مرکز و کریولیس در کنترل حرکت روبات متناسب با مجذور سرعت است.)

• اگر غیر خطی در نقطه کار سخت باشد نمی توان از تحلیل خطی استفاده نمود). **مثال؟**)

Stranded Cuts

• **جهت مقابله با عدم قطعیت در مدل.** در طراحی کنترل کننده های خطی معمولاً ضروری است فرض شود که پارامترهای مدل به اندازه کافی معلوم است. سیستم کنترل طراحی شده بر اساس مقادیر غیر دقیق پارامتر منجر به ناپایداری و یا عملکرد نامطلوب می شود و این در حالی است که در خیلی از مسایل کنترلی عدم قطعیت در پارامتر وجود دارد. این عدم قطعیتها یا بخاطر متغیر با زمان بودن است) مانند تغییرات دمای هوا و اثر آن بر پرواز هواپیما (و یا بخاطر تغییر ناگهانی در پارامتر) مانند جرم قطعه جدیدی که روبات برمی دارد - (ممکن است با اضافه نمودن عمدی عناصر غیر خطی، عدم قطعیتها را قابل تحمل نمود) کنترل تطبیقی و روبات غیر خطی)

چرا غیر خطی؟

• **سادگی در طراحی**. ممکن است یک کنترل کننده غیر خطی خیلی ساده تر از کنترل کننده خطی باشد چون عمیقا در طبیعت فیزیکی سیستم ریشه دارد.

• **هزینه کم کنترل کننده های غیر خطی - بهینه بودن آن** (در کنترل خطی سنسورها و ابزار دیگر در مسیر فیدبک باید خیلی دقیق باشند لذا $S_{\alpha}^M = \frac{\partial \ln M}{\partial \ln \alpha}$ گران تمام میشوند در حالی که در کنترل غیر خطی چنین دقتی لازم نیست و می توان از عناصر ارزان استفاده نمود.)

تحلیل در مقایسه با شبیه سازی

- کامپیوترها روز به روز برای شبیه سازی سیستمهای پیچیده قدرتمند می شوند.

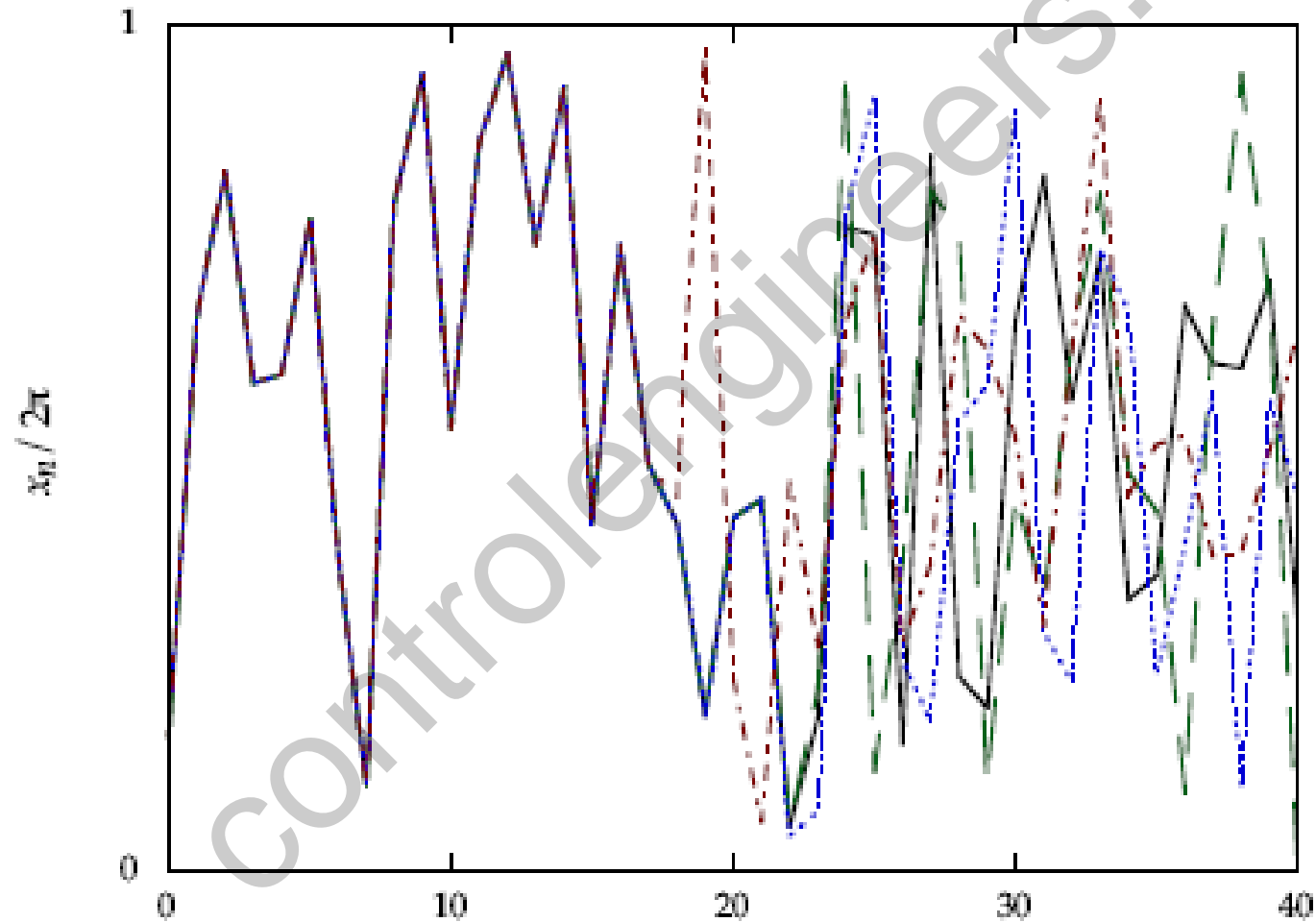
- شبیه سازی همراه با بینش کافی درک مفیدی از رفتار سیستم را به دست می دهد.

