سایت اختصاصی
مهندسی کنترل

Subject:
Year. Month. Date. ( )

علی لطفی - (مکانیک ۹۴ای)

مبانی برق ۱

بسم الله

جلسه ۱ - ۹۵/۶/۲۷

مرجع: مدار چیده دار

مفاد درس { میان: مدار فشرده و قوانین کیرشهوف - اجزاء مدار - مدارهای ساده - تقویت عملیاتی
پس از میان: مدارهای مرتبه اول - مدارهای مرتبه دوم - حالت دائمی سینوسی

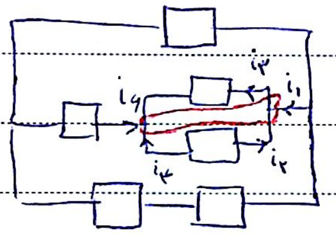
نمره دهی: میان ۵ پایان ۹ کوییز۱ ۱٫۵ کوییز۲ ۱٫۵ ۶ سری تمرین ۳ فعالیت کلاسی ۱

(پایان ← ۲۱ دی، کوییز۱ ← ۳ آبان، کوییز۲ ← ۴ دی)

استاد امینی - دانشکده برق گروه مخابرات سیستم - طبقه ۴ اتاق ۴۲۴
s_amini@ee.sharif.ir

رفع اشکال: آفلاین + ۳ جلسه بین کلاس

حذف پیش فرض ها ← Shift + Del !



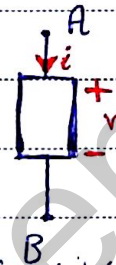
شاخه: هر عنصر دو سر که در یکی از یال های گراف متناظر قرار دارد.

گره: قسمت سرهای عناصر

ولتاژ شاخه: ولتاژ دو سر یک شاخه

جریان شاخه: جریان داخل یک شاخه

جهت های قراردادی:



ولتاژ مثبت است اگر پتانسیل الکتریکی نقطه A از B بیشتر باشد $V(t)=V_A(t)-V_B(t)$

جریان ~~[illegible]~~ جریان i در لحظه t مثبت است اگر شار بارهای مثبت از گره A وارد و از B خارج شود.

* اگر جهت های قراردادی لحاظ شوند، در هر لحظه حاصل $V(t)i(t)$ توان مصرفی عنصر را به دست می دهد
← اگر این مقدار منفی شد، یعنی عنصر در حال تولید انرژی است نه مصرف.

KCL: در هر گره از مدار الکتریکی فشرده، در هر لحظه از زمان جمع جبری جریان های خارج شونده از گره صفر است

KCL، در n گره n-1 معادله خطی همگن ایجاد می کند (مستقل).

KCL معادل اصل بقای بار الکتریکی است $-i_4-i_2-i_3=0$

KCL در گره های بزرگ نیز برقرار است. $-i_1-i_2+i_3=0$

گره های بزرگ ← ترکیب چند گره

$-i_4-i_2-i_1-i_2=0$

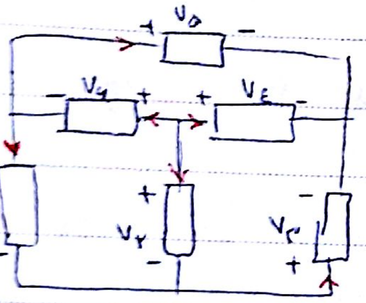
Subject:

Year. Month. Date. ( )

KVL

حلقه: مسیری است که گره ابتدایی و انتهایی آن یکی است.

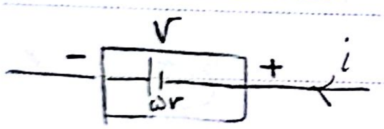
در هر حلقه از مدار الکتریکی فشرده و در هر لحظه از زمان، مجموع جبری ولتاژهای شاخه های حلقه صفر است.



برای حل هر مدار بدون هیچ محدودیت، جهت ولتاژ یا جریان هر عنصر را مستقل از یکدیگر تعیین می‌کنیم و متناظر با انتخاب آزادانه خود، جهت قراردادی مشخصه دیگر (ولتاژ یا جریان) را می‌یابیم

در این مرحله: هر اجزای مدار را یک "جعبه سیاه" می‌بینیم! حتی باتری

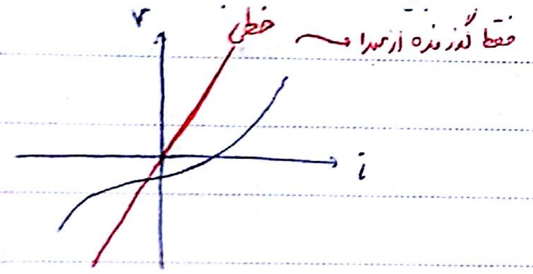
تنها محدودیت، تناظر قراردادی تک تک اعضاست.
ولتاژ و جریان



$\sim\ V = -5\,(V)$

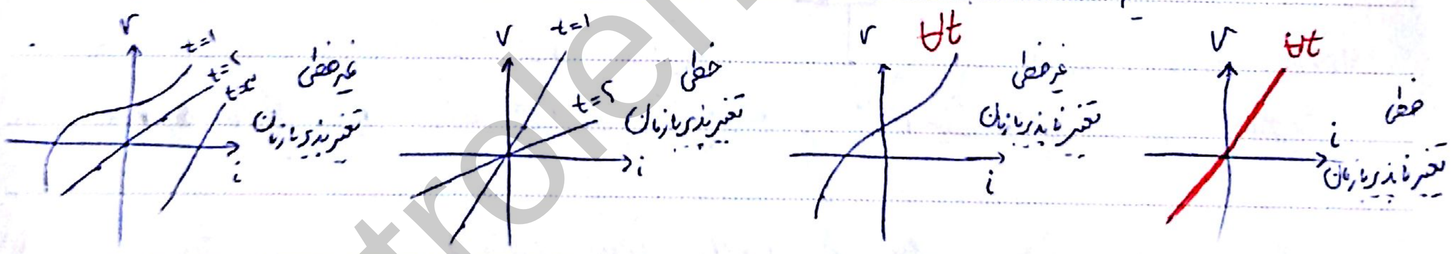
معرفی اجزای مدار

I) مقاومت: یک عنصر را مقاومت می‌گوییم اگر در هر لحظه t، ولتاژ $v(t)$ و جریان $i(t)$ در رابطه‌ای که در صفحه $v-i$ به وسیله یک منحنی تعریف می‌شود، صدق کند.

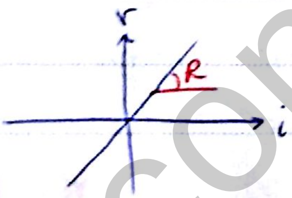


تغییرپذیری با زمان: منحنی آن با زمان تغییر کند

خطی: خط مستقیم گذرنده از مبدا



مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان



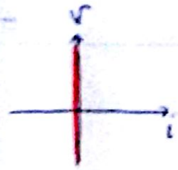
$v(t) = R\,i(t)$

$i(t) = v(t)\,G$

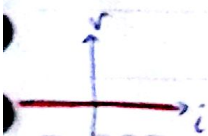
R ← مقاومت ← Ω

$G = \frac{1}{R}$ ← رسانایی ← ℧

حالات خاص:



الف) مدار باز: عنصر دو سر مدار باز است. اگر جریان شاخه به ازای تمامی مقادیر ولتاژ صفر باشد $\left.\begin{matrix} R=\infty \\ G=0 \end{matrix}\right\}$

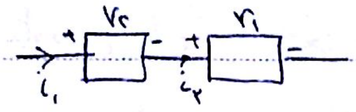


ب) اتصال کوتاه: عنصر دو سر اتصال کوتاه است. اگر ولتاژ شاخه به ازای همه مقادیر جریان صفر باشد $\left.\begin{matrix} R=0 \\ G=\infty \end{matrix}\right\}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

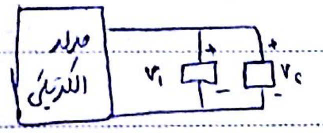
انواع اتصالات

۱) سری جریان دو شاخه برابر است

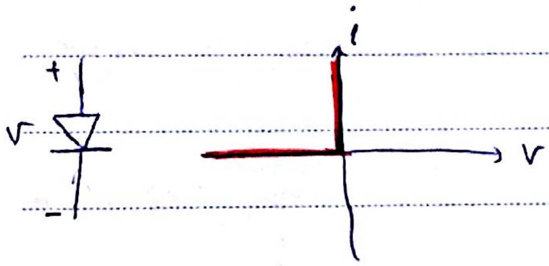


$i_1 = i_2$

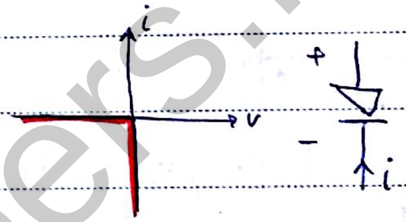
۲) موازی ولتاژ دو شاخه برابر است.



دیود ایده‌آل: مقاومت غیرخطی تغییر ناپذیر با زمان

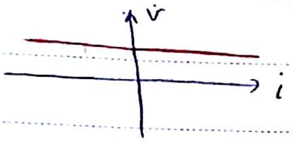


مثال:



Subject:
Year. Month. Date. ( )

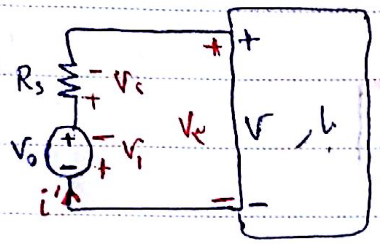
منابع ولتاژ مستقل منبعی است که مستقل از جریانی که از آن عبور می‌کند ولتاژ دو سر آن ثابت است و برابر $V_s(t)$ است. حال اگر $V_s(t)$ تابع زمان نباشد، منبع ولتاژ را **ثابت** گوییم



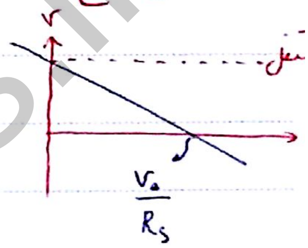
منبع ولتاژ مستقل ← مقاومت غیرخطی تغییرپذیر با زمان

منبع ولتاژ ثابت ← " " " ناپذیر "

مدل واقعی منبع ولتاژ

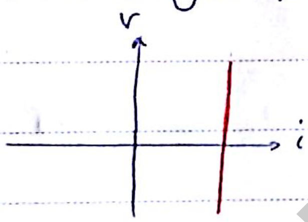


$$+V_1 + V_2 + V_3 = 0$$
$$-V_0 + R_s i' + V_3 = 0$$
$$i' = i \;,\; V_3 = V$$
$$\Rightarrow V = V_0 - R_s i$$



* منبع ولتاژ $V_s(t) = 0$ همان اتصال کوتاه است.

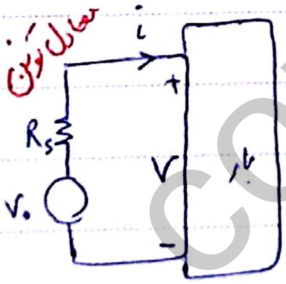
منبع جریان مستقل یک عنصر دوسره می‌گوییم اگر جریان معین $i_s(t)$ را صرف‌نظر از مداری که به آن وصل شده است، ارائه نماید.
حال اگر $i_s(t)$ به زمان وابسته نباشد منبع جریان ثابت داریم.



منبع جریان ثابت: مقاومت غیرخطی تغییرناپذیر با زمان

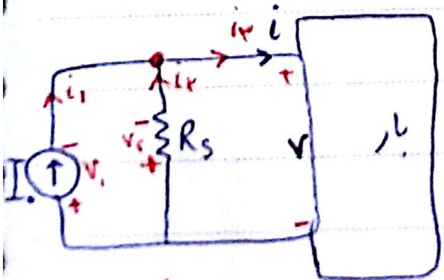
منبع جریان مستقل: مقاومت غیرخطی تغییرپذیر با زمان

معادل نورتن تونن



$$V = V_0 - iR_s$$

آیا می‌توان به جای مدار بالا با استفاده از منبع جریان مستقل معادل‌سازی کرد به گونه‌ای که ولتاژ و جریان خروجی ثابت بماند؟



$$-i_1 - i_2 + i_3 = 0$$
$$i_1 = I_0$$
$$i_2 = \frac{V_2}{R_s}$$
$$i_3 = i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -I_0 - \frac{V_2}{R_s} + i = 0 \\ +V_2 + V = 0 \end{cases} \Rightarrow V = R_s I_0 - R_s$$

$$V = V_0 - R_s$$

$$\boxed{I_0 = \frac{V_0}{R_s}}$$

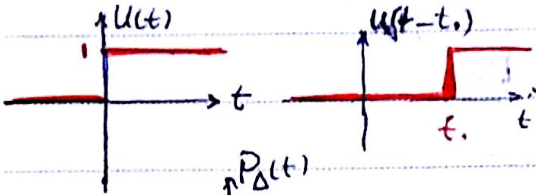
Subject:
Year. Month. Date. ( )

شکل موج های نمونه

توابع سینوسی!

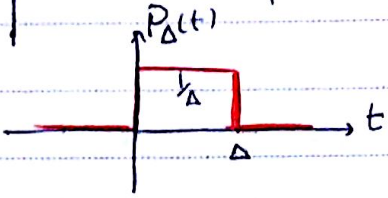
$f(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ A: دامنه ω: فرکانس $\frac{rad}{s}$ $\phi \rightarrow$ فاز

پله واحد



در صفر می توان مقدار تابع را عددی در $[0,1]$ مانند ½ در نظر گرفت.

پالس

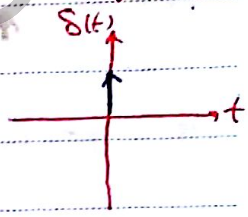


$$P_\Delta(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \frac{1}{\Delta} & 0<t<\Delta \\ 0 & \Delta<t \end{cases} = \frac{1}{\Delta}\left(u(t)-u(t-\Delta)\right)$$

ضربه واحد

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \text{ویژه} & t=0 \end{cases}$$

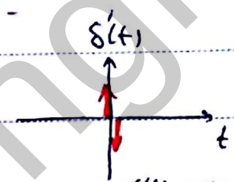
مدل سازی شکل ناگهانی در سیگنال



$* \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t)\,dt = 1 \quad \forall \epsilon>0$ $* \delta(t) = \lim_{\Delta\to 0} P_\Delta(t)$ $* \delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$

$* \int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(t)\delta(t)\,dt = f(0) \quad \forall\epsilon>0$ خاصیت غربالی

دوبلت واحد

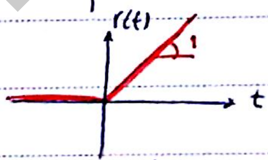


$\delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$

مشتق یابی:

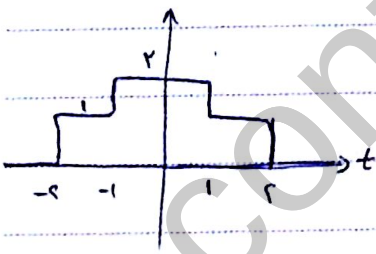
$r(t) \rightarrow u(t) \rightarrow \delta(t) \rightarrow \delta'(t)$

رمپ (شیب) واحد

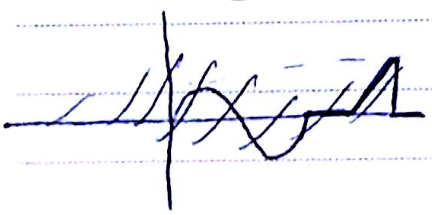


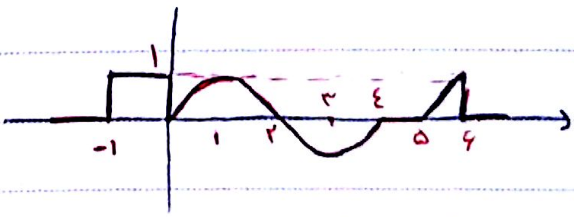
$r(t) = t\,u(t)$

مثال) با استفاده از توابع ویژه نمودارهای زیر را تحلیل کنید.



$u(t+2)+u(t+1)-u(t-1)-u(t-2)$



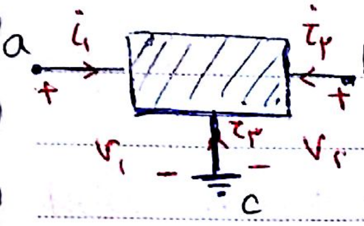


$u(t+1)-u(t)+\sin\left(\frac{2\pi}{4}t\right)\left(u(t)-u(t-4)\right)+r(t-5)-2r(t-6)-u(t-6)$

= مقصد - مبدا

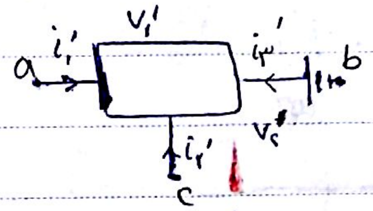
Date. ( )

مثال) مجهولات شکل دوم؟



شکل (۱)

$$i_1 = (V_1 + V_2)^2$$
$$i_2 = V_2 - V_1$$



شکل (۲)

$$i_1' = i_1 = (V_1 + V_2)^2$$

$$V_1' = V_a - V_b$$

$$V_2' = V_c - V_b \Rightarrow V_1' - V_2' = V_a - V_c = V_1$$

$$V_2' = -V_2$$

$$\Rightarrow i_1' = (V_1' - 2V_2')^2$$

$$i_3' = i_2 = V_2 - V_1$$

$$i_2' = -V_1' \; ? \; -V_2'$$

Subject:
Year: Month: Day: ( )

خازن

عنصر دو سری است که در هر لحظه بار الکتریکی ذخیره شده $q(t)$ ، ولتاژ $v(t)$ آن در رابطه ای که توسط یک منحنی Vq تعریف می‌شود صدق کند.

خازن خطی: مشخصه Vq آن خطی (مستقیم گذرنده از مبدا) باشد

خازن تغییرپذیر با زمان: مشخصه V-q آن مستقل از زمان و ثابت باشد

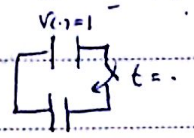
خازن خطی تغییرناپذیر با زمان

$q(t) = C\,v(t)$ $\qquad C \to [C]$ فاراد $\qquad [q] \to$ کولمب

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \Rightarrow i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{S}\frac{dv(t)}{dt} \qquad S:$$ الاستنس

$$* \; v(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{C} i(t')\,dt' = \underbrace{\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i(t')\,dt'}_{v(0)} + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(t')\,dt'$$

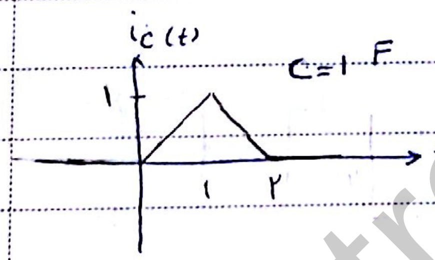
نکته: ولتاژ خازن نمی‌تواند تغییر آنی داشته باشد زیرا در این صورت جریان آن بی‌نهایت می‌شود. (بهتر: اگر منبع جریان بی‌نهایت نباشد خازن تغییر آنی نخواهد داشت)



* ولتاژ خازن نمی‌تواند تغییر آنی داشته باشد زیرا در این صورت جریان بی‌نهایت می‌شود

* جریان خازن صفر است هرگاه ولتاژ خازن ثابت باشد ← خازن مدار باز است.

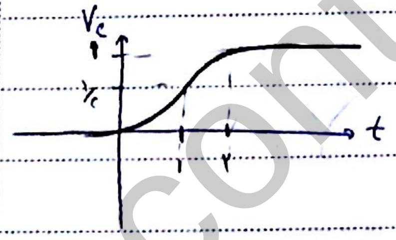
مثال:



$$0 \le t \le 1 \rightarrow V = 0 + \frac{1}{C}\int_0^t t'\,dt' = \frac{t^2}{2}$$

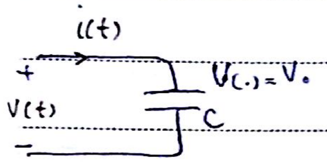
$$1 \le t \le 2 \Rightarrow V = V(1) + \int_1^t (-t'+2) = \frac{1}{2} + -\frac{t'^2}{2} + 2t'\Big|_1^t = -\frac{t^2}{2} + 2t - 1$$

$$t \ge 2 \Rightarrow V = V(2) = -2 + 4 - 1 = 1$$

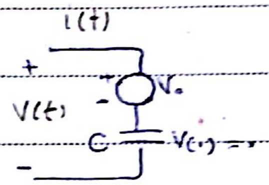


AYLAR

مدل کردن خازن با ولتاژ اولیه



$\equiv$



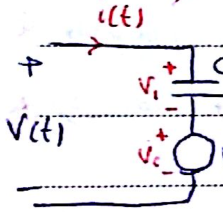
$$-V(t) + V_0 + \frac{1}{C}\int_0^t i(t')\,dt' = 0$$

$$\Rightarrow V(t) = V_0 + \frac{1}{C}\int_0^t i(t')\,dt'$$

* وقتی برداشت کرد V_0 رو بعدش می‌تونی با تقلیل! به KVL نگاه کن!

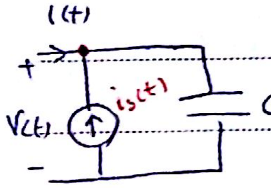
فرض: قراردادی

مدل‌کردن منبع با خازن



$$-V(t) + V_1 + V_c = 0 \Rightarrow$$

$$V(t) = V_s(t) + \left(\int_0^t i(t')\,dt'\right)C^{-1} \Rightarrow \left.\begin{aligned} V_1 &= V(t) - V_s(t) \\ i(t) &= C\frac{dV_1(t)}{dt}\end{aligned}\right\} \Rightarrow i(t) = C\frac{dV(t)}{dt} - C\frac{dV_s(t)}{dt}$$



$$\left.\begin{aligned} &-i(t) - i_s(t) + i_c(t) = 0 \\ &i_c(t) = C\frac{dV_c(t)}{dt} = C\frac{dV(t)}{dt}\end{aligned}\right\} \Rightarrow i(t) = i_c(t) - i_s(t)$$

$$= C\frac{dV(t)}{dt} - i_s(t)$$

$$\Longrightarrow \boxed{i_s(t) = C\frac{dV_s(t)}{dt}}$$

- خازن سری با منبع ولتاژ متناظره با خازن موازی با یک منبع جریان جزء

جلسه ۴ - ۹۵/۷/۱۰

سلف: عنصر دوسری است که در هر لحظه از زمان شار $\phi(t)$ و جریان $i(t)$ آن در رابطه‌ای که توسط یک منحنی در صفحه $i\phi$ تعریف می‌شود صدق کند.

خطی ← مشخصه $i\phi$ آن خطی مستقیم گذرنده از مبدا باشد. تغییرناپذیر با زمان ← مشخصه آن با زمان تغییر نکند.

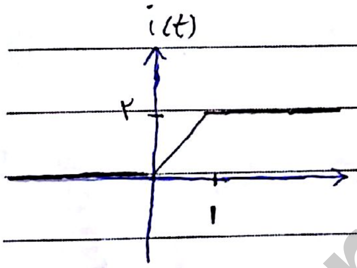
$\phi(t)=L\,i(t)$ $[L]$ → هانری $[\phi]$ → وبر

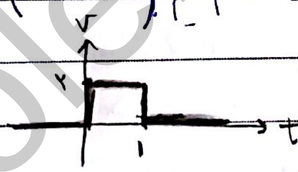
$$v(t)=\frac{d\phi(t)}{dt}=L\frac{di(t)}{dt}$$

$$i(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}v(t')dt'=\underbrace{\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0}v(t')dt'}_{i(0)}+\frac{1}{L}\int_{0}^{t}v(t')dt'$$

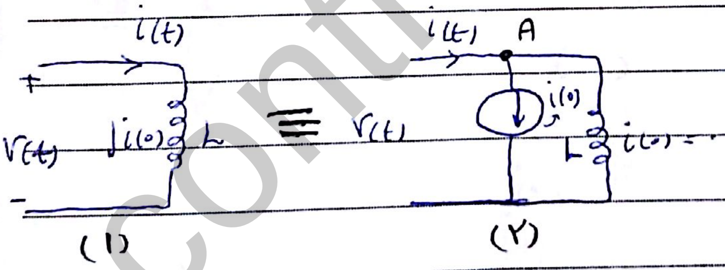
* جریان سلف نمی‌تواند تغییر آنی داشته باشد زیرا در این صورت ولتاژ دو سر آن بی‌نهایت می‌شود.
* ولتاژ سلف می‌تواند تغییر آنی داشته باشد.
* اگر جریان سلف ثابت باشد، ولتاژ آن ثابت صفر خواهد بود ← معادل اتصال کوتاه است
* اگر در $V(0)=0$ در لحظه برقراری مدار سلف معادل است با مدار باز

مثال: جریان سلف به صورت مقابل است. ولتاژ آن را رسم کنیم ($L=1H$)





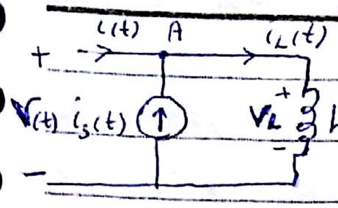
مدل کردن سلف با جریان اولیه



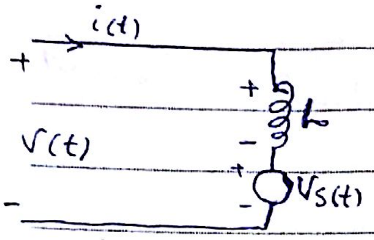
(۲): A در KCL : $i(t)=i(0)+\frac{1}{L}\int_0^t v(t')dt'$

Subject :
Year : Month : Date :

معادل تونن نورتن برای سلف



$$A:\ i_L(t) = i_s(t) + i(t)$$
$$V_L(t) = L\frac{d}{dt}\left(i_s(t) + i(t)\right)$$
$$V(t) = V_L(t)$$
$$\Rightarrow V(t) = L\frac{di_s(t)}{dt} + L\frac{di(t)}{dt}$$



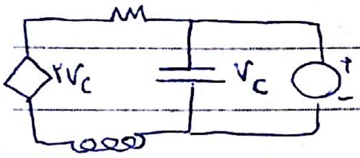
$$-V(t) + L\frac{di}{dt} + V_s(t) = 0 \Rightarrow V(t) = V_s(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$

$\Rightarrow$

اگر $V_s(t) = L\frac{di_s(t)}{dt}$ هر دو مدار معادل خواهند بود. (حتی اگر $i_s(t)$ فقط غیر ثابتی برحسب زمان داشته باشد که فقط چنین رابطه‌ای برقرار باشد)

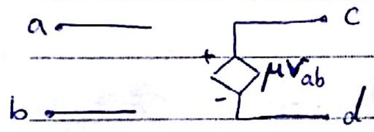
منابع وابسته

شاخصه های این منابع (ولتاژ و جریان) به ولتاژ و جریان شاخه دیگری از مدار مربوط می‌شود در قواعد KCL و KVL عیناً مشابه منبع مستقل عمل می‌کند.



۱) منبع ولتاژ کنترل شده با ولتاژ (Voltage Controlled Voltage Source)

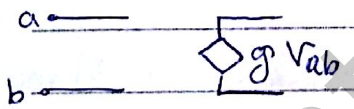
VCVS



$[\mu] \rightarrow$ بدون بعد X

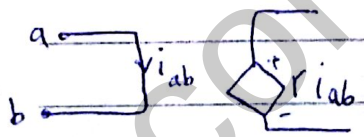
۲) منبع جریان کنترل شده با ولتاژ (Voltage Controlled Current Source)

VCCS



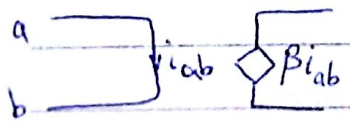
$[g] \rightarrow$ مهو ℧

۳) منبع ولتاژ کنترل شده با جریان CCVS



$[r] \rightarrow$ اهم

۴) منبع ولتاژ کنترل شده با ولتاژ CCCS



$[\beta] \rightarrow$ بدون بعد α

Subject :
Year : Month : Date :

توان و انرژی

i(t) v(t) + یک قطبی

توان لحظه‌ای که وارد عنصر/مدار یک‌قطبی می‌شود مساوی حاصل‌ضرب ولتاژ در جریان قطب است (البته در صورتی که جهت جریان و ولتاژ متناظر انتخاب شده باشند)

شکل:

چون: $p(t) = v(t)\ i(t)$ توان مصرفی یک‌قطبی

(یک‌قطبی: مدار/عنصری که یک شاخه خروجی داشته باشد یعنی ۲ ورودی خروجی یکسان باشند)

انرژی تحویل داده شده به یک‌قطبی از زمان t_0 تا t برابر است با:

$$W(t_0,t)=\int_{t_0}^{t} p(t')dt'=\int_{t_0}^{t} v(t')i(t')dt'$$

عنصر پسیو: عنصری است که همواره توان آن مثبت است Passive

عنصر اکتیو: عنصری است که همواره توان آن مثبت نیست ACtive

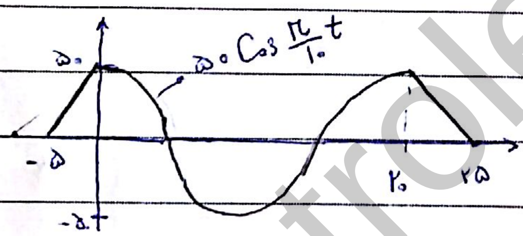
انرژی ذخیره شده در خازن

$$W(t_0,t)=\int_{t_0}^{t} v(t')\underbrace{i(t')dt'}_{dq}=\int_{q(t_0)}^{q(t)} v(q)\,dq=\int_{q(t_0)=0}^{q(t)} \frac{q}{C}\,dq=\frac{1}{2}\,\frac{q^2(t)}{C}$$

انرژی سلف

$$W(t_0,t)=\frac{1}{2}\,\frac{\phi^2}{L}=\frac{1}{2}Li^2 \quad (\phi(t_0)=0)$$

مثال: با استفاده از توابع ویژه بنویسید مشتق آن را



$$f(t)=10r(t+5)-10r(t)-50u(t)+50\cos\frac{\pi}{10}t\,(u(t)-u(t-20))$$

تا بتوانیم DC حاصل را صفر کنیم بعد Cos را سوار کنیم

$$+50u(t-20)-10r(t-20)+10r(t-25)$$

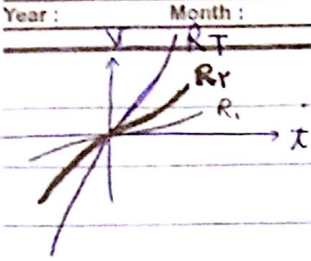
$$f'(t)=10u(t+5)-10u(t)-50\delta(t)+50\cos\frac{\pi}{10}t\,(\delta(t)-\delta(t-20))$$

$$-50\sin\frac{\pi}{10}t\,(u(t)-u(t-20))+50\delta(t-20)-10u(t-20)+10u(t-25)$$

Derakhshan

Subject :
Year : Month : Date :

اتصال سری



در این اتصال چنانچه گفته شد داریم $\left\{ \begin{array}{l} i_1 = i_2 = i \\ V = V_1 + V_2 \end{array} \right.$

در اتصال سری مقاومت های خطی تغییر ناپذیر با زمان داریم: $R_T = \sum R_j$

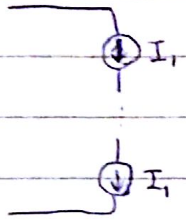
حالت خاص: ترکیب سری منابع ولتاژ

$\equiv$

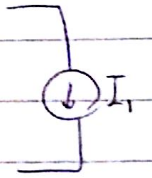
$V = V_1 + V_2 + \dots + V_m$

حالت خاص: ترکیب سری منابع جریان

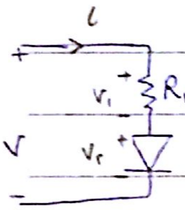
* تنها حالتی مجاز است که جریان منابع یکی باشد.
* فایده این کار این است که ولتاژ قابل تحمل منبع جریان رفع محدودیت می‌کند

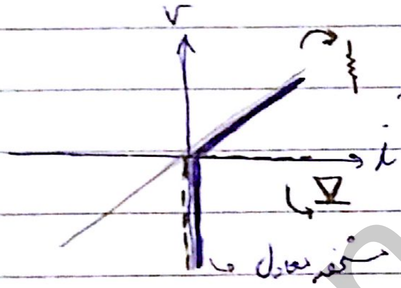


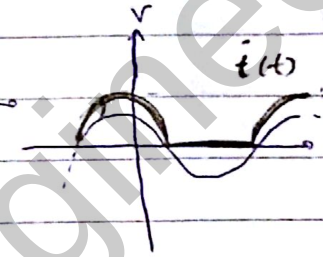
$\equiv$



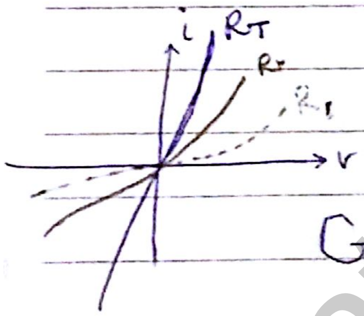
مثال) منحنی معادل را رسم کنید.







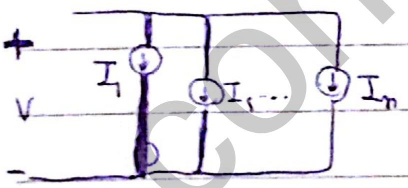
اتصال موازی

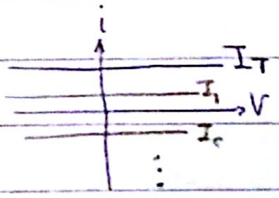


در این اتصال داریم $\left\{ \begin{array}{l} V_1 = V_2 = \dots V_n \\ I = i_1 + i_2 + \dots + i_n \end{array} \right.$

در اتصال موازی مقاومت های خطی تغییر ناپذیر با زمان داریم: $G_T = \sum G_j$

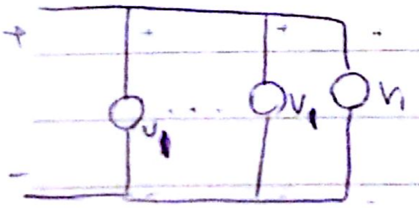
حالت خاص: ترکیب موازی منابع جریان



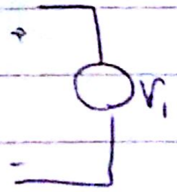


حالت خاص: ترکیب موازی منابع ولتاژ

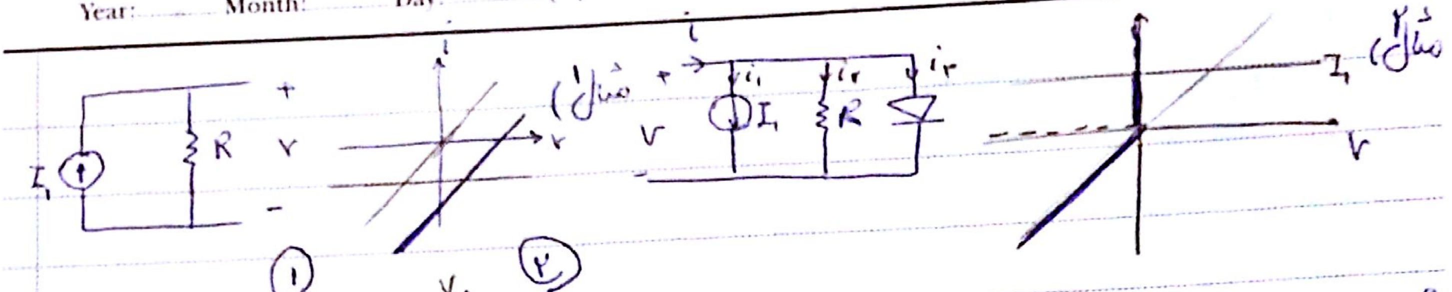
* تنها حالتی مجاز است که ولتاژ منابع یکی باشد

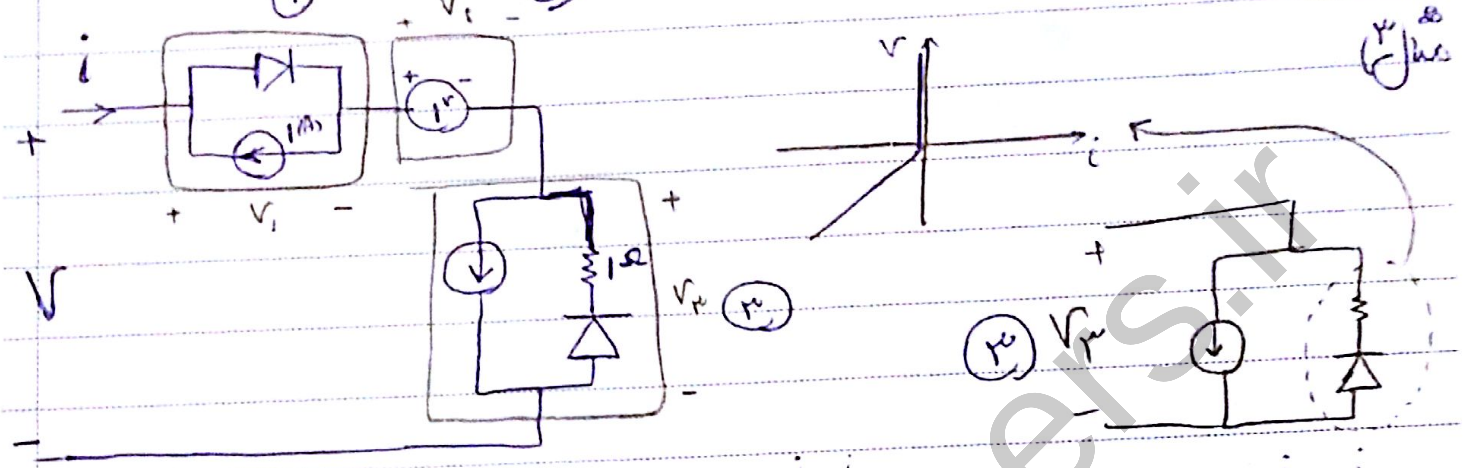


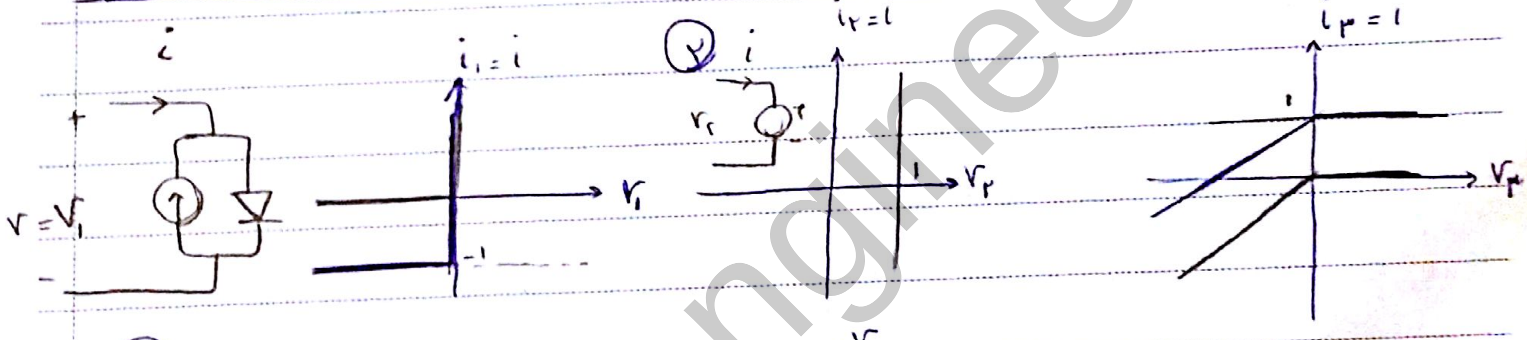
$\equiv$

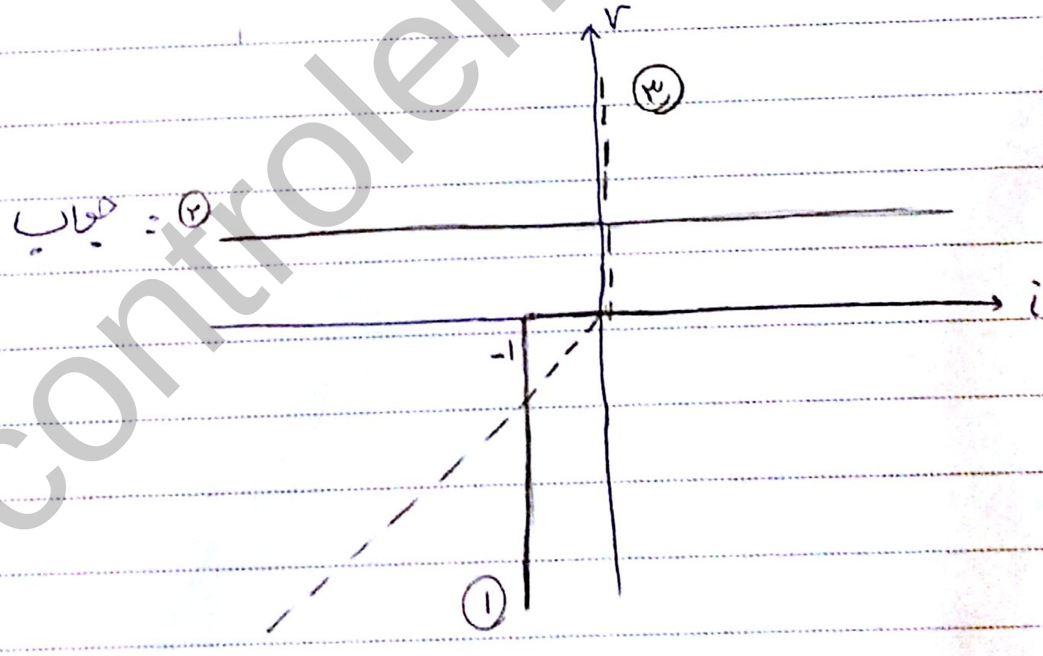


Derakhshan


مثال ۱
I_1
R
v
مثال ۲
I_1
R
v


مثال ۳
V_1
$1A$
2
1Ω
V_3
V


$v = V_1$
$i_1 = i$
V_1
-1
V_2
$i_2 = i$
$i_3 = i$
V_3


جواب: ۲
V
i
-1

۲) به دست آوردن جریان و ولتاژ خازن‌ها

I) روش تحلیل گره ← (اساس: KVL ، KCL و روابط عناصر)

متغیرها: ولتاژ گره‌ها ← چون ولتاژ گره‌ها نسبت به هم سنجیده می‌شود، ابتدا گرهی را به عنوان گره مبنا با ولتاژ دلخواه (معمولا صفر) انتخاب می‌کنیم.

معمولا گرهی که بیشترین شاخه‌ها به آن وصل است را زمین در نظر می‌گیریم. (علامت: ⏚)

مراحل:

۱) انتخاب گره مبنا و صفر قرار دادن ولتاژ آن

۲) شماره گذاری گره‌ها

۳) متغیرهای مدار را ولتاژ گره‌های مدار قرار می‌دهیم

۴) KCL را در تمام گره‌ها به جز گره مبنا می‌نویسیم.

۵) تمام متغیرهای موجود در معادلات حاصل را برحسب متغیرهای مدار بازنویسی می‌کنیم

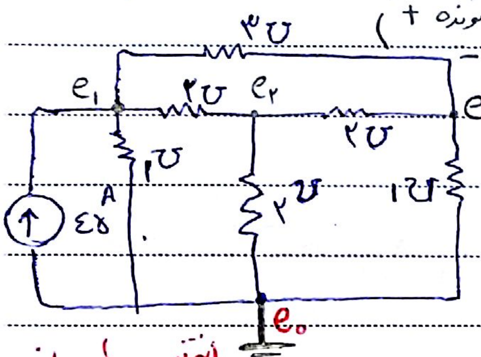
۶) معادلات را حل می‌کنیم و ولتاژ گره‌ها را به دست می‌آوریم

۷) جریان شاخه‌ها را نیز محاسبه می‌کنیم

* جهت جریان‌ها دلخواه انتخاب می‌شوند فقط متناظر با ولتاژ باشند

← برای راحتی در همه گره‌ها جریان را خارج شونده در نظر می‌گیریم (خارج شونده +، داخل شونده −)

مثال)



انتخاب به طور دلخواه

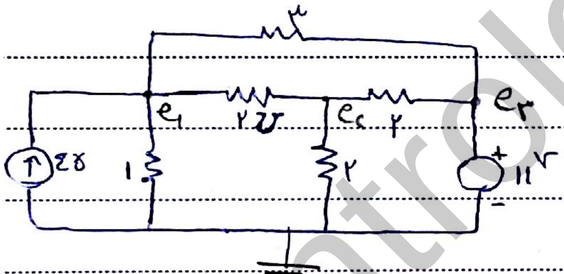
$KCL1: -45 + 2(e_1-e_2) + 1(e_1-e_0) + 3(e_1-e_3) = 0$

$KCL2: 2(e_2-e_1) + 2(e_2-e_3) + 2(e_2-e_0) = 0$

$KCL3: 2(e_3-e_2) + 1(e_3-e_0) + 3(e_3-e_1) = 0$

$\Rightarrow e_1 = 16^{(V)},\ e_2 = 9^{(V)},\ e_3 = 11^{(V)}$

مثال)



$KCL1: -45 + 1(e_1-e_0) + 2(e_1-e_2) + 3(e_1-e_3) = 0$

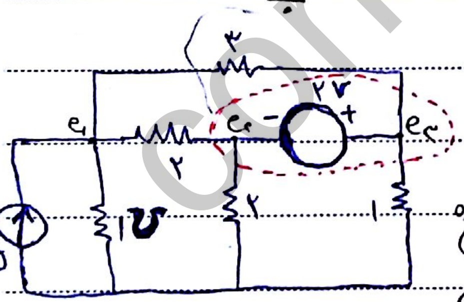
$KCL2: 2(e_2-e_0) + 2(e_2-e_1) + 2(e_2-e_3) = 0$

KCL3: ✗ در گرهی که منبع ولتاژ بین آن وصل شده KCL نمی‌نویسیم

$e_3 - e_0 = 11 \qquad \Rightarrow e_1 = 16(V),\ e_2 = 9(V),\ e_3 = 11\ V$

$e_0 = 0$

مثال)



$KCL1: -45 + 1(e_1-e_0) + 2(e_1-e_2) + 3(e_1-e_3) = 0$

$e_3 - e_2 = 2$

گره ۲ و ۳:

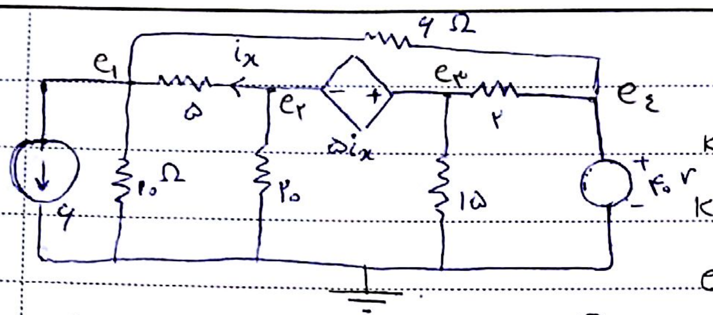
$KCL23: 2(e_2-e_0) + 2(e_2-e_1) + 3(e_3-e_1) + 1(e_3-e_0) = 0$

$\Rightarrow e_1 = 16\ (V),\ e_2 = 9\ (V),\ e_3 = 11\ V$

Subject: ....