اما:

- نمی توان در بررسی خواصی مانند **پایداری و کنترل پذیری** به شبیه سازی استناد نمود چون حالت های بحرانی گم می شوند.
- روش های تحلیلی ابزاری به دست می دهند که با استفاده از آنها می توان روش معمول اثبات ریاضی را در مورد سیستم های غیرخطی اعمال کنیم.
- با روش های تحلیلی نتایج شگفت آوری به دست می آید که با شبیه سازی قابل رویت نیست .

$$p_{n+1} = p_n + K \sin x_n$$

$$x_{n+1} = x_n + p_{n+1},$$



Numerical iteration of the standard map, illustrating the inherently unpredictable nature of chaotic systems

The same FORTRAN77 code was executed on four modern computers to iterate the standard map for $K = 10$ and the initial condition $(x_0, p_0) = (1, 1)$.

Although nominally the same (64-bit, or around 15-digit) “double precision” numerical representation was used on the different computers, **slight differences in the numerical rounding** methods among the processors are rapidly amplified as the iterations progress. Hence, the trajectories are identical only for the first few iterations, and they become completely uncorrelated after about 25 iterations. The processors employed here were a Motorola PowerPC 750 (solid line), an Intel Pentium III (dashed line), a MIPS/SGI R10000 (dotted line), and a Cray SV1 processor (dash-dotted line).

بعضی از رفتارها و خواص سیستمهای غیرخطی

- اغلب نمی توان پاسخ بسته سیستمهای غیرخطی را به دست آورد و حتی اگر پاسخ سیستم را برای تعداد زیادی از ورودیها بدانیم نمی توان پاسخ را برای ورودی دیگری از روی آنها به دست آورد (سری مودال).
- تئوری خاصی برای تحلیل همه سیستمهای غیرخطی وجود ندارد.
- ریاضیات لازم برای تحلیل و طراحی چنین سیستمهایی پیچیده است.

بعضی از رفتارها و خواص سیستمهای غیرخطی ((ادامه))

- رفتار سیستم غیرخطی در پاسخ به ورودی کاملا متفاوت با پاسخ سیستم خطی است. مثال: مدل ساده حرکت زیر آب $\dot{v} + |v|v = u$

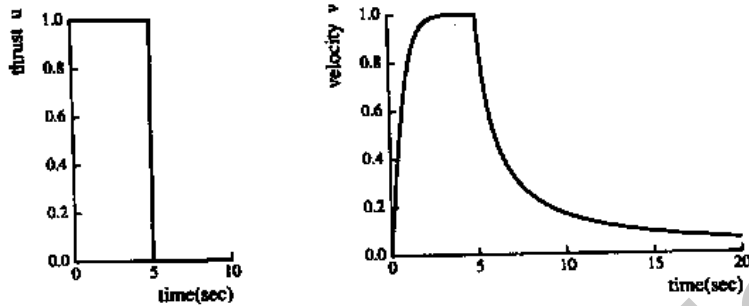


Figure 1.1 : Response of system (1.3) to unit steps

$$u = 1 \Rightarrow 0 + |v_s|v_s = 1 \Rightarrow v_s = 1$$

$$u = 10 \Rightarrow 0 + |v_s|v_s = 10 \Rightarrow v_s = \sqrt{10} \approx 3.2$$

- سرعت پاسخ به پالس مثبت بیشتر از پالس منفی است).؟! (

- ورودی 10 برابر شده ولی خروجی نه (پاسخ به دامنه و نوع ورودی بستگی دارد)