Year:.......... Month:.......... Day:..........( )

مثال) (منبع وابسته)



KCL1: $6+\frac{1}{10}(e_1-e_0)+\frac{1}{5}(e_1-e_2)+\frac{1}{6}(e_1-e_4)=0$

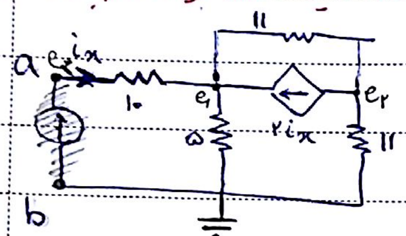
KCL23: $\frac{1}{5}(e_2-e_1)+\frac{1}{20}(e_2-e_0)+\frac{1}{15}(e_3-e_0)+\frac{1}{2}(e_3-e_4)=0$

$e_3-e_2=5i_x \overset{*}{=} e_2-e_1$

$i_x\times 5=(e_2-e_1)\Rightarrow i_x=\frac{e_2-e_1}{5}$ (*) $e_4=40\,(V)$ $\Rightarrow e_1=10V,\ e_2=20V,\ e_3=30V,\ e_4=40V$

← دیگه فقط براساس جهت داده شده!

مثال) مقاومت معادل را بدست آورید.



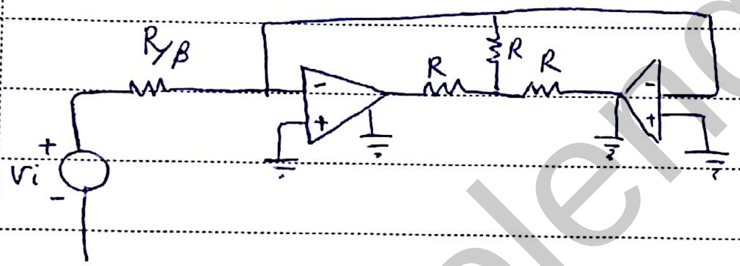
KCL1: $\frac{1}{10}(e_1-e_3)-2i_x+\frac{1}{5}(e_1-e_0)+\frac{1}{11}(e_1-e_2)=0$

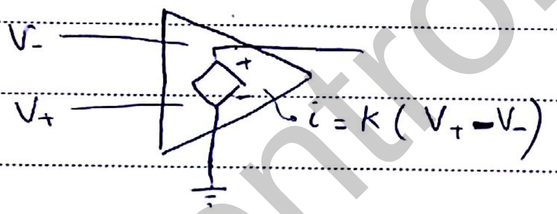
$i_x=\frac{1}{10}(e_3-e_1)$

$i_x=I$

$\Rightarrow \begin{cases} e_1=10I \\ e_2=-100I \end{cases}$ KVL (a→b): $-e_3+10I+e_1=0 \Rightarrow e_3=20I$ $R_T=20$

مثال)





روش تحلیل حلقه ها (مش ها) ← تعریف مش: حلقه‌ای که شامل هیچ شاخه‌ای در درون خود نباشد.

۱) شماره گذاری مش ها و انتخاب جهت جریان فرضی

۲) تعیین جریان شاخه ها

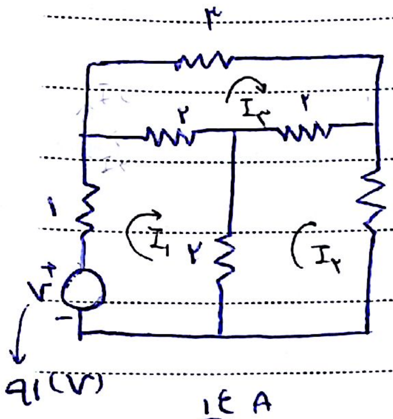
۳) نوشتن KVL در تمام مش ها ← متغیر منحصراً جریان مش ها

۴) منابع وابسته را کاملا مشابه منابع مستقل در نظر می گیریم

۵) دستگاه n معادله n مجهول را حل می کنیم

۶) با استفاده از جریان مش ها، هر مسئله را حل می کنیم

مثال:

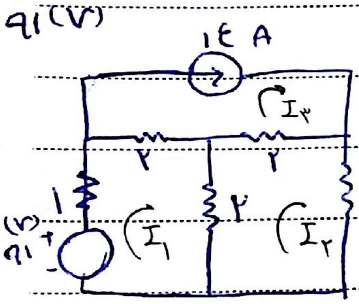


KVL1: $-91 + I_1(1) + 2(I_1 - I_3) + 2(I_1 - I_2) = 0$

KVL2: $2(I_2 - I_1) + 2(I_2 - I_3) + 1(I_2) = 0$

KVL3: $3I_3 + 2(I_3 - I_2) + 2(I_3 - I_1) = 0$

$\rightarrow I_1 = 31\ A,\quad I_2 = 18\ A,\quad I_3 = 14\ A$

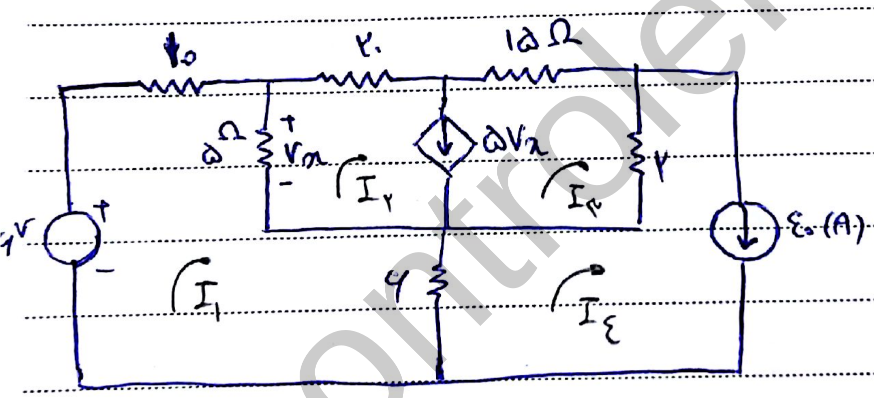


KVL1: $-91 + 1\times I_1 + 2(I_1 - I_3) + 2(I_1 - I_2) = 0$

KVL2: $2(I_2 - I_1) + 2(I_2 - I_3) + 1(I_2) = 0$

$I_3 = 14\ (A)$

$\Rightarrow I_1 = 31\ (A),\quad I_2 = 18\ A,\quad I_3 = 14\ (A)$



KVL1: $-6 + 10I_1 + 5(I_1 - I_2) + 6(I_1 - I_4) = 0$

KVL23: $5(I_2 - I_1) + 20(I_2) + 15(I_3) + 2(I_3 - I_4) = 0$

KVL4: به دلیل وجود منبع جریان نمی‌توان نوشت ⟶ معادله مش ۴: $I_4 = 40\ (A)$

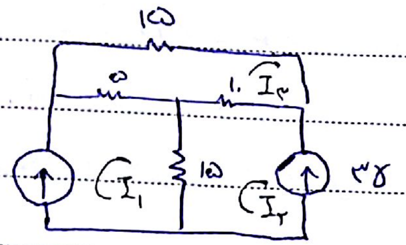
$I_2 - I_3 = 5V_x = 5(5\times(I_1 - I_2))$

Year:........ Month:........ Day:........( )

از کدوم روش استفاده کنیم؟

در هر مسئله استفاده از یکی از دو روش ساده‌تر است:

مثال ۱)



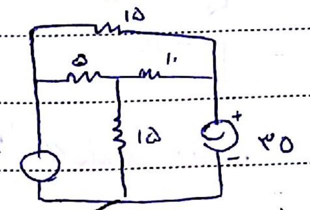
$I_1 = 10$

$I_2 = -35$

$15 I_3 + 10(I_3 + 35) + 5(I_3 - 10) = 0$

$\Rightarrow I_3 = -10 (A)$

مثل ۱)



$e_1 = 10$

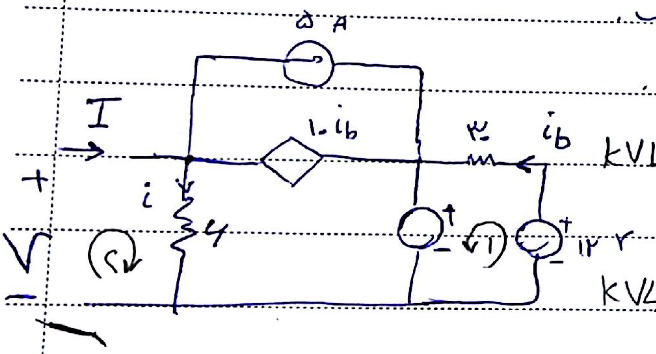
$e_3 = 35$

$\frac{1}{5}(e_2 - 10) + \frac{1}{15} e_2 + \frac{1}{10}(e_2 - 15) = 0 \Rightarrow e$

مدارهای معادل تونن نرتن

مداری داریم که ترکیب تعدادی مقاومت، منابع وابسته و منابع مستقل است.

تنها رفتار مدار از دو سر مشخص شده مورد نظر است

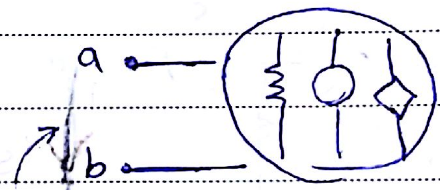


KVL1: $-12 + 30 i_b + 6 = 0 \Rightarrow i_b = \frac{6}{30} = 0.2 (A)$

$i + 10 i_b + 5 - I = 0 \Rightarrow i = I - 5 - 2 = I - 7$

KVL2: $-V + 6(i) = 0 \Rightarrow V = 6I - 42$

$\equiv$



اصل مطلب: (مدارها شامل مقاومت و منابع)

اگر از هر دو سر a و b به مدار نگاه کنیم، رابطه میان ولتاژ V و جریان I یک رابطه خطی به شکل $V = \alpha I + \beta$ است

تونن ثابت کرد α مقاومت دیده شده از دو سر a و b و β ولتاژ مدار باز دیده شده از این دو سر

است که از این به بعد به آنها به ترتیب R_{th} و e_{oc} می‌گوییم

e open-curcuit ← مدار باز است از طرف a,b ا مدار کاملم   R thevlan

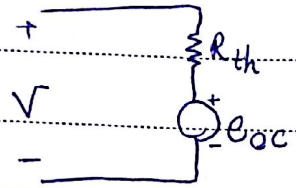
* برای محاسبه R_{th} ابتدا تمام منابع مستقل مدار را صفر می‌کنیم و سپس مقاومت دیده شده را محاسبه می‌کنیم

در این صورت به طور قطع رابطه ما فاقد عرض از مبدا خواهد بود

منبع جریان ← $I = 0$ ← مدار باز

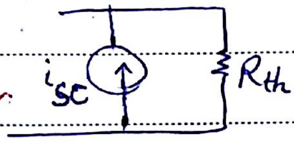
منبع ولتاژ ← $V = 0$ ← اتصال کوتاه

مدار معادل تونن به صورت مقابل است:



نورتن ثابت کرد:

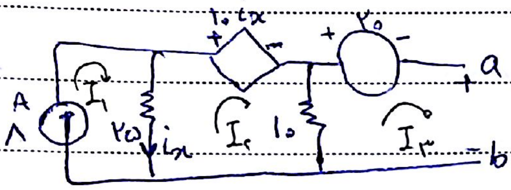
مدار فوق را به صورت مقابل می توان نشان داد:



سیم a به b ← $i_{short\ Circuit}$

که در شکل مقابل $i_{sc}=\frac{e_{oc}}{R_{th}}$

مثال) کمیت های R_{th} ، e_{oc} و i_{sc} را به دست آورید و رابطه $R_{th}=\frac{e_{oc}}{i_{sc}}$ را تحقیق کنید.



$\boxed{e_{oc}}$

$I_1 = 8\,(A)$

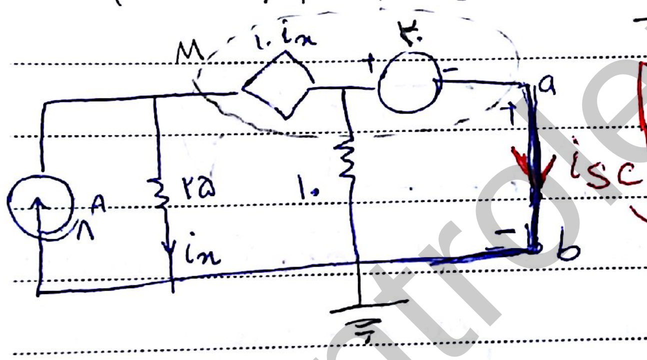
$I_3 = 0\,(A) \rightarrow$ مدار باز

KVL2: $25(I_2-8)+10I_x+10I_2=0$

$I_x = 8 - I_2$

$\Big\} \Rightarrow I_2 = 4.8\,(A)$

$10(0-4.8)+20+e_{oc}=0 \Rightarrow e_{oc}=28\,(V)$



$\boxed{i_{sc}}$

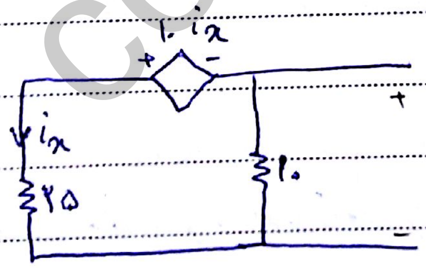
از قطب + به −

$e_2 = 20$

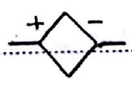
$e_1 - e_2 = 10\,i_x = 10\,\frac{e_1}{25}$

$\Rightarrow e_1 - 20 = \frac{10}{25}e_1 \Rightarrow e_1 = \frac{25}{15}\times 20$

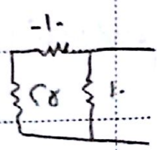
KCL M: $-8+\frac{e_1}{25}+\frac{e_2}{10}+i_{sc}=0 \Rightarrow i_{sc}=8-\frac{20}{15}-2$



$\boxed{R_{th}}$



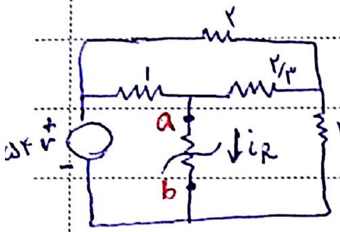
$V=-10\,i_x \rightarrow R=-10\,\Omega$

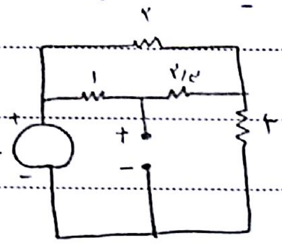


$R_T = \frac{15\times 10}{15+10} = \frac{150}{25} = 6\,\Omega$

Subject: ....
Year:......... Month:......... Day:.........( )

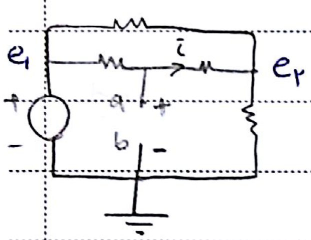
مثال) در مدار مقابل مقاومت غیرخطی با رابطه $V_R = 6i_R^3 - \frac{2}{3} i_R$ توصیف می‌شود جریان گذرنده از این مقاومت؟





ابتدا مدار مقابل را ساده می‌کنیم تا جریان و ولتاژ عبوری از ولتاژ غیرخطی به دست آید. چون اگر بخواهیم با روش‌های معمول گره و مش حل کنیم، معادلات غیرخطی وارد معادلات ما می‌شود.

محاسبه e_{oc}:



$e_1 = 54$

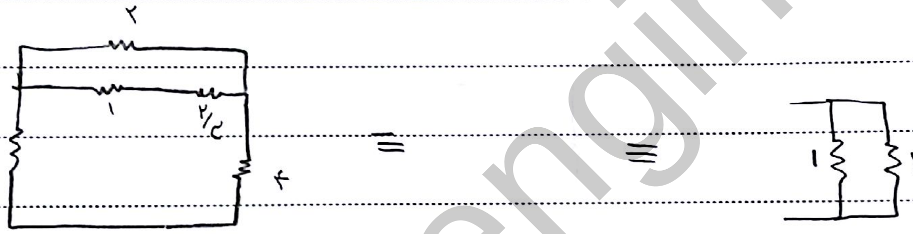
KCL 2: $\frac{e_2}{4} + \frac{e_2 - 54}{\frac{10}{11}} = 0 \Rightarrow e_2 = 44V$

$i = \frac{10}{\frac{5}{3}} = 6 (A)$

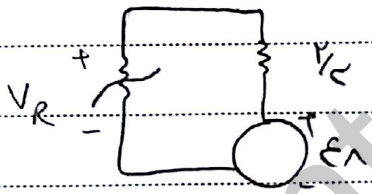
$-e_{oc} + \frac{2}{3} i + e_2 = 0 \Rightarrow e_{oc} = 48V$

محاسبه R_{th}:

R_{th}:

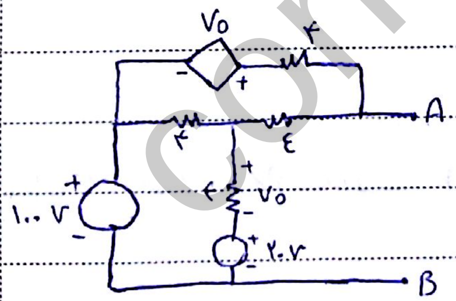


$R_{th} = \frac{2}{3}$

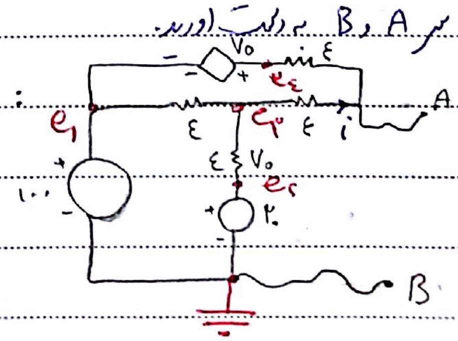


$-48 + \frac{2}{3} i_R + 6i_R^3 - \frac{2}{3} i_R = 0 \Rightarrow i_R = 2 (A)$

مثال) معادل تونن را از دو سر A و B به دست آورید.



e_{oc}:



KCL 3: $\frac{e_3 - e_2}{4} + \frac{e_3 - e_1}{4} + \frac{e_3 - e_4}{8} = 0$

$e_1 = 100V$

$e_2 = 20V$ $\qquad e_4 = 100 + V_0$

$V_0 = e_3 - e_2$

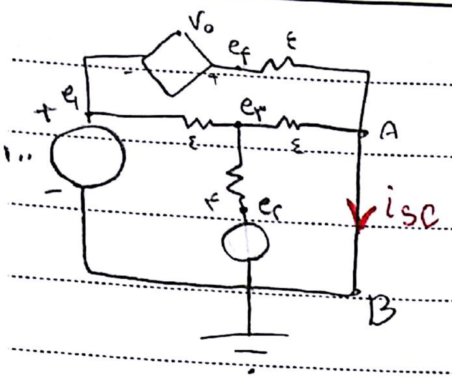
$\Rightarrow \begin{cases} e_1 = 100 \\ e_2 = 20 \\ e_3 = 80 \\ e_4 = 160 \end{cases}$

$i = \frac{80 - 160}{8} = -10 (A)$

$-e_3 + 4i + e_{oc} = 0 \Rightarrow e_{oc} = 120 (V)$

Subject: ....
Year: .... Month: .... Day: .... ( )

بدست آوردن i_{sc}:



$e_1 = 100$

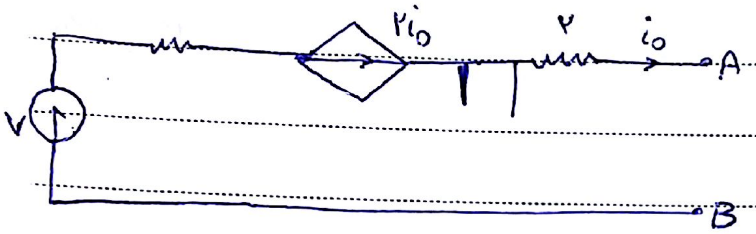
$e_2 = 20$

KCL3: $\frac{e_3-100}{4} + \frac{e_3-20}{4} + \frac{e_3}{4} = 0 \Rightarrow e_3 = 40\,V$

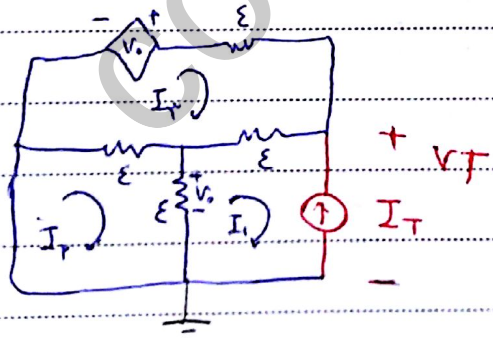
$e_4 = e_1 + V_0 = 100 + (40-20) = 120\,(V)$

KCL A: $\frac{-e_3}{4} + \frac{-e_4}{4} + i_{sc} = 0 \Rightarrow \boxed{i_{sc} = 40\,A}$

مثال:



مثال: محاسبه مقاومت تونن بدون معادل گیری



(1): $I_1 = -I_T$

KVL2: $4(I_2 - I_3) + 4(I_2 - I_1) = 0$

KVL3: $-V_0 + 4I_3 + 4(I_3 - I_1) + 4(I_3 - I_2) = 0$

$V_0 = 4(I_2 - I_1)$

$I_1 = -I_T$

$\Rightarrow \begin{cases} I_2 = -5/9\, I_T \\ I_3 = -2/3\, I_T \end{cases}$

(1) حلقه: $4(I_2 - I_1) + 4(I_2 - I_1) = V_T$

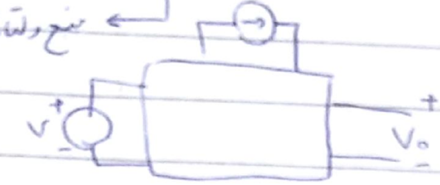
$V_T =$ $\rightarrow R_{th} =$

AYLAR

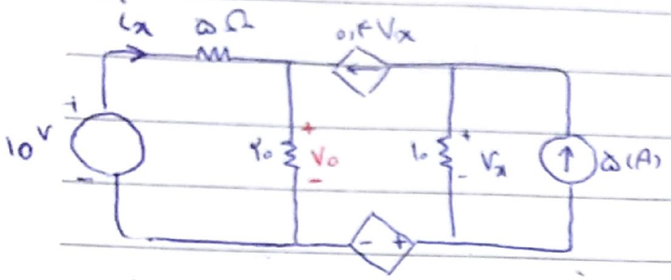
Subject :
Year : Month : Date :

جلسه ۱۴ - ۹۵/۸/۱

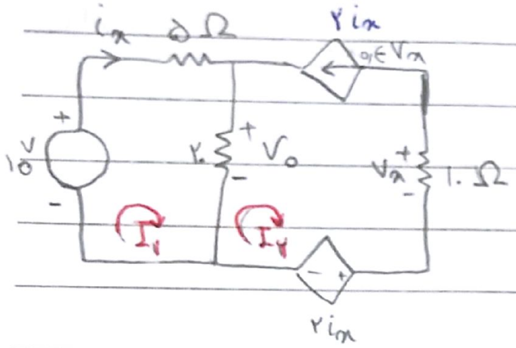
قضیه جمع آثار: پاسخ حاصل از اعمال همزمان دو یا چند منبع مستقل برابر با مجموع پاسخ های حاصل از اعمال هریک از منابع به تنهایی است؛ یعنی سایر منابع مستقل صفر قرار داده می‌شود ← منبع جریان ← اتصال باز
منبع ولتاژ ← اتصال کوتاه



مثال: ولتاژ V_o را با استفاده از جمع آثار تعیین نمایید.