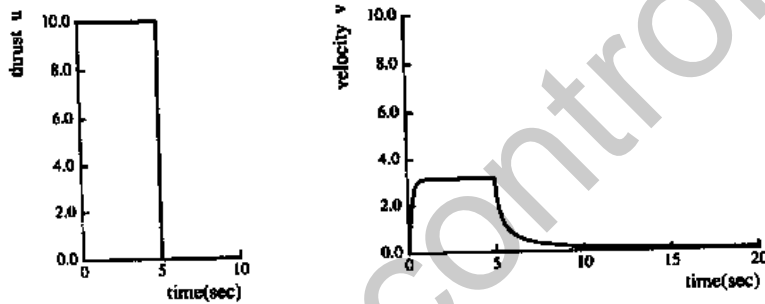


Figure 1.2 : Response of system (1.3) to steps of amplitude 10

بعضی از رفتارها و خواص سیستمهای غیرخطی (ادامه)

• وابستگی دامنه و فرکانس

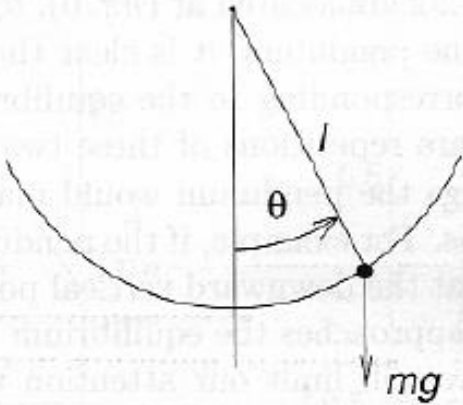


Figure 1.1: Pendulum.

$$\frac{1}{2} mL^2 \dot{\theta}^2 + mgL\{1 - \cos(\theta)\} = mgh_0$$

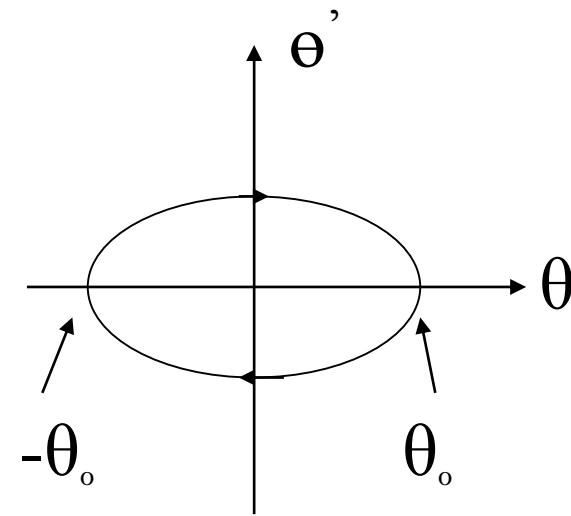
$$m = 1\text{kg}$$

$$L = 1\text{m}$$

Stranded Costs

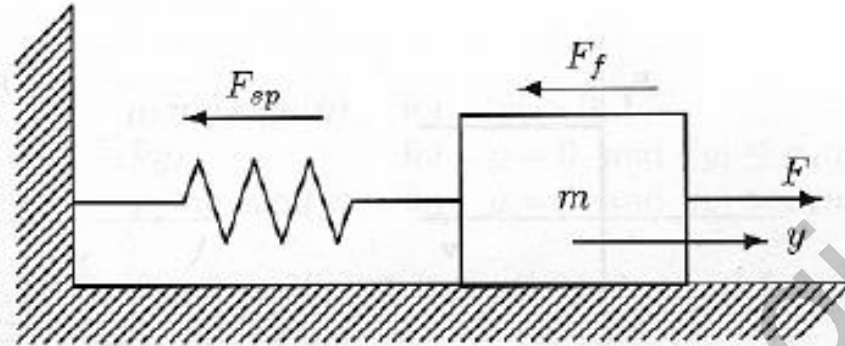
$$T = \sqrt{\frac{2L}{g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \left\{ \frac{h_0}{L} - 1 + \cos(\theta) \right\}^{-\frac{1}{2}} d\theta$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$



بعضی از رفتارها و خواص سیستمهای غیر خطی (ادامه)