۱) اثر منبع ولتاژ



KVL1:

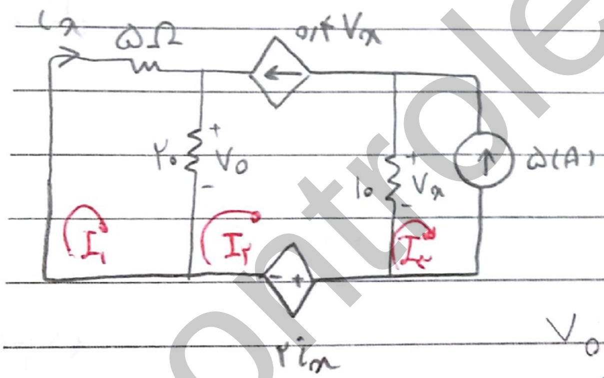
$$-10+5I_1+20(I_1-I_2)=0$$

$$I_2=-0.4V_x=-0.4(10I_2) \Rightarrow I_2=0$$

$$\Rightarrow I_1=\frac{10}{25}\ (A)$$

$$\Rightarrow V_{o_1}=20(I_1-I_2)=8\ (V)$$

۲) اثر منبع جریان



$$I_3=-5(A)$$

$$I_2=-0.4V_x=-0.4(10(I_2-I_3))$$

$$KVL1:\ 5I_1+20(I_1-I_2)$$

$$\Rightarrow I_1=-3.2A,\ I_2=-4A,\ I_3=-5A$$

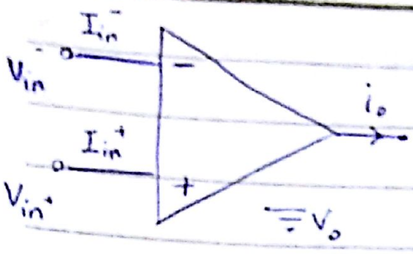
$$\left.\begin{array}{l} V_{o_2}=20(I_1-I_2)=16\ (V) \\ V_{o_1}=8\ (V) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$V_o=V_{o_1}+V_{o_2}=24\ (V)$$

Derakhshan

Subject :
Year : Month : Date :

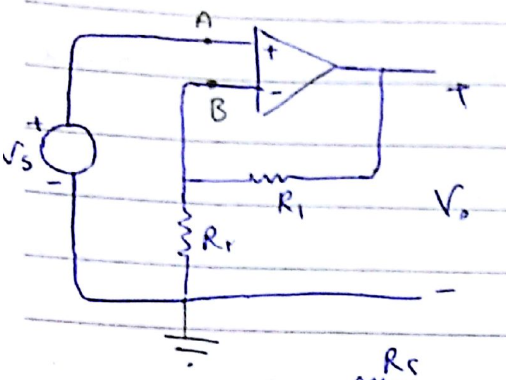
آپ امپ



$$\begin{cases} V_{in}^+ - V_{in}^- = 0 & \longrightarrow \text{اتصال کوتاه مجازی} \\ I_{in}^- = I_{in}^+ = 0 \end{cases}$$

[illegible]

مثال ۱)

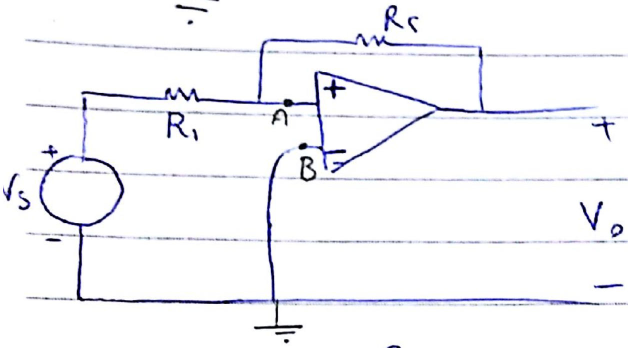


$V_A = V_s$

$V_B = V_A = V_s$

$$KCL\ B: \frac{V_B}{R_2} + \frac{V_B - V_o}{R_1} = 0 \implies \frac{V_o}{V_s} = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$$

مثال ۲)

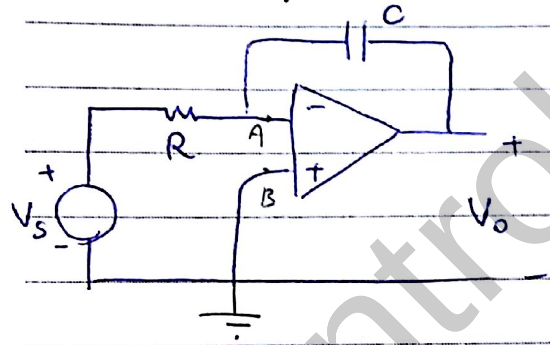


$V_B = 0$

$V_A = V_B = 0$

$$KCL\ A: \frac{V_A - V_s}{R_1} + \frac{V_A - V_o}{R_2} = 0 \implies \frac{V_o}{V_s} = -\frac{R_2}{R_1}$$

مثال ۳)

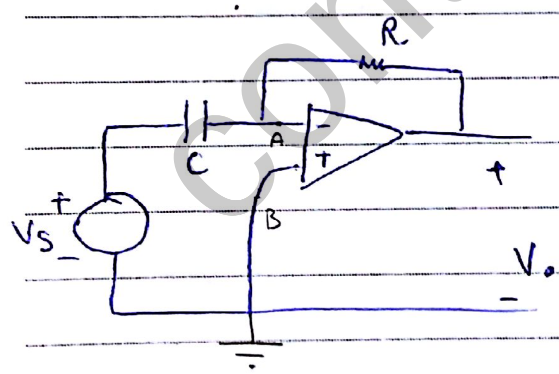


$V_B = V_A = 0$

$$KCL\ A: \frac{V_A - V_s}{R} + C\frac{d}{dt}(V_A - V_o) = 0$$

$$V_o = -\frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t} V_s(\tau)\,d\tau$$

مثال ۴)



$V_B = V_A = 0$ *

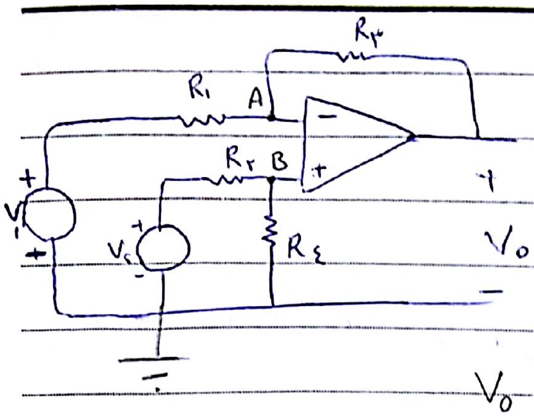
$$KCL\ A: C\frac{d}{dt}(0 - V_s) + \frac{(0 - V_o)}{R} = 0 \implies$$

$$V_o = -RC\frac{d}{dt}V_s$$

* وقتی جهت i و v متناظر باشند روابط گفته شده در عناصر بین v و i برقرار است (مثل خازن):
$\left(i = C\frac{dv}{dt}\right)$

Derakhshan

مثال ۵) V_o را برحسب V_1 و V_2 بیابید.



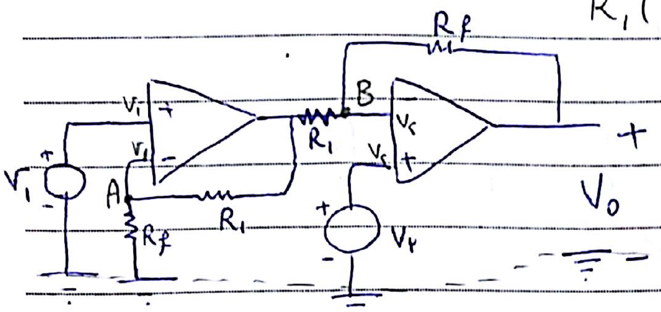
$$KCL\,A:\ \frac{V_A - V_1}{R_1} + 0 + \frac{V_A - V_o}{R_3} = 0$$

$$KCL\,B:\ \frac{V_B - V_2}{R_2} + 0 + \frac{V_B}{R_4} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$V_B = V_A$$

$$V_o = \frac{R_4(R_1 + R_3)}{R_1(R_2 + R_4)} V_2 - \frac{R_3}{R_1} V_1$$

مثال ۶)



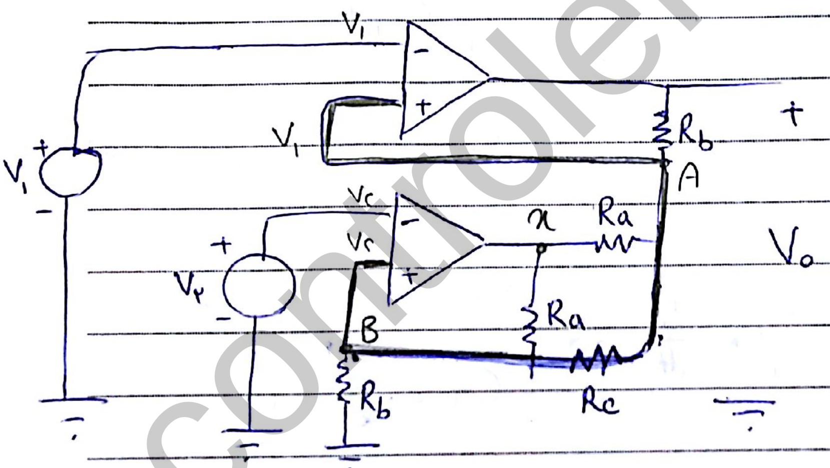
$$KCL\,A:\ \frac{V_1}{R_f} + \frac{V_1 - V_x}{R_1} = 0$$

$$KCL\,B:\ \frac{V_2 - V_x}{R_1} + \frac{V_2 - V_o}{R_f} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$V_o = \frac{R_1 + R_f}{R_1}(V_2 - V_1)$$

* در حل مدارهای شامل آپ امپ کافیست معادلات سه گانه آپ آمپ را در نظر بگیریم.

مثال ۷)



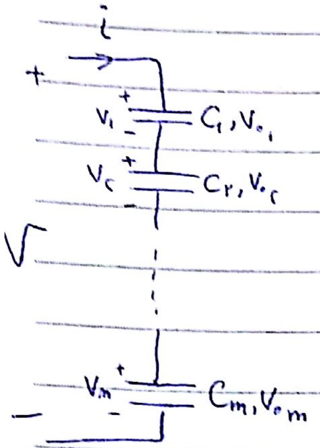
$$KCL\,A:\ \frac{V_1 - V_o}{R_b} + \frac{V_1 - V_x}{R_a} + \frac{V_1 - V_2}{R_c} = 0$$

$$KCL\,B:\ \frac{V_2}{R_b} + \frac{V_2 - V_x}{R_a} + \frac{V_2 - V_1}{R_c} = 0$$

$$\Rightarrow V_o = \frac{2R_aR_b + R_aR_c + R_bR_c}{R_aR_c}(V_1 - V_2)$$

در یک مدار الکتریکی به وجود نمی آید و از بین نمی رود ← به طور معادل مجموع توان مصرفی عناصر یک مدار الکتریکی ۰ است!

اتصال سری خازن ها



$$KCL: i_k = i_1 = \dots = i_m = i$$

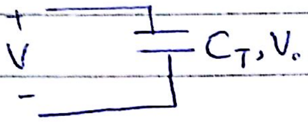
$$KVL: V = \sum_{k=1}^{m} V_k$$

$$V_k = V_{0_k} + \frac{1}{C}\int_0^t i_k(\tau)d\tau$$

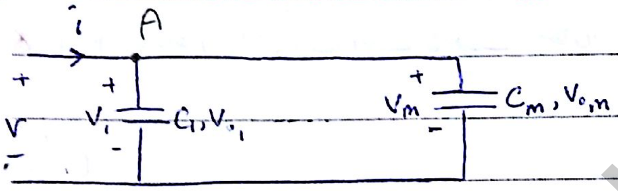
$$\Rightarrow V = \sum_{k=1}^{m}\left(V_{0_k} + \frac{1}{C_k}\int_0^t i_k(\tau)d\tau\right)$$

$$\Rightarrow V = \underbrace{\sum_{k=1}^{m} V_{0_k}}_{V_0} + \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{C_k}\right)}_{1/C_T}\int_0^t i(\tau)d\tau$$

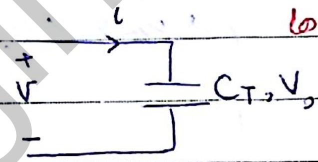
$\equiv$



اتصال موازی خازن ها



$\equiv$



فرض: $V_{0_1} = V_{0_2} = \dots = V_{0_m}$

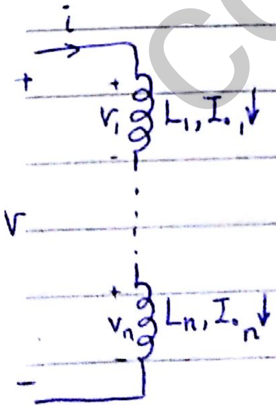
$$KCL\ A: \quad i = \sum_{i=1}^{m} i_k$$

$$i_k = C_k \frac{dv_k}{dt}$$

$$KVL: \quad V_1 = V_2 = \dots = V_n$$

$$\Rightarrow i = \left(\sum_{i=1}^{m} C_k\right)\frac{dv}{dt} \Rightarrow \begin{cases} V_0 = V_{0_1} = \dots = V_{0_m} \\ C_T = \sum_{k=1}^{m} C_k \end{cases}$$

اتصال سری سلف ها



فرض می کنیم: $I_{0_1} = I_{0_2} = \dots = I_{0_n}$

$$KCL: i_1 = i_2 = \dots = i_n = i$$

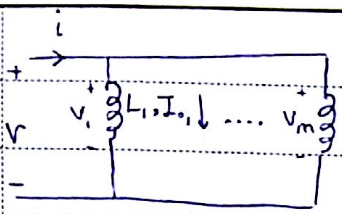
$$KVL: V = \sum_{k=1}^{m} V_k$$

$$V_k = L_k \frac{di_k}{dt}$$

$$\Rightarrow V = \left(\sum_{k=1}^{m} L_k\right)\frac{di}{dt} \Rightarrow \begin{cases} I_0 = I_{0_1} = \dots = I_{0_n} \\ L_T = \sum_{k=1}^{m} L_k \end{cases}$$

Year:........ Month:........ Day:........( )

اتصال موازی سلف ها



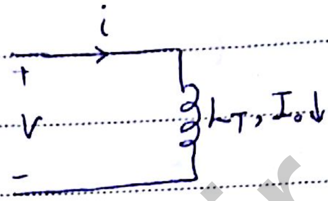
KCL: $i = \sum_{k=1}^{m} i_k$

KVL: $V = V_1 = V_2 = \dots = V_m$

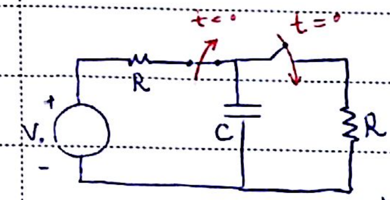
$i_k(t) = I_{0k} + \left(\int_0^t V_k(\tau)d\tau\right)\frac{1}{L_k}$

$\Rightarrow i = \sum_{k=1}^{m}\left(I_{0k} + \frac{1}{L_k}\int_0^t V_k(\tau)d\tau\right)$

$$\Rightarrow i = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{m} I_{0k}\right)}_{I_0} + \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{L_k}\right)}_{L_T}\int_0^t V(\tau)d\tau \longrightarrow$$

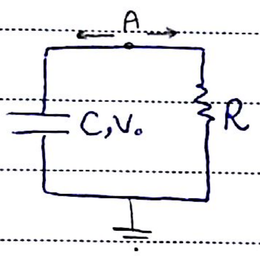


مثال)

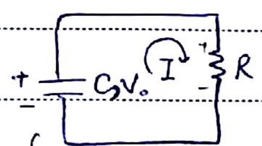


در زمان $t<0$، مدار به قدر کافی وصل داشته تا به شرایط پایدار برسد. یعنی ولتاژ آن ثابت شده و جریان گذرنده از خازن ($i = C\frac{dv}{dt}$) صفر می شود لذا در مدار سمت چپ داریم: $V_C = V_0$

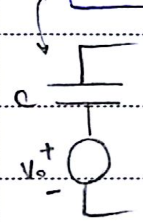
برای لحظات $t \geq 0$:



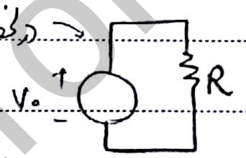
$$\text{KCL A}: C\frac{dV_A}{dt} + \frac{V_A}{R} = 0 \Rightarrow \frac{dV_A}{dt} + \frac{V_A}{RC} = 0 \;,\; V_A(0) = V_0 \Rightarrow V_A = V_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$$



$$-V_0 + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + Ri(t) = 0 \xRightarrow{\text{مشتق}} \frac{1}{C}i(t) + R\frac{di}{dt} = 0$$



$t = 0^+$ درلحظه



$i_0 = \frac{V_0}{R}$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

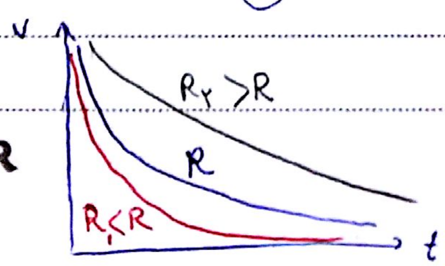
نکات

* منحنی نمایی با دو عدد مشخص می شود: ① مقدار آن در یک لحظه مشخص (مثلا صفر) ② ثابت زمانی آن (T)

$f(t) = f(0)e^{-t/T}$

در زمان:
- $t = T$ منحنی به ۳۷٪ مقدار اولیه اش می رسد
- $t = 4T$ منحنی به ۲٪ مقدار اولیه اش می رسد

* بعد عدد $S = -\frac{1}{RC}$ معکوس زمان یا فرکانس آن است و برحسب $\frac{rad}{s}$ اندازه گیری می شود. این مقدار، فرکانس طبیعی مدار نامیده می شود



کاهش مقاومت ← زودتر میرا شدن جریان

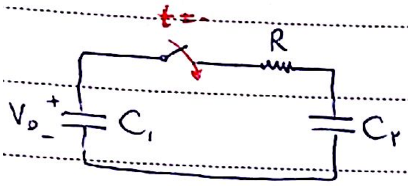
Subject: ....

Year: ...... Month: ...... Day: ...... ( )

در تجزیه مدار (شبکه) معمولا به رفتار یک متغیر خاص توجه داریم که به آن متغیر شبکه گویند. به پاسخ مدار برای آن متغیر پاسخ شبکه می‌گوییم.

پاسخ شبکه عموماً معلول منابع مستقل [ورودی] و شرط‌های اولیه [حالت] (V_0 خازن، I_0 سلف) (و یا هر دو) است.

در مثال قبلی، با حالتی مواجه بودیم که ورودی وجود نداشت و پاسخ تنها در اثر حالت اولیه خازن به وجود آمد، به این پاسخ ورودی صفر می‌گوییم (به تعریف: پاسخ شبکه‌ای که هیچ گونه ورودی (منابع مستقل) نداشته باشند).



مثال)

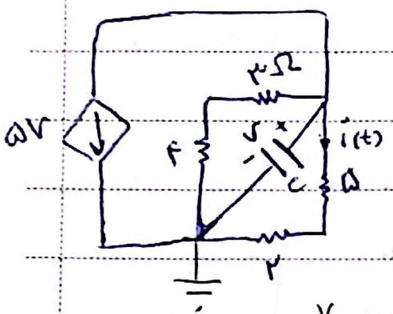
$$KVL: -V_0 + \frac{1}{C_1}\int_0^t i(\tau)d\tau + R\,i(t) + \frac{1}{C_2}\int_0^t i(\tau)d\tau = 0$$

$$\Rightarrow \frac{i(t)}{C_1} + R\frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{C_2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right) i(t) + R\frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}$$

جلسه ۱۴ - ۹۵/۸/۸

AYLAR

مثال) $i(t)$ را برای $t \geq 0$ بدست آورید $V(0^-)=3V$



$C=4mF$

KCL: $5V + \frac{V}{3+4} + \frac{V}{5+2} + 4\times10^{-3}\frac{dV(t)}{dt} \Rightarrow V' + 1321.4V = 0$

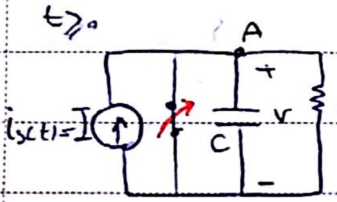
$\Rightarrow V(t) = Ke^{-1421.4t}$
$V(0^-) = V(0^+) = 3$ $\Big\} \Rightarrow V(t) = 3e^{-1421.4t} \quad t \geq 0 \Rightarrow$

$i(t) = \frac{3}{V} e^{-1421.4t} \quad (t \geq 0)$

نکته: وقتی منبع ضربه‌ای در مدار وجود ندارد و متناظراً در معادلات اثری از $\delta(t)$ نیست حالت مدار در 0^- و 0^+ تغییری نمی‌کند.