- وابستگی دامنه و فرکانس و پاسخ چند مقداره و **jump resonances**



$$f_{sp} = ky + k'y^3$$

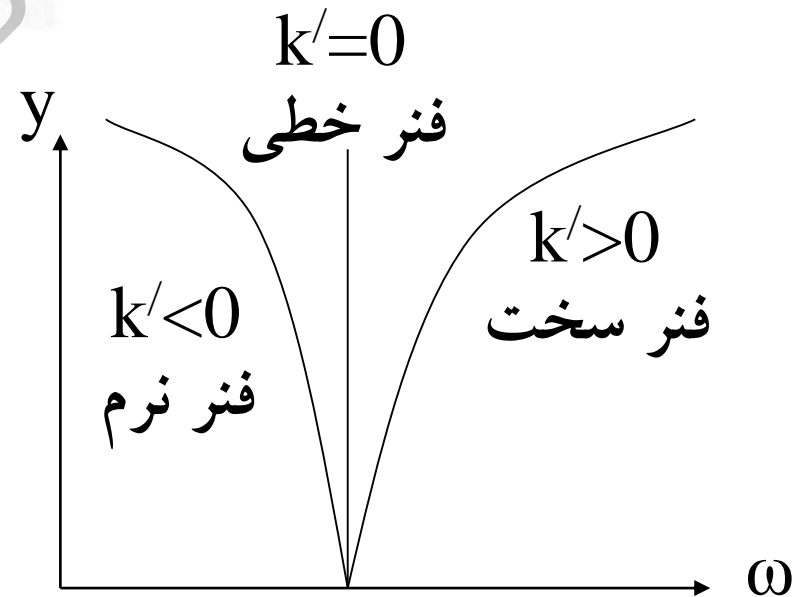
$$f_f = \beta \dot{y}$$

$$m = 1$$

$$\beta = 1$$

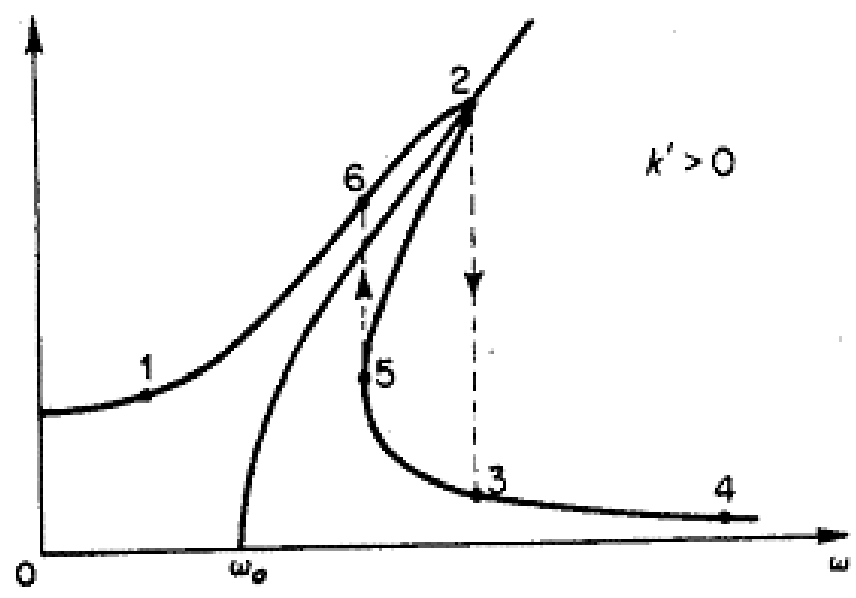
$$\ddot{y} + \dot{y} + ky + k'y^3 = F$$

معادله Duffing



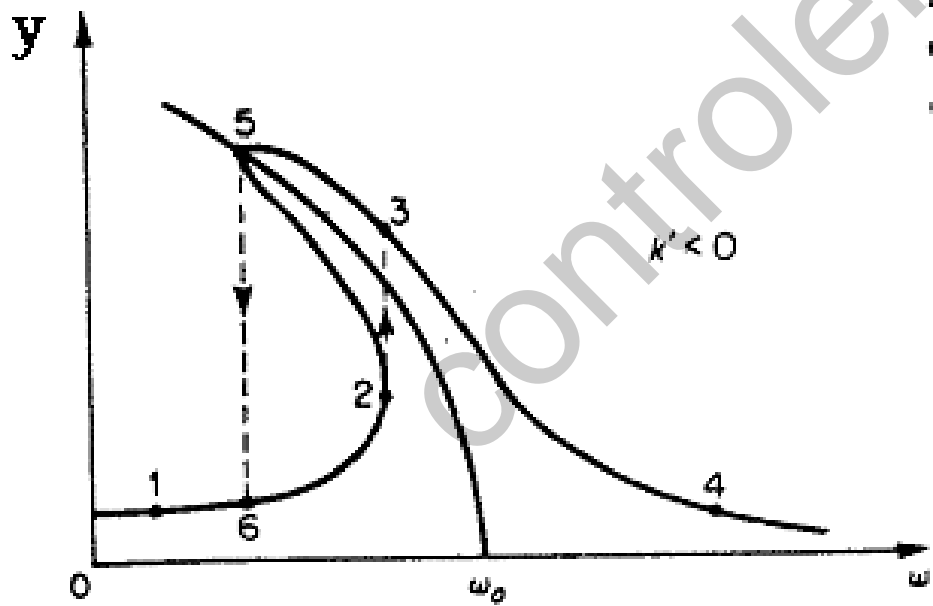
وابستگی دامنه و فرکانس
 و پاسخ چند مقداره و
jump resonances