مدارهای مرتبه اول _ پاسخ حالت صفر

$t \geq 0$



$V_C(0^-) = 0$

KCL A: $-I + CV' + \frac{V}{R} = 0 \quad , t \geq 0 \quad \boxed{V(0^-)=0}$ ← ربطی به این معادله نداره

$i_s(t) = I \equiv i_s(t) = u(t)I \Rightarrow -Iu(t) + CV' + \frac{V}{R} = 0 \quad , \forall t \quad , V(0^-) = 0$

$t \geq 0 \qquad \forall t$

پس در V'، $u(t)$ هست (استدلال رو از بالاترین مشتق شروع می‌کنیم. چون این جمله اگر به مشتقات بالاتر منسوب باشد باید مشتقات بعدی اش در معادله ظاهر شود)

پس در V، $r(t)$ هست که پیوسته است. یعنی $V(0^-)=V(0^+)=0$

$t>0: CV' + \frac{V}{R} = Iu(t) = I \quad , V(0^+) = 0$

$V = V_h + V_p = Ke^{-\frac{t}{RC}} + IR \quad V(0^+) = 0 \Rightarrow V_{(t)} = -IRe^{-t/RC} + IR = IR(1-e^{-t/RC}) \quad (t \geq 0)$

اگر $i_s(t) = I\delta(t)$

$CV' + \frac{V}{R} = I\delta(t) \xrightarrow{\int_{0^-}^{0^+}} C[V(0^+) - V(0^-)] + \frac{1}{R}\underbrace{\int_{0^-}^{0^+} V dt}_{\text{صفر}} = I(u(0^+) - u(0^-))$

$\Rightarrow CV(0^+) = I(1-0) \Rightarrow V(0^+) = \frac{I}{C}$

$CV' + \frac{V}{R} = I\delta(t) \rightarrow t>0: CV' + \frac{V}{R} = 0$
$V(0^+) = \frac{I}{C}$ $\Big\} \Rightarrow V = Ke^{\frac{-t}{RC}}$
$V(0^+) = \frac{I}{C}$ $\Big\} \Rightarrow V = \frac{I}{C} e^{\frac{-t}{RC}}$

اسلوب حل مسئله اول:

$CV' + \frac{V}{R} = Iu(t) \quad t \geq 0^- \quad , u(0^-) = 0 \longrightarrow$ غیر قابل حل

$CV' + \frac{V}{R} = Iu(t) \quad t \geq 0 \rightsquigarrow V = RI(1-e^{-t/RC}) \rightsquigarrow V = RI(1-e^{-t/RC})u(t)$

$t \geq 0^-$

AYLAR

* حال اگر گفته بود $V=0 \quad -\infty < t < 0$ می‌شد معادله جواب $\forall t$ باشد.

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t-t_0) = f(t_0)$ — در مورد $\delta(t)$

پاسخ مدار مرتبه اول در شرایط $t=0^+ , t=\infty$

$y'+ay=b$ $\quad t>0 \ (t\geq 0^+)$

$a>0$

b دلخواه

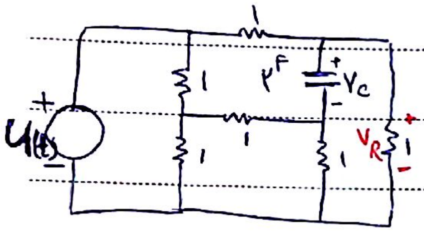
$$\Rightarrow y(t)=ke^{-at}+b_0 \Rightarrow \begin{cases} y(0)=k+b_0 \\ y(\infty)=b_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=y(0^+)-y(\infty) \\ b_0=y_\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(t)=\left(y(0^+)-y(\infty)\right)e^{-at}+y(\infty) \ ; \ (t>0)$$

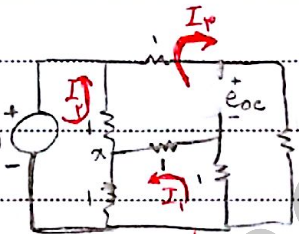
a را چطوری پیدا کنیم؟ برای مدارهای RC ثابت زمانی $\frac{1}{RC}$ است. پس کافیست R_{th} را در دو سر خازن بیابیم

مثال: $V_{C(t)}$ ؟

$V_{R(t)}$ ؟



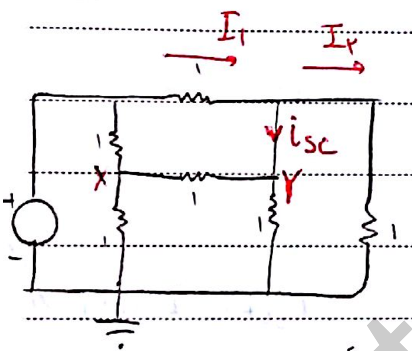
$t\geq 0^+$ برای:



$$KCL: V_x+\frac{V_x}{2}+\frac{V_x-1}{1}=0 \Rightarrow V_x=0.4$$

$$I_1=-\frac{V_x}{2}=-0.2$$

$$I_2=\frac{0.4-1}{1}=-0.6 \ , \ I_3=1/2 \Rightarrow e_{oc}=0.3$$

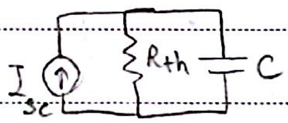


$$KCLX: \frac{V_x}{1}+\frac{V_x-V_y}{1}+\frac{V_x-1}{1}=0$$

$$KCLY: \frac{V_y}{1}+\frac{V_y-V_x}{1}+\frac{V_y-1}{1}+\frac{V_y}{1}=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_y=4/11 \\ V_x=5/11 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} I_1&=\frac{1-4/11}{1} \\ I_2&=4/11 \end{aligned}\right\} \Rightarrow i_{sc}=\frac{3}{11}(A)$$

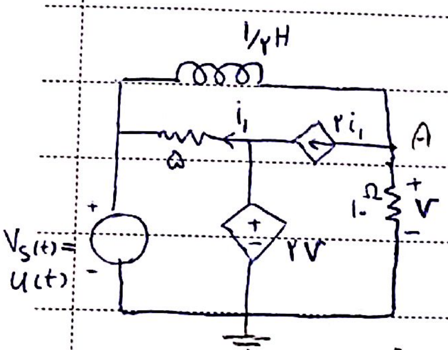
$\equiv$  $\sim v'+av=b$

$$\left.\begin{aligned} V_C(0^+)&=0 \\ V_C(\infty)&=e_{oc}=0.3\,V \\ R_{th}&=\frac{e_{oc}}{i_{sc}}=11/10\ \Omega \end{aligned}\right\} \Rightarrow V_C(t)=\left(V_{0^+}-V_\infty\right)e^{-\frac{t}{RC}}+V_\infty=0.3\left(1-e^{-5/11\,t}\right)$$

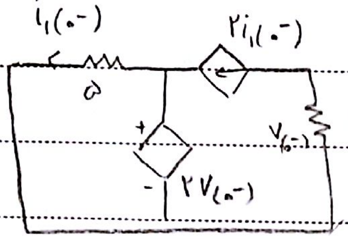
$V_{R(0^+)}$ — مدار SC $\sim V_{R_{0^+}}=V_Y=\frac{4}{11}(V)$

$V_{R(\infty)}$ — مدار OC $\sim V_{R(\infty)}=\left(V_{R(0)}-V_{R(\infty)}\right)e^{-\frac{t}{RC}}+V_{R(\infty)}=1/2-\frac{3}{22}e^{-5/11\,t}$

مثال) $V(t)$ را تعیین کنید ($i_L(0^-)=0$) برای $t\geq 0^-$



$t=0^-$



$V(0^-)=0$

* در این لحظه سلف با منبع جریان با جریان i_L متناظر است

$$KCL\ A:\quad 2i_1+\frac{V}{10}+2\int_0^t (V-V_s)(\tau)\,d\tau=0$$

$$i_1=\frac{2V-V_s}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5}(2V-V_s)+\frac{V}{10}+2\int_0^t (V-V_s)(\tau)\,d\tau=0$$

$$\Rightarrow \frac{9}{10}V'+2V=\frac{2}{5}V_s'+2V_s \qquad (t>0^-,\ V_{0^-}=0)\ *$$

$$\frac{9}{10}V'+2V=\frac{2}{5}\delta(t)+2u(t)$$ ← این نقطه در بازه ناپیوست

$V'\to\delta(t)\Rightarrow V\to u(t)\Rightarrow V(0^+)\neq V(0^-)$ ناپیوسته ← شرط اولیه را باید بیابیم

از طرفین معادله * $\int_{0^-}^{0^+}$ می‌گیریم

$$\frac{9}{10}(V_{0^+}-V_{0^-})+2\underbrace{\int_{0^-}^{0^+}V\,dt}_{\text{صفر}}=\frac{2}{5}\left(u(0^+)-u(0^-)\right)+2\int_{0^-}^{0^+}u(t)\,dt$$

در V حداکثر u داریم که انتگرال در این بازه صفره

$$\Rightarrow 0.9V_{0^+}+0=\frac{2}{5}(1-0)+0\Rightarrow V_{0^+}=\frac{4}{9}\,(V)$$

$$\Rightarrow V'+\frac{20}{9}V=\frac{20}{9}\qquad (t>0)$$

$$\left.\begin{aligned}V_{h}(t)&=ke^{-\frac{20}{9}t}\\ V_{p}(t)&=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned}V(t)&=1+ke^{-\frac{20}{9}t}\\ V(0^+)&=\frac{4}{9}\end{aligned}\right\}\Rightarrow V(t)=1-\frac{5}{9}e^{-\frac{20}{9}t}\quad t>0$$

$$\to V(t)=1-\frac{5}{9}e^{-\frac{20}{9}t}\quad t\geq 0$$

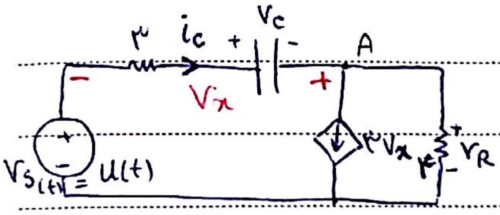
$V(t)$ ضربه یا مشتق ضربه ندارد

AYLAR

$$V(t)=\left(1-\frac{5}{9}e^{-\frac{20}{9}t}\right)u(t)\quad t\geq 0^-$$

سوال ۱ :

Subject: ....
Year:........ Month:........ Day:........( )



$V_c(0^-) = 0$ ، $V_c(t)$ را برای $t \geq 0$ بدست آورید

$$KCL_A: \; -i_c + 3V_x + \frac{V_R}{4} = 0$$

$$3i_c + V_c + V_x = 0 \Rightarrow V_x = -(V_c + 3i_c)$$

KVL کل: $-V_s - V_x + V_R = 0 \Rightarrow V_R = V_s + V_x = V_s - (V_c + 3i_c)$

معادله ساز

$$\Rightarrow 43\, i_c + 13 V_c = V_s \Rightarrow 43(2V_c') + 13 V_c = V_s \Rightarrow 86 V_c' + 13 V_c = u(t) \quad t > 0^-$$

$u \to V_c'$ ، $r \to V_c$ ⟵ $V_c(0^-) = V_c(0^+)$

$$\Rightarrow 86 V_c' + 13 V_c = 1 \quad \left(t \geq 0^+ ,\; V_c(0^+) = 0\right)$$

$$V_{c_{h}(t)} = k e^{-\frac{13}{86}t}$$

$$V_{c_{p}(t)} = \frac{1}{13}$$

$$\Rightarrow V_c(t) = \frac{1}{13} + k e^{-\frac{13}{86}t}$$

$$\Rightarrow V_c(t) = \frac{1}{13}\left(1 - e^{-\frac{13}{86}t}\right) \quad t > 0$$

ضرب پله

$$V_c(t) = \frac{1}{13}\left(1 - e^{-\frac{13}{86}t}\right) \quad t \geq 0$$

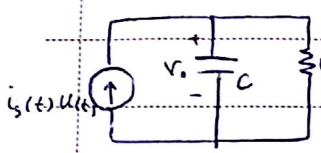
$$V_c(t) = \frac{1}{13}\left(1 - e^{-\frac{13}{86}t}\right) u(t) \quad t \geq 0^-$$

Subject: ....
Year: .... Month: .... Day: .... ( )

پاسخ کامل

پاسخ مدار به ترکیب هم ورودی و هم شرط‌های اولیه (حالت)

قضیه: برای مدار ساده RC موازی پاسخ کامل برابر است با مجموع پاسخ ورودی صفر و حالت صفر



کامل $\begin{cases} CV' + GV = i_s(t)u(t) \\ V_{0^-} = V_0 \end{cases}$

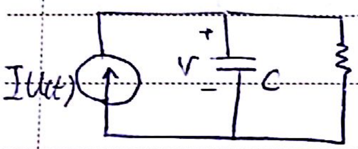
ورودی صفر V_i $\begin{cases} CV_i' + GV_i = 0 \\ V_i(0^-) = V_0 \end{cases}$

حالت صفر V_o $\begin{cases} CV_o' + GV_o = i_s(t)u(t) \\ V_o(0) = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} C(V_i' + V_o') + G(V_i + V_o) = i_s(t)u(t) \\ V_i(0^-) + V_o(0^-) = (V_i + V_o)_{(0^-)} = V_0 \end{cases}$$

پس $V = V_i + V_o$ والسلام!

مثال) پاسخ کامل شبکه مقابل را بیابید.

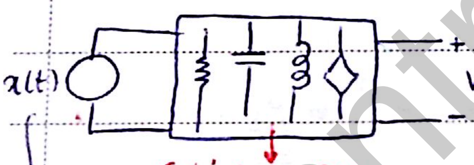


$V(0^-) = V_0$

$$\left.\begin{aligned} V_i &= V_0 e^{-\frac{1}{RC}t} \quad t \geq 0 \\ V_o &= RI(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}) \quad t \geq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow V(t) = \underbrace{(V_0 - IR)e^{-\frac{1}{RC}t}}_{\text{حالت گذرای پاسخ}} + \underbrace{RI}_{\text{حالت دائمی}} \quad t \geq 0$$

حالت گذرا: محلول ورودی و حالت اولیه — حالت دائمی: فقط معلول ورودی

خطی بودن پاسخ حالت صفر



حالت عناصر صفر است

$e^{kt} + A\cos(wt)$

$x_1(t) \longleftrightarrow V_1(t)$

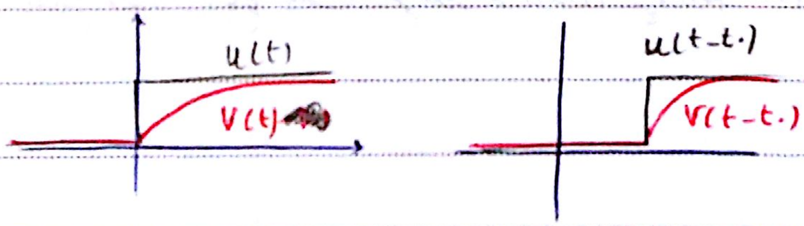
$x_2(t) \longleftrightarrow V_2(t)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) + x_2(t) \longleftrightarrow V_1(t) + V_2(t) \\ \alpha x_1(t) \longleftrightarrow \alpha V_1(t) \end{cases}$$

تغییرناپذیری با زمان پاسخ حالت صفر

$x(t) \longleftrightarrow V(t) \Rightarrow x(t - t_0) \longleftrightarrow V(t - t_0)$

مثلاً در مدار RC $i_s(t) = u(t)$

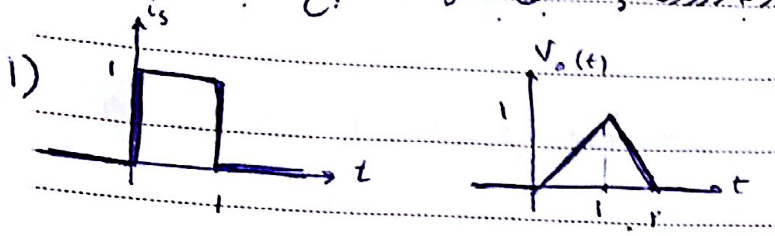


AYLAR

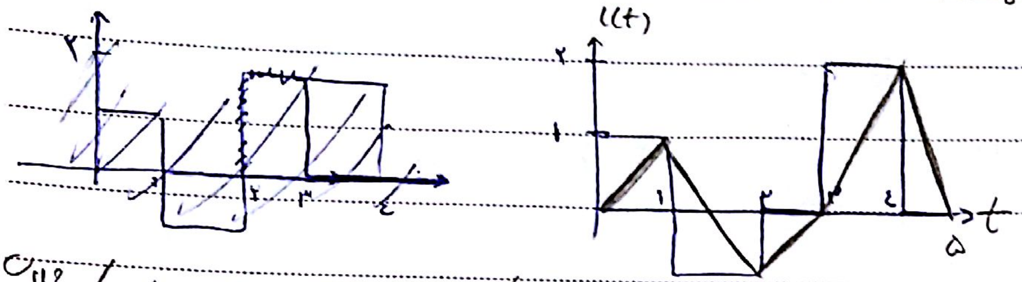
Subject: ....
Year: .... Month: .... Day: .... ( )

مثال) مدار تغییرناپذیر با زمان و خطی درنظر بگیرید. پاسخ حالت صفر مدار به ورودی i_s مطابق با V_0 است. پاسخ مدار به ورودی i را تعیین کنید.

1)

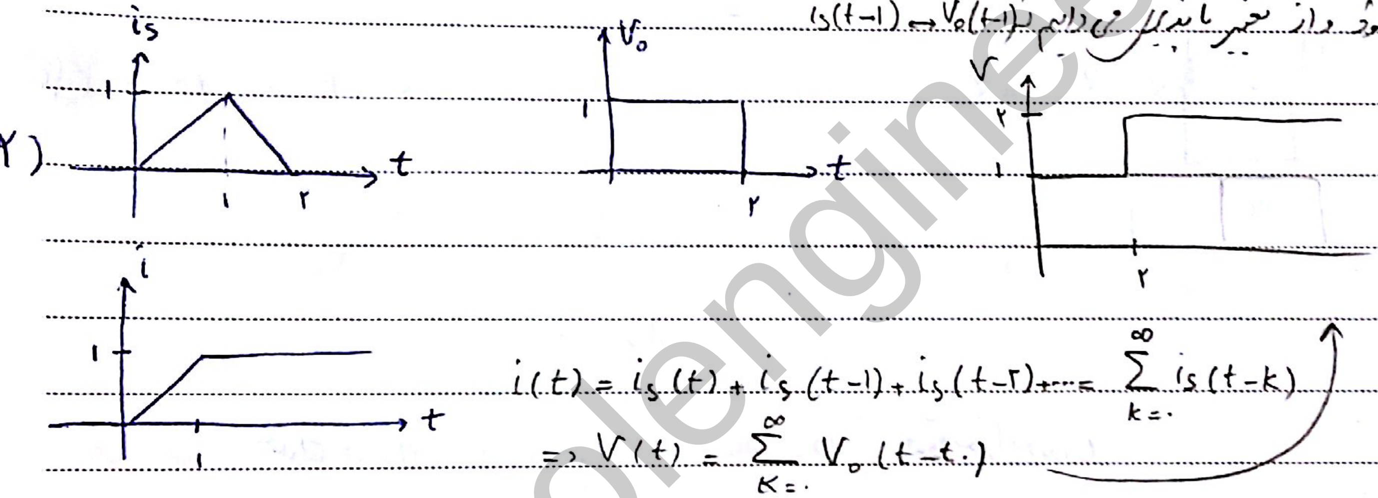


$$\begin{cases} i(t) = i_s(t) - i_s(t-1) + 2i_s(t-3) \\ V(t) = V_0(t) - V_0(t-1) + 2V_0(t-3) \end{cases}$$



توضیح: مدار (خطی تغییرناپذیر با زمان) حالت صفر داریم. از خطی بودن می‌دانیم که جواب مجموع با مجموع جواب تک تک $i_s(t)$ ها یکی می‌شود و از تغییرناپذیر بودن می‌دانیم $i_s(t-1) \to V_0(t-1)$

2)



$$i(t) = i_s(t) + i_s(t-1) + i_s(t-2) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} i_s(t-k)$$

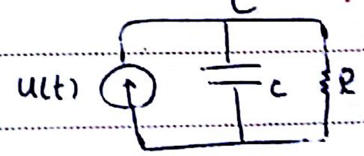
$$\Rightarrow V(t) = \sum_{k=0}^{\infty} V_0(t-t_0)$$

جلسه ۹۵/۱۲/۲۲

پاسخ پله: پاسخ حالت صفر مدار به ورودی پله واحد $u(t) \longrightarrow S(t)$

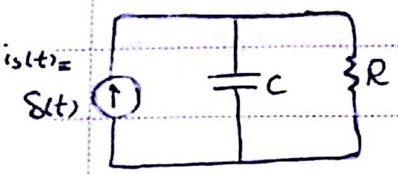
مثال)

$$S(t) = R(1-e^{-t/RC})u(t) \quad t>0$$



پاسخ ضربه: پاسخ حالت صفر مدار به ورودی ضربه واحد $\delta(t) \longrightarrow h(t)$

مثال) معادله دیفرانسیل مدار $CV' + GV = i_s(t)$



$V_c(0^-)=0$

راه حل اول) $\delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}P_\Delta(t)$ $\quad P_\Delta(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1/\Delta & 0<t<\Delta\\ 0 & \Delta<t\end{cases}$

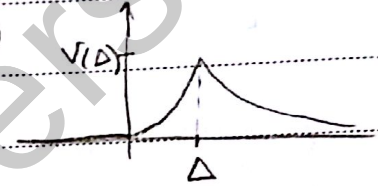
$\Rightarrow 0<t<\Delta:\ CV'+\frac{1}{R}V=\frac{1}{\Delta}$ و $V(0^-)=0$ پیوستگی $V(0^+)=0$ $\xrightarrow{\text{حل معادله}}$ $V=\frac{R}{\Delta}\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$

$\Delta<t:\ CV'+\frac{1}{R}V=0$ $\quad V(\Delta^-)=\frac{R}{\Delta}\left(1-e^{-\frac{\Delta}{RC}}\right)$ $\xrightarrow{\text{حل معادله}}$ $V=V(\Delta^+)e^{-\frac{(t-\Delta)}{RC}}$

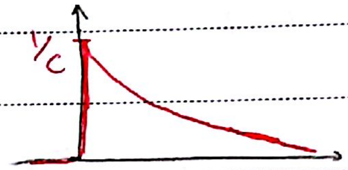
پیوستگی $V(\Delta^-)=V(\Delta^+)$

$$\Rightarrow V(t)=\begin{cases}\frac{R}{\Delta}\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right) & 0<t<\Delta\\ \frac{R}{\Delta}\left(1-e^{-\frac{\Delta}{RC}}\right)e^{-\frac{(t-\Delta)}{RC}} & \Delta<t\end{cases}$$

$\sim V(0^+)$

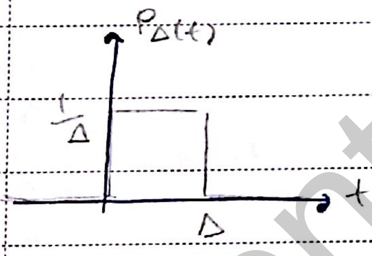


$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{R}{\Delta}\left(1-e^{-\frac{\Delta}{RC}}\right)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{R}{\Delta}\left(1-\left[1-\frac{\Delta}{RC}+\frac{\left(\frac{\Delta}{RC}\right)^2}{2!}-\dots\right)=1/C$$



$\Rightarrow V(t)=1/C\, e^{-\frac{t}{RC}}$ $\quad 0^+<t$

$\Rightarrow V(t)=(1/C\ e^{-t/RC})u(t)$ $\quad \forall t$



راه حل دوم) $P_\Delta(t)=\frac{1}{\Delta}\left(u(t)-u(t-\Delta)\right)$

ورودی P_Δ حاصل جمع خطی ورودی های $u(t)$, $u(t-\Delta)$ است

$u(t)\longrightarrow S(t)$

$$h_\Delta(t)=\frac{1}{\Delta}\left(S(t)-S(t-\Delta)\right)$$

$$h(t)=\lim_{\Delta\to 0}h_\Delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{S(t)-S(t-\Delta)}{\Delta}=S'(t)$$

پس ویژگی دیگری اثبات شد و آن اینکه جواب نیز مشتق جواب پله است.