$$F = p \cos(\omega t)$$



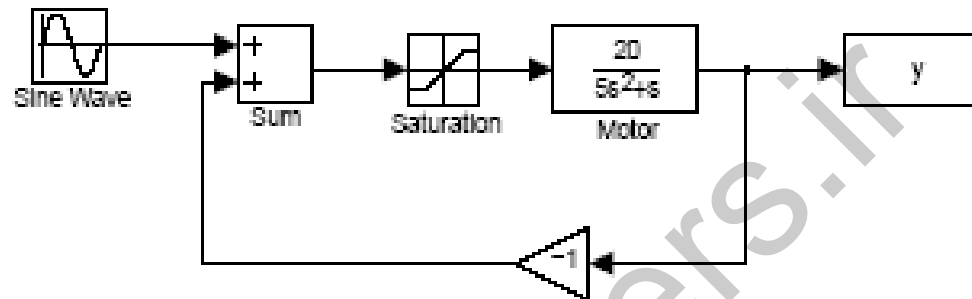
(a)

Frequency response curves showing jump resonances. (a) Mechanical system with hard spring; (b) mechanical system with soft spring.



P ثابت و ω افزایش یا
 کاهش داده می شود.

Jump Resonances



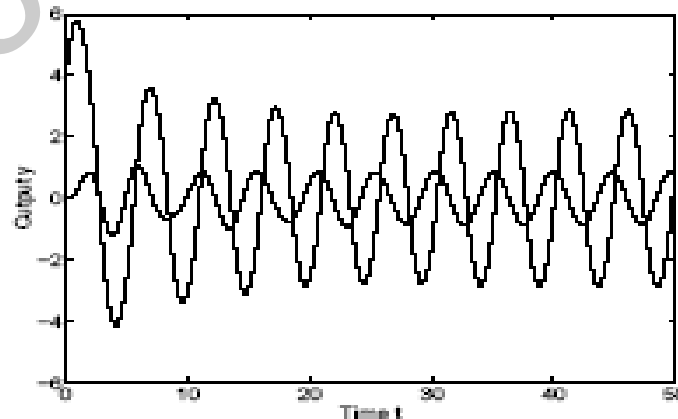
Response for sinusoidal depends on initial condition

Problem when doing frequency response measurement

Jump Resonances

$$u = 0.5 \sin(1.3t), \quad \text{saturation level} = 1.0$$

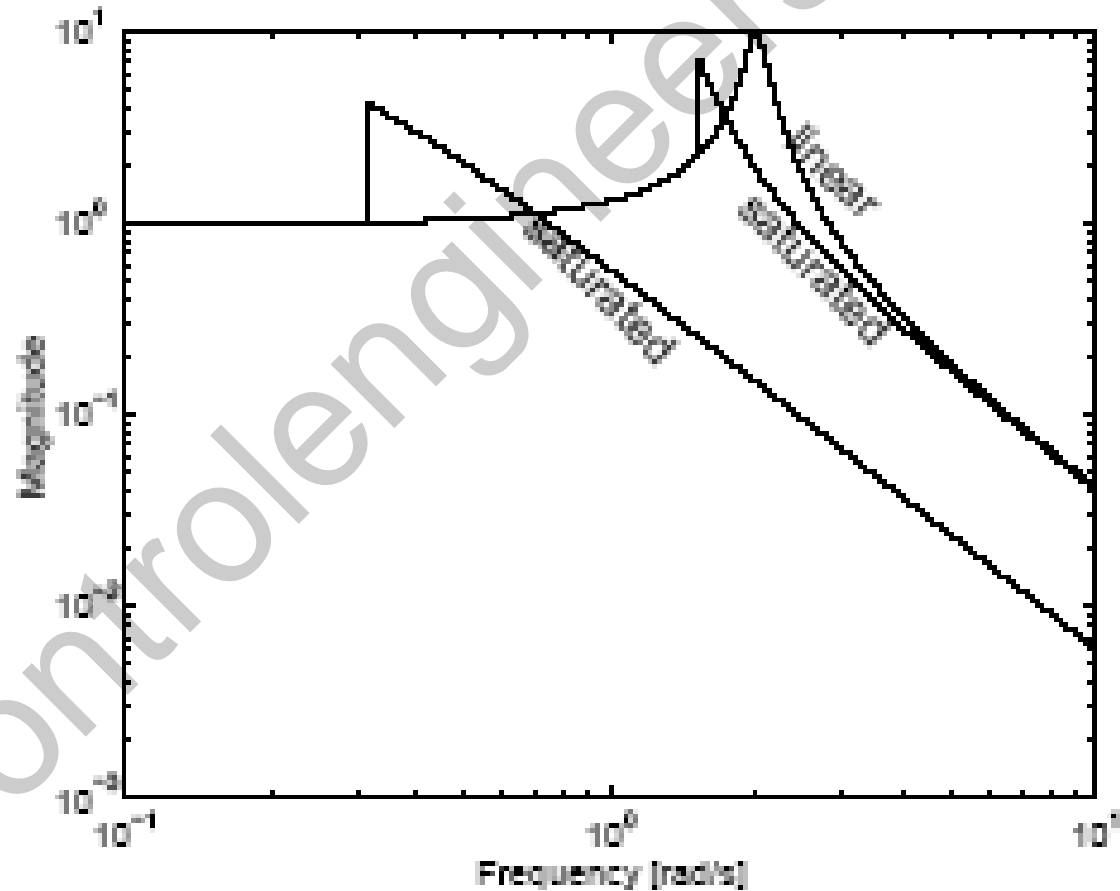
Different initial conditions



Two different steady state outputs!

Jump Resonances

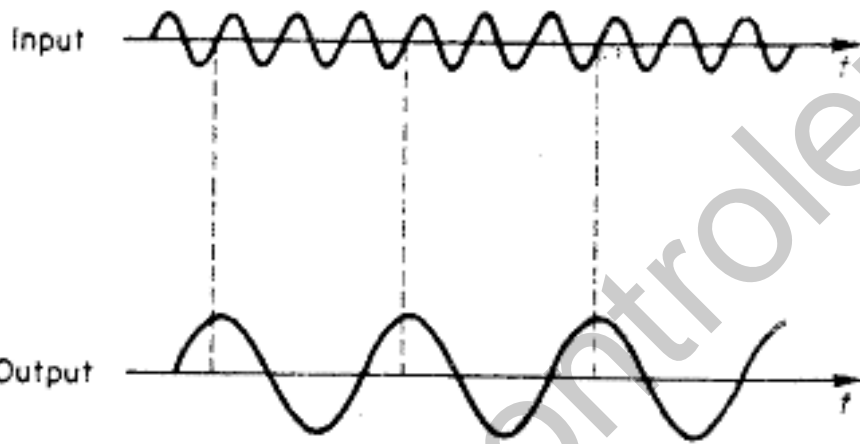
Measured frequency response (many-valued)



بعضی از رفتارها و خواص سیستمهای غیر خطی (ادامه)

• نوسانات زیر هارمونیک

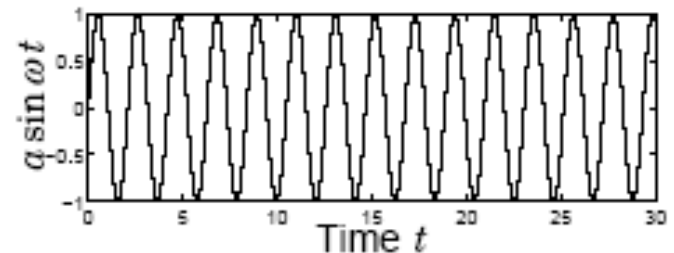
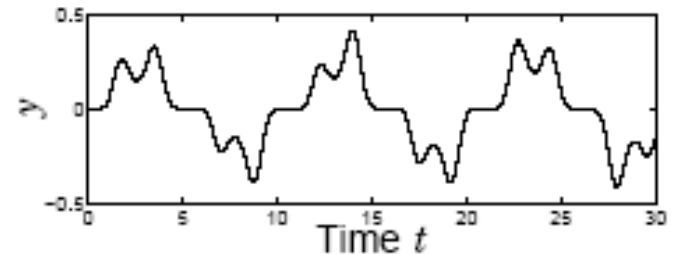
- فرکانس خروجی کسری از فرکانس ورودی است.
- تولید چنین فرکانسی به پارامترهای سیستم، شرایط اولیه و دامنه و فرکانس ورودی بستگی دارد.
- این نوسانات خود بخود شروع نمی شوند و لازم است تغییرات ناگهانی در یکی از عوامل بالا ایجاد شود.



Input and output waveforms under subharmonic oscillation.

Subresonances

Example: Duffing's equation $\ddot{y} + \dot{y} + y - y^3 = a \sin(\omega t)$

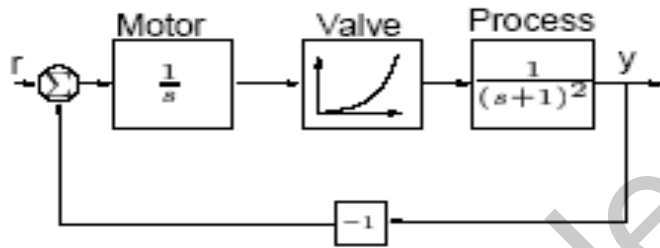


بعضی از رفتارها و خواص سیستمهای غیرخطی (ادامه)