$u(t)\longrightarrow\boxed{sys}\longrightarrow S(t)$ $\qquad \delta(t)\longrightarrow\boxed{sys}\longrightarrow h(t)=S'(t)$

$$S(t)=R\left(1-e^{-t/RC}\right)u(t)\Rightarrow h(t)=\underbrace{R\left(1-e^{-t/RC}\right)}_{f(t)}\delta(t)+1/C\ e^{-t/RC}u(t)$$

$\rightarrow f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)=$ صفر

AYLAR

$$\Rightarrow h(t)=1/C\ e^{-t/RC}u(t)$$

صفر

راه سوم) حل معادله دیفرانسیل

$CV' + GV = \delta(t) \qquad V(0^-) = 0$

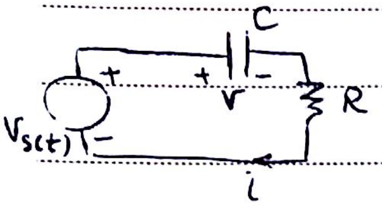
$V' \sim \delta(t) \Rightarrow V \sim u(t) \Rightarrow V(0^-) \neq V(0^+)$

$\int_{0^-}^{0^+} : C(V_{0^+} - V_{(0^-)}) + G\int_{0^-}^{0^+} V(t')\,dt' = 1 \Rightarrow CV(0^+) = 1 \Rightarrow V(0^+) = 1/C$

$t > 0 : CV' + GV = 0 \qquad V(0^+) = 1/C$

$\Rightarrow V(t) = 1/C \, e^{-t/RC} \quad t > 0$ ضربه ندارد $V(t) = 1/C \, e^{-t/RC} u(t) \quad (t \geq 0)$

مثال) در مدار مقابل پاسخ پله و ضربه v و i را بدست آورید.



$\left.\begin{array}{l} -V_s(t) + V + iR = 0 \\ i = CV' \end{array}\right\} \Rightarrow RCV' + V = V_s \qquad V(0^-) = 0$

* چرا بار V نوشتیم معادله رو؟ در مدارهای شامل خازن بهتره معادله روی ولتاژ V بنویسیم. در مدارهای شامل سلف: i !
علت: خازن ولتاژ خود را در لحظه شروع (اگر منبع ضربه نباشد) حفظ می‌کند. سلف هم جریان خود را!

$V' \sim u \Rightarrow$ پیوستگی

$RCV' + V = u(t) \quad V(0^-) = 0 \overset{\uparrow}{=} V(0^+) \Rightarrow RCV' + V = 1 \quad V(0^+) = 0 \Rightarrow$

$V(t) = (1 - e^{-t/RC})u(t) \quad (t \geq 0)$

$i = C\frac{dv}{dt} = \frac{1}{R} e^{-t/RC} u(t) \quad (t \geq 0)$

$RCV' + V = \delta(t) \quad V(0^-) = 0 \neq V(0^+)$

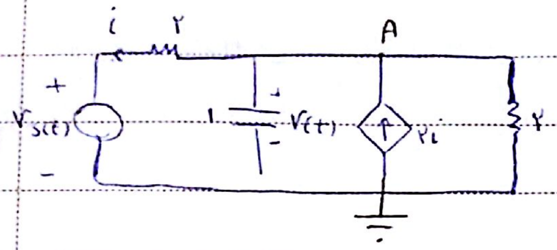
$\int_{0^-}^{0^+} RC(V(0^+) - V(0^-)) + \int_{0^-}^{0^+} V(t')\,dt' = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt \Rightarrow RCV_{0^+} + 0 = 1 \Rightarrow V(0^+) = \frac{1}{RC}$

بازنویسی برای $t > 0$: $RCV' + V = 0 \quad V(0^+) = 1/RC \Rightarrow V(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t) \quad (t \geq 0^-)$

$i(t) = C\,dv/dt \Rightarrow i(t) = \frac{1}{R}\delta(t) - \frac{1}{R^2C} e^{-t/RC} u(t)$

AYLAR

مثال) در مدار مقابل پاسخ پله و ضربه را تعیین نمایید.



پله: $V(0^-)=0$

معادله: $\frac{V(t)}{2} - 2i + V'(t) + \frac{V(t)-V_s(t)}{2} = 0$; $i = \frac{V(t)-V_s(t)}{2}$ $\Big\} \Rightarrow$

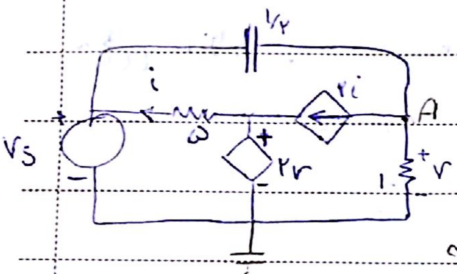
$V'(t) = -\frac{1}{2}V_s(t) \Rightarrow V'(t) = -\frac{u(t)}{2}$ $\quad V(0^-)=V(0^+)=0$

$t \geq 0^+ : V'(t) = -\frac{1}{2}$ $\quad V(0^+)=0 \Rightarrow V(t) = -\frac{1}{2}t \; ; t>0$ $\xRightarrow{\text{ضربه ندارد}} V(t) = \frac{-t}{2} \quad t \geq 0$

$\Rightarrow S(t) = \frac{-t}{2}u(t) = \frac{-r(t)}{2}$

$\Rightarrow h(t) = \frac{-u(t)}{2}$

مثال) پاسخ پله و ضربه؟



KCL A: $V(t) + 2 \times \frac{2V-V_s}{5} + \frac{1}{2}(V-V_s)' = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}V' + \frac{9}{5}V = \frac{1}{2}V_s' + \frac{2}{5}V_s$

پله: $\frac{1}{2}V' + \frac{9}{5}V = \frac{1}{2}\delta + \frac{2}{5}u$ $\quad V(0^-)=0 \neq V(0^+)$

$\int_{0^-}^{0^+} : \frac{1}{2}(V(0^+) - V(0^-)) + \frac{9}{5}(0) = \frac{1}{2} + 0 \Rightarrow V(0^+)=1$

$t>0: \frac{1}{2}V' + \frac{9}{5}V = \frac{2}{5}$ $\quad V(0^+)=1 \Rightarrow V(t) = ke^{-\frac{18}{5}t} + \frac{2}{9}$; $V(0^+)=1$ $\Big\} \Rightarrow k = \frac{7}{9}$

$V(t) = \left(\frac{7}{9}e^{-\frac{18}{5}t} + \frac{2}{9}\right)u(t) \quad t \geq 0 \Rightarrow$ $\quad f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$

$h(t) = \frac{-14}{5}e^{-\frac{18}{5}t}u(t) + \left(\frac{7}{9}e^{-\frac{18}{5}t} + \frac{2}{9}\right)\delta(t) = \frac{-14}{5}e^{-\frac{18}{5}t}u(t) + \delta(t)$

ضربه: $\frac{1}{2}V' + \frac{9}{5}V = \frac{1}{2}\delta' + \frac{2}{5}\delta$ $\quad V(0^-)=0 \neq V(0^+)$ $\quad V' \to \delta'$ ، $V \to \delta$ ✓

می‌دانیم در V، ضربه وجود دارد. ابتدا محاسبه می‌کنیم چه ضریبی از δ در V هست... (چون در بازه‌ی t>0 را، ضربه حذف می‌شود)

$V(t) = \alpha\delta(t) + g(t)$; $\int_{0^-}^{0^+} g(t')dt' = 0$

$\int_{0^-}^{0^+} : \frac{1}{2}(V(0^+) - V(0^-)) + \frac{9}{5}\int_{0^-}^{0^+}(\alpha\delta(t') + g(t'))dt' = \frac{1}{2}\int_{0^-}^{0^+}\delta' + \frac{2}{5}\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt'$

$\delta(0^+) - \delta(0^-) =$ صفر

$\Rightarrow \frac{1}{2}V(0^+) + \frac{9}{5}\alpha = \frac{2}{5}$ $\quad$ (یک معادله دو مجهول!)

AYLAR

Scanned by CamScanner

حال از معادله اصلی انتگرال (نامعین) می‌گیریم

$$\frac{1}{2}V' + \frac{9}{5}V = \frac{1}{2}\delta' + \frac{2}{5}\delta \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}V + \frac{9}{5}\int V = \frac{1}{2}\delta + \frac{2}{5}u \xrightarrow{\int_{0^-}^{0^+}} \frac{1}{2}\int_{0^-}^{0^+}(\alpha\delta(t') + g(t'))dt + \frac{9}{5}\int_{0^-}^{0^+}(\alpha u(t') + \int g(t'))dt = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\alpha + 0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow V(0^+) = -\frac{14}{5}$$

$t>0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}V' + \frac{9}{5}V = 0 \qquad V(0^+) = -\frac{14}{5}$$

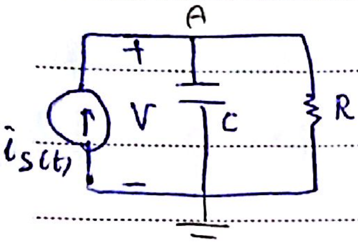
$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow V = k e^{-\frac{18}{5}t} \\ V(0^+) = -\frac{14}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow k = -\frac{14}{5} \Rightarrow V_{(t)} = -\frac{14}{5} e^{-\frac{18}{5}t} \quad t>0$$

$\delta(0) = \infty$

در نقطه صفر بینهایت می‌شود

$$\Rightarrow V(t) = -\frac{14}{5} e^{-\frac{18}{5}t} u(t) + \delta(t) \; : \; t \geq 0$$

مثال: $V(t)$؟



$i_s(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi_1) u(t) \quad , \quad V(0^-) = 0$

$$KCLA: \; CV' + \frac{V}{R} = i_s(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi_1) u(t)$$

$V' \to u \Rightarrow V \to r$ پیوسته $\Rightarrow V(0^-) = V(0^+) = 0$

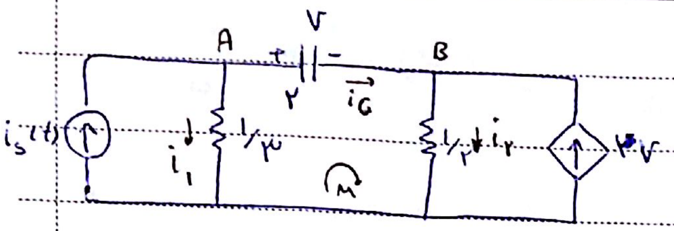
$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow CV' + \frac{V}{R} = A_1 \cos(\omega t + \phi_1) \\ V(0^+) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow V(t) = V_h + V_p$$

$V_h = k_1 e^{-\frac{1}{RC}t}$

$$V_p = A_2 \cos(\omega t + \phi_2) \xrightarrow{\text{قرار دادن در معادله}} \left\{\begin{array}{l} A_2 = \dfrac{A_1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2}} \\ \phi_2 = \phi_1 - \tan^{-1}\omega RC \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} V = k_1 e^{-\frac{1}{RC}t} + A_2 \cos(\omega t + \phi_2) \\ V(0^+) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow k_1 = -A_2 \cos\phi_2$$

$$\Rightarrow V(t) = \left[-A_2 \cos\phi_2 \, e^{-\frac{1}{RC}t} + A_2 \cos(\omega t + \phi_2)\right] u(t) \qquad t \geq 0^-$$



مثال: پاسخ پله و ضربه V را محاسبه کنید.

KCL A: $-i_s+i_1+i_C=0 \Rightarrow i_1=i_s-i_C$

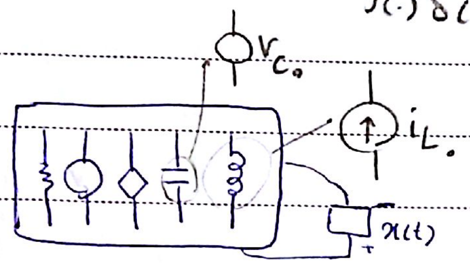
KCL B: $-i_C+i_2-2V=0 \Rightarrow i_2=2V+i_C$

KVL M: $-\frac{1}{3}i_1+V+\frac{1}{2}i_2=0 \Rightarrow V'+\frac{4}{5}V=\frac{1}{5}i_s \Rightarrow \begin{cases} V'+\frac{4}{5}V=\frac{1}{5} & t>0 \\ V(0^-)=0 \end{cases}$ $V'\to u$, $V\to r \to V(0^-)=V(0^+)$

$\Rightarrow \begin{cases} V'+\frac{4}{5}V=\frac{1}{5} & t>0 \\ V(0^+)=0 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{matrix} V=ke^{-\frac{4}{5}t}+\frac{1}{4} \\ V(0^+)=0 \Rightarrow k=-\frac{1}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow V=\frac{1}{4}\left(1-e^{-\frac{4}{5}t}\right) \quad t>0$

$\Rightarrow V=\frac{1}{4}\left(1-e^{-\frac{4}{5}t}\right)u(t) \quad t\geq 0$

پاسخ ضربه: $h(t)=\underbrace{\delta(t)\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{4}e^{-\frac{4}{5}t}\right]}_{f(0)\delta(t)=0\cdot\delta(t)=0}-\frac{4}{5}\times\frac{-1}{4}e^{-\frac{4}{5}t}u(t)=\frac{1}{5}e^{-\frac{4}{5}t}u(t)$



روال کلی حل مدارهای مرتبه اول

1) حالت پاسخ را برای $t=0^-$ بدست آورید $(x(0^-))$ ≡ حل مدار مقاومتی.

2) معادله دیفرانسیل توصیف کننده $x(t)$ در بازه $t>0^-$ را تعیین نمایید

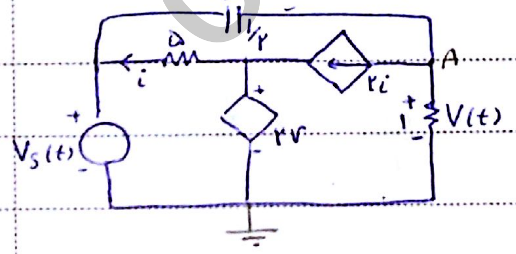
3) از روی معادله، $x(0^+)$ و ضربه و مشتقات ضربه موجود در پاسخ را تعیین نمایید

4) معادله دیفرانسیل را برای $t\geq 0^+$ $(t>0)$ بازنویسی کنید.

5) معادله دیفرانسیل را حل نموده و پاسخ را برای $t\geq 0^+$ تعیین نمایید

6) ضربه یا مشتقات ضربه احتمالی موجود در پاسخ را به پاسخ بدست آمده برای بازه $t\geq 0^+$ اضافه نمایید و پاسخ کامل مدار برای $t\geq 0$ را مشخص نمایید.

مثال: در مدار مقابل $V_C(0^-)=0$ خروجی مدار را به ازای $V_s(t)=4(\delta(t)-\delta(t-2))$ بدست آورید.



KCL A: $2i+\frac{V(t)}{1}+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(V(t)-V_s\right)=0$

$i=\frac{2V-V_s}{5}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}V'+\frac{9}{5}V=\frac{1}{2}V_s'+\frac{2}{5}V_s$

$0\leq t<2^-: V_s=4\delta(t) \Rightarrow \frac{1}{2}V'+\frac{9}{5}V=2\delta'(t)+\frac{8}{5}\delta(t) \to \begin{matrix} V'\to\delta' \\ V\to\delta \end{matrix} \Rightarrow V(0^-)\neq V(0^+)$

$V(0^-)=0$

$V=\alpha\delta(t)+g(t)$

$\int_{0^-}^{0^+}: \frac{1}{2}(V_{0^+}-V_{0^-}) + \frac{9}{5}\alpha = 2(\delta(0^+)-\delta(0^-)) + \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{1}{2}V(0^+) + \frac{9}{5}\alpha = \frac{8}{5}$

تعیین: $\frac{1}{2}V + \frac{9}{5}\int V = 2\delta(t) + \frac{8}{5}u(t)$

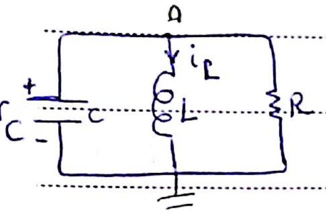
$\int V \to \alpha u(t) + \int g(t)$

$\int_{0^-}^{0^+}: \frac{1}{2}\alpha + 0 = 2 + 0 \Rightarrow \alpha = 4 \Rightarrow V(0^+) = -\frac{56}{5}$

$0 < t < 2: \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}V' + \frac{9}{5}V = 0 + 0 \\ V(0^+) = -\frac{56}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow V(t) = \left(-\frac{56}{5}e^{-\frac{18}{5}t}\right)u(t) + 4\delta(t) \quad 0 \le t < 2$

مدارهای مرتبه دوم

پاسخ ورودی صفر

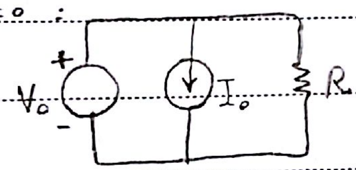


مثال) الف) $V_c(t)$ را بیابید

$i_L(0^-) = I_0, \quad V_c(0^-) = V_0$

KCL A: $CV_c' + \frac{V_c}{R} + I_0 + \frac{1}{L}\int_0^t V_c(\tau)d\tau \Rightarrow CV_c'' + \frac{V_c'}{R} + \frac{V_c}{L} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} V_c(0^-) = V_0 \\ V_c'(0^-) = ? \end{array} \right.$

$t = 0^-$:



$i_c = CV_c' \Rightarrow i_c(0^-) = CV_c'(0^-) \Rightarrow V_c'(0^-) = \frac{i_c(0^-)}{C}$

KCL A: $i_c(0^-) + I_0 + \frac{V_0}{R} = 0 \Rightarrow i_c(0^-) = -\left(I_0 + \frac{V_0}{R}\right)$

$\Rightarrow V_c'(0^-) = -\frac{I_0 + V_0/R}{C}$

ب) $i_L(t)$ را بیابید:

KCL A: $i_L + i_C + i_R = 0 \Rightarrow i_L + CV_L' + \frac{V_L}{R} = 0, \quad V_L = Li_L' \Rightarrow i_L + CLi_L'' + \frac{L}{R}i_L' = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} i_L(0^-) = I_0 \\ i_L'(0^-) = ? \end{array} \right.$

$t = 0^-: \quad V_L = i_L' \times L \Rightarrow i_L' = \frac{V_L}{L} \Rightarrow \boxed{i_L'(0^-) = \frac{V_0}{L}}$

$X(0^-) = f_L(V_c(0^-), I_L(0^-)) = \alpha V_c(0^-) + \beta I_L(0^-)$

$\Rightarrow X'(0^-) = \alpha V_c'(0^-) + \beta I_L'(0^-) = \alpha\frac{I_c(0^-)}{C} + \beta\frac{V_L(0^-)}{L}$

Subject:

Year: Month: Day: ( )

$$i_L'' + \frac{G}{C} i_L' + \frac{1}{LC} i_L = 0$$

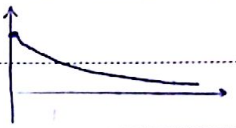
$$\Rightarrow i_L'' + 2\alpha i_L' + \omega_0^2 i_L = 0$$

معادله مشخصه: $S^2 + 2\alpha S + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha + \alpha_d \\ S_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha - \alpha_d \end{cases}$

شکل پاسخ ورودی صفر مدار به مقادیر α و ω_0 بستگی دارد. براین اساس چهار حالت متصور است:

۱) میرای شدید $\alpha > \omega_0$ ، S_1 و S_2 هر دو حقیقی و منفی هستند.

$$i_L(t) = k_1 e^{S_1 t} + k_2 e^{S_2 t}$$



۲) میرای بحرانی $\alpha = \omega_0$ ریشه مضاعف حقیقی

$$i_L(t) = k_1 e^{St} + k_2 t e^{St}$$

۳) میرای ضعیف $\alpha < \omega_0$ ، $\alpha \neq 0$ ، S_1 و S_2 موهومی و مزدوج یکدیگرند.

$$i_L(t) = k e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \theta)$$

$$\omega_d^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$$

۴) نامیرا: $\alpha = 0$: S_1 و S_2 موهومی خالص و مزدوج هستند.

$$i_L(t) = k \cos(\omega_0 t + \theta)$$

مثال: برای حالت میرای ضعیف ثابت ها را تعیین کنید.

$$i_L(t) = k e^{-\alpha t}\left[\cos\omega_d t \cos\theta - \sin\omega_d t \sin\theta\right] = (k\cos\theta) e^{-\alpha t}\cos\omega_d t - (k\sin\theta) e^{-\alpha t}\sin\omega_d t$$

$$\left.\begin{aligned} i_L(0) &= I_0 \\ i_L(0^+) &= k\cos\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow k\cos\theta = I_0$$

$$\left.\begin{aligned} i_L'(0^+) &= k(-\alpha\cos\theta - \omega_d\sin\theta) \\ i_L'(0^+) &= \frac{V_0}{L} \end{aligned}\right\} \Rightarrow k\sin\theta = -\frac{\alpha I_0}{\omega_d} - \frac{V_0}{L\omega_d}$$

راه حل دیگر برای مثال آخر درس قبل:

$$\tfrac{1}{4}V' + \tfrac{9}{5}V = \tfrac{1}{2}V_s' + \tfrac{2}{5}V_s \xrightarrow{V_s = u(t)} \begin{cases} \tfrac{1}{4}V' + \tfrac{9}{5}V = \tfrac{1}{2}\delta(t) + \tfrac{2}{5}u(t) \\ V(0^-) = 0 \overset{\text{اثر}\ \delta}{\Longrightarrow} V(0^+) = 1 \end{cases}$$

$t>0$

$$\Rightarrow V(t) = \frac{2}{9} + \frac{7}{9}e^{-\frac{18}{5}t} \quad t>0 \Rightarrow V(t) = \left(\frac{2}{9} + \frac{7}{9}e^{-\frac{18}{5}t}\right) \quad t>0 \; = S(t)$$

$$\Rightarrow h(t) = -\frac{14}{5}e^{-\frac{18}{5}t}u(t) + \delta(t)$$

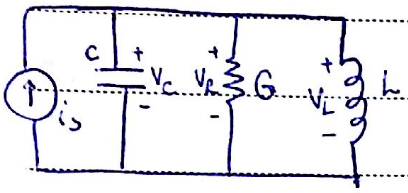
فرض تغییرناپذیری با زمان $\Rightarrow$: $V(t) = 4\left(h(t) - h(t-2)\right) = -\frac{56}{5}e^{-\frac{18}{5}t}u(t) + 4\delta(t) + \frac{56}{5}e^{-\frac{18}{5}(t-2)}u(t-2)$

$$-4\delta(t-2) + \frac{56}{5}e^{-\frac{18}{5}t}u(t-2) - \frac{56}{5}e^{-\frac{18}{5}t}u(t-2) =$$

$$= -\frac{56}{5}e^{-\frac{18}{5}t}\left(u(t) - u(t-2)\right) + \frac{56}{5}e^{-\frac{18}{5}(t-2)}\left(1 - e^{-\frac{36}{5}}\right)u(t-2) + 4\delta(t) - 4\delta(t-2)$$