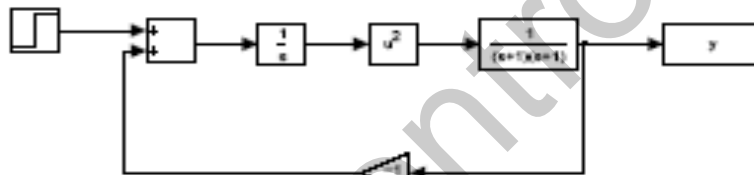
- داشتن چند نقطه تعادل و بستگی پایداری سیستم به شرایط اولیه
- پایداری سیستم $ux = 0$ به علامت ورودی بستگی دارد

Stability Can Depend on Amplitude

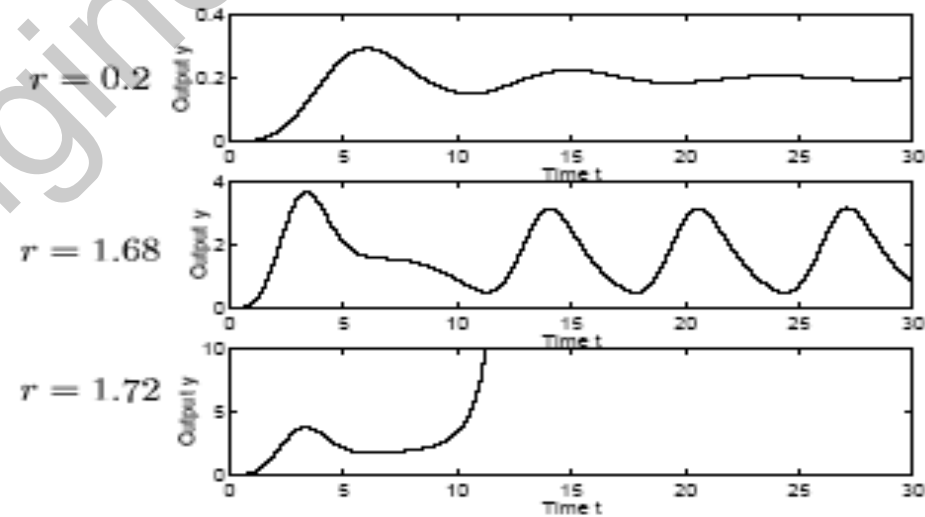
Example: Control system with valve characteristic $f(u) = u^2$



Simulink block diagram:



Step Responses

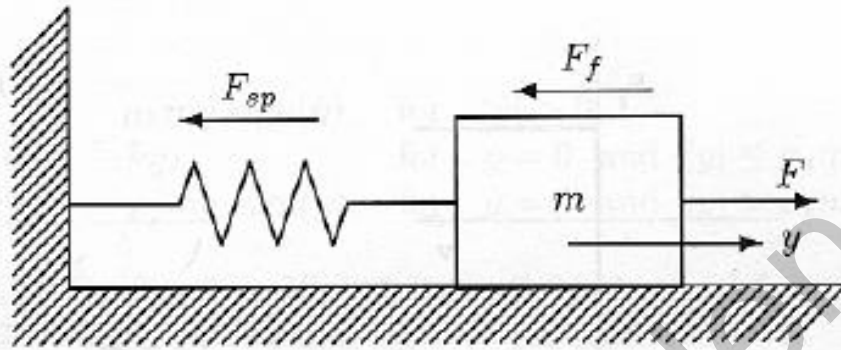


Stability depends on input amplitude!

((ادامه

• داشتن سیگل حدی Limit Cycle

-بعضی از سیستمها می توانند با دامنه و فرکانس ثابتی بدون اینکه ورودی و یا تحریک وجود داشته باشد نوسان کنند (این نوسانات به پارامترهای سیستم خیلی حساس نیست)



$$f_{sp} = ky$$

$$f_f = 2c(y^2 - 1)\dot{y}$$

$$F = 0$$

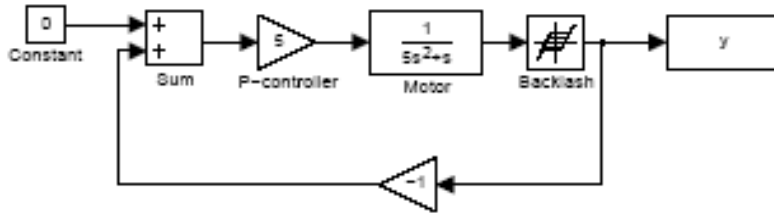
Vanderpol معادله $\longrightarrow m\ddot{y} + 2c(y^2 - 1)\dot{y} + ky = 0$

-برای مقادیر $|y| < 1$ ضریب میرایی منفی و به سیستم انرژی تزریق می شود ولی برای مقادیر بزرگتر از واحد ضریب میرایی مثبت و از سیستم انرژی جذب می شود و برای $y=1$ میزان جذب و تزریق انرژی به سیستم برابر است.

بعضی از رفتارها و خواص سیستمهای غیر خطی (ادامه)

Stable Periodic Solutions

Example: Motor with back-lash

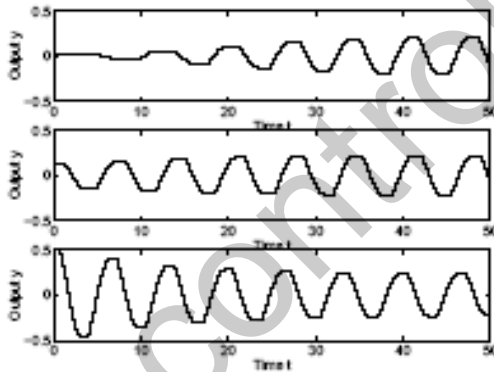


$$\text{Motor: } G(s) = \frac{1}{s(1+5s)}$$

$$\text{Controller: } K = 5$$

Stable Periodic Solutions

Output for different initial conditions:



Frequency and amplitude independent of initial conditions!

Several systems use the existence of such a phenomenon

- نوسانات ماندگار در سیستمهای خطی که دارای قطب روی محور موهومی هستند نیز مشاهده می شود ولی با سیگل حدی دو تفاوت عمده دارند.

1- دامنه نوسانات به شرایط اولیه بستگی دارد.

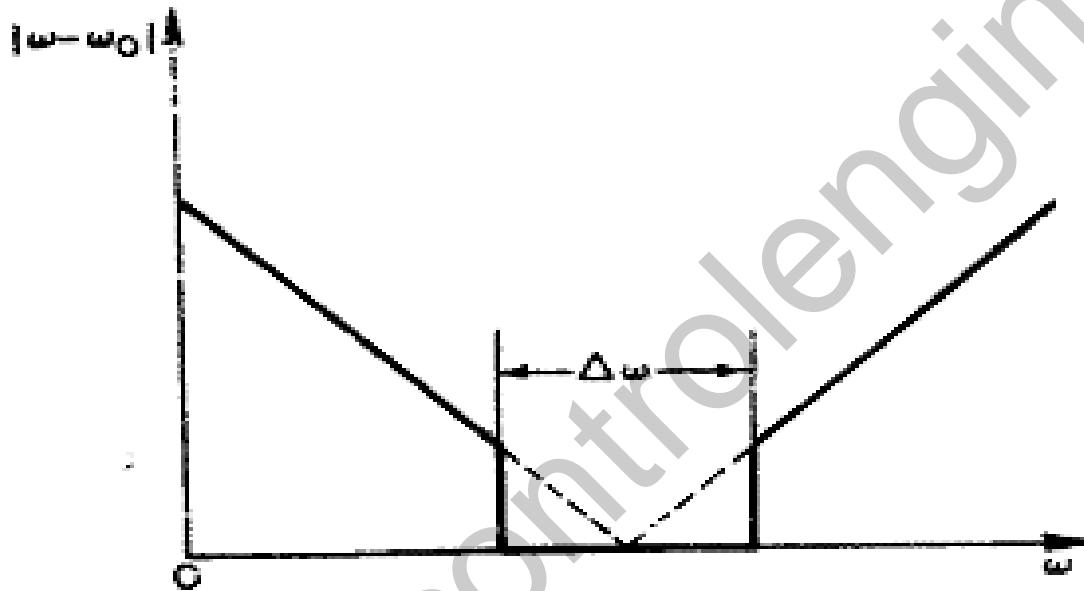
2- سیستمهای خطی با پایداری حاشیه ای خیلی حساس به تغییرات پارامتر هستند با اندکی تغییر پارامتر قطبها جابه جا می شوند.

بعضی از رفتارها و خواص سیستمهای غیر خطی (ادامه)

• پدیده ضربان

- اگر یک ورودی با فرکانس ω به یک سیستم غیر خطی با سیگنال حدی با فرکانس ω_0 اعمال شود پدیده ضربان مشاهده می شود .
- وقتی اختلاف دو فرکانس کاهش می یابد در محدوده ای ضربان کاملا حذف می شود .

در مورد سیستمهای خطی
مسئله چگونه است؟



$|\omega - \omega_0|$ versus ω curve showing zone of frequency entrainment.

بعضی از رفتارها و خواص سیستمهای غیر خطی (ادامه)

• فرونشانی غیر سنکرون

در سیستمهای غیر خطی گه دارای سیگل حدی با فرکانس ω_0 هستند می توان با اعمال یک ورودی با فرکانس ω_1 که رابطه ای با ω_0 ندارد نوسانات سیگل حدی را فرو نشانند .

Stranded Cuts

• انشعاب و آشوب در سیستمهای غیر خطی: بعدا بحث خواهد شد .