جلسه ۲۱ ۹۵/۹/۶

مثال) پاسخ حالت صفر



$$\text{KCLA}: i_C + i_R + i_L = i_s \Rightarrow C\frac{dV_L}{dt} + GV_L + i_L = i_s \quad (1)$$

$$i_L = \underbrace{i_{L_h}(t)}_{\text{حل جلسه قبل}} + \underbrace{i_{L_p}(t)}_{\text{بسته به ورودی تعیین می‌شود}}$$

پاسخ پله؟

$$(1) \Rightarrow CLi_L'' + LGi_L' + i_L = u(t) \qquad X(0^-) = \alpha i_L(0^-) + \beta V_C(0^-) \Rightarrow X'(0^-) = \delta V_L(0^-) + \gamma i_C($$

$$i_L(0^-) = 0 \qquad i'' \leftrightarrow u(t) \Rightarrow \underset{\text{پیوسته}}{i' \leftrightarrow r(t)} \Rightarrow \underset{\text{پیوسته}}{i(t)} \Rightarrow \begin{cases} i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0 \\ i_L'(0^+) = i_L'(0^-) = 0 \end{cases}$$

$$i_L'(0^-) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} LCi_L'' + LGi_L' + i_L = 1 \\ i_L(0^+) = i_L'(0^+) = 0 \end{cases}$$

حل معادله $\begin{cases} i_{L_p} = 1 \\ i_{L_h} = K_1e^{S_1t} + K_2e^{S_2t} \end{cases} \Rightarrow i_L(t) = 1 + K_1e^{S_1t} + K_2e^{S_2t}$: S_1, S_2 ریشه‌های معادله مشخصه

$$\left.\begin{array}{l} i_L(0^+) = 0 \Rightarrow K_1 + K_2 + 1 = 0 \\ i_L'(0^+) = 0 \Rightarrow K_1S_1 + K_2S_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} K_1 = \dfrac{S_2}{S_1 - S_2} \\ K_2 = \dfrac{-S_1}{S_1 - S_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow i_L(t) = \left[\frac{1}{S_1 - S_2}\left(S_2e^{S_1t} - S_1e^{S_2t}\right) + 1\right]u(t) \qquad t \geq 0$$

حالت خاص: میرای ضعیف (بقیه حالات همان جواب کلی را داریم)

میرای ضعیف $\begin{cases} S_1 = -\alpha + i\omega_d = \omega_0 e^{i(\pi/2+\phi)} \\ S_2 = -\alpha - i\omega_d = \omega_0 e^{-i(\pi/2+\phi)} \end{cases}$, $\begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\alpha^2 + \omega_d^2} \\ \varphi = \tan^{-1} \alpha/\omega_d \end{cases}$

$$i_L(t) = \left[-\frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \varphi) + 1 \right] u(t)$$

پاسخ ضربه؟

$$\begin{cases} LC\, i_L'' + LG\, i_L' + i_L = \delta(t) \\ i_L(0^-) = 0 \\ i_L'(0^-) = 0 \end{cases}$$

$$i_L'' \leftrightarrow \delta \Rightarrow i_L' \leftrightarrow u \Rightarrow i_L \leftrightarrow r \Rightarrow \begin{cases} i_L(0^-) = i_L(0^+) \\ i_L'(0^-) \neq i_L'(0^+) \end{cases}$$

$$\int_{0^-}^{0^+} : LC\left(i'_{(0^+)} - i'_{(0^-)}\right) + LC\underbrace{\left(i_{(0^+)} - i_{(0^-)}\right)}_{\text{صفر}} + \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} i_L(t)\,dt}_{\text{صفر}} = 1$$

$$\Rightarrow LC\, i'_{(0^+)} = 1 \Rightarrow i'_{(0^+)} = \frac{1}{LC}$$

با فرض میرای ضعیف

$$\Rightarrow t \geq 0^+ : \begin{cases} LC\, i_L'' + LG\, i_L' + i_L = 0 \\ i_L'(0^+) = 1/LC \Rightarrow k_1 S_1 + k_2 S_2 = \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \\ i_L(0^+) = 0 \Rightarrow k_1 + k_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow k_1 = \frac{\omega_0^2}{2j\omega_d} \qquad j = \sqrt{-1}$$

حل معادله: $i_L(t) = k_1 e^{S_1 t} + k_2 e^{S_2 t}$

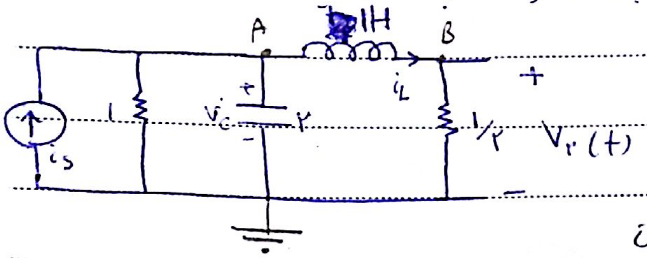
$$\Rightarrow i_L(t) = \frac{\omega_0^2}{2j\omega_d} e^{-\alpha t}\, 2j \sin \omega_d t = \frac{\omega_0^2}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \qquad t \geq 0^+$$

$$\Rightarrow i_L(t) = \left(\frac{\omega_0^2}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \right) u(t)$$

AYLAR

Subject: .... Year: .... Month: .... Day: .... ( )

مثال ۸) در مثال زیر، $i_{L(0^-)}=1$ و $V_{C(0^-)}=1$. پاسخ $V_2(t)$ را به ورودی پله و ضربه محاسبه کنید.



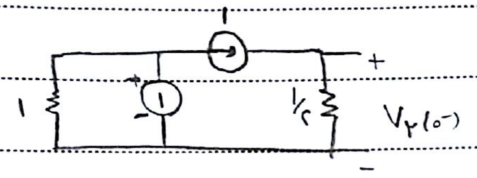
$$KCL\,A: \left(-i_s(t)+\frac{V_c}{1}\right)+2V_c'+1+\frac{1}{1}\int_0^t (V_c-V_2)\,dt' = 0$$

$$KCL\,B: -1+\frac{1}{1}\int_0^t (V_2-V_c)\,dt' + 2V_2 = 0$$

مشتق $\Rightarrow V_c = V_2 + 2V_2'$

$$\Rightarrow V_2 + 2V_2' + 2(V_2' + 2V_2'') + \int_{-\infty}^t 2V_2' = i_s \Rightarrow 4V_2'' + 4V_2' + 3V_2 = i_s$$

$t=0^-$



$$V_{2(0^-)} = \alpha V_{C(0^-)} + \beta i_{L(0^-)}$$

$$V_{2(t)} = \frac12 i_L(t) \Rightarrow \begin{cases} V_{2(0^-)} = \frac12 i_{L(0^-)} = \frac12 \\ V'_{2(0^-)} = \frac12 i'_{L(0^-)} = \frac12 \dfrac{V_{L(0^-)}}{1} \end{cases}$$

$=1$

$$KVL: -1 + V_{L(0^-)} + \frac12(1) = 0 \Rightarrow V_{L(0^-)} = \frac12 \Rightarrow V'_{2(0^-)} = \frac14$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4V_2'' + 4V_2' + 3V_2 = i_s \\ V'_{2(0^-)} = \frac14 ,\ V_{2(0^-)} = \frac12 \end{cases}$$

$$i_s = u(t) \Rightarrow \begin{cases} 4V_2'' + 4V_2' + 3V_2 = u(t) \\ V'_{2(0^-)} = \frac14 ,\ V_{2(0^-)} = \frac12 \end{cases}$$

پیوستگی

$$\Rightarrow \begin{cases} 4V_2'' + 4V_2' + 3V_2 = 1 \\ V'_{2(0^+)} = \frac14 ,\ V_{2(0^+)} = \frac12 \end{cases}$$

حل معادله: $4s^2+4s+3=0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -\frac12 + j\frac{\sqrt2}{2} \\ s_2 = -\frac12 - j\frac{\sqrt2}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow V_2(t) = \underbrace{e^{-\frac12 t}\left[A\sin\left(\tfrac{\sqrt2}{2}t\right) + B\cos\left(\tfrac{\sqrt2}{2}t\right)\right]}_{V_h} + \underbrace{\tfrac13}_{V_p} \qquad t \geq 0 \quad \times u(t)$$

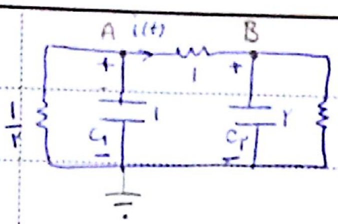
$$\left.\begin{aligned} V_{2(0^+)} &= B + \tfrac13 = \tfrac12 \Rightarrow B = \tfrac16 \\ V'_{2(0^+)} &= \tfrac14 \Rightarrow A = \tfrac{\sqrt2}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow V_2(t) = \left(e^{-\frac12 t}\left[\tfrac{\sqrt2}{3}\sin\left(\tfrac{\sqrt2}{2}t\right) + \tfrac16\cos\tfrac{\sqrt2}{2}t\right] + \tfrac13\right)$$

$$i_s = \delta(t) \Rightarrow \begin{cases} 4V_2'' + 4V_2' + 3V_2 = \delta(t) \\ V'_{2(0^-)} = \frac14 ,\ V_{2(0^-)} = \frac12 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} V_2 \text{ پیوسته} \\ V_2' \text{ ناپیوسته} \end{cases} \longrightarrow V'_{2(0^-)} \neq V'_{2(0^+)}$$

$$\int_{0^-}^{0^+}: 4\left(V'_{2(0^+)} - V'_{2(0^-)}\right) + 4\underbrace{\left(V_{2(0^+)} - V_{2(0^-)}\right)}_{\text{صفر}} + 3\underbrace{\int_{0^-}^{0^+} V_2\,dt}_{\text{صفر}} = 1 \Rightarrow V'_{2(0^+)} = 0.5\ (V)$$

$$t \geq 0^+ \Rightarrow \begin{cases} 4V_2'' + 4V_2' + 3V_2 = 0 \\ V'_{(0^+)} = 0.5 ,\ V_{(0^+)} = 0.5 \end{cases}$$

مثال: در مدار مقابل $V_{C_1}(0^-)=1$ و $V_{C_2}(0^-)=2$، $\tilde{i}(t)$ را بدست آورید.



$KCL\,A:\ 2V_1 + V_1' + i = 0 \Rightarrow 2V_1 + \frac{d}{dt}V_1 + i = 0 \Rightarrow V_1 = \frac{-i}{2+D}$

$KCL\,B:\ V_2 + 2V_2' - i = 0 \Rightarrow V_2 + 2DV_2 - i = 0 \Rightarrow V_2 = \frac{i}{1+2D}$

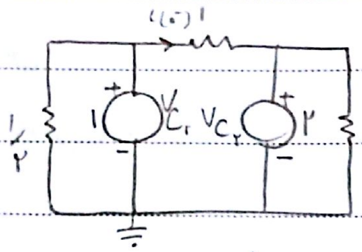
$i = V_1 - V_2 \Rightarrow i = \frac{-i}{2+D} - \frac{i}{1+2D} \Rightarrow i = \frac{(-3D-3)i}{2D^2+5D+2} \Rightarrow (2D^2+5D+2)i = (-3D-3)i$

$\Rightarrow (2D^2+8D+5)i = 0 \Rightarrow \boxed{2i''+8i'+5i=0}$

شرایط اولیه؟ → $t=0^-$:

↓

$i(0^-), i'(0^-)$?



$i(t) = V_{C_1}(t) - V_{C_2}(t) \Rightarrow i(0^-) = -1$

$\Rightarrow i'(t) = V_{C_1}'(t) - V_{C_2}'(t) = \frac{i_{C_1}(t)}{C_1} - \frac{i_{C_2}(t)}{C_2}$

$\Rightarrow i'(0^-) = \frac{i_{C_1}(0^-)}{C_1} + \frac{i_{C_2}(0^-)}{C_2}$

$KCL\,A:\ \frac{1}{\frac{1}{2}} + i_{C_1}(0^-) + (-1) = 0 \Rightarrow i_{C_1}(0^-) = -1$

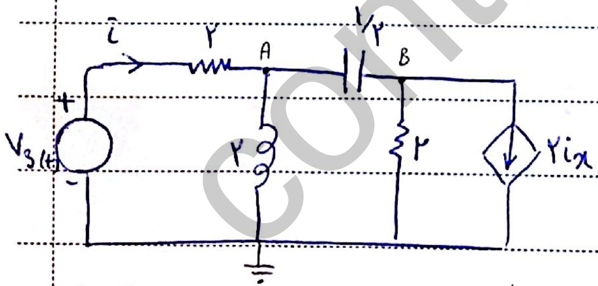
$KCL\,B:\ \frac{2}{1} + i_{C_2}(0^-) + 2 = 0 \Rightarrow i_{C_2}(0^-) = -3$

$\Rightarrow i'(0^-) = \frac{-1}{1} - \frac{-3}{2} = 1/2$

$\begin{cases} 2i''+8i'+5i=0 \\ i(0^-)=-1=i(0^+), \\ i'(0^-)=1/2=i'(0^+) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_1=-0.77 \\ s_2=-3.23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i(t)=k_1e^{-0.77t}+k_2e^{-3.23t} \\ i(0^+), i'(0^+) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1=-1.11 \\ k_2=0.11 \end{cases}$

$\Rightarrow i(t) = (-1.11e^{-0.77t} + 0.11e^{-3.23t}) \quad t\geq 0$

توجه:



مثال: پاسخ پله و ضربه $\tilde{i}(t)$ را بدست آورید.

$KCL\,B:\ \frac12(V_B-V_A)' + \frac{V_B}{2} + V_B = 0 \Rightarrow \frac12 D(V_B-V_A) + \frac{V_B}{2} + V_B = 0$

$\Rightarrow V_B = \frac{D}{D+3}V_A$

$KCL\,A:\ \frac12(V_A-V_S) + \frac12\int_{-\infty}^{t} V_A + \frac12(V_A-V_B)' = 0 \Rightarrow \frac12(V_A-V_S)' + \frac12 V_A + \frac12(V_A-V_B)'' = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac12 D(V_A-V_S) + \frac12 V_A + \frac12 D^2(V_A-V_B) = 0 \\ V_B = \frac{D}{D+3}V_A, \quad i = \frac12(V_S-V_A) \end{cases} \Rightarrow i = -\frac12 \times \frac{D^2+3D-4D^2-4D-3}{4D^2+4D+3} V_S$

$\Rightarrow (8D^2+8D+6)i = (3D^2+D+3)V_S \Rightarrow 8i''+8i'+6i = 3V_S''+V_S'+3V_S$

$\{\ i(0^-) = 0$

Subject: ....
Year: .... Month: .... Day: .... ( )

پاسخ پله $(V_{s(t)}=u(t))$: $8i''+8i'+6i=3\delta'+\delta+3u \rightarrow \int_{0^-}^{0^+}: 8(i'(0^+)-i'(0^-))+8(i(0^+)-i(0^-))+0=1$

$i''\leftrightarrow\delta' \Rightarrow i'\leftrightarrow\delta \Rightarrow i\leftrightarrow u$ $\Rightarrow 8i'(0^+)+8i(0^+)=1$

ناپیوسته ✗ ناپیوسته ✗

از معین $\leftarrow$ $\qquad i'(0^+)=-1/4$

$8i'+8i+6\int i=3\delta+u+3r(t) \rightarrow \int_{0^-}^{0^+}: 8(i(0^+)-i(0^-))+0+0=3 \Rightarrow i(0^+)=\frac{3}{8}$

$$t\geq 0^+ \Rightarrow \begin{cases} 8i''+8i'+6i=3 \\ i'(0^+)=-1/4,\ i(0^+)=3/8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_1=-1/2+j\sqrt{2}/2 \\ s_2=-1/2-j\sqrt{2}/2 \end{cases} \Rightarrow i(t)=e^{-1/2t}\left(A\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t+B\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)+1/2$$

جواب همگن — جواب خاص

$$\xrightarrow{i(0^+),\,i'(0^+)} \boxed{i(t)=e^{-1/2t}\left(\frac{-1}{8}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t-\frac{5\sqrt{2}}{16}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)u(t) \quad t\geq 0}$$

پاسخ ضربه: $(V_s(t)=\delta(t))$

مثال) فرض کنید در مداری به چنین معادله ای رسیده ایم:

$$\begin{cases} v''+3v'+2v=\delta'''+\frac{1}{2}\delta' \\ v(0^-)=0,\ v'(0^-)=0 \end{cases}$$

در v می‌تواند δ و همراهش δ' هست ... $v''\leftrightarrow\delta''' \Rightarrow \underset{\text{ناپیوسته}\ \times}{v'\leftrightarrow\delta''} \Rightarrow \underset{\text{ناپیوسته}\ \times}{v\leftrightarrow\delta'}$

$v=\alpha\delta(t)+\beta\delta'(t)+g(t)$ $\quad g(t): \int_{0^-}^{0^+}=0 \equiv$ در g حداکثر از u داریم

پس چهار مجهول داریم: α و β ، $v(0^+)$ ، $v'(0^+)$

$\int_{0^-}^{0^+}: v'(0^+)-v'(0^-)+3(v(0^+)-v(0^-))+2\alpha=0+0 \Rightarrow v'(0^+)+3v(0^+)+2\alpha=0$ $\quad \boxed{v'(0^+)=-\frac{33}{2}}$

انتگرال: $v'+3v+2\left(\alpha u(t)+\beta\delta(t)+\int g(t)\right)=\delta''+\frac{1}{2}\delta$

$\int_{0^-}^{0^+}: v(0^+)+3\alpha+2\beta=\frac{1}{2}$ $\quad \boxed{v(0^+)=7.5}$

انتگرال: $v+3\left(\alpha u(t)+\beta\delta(t)+\int g(t)\right)+2\left(\alpha r(t)+\beta u(t)+\iint g(t)\right)=\delta'+\frac{1}{2}u$

$\int_{0^-}^{0^+}: \alpha+3\beta+2(0)=0 \Rightarrow \alpha+3\beta=0$ $\quad \boxed{\alpha=-3}$

$\int v+3\iint v+2\iiint v=\delta+\frac{1}{2}r$ $\quad \iiint v=\alpha\int r+\beta r+\iiint g(t)$ $\quad \iiint_{0^-}^{0^+} g(t)=$

$\beta+0+0=1 \Rightarrow \boxed{\beta=1}$

$$t\geq 0^+: \begin{cases} v''+3v'+2v=0 \\ v'(0^+)=-16.5 \\ v(0^+)=7.5 \end{cases} \rightarrow s^2+3s+2=0 \Rightarrow \begin{cases} s=-1 \\ s=-2 \end{cases} \Rightarrow v(t)=k_1e^{-t}+k_2e^{-2t}$$

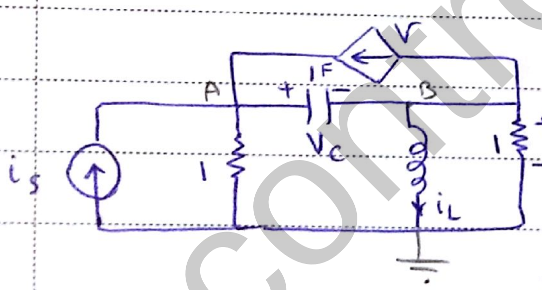
$v(0^+)=7.5$ $\Rightarrow k_1+k_2=7.5$

$v'(0^+)=-16.5 \Rightarrow -k_1-2k_2=-16.5 \Rightarrow \begin{cases} k_1=-1.5 \\ k_2=9 \end{cases}$

$\Rightarrow v(t)=-1.5e^{-t}+9e^{-2t} \quad t\geq 0 \Rightarrow v(t)=\left(-1.5e^{-t}+9e^{-2t}\right)u(t)-3\delta+\delta' \quad t\geq 0$

جلسه ۲۳ ۹۶/۹/۲۲

پاسخ پله و ضربه v_C را به دست آورید.



KCL A: $-i_s+v_A+(v_A-v)'-v=0$

KCL B: $v+\int v\,dt+(v-v_A)'+v=0$ $\Rightarrow$ نتیجه

$v_A=i_s-v-\int v\,dt$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2v''+3v'+v=i_s'' \\ v(0^-)=v'(0^-)=0 \end{cases} \xRightarrow{\text{ضربه}} \begin{cases} 2v''+3v'+v=\delta'(t) \\ v''\leftrightarrow\delta' \Rightarrow v'\leftrightarrow\delta \Rightarrow v\leftrightarrow u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'(0^-)\neq v'(0^+) \\ v(0^-)\neq v(0^+) \end{cases}$$

$\int_{0^-}^{0^+}: 2\left(v'(0^+)-v'(0^-)\right)+3\left(v(0^+)-v(0^-)\right)+0=0 \Rightarrow 2v'(0^+)+3v(0^+)=0$

$\int: 2v'+3v+\int v=\delta \xRightarrow{\int_{0^-}^{0^+}} 2\left(v(0^+)-v(0^-)\right)+0+0=1 \Rightarrow v(0^+)=\frac{1}{2}$ $\quad \Rightarrow v'(0^+)=-\frac{3}{4}$

Subject: .... Year: .... Month: .... Day: .... ( )

$۲V'' + ۳V' + V = ۰$

$V(0^-) = \frac{1}{۲},\ V'(0^-) = -\frac{۳}{۴} \Rightarrow V(t) = Ae^{-t} + Be^{-t/۲}$

$V(0^+) = A + B = \frac{1}{۲}$

$V'(0^+) = -A - \frac{1}{۲}B = -\frac{۵}{۴}$ $\Bigg\} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -\frac{1}{۲} \end{cases} \Rightarrow V(t) = e^{-t} - \frac{1}{۲}e^{-t/۲}$

$V(t) = \left(e^{-t} - \frac{1}{۲}e^{-t/۲}\right)u(t),\ t \geq ۰$ چون در $V(t)$ ضربه یا مشتقات آن وجود ندارد:

پاسخ ضربه: $\begin{cases} ۲V'' + ۳V' + V = \delta'' \\ V(0^-) = V'(0^-) = ۰ \end{cases}$ $\qquad \int_{0^-}^{0^+} g(t)\,dt = ۰$

$V' \sim \delta',\ V \sim \delta \longrightarrow V(t) = \alpha\delta(t) + g(t)$

$\int_{0^-}^{0^+}: ۲\left(V'(0^+) - V'(0^-)\right) + ۳\left(V(0^+) - V(0^-)\right) + \alpha = ۰ \Rightarrow ۲V'(0^+) + ۳V(0^+) + \alpha = ۰$

$\int: ۲V' + ۳V + \int V = \delta' \xRightarrow{\int_{0^-}^{0^+}} ۲\left(V(0^+) - V(0^-)\right) + ۳\alpha = ۰ \Rightarrow ۲V(0^+) + ۳\alpha = ۰$

$\int: ۲V + ۳\int V + \iint V = \delta \xRightarrow{\int_{0^-}^{0^+}} ۲(\alpha) + ۳(۰) + ۰ = 1 \Rightarrow \alpha = ۰/۵$

$\Rightarrow V(0^+) = -۰/۷۵,\ V'(0^+) = -1/۳۷۵$

$\begin{cases} ۲V'' + ۳V' + V = \delta'' \\ V(0^+) = -۰/۷۵,\ V'(0^+) = -1/۳۷۵ \end{cases} \Rightarrow V = k_1 e^{-t} + k_۲ e^{-۰/۵t}$

$\xRightarrow{\text{شرط اولیه}} V(t) = ۳/۵e^{-t} - ۴/۲۵e^{-۰/۵t} \xRightarrow{t \geq ۰} V(t) = \left[۳/۵e^{-t} - ۴/۲۵e^{-۰/۵t}\right]u(t) + ۰/۵\delta(t)$

AYLAR

Scanned by CamScanner

Year : Month : Date :

مروری بر اعداد مختلط

نمایش مختصات قائم: $z = x + yj$ $j = \sqrt{-1}$ $\begin{cases} Re\{z\} = x \\ Im\{z\} = y \end{cases}$

نمایش قطبی: $z = |z| e^{j\theta}$ $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$

$\begin{cases} x = |z| \cos\theta \\ y = |z| \sin\theta \end{cases}$ $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$

$z_1 z_2 = |z_1||z_2| e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$

$\bar{z} = x - jy$ $z\bar{z} = |z|^2$

فازورها: یک سینوسی با فرکانس زاویه‌ای ω را به صورت زیر در بازه $(-\infty, \infty)$ به شکل زیر تعریف می‌شود

$A_m \cos(\omega t + \phi)$ — A_m: دامنه / ω: فرکانس زاویه‌ای / ϕ: فاز اولیه

* یک سینوسی با ϕ ، ω و A_m به طور کامل مشخص می‌شود
* می‌توان یک سینوسی را با عدد مختلط نمایش داد

$x(t) = A_m \cos(\omega t + \phi) = Re\{A_m e^{(\omega t + \phi)j}\} = Re\{A_m e^{\phi j} e^{\omega t j}\}$

فازور: $A_m e^{\phi j}$

مثلا $V(t) = 110\sqrt{2} \cos(2\pi \times 60 t + \pi/3)$ $V = 110\sqrt{2} e^{j\pi/3}$

کاربرد نمایش فازوری، محاسبه پاسخ خصوصی معادلات خطی با ضرایب ثابت، در حالتی که تحریک، یک سینوسی ثابت می‌باشد

$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = A_m \cos(\omega t + \phi)$

می‌دانیم مجموع جبری هر تعداد سینوس‌ها با فرکانس زاویه‌ای یکسان و هر تعداد مشتق از هر مرتبه از آن، خود یک سینوسی با همان فرکانس زاویه‌ای است، پس:

$x(t) = B \cos(\omega t + \psi)$ — طرف سمت چپ: $D \cos(\omega t + \lambda)$

D و λ توابعی از B و ψ هستند.

نمایش فازوری: $a_0 (j\omega)^n X + a_1 (j\omega)^{n-1} X + \dots + a_n X =$

Subject :
Year : Month : Date :

حالت دائم

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = A_m \cos(\omega t + \phi)$$

لم ۱) $Re(z)$ جمع پذیر و همگن است

$$\begin{cases} Re\{z_1(t)+z_2(t)\} = Re\{z_1(t)\} + Re\{z_2(t)\} \\ Re\{\alpha z(t)\} = \alpha Re\{z(t)\} \quad \alpha \in R \end{cases}$$

لم ۲) فرض کنید A عددی مختلط با نمایش قطبی $A = A_m e^{j\phi}$ باشد در این صورت:

$$\frac{d}{dt} Re\{A e^{j\omega t}\} = Re \frac{d}{dt}\{A e^{j\omega t}\} = Re\{A j\omega e^{j\omega t}\}$$

لم ۳)

$$Re\{A e^{j\omega t}\} = Re\{B e^{j\omega t}\} \Rightarrow A = B$$

حل معادله دیفرانسیل

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = \underbrace{A_m \cos(\omega t + \phi)}_{Re\{\underbrace{A_m e^{j\phi}}_{A = \text{فازور ورودی}} e^{j\omega t}\}}$$

$$\begin{cases} X = X_m e^{j\phi} \\ A = A_m e^{j\phi} \end{cases}$$

$$a_1 \frac{d^n}{dt^n} Re\{X e^{j\omega t}\} + a_2 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} Re\{X e^{j\omega t}\} + \dots + a_n Re\{X e^{j\omega t}\} = Re\{A e^{j\omega t}\}$$

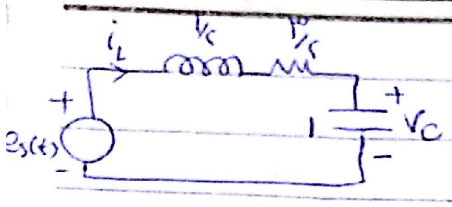
$$\overset{\text{لم ۲}}{\Longrightarrow} Re\{a_0 X (j\omega)^n e^{j\omega t}\} + Re\{a_1 X (j\omega)^{n-1} e^{j\omega t}\} + \dots + Re\{a_n X e^{j\omega t}\} = Re\{A e^{j\omega t}\}$$

$$\overset{\text{لم ۱}}{\Longrightarrow} Re\{(a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_n) X e^{j\omega t}\} = Re\{A e^{j\omega t}\}$$

$$\overset{\text{لم ۳}}{\Longrightarrow} [a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_n] X = A$$

~ فازور X تعیین می‌شود و از روی آن خود سیگنال $x(t)$ بدست می‌آید.

مثال) در مدار شکل مقابل پاسخ کامل را به دست آورید.



$i_L(0^-)=2$

$V_C(0^-)=1$

$e_s(t)=\cos 2t\, u(t)$

$$t>0^-: LCV_C''+RCV_C'+V_C=e_s(t) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}V_C''+\frac{3}{2}V_C'+V_C=\cos 2t\, u(t) \\ V_C(0^-)=1 \\ V_C'(t)=\frac{i_C(t)}{C}=\frac{i_L(t)}{C} \Rightarrow V_C'(0^-)=\frac{i_L(0^-)}{C}=2 \end{cases}$$

$$V_C'' \sim u(t) \Rightarrow \begin{cases} V_C'(0^-)=V_C'(0^+) \\ V_C(0^-)=V_C(0^+) \end{cases}$$

$$t\geq 0^+ \Rightarrow t>0 \begin{cases} \frac{1}{2}V_C''+\frac{3}{2}V_C'+V_C=\cos 2t \\ V_C(0^+)=1,\ V_C'(0^+)=2 \end{cases}$$

جواب همگن: $S_1=-1, S_2=-2 \Rightarrow V_{C,h}=K_1e^{-t}+K_2e^{-2t}$

جواب خصوصی: $\left(\frac{1}{2}(j\omega)^2+\frac{3}{2}(j\omega)+1\right)V_{C,p}=1 \Rightarrow V_{C,p}=\frac{1}{-1+3j}=0.316e^{-j108.4}$

$\frac{1}{\sqrt{10}\,e^{j108.4}}$, $\sqrt{1^2+3^2}$, $\tan^{-1}\left(\frac{3}{-1}\right)$

$$V_{cp}=Re\left\{0.316e^{-j108.4}e^{j2t}\right\}=0.316\cos(2t-108.4^\circ)$$

$t\geq 0^+$

$$\left.\begin{array}{l} V_C(t)=K_1e^{-t}+K_2e^{-2t}+0.316\cos(2t-108.4^\circ) \\ V_C(0^+)=1,\ V_C'(0^+)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} K_1=3.6 \\ K_2=-2.8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow t\geq 0: V_C(t)=\left[3.6e^{-t}-2.8e^{-2t}+0.316\cos(2t-108.4^\circ)\right]u(t)$$

حالت دائمی سینوسی: بعد از $t>t_k$ تابع شکل سینوسی خواهد داشت (e^{-t}, e^{-2t} قابل صرف‌نظر)

پاسخ حالت دائمی سینوسی

مدار خطی تغییرناپذیر با زمان را که با یک منبع سینوسی، تحریک می‌شود در نظر می‌گیریم. فرض کنید یکی از متغیرهای خاص مدار مثل y مورد توجه باشد. پاسخ به فرم کلی زیر خواهد بود:

$$y(t)=\underbrace{K_1e^{s_1t}+\dots K_ne^{s_nt}}_{\text{پاسخ همگن}}+\underbrace{A_m\cos(\omega t+\phi)}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

برای سهولت فرض کردیم ریشه‌های معادله مشخصه ساده هستند.

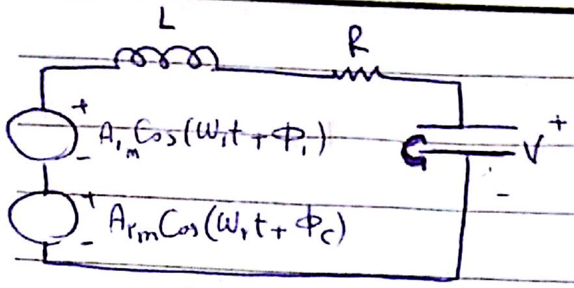
اگر تمام ریشه‌های معادله مشخصه در نیم صفحه چپ باز صفحه اعداد مختلط باشند، در این صورت وقتی $t\to\infty$، پاسخ به میزان قابل توجهی به $A_m\cos(\omega t+\phi)$ نزدیک می‌شود؛ بنابراین در این حالت، صرف‌نظر از حالت اولیه، وقتی زمان کافی سپری شود، پاسخ سینوسی خواهد شد.

پاسخ حالت دائمی سینوسی با استفاده از فازورها به راحتی قابل محاسبه است.

Derakhshan

Subject :
Year : Month : Date :

جمع آثار



$$A_{1m}\cos(\omega_1 t+\phi_1) \leftarrow A_{1m}e^{j\phi_1}$$

$$A_{2m}\cos(\omega_2 t+\phi_2) \leftarrow A_{2m}e^{j\phi_2}$$

$$LCV''+RCV'+V=A_{1m}\cos(\omega_1 t+\phi_1)+A_{2m}\cos(\omega_2 t+\phi_2)$$

$V_{p_1} \leftrightarrow V_{p_{1m}}e^{j\phi_1}$ — V_{p_1} ← جواب معادله به روش فازوری وقتی فقط منبع ۱ اعمال شود

$V_{p_2} \leftrightarrow V_{p_{2m}}e^{j\phi_2}$ — V_{p_2} ← " " " " " ۲ "

فقط ۱: $LCV_{p_1}''+RCV_{p_1}'+V_{p_1}=A_{1m}\cos(\omega_1 t+\phi_1)$

فقط ۲: $LCV_{p_2}''+RCV_{p_2}'+V_{p_2}=A_{2m}\cos(\omega_2 t+\phi_2)$

$$=_{1,2} LC(V_{p_1}+V_{p_2})''+RC(V_{p_1}+V_{p_2})'+(V_{p_1}+V_{p_2})=A_{1m}\cos(\omega_1 t+\phi_1)+A_{2m}\cos(\omega_2 t+\phi_2)$$

$$\left[LC(j\omega_1)^2+RC(j\omega_1)+1\right]V_{p_1}=A_{1m}e^{j\phi_1} \Rightarrow V_{p_1}=\frac{A_{1m}e^{j\phi_1}}{1-LC\omega_1^2+j\omega_1 RC}$$

به همین ترتیب $\Rightarrow V_{p_2}=\dfrac{A_{2m}e^{j\phi_2}}{1-LC\omega_2^2+j\omega_2 RC}$

$V=V_{p_1}+V_{p_2}$: برقرار است فقط وقتی $\omega_1 \neq \omega_2$

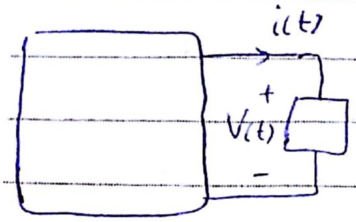
در حوزه زمان (معادلات محول منبع ها)، خروجی مجموع خروجی هاست.

اما در حوزه فازورها، خروجی لزوما مجموع دو فازور نیست (امین مملکت یکیش سینوسی نباشه!) شرط برقراری

جمع آثار، برقراری $\omega_1=\omega_2$ است.

Subject :
Year : Month : Date :

امپدانس و ادمیتانس



$V(t) = Re\{V e^{j\omega t}\}$

$i(t) = Re\{I e^{j\omega t}\}$

نسبت فازورها

امپدانس $= \frac{V}{I} = Z(\omega)$

ادمیتانس $= \frac{I}{V} = Y(\omega)$

مقاومت

$$\left.\begin{aligned} V(t) &= Re\{V e^{j\omega t}\} \\ i(t) &= Re\{I e^{j\omega t}\} \\ V(t) &= R\, i(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow V(t) = R\, Re\{I e^{j\omega t}\} = Re\{R I e^{j\omega t}\} = Re\{V e^{j\omega t}\}$$

$$\Rightarrow RI = V \Rightarrow \begin{cases} Z = R \\ Y = \frac{1}{R} \end{cases}$$

خازن

$$\left.\begin{aligned} V(t) &= Re\{V e^{j\omega t}\} \\ i(t) &= Re\{I e^{j\omega t}\} \\ i(t) &= C \frac{dV(t)}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow i(t) = C \frac{d}{dt} Re\{V e^{j\omega t}\} = Re\{C V \frac{d}{dt} e^{j\omega t}\}$$

$$= Re\{C V j\omega e^{j\omega t}\} = Re\{I e^{j\omega t}\} \Rightarrow j\omega C V = I$$

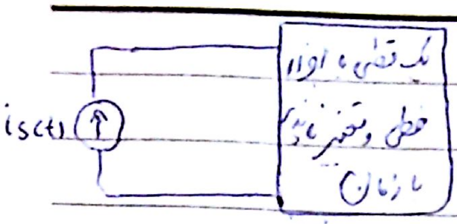
$$\Rightarrow \begin{cases} Z = \frac{1}{j\omega C} \\ Y = jC\omega \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} V(t) &= Re\{V e^{j\omega t}\} \\ i(t) &= Re\{I e^{j\omega t}\} \\ V(t) &= L \frac{di}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow Re\{L I j\omega e^{j\omega t}\} = Re\{V e^{j\omega t}\} \Rightarrow V = j\omega I L$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z = j\omega L \\ Y = \frac{1}{j\omega L} \end{cases}$$

Year : Month : Date :

امپدانس نقطه تحریک یک قطبی



نسبت فازور ولتاژ خروجی V به فازور جریان ورودی I_s متناظر

$$i_s(t) = Re\{I_s e^{j\omega t}\} \qquad Z(\omega) = \frac{V}{I} \Rightarrow \begin{cases} |Z(\omega)| = \frac{|V|}{|I|} \\ \measuredangle Z(\omega) = \measuredangle V - \measuredangle I \end{cases}$$

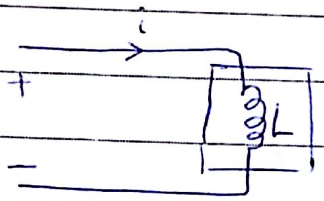
$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi) \Longleftrightarrow I = I_m e^{j\varphi}$$

$v(t)$?

$$V = ZI \Rightarrow Z I_m e^{j\varphi} = |z| e^{j\measuredangle Z} I_m e^{j\varphi} = |z| I_m e^{j(\varphi + \measuredangle z)}$$

$$\Rightarrow v(t) = |z| I_m \cos(\omega t + \varphi + \measuredangle z)$$

مثال)



$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi) \qquad v(t)$?

(I) $v = L\frac{di}{dt} = -L\omega I_m \sin(\omega t + \varphi)$

(II) $\left.\begin{matrix} I = I_m e^{j\varphi} \\ Z(\omega) = j\omega L \end{matrix}\right\} \Rightarrow V = j\omega L I_m e^{j\varphi} e^{j\pi/2} = \omega L I_m e^{j(\varphi + \pi/2)}$

$$\Rightarrow v(t) = L\omega I_m \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) = -L\omega I_m \sin(\omega t + \varphi)$$

معادل KVL برای فازورها

$$v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) = 0 \Rightarrow Re\{V_1 e^{j\omega t}\} + Re\{V_2 e^{j\omega t}\} + Re\{V_3 e^{j\omega t}\} = 0$$

مثلاً توجه کنید به این

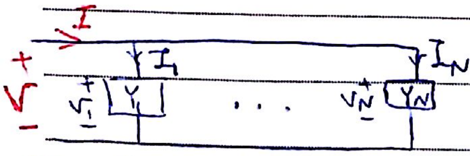
$$\Rightarrow Re\{(V_1 + V_2 + V_3) e^{j\omega t}\} = Re\{0 e^{j\omega t}\} \Rightarrow V_1 + V_2 + V_3 = 0$$

معادل KCL برای فازورها

$$\sum_{k=1} i_k(t) = 0 \Rightarrow \sum_k Re\{I_k e^{j\omega t}\} = Re\{0 e^{j\omega t}\}$$

$$\Rightarrow Re\{\sum_k I_k e^{j\omega t}\} = Re\{0 e^{j\omega t}\} \Rightarrow \sum_k I_k = 0$$

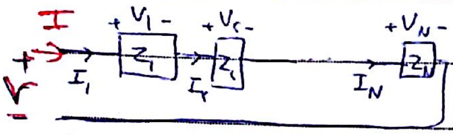
به هم بستن موازی



$V_1 = V_2 = \ldots = V$

$I = I_1 + I_2 + \ldots + I_N \overset{I_i = Y_i V_i}{\Longrightarrow} Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_N$

به هم بستن سری



$I_1 = I_2 = \ldots = I$

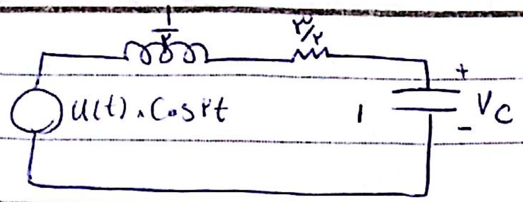
$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_N \overset{V_i = Z_i I_i}{\Longrightarrow} Z = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_N$

Derakhshan

Subject :
Year : Month : Date :

۹۶/۱۰/۲۹ جلسه ۲۶

مثال ۱)



$$V_{c(0^-)} = 1$$

$$i_{L(0^-)} = 2 \Rightarrow i_c = CV_c' \Rightarrow V'_{c(0^-)} = 2$$

$$\frac{1}{2}V_c'' + \frac{3}{2}V_c' + V_c = \cos 2t \times u(t) \overset{t \geq 0^+}{\Rightarrow} \frac{1}{2}V_c'' + \frac{3}{2}V_c' + V_c = \cos 2t$$

محاسبه می‌شود : $V_{c(0^+)} = 1$ $V'_{c(0^+)} = 2$

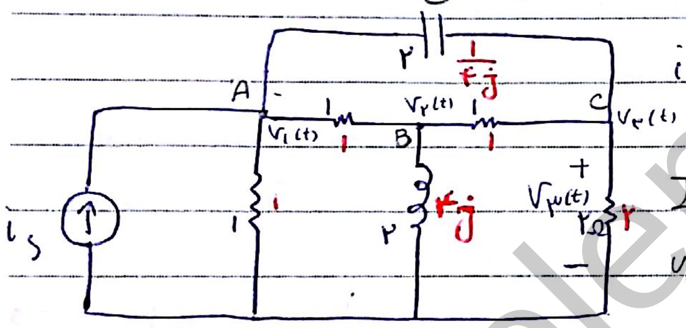
$$X = \frac{A_m e^{j\omega}}{a_0(j\omega)^n + \dots + a_{n-1}(j\omega) + a_n} \Rightarrow V_c = \frac{2e^{j\pi/4}}{3e^{j\pi/2}} = \frac{2}{3}e^{j(-\pi/4)}$$

$$\Rightarrow V_c = \frac{2}{3}\cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$$

خصوصی

$$V_{c(t)} = \Big(\underbrace{3{,}6e^{-t} - 2{,}5e^{-2t}}_{\text{جواب همگن}} + 0{,}316\cos(2t - 108{,}4^\circ)\Big)$$

مثال ۲)



$$i_s(t) = 10\cos(2t + 45^\circ)$$

بعد از گذشت زمان طولانی و در حالت دائمی سینوسی

$$I_s = 10e^{\pi/4 j}$$

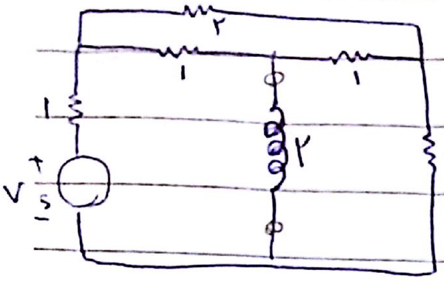
$$V_1(t) \longleftrightarrow V_1 ,\ V_2(t) \longleftrightarrow V_2 \quad V_3(t) \longleftrightarrow V_3$$

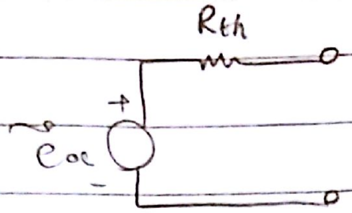
$$\left.\begin{aligned} &KCL\,A:\ -I_s + \frac{V_1}{1} + \frac{V_1 - V_2}{1} + 4j(V_1 - V_3) = 0 \\ &KCL\,B:\ (V_2 - V_1) + \frac{V_2}{4j} + (V_2 - V_3) = 0 \\ &KCL\,C:\ \frac{V_3}{2} + \frac{V_3 - V_2}{1} + 4j(V_3 - V_1) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow V_3 = \frac{2 + 8j}{9 + 112{,}5j} I_s = 9{,}45e^{j(44^\circ)}$$

$$\Rightarrow V_3(t) = \mathrm{Re}\left\{V_3 e^{j(2t)}\right\} = 9{,}45\cos(2t + 44^\circ)$$

Derakhshan

Year : Month : Date :





مثال ۳) مدار صفحه ۱ را با استفاده از مدار معادل به سادگی تامین حل کنید!

مثال ۴) در یک مدار شکل مقابل معادله دیفرانسیل ارتباط دهنده $V(t)$ به $i_s(t)$ به صورت زیر است

$$V'' + 15V' + 50V = i_s'' + 7i_s'$$

امپدانس دیده شده از دو سر را در حوزه فرکانس زاویه‌ای ω به دست آورید.

حل:

$$(j\omega)^2 V + 15(j\omega)V + 50V = (j\omega)^2 I_s + 7(j\omega) I_s$$

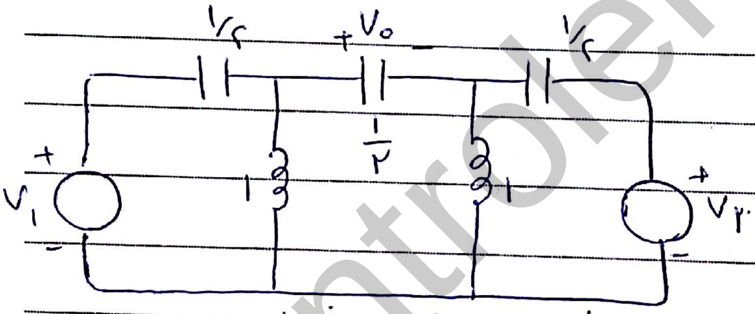
$$\Rightarrow \frac{V}{I_s} = \frac{j^2\omega^2 + 7(j\omega)}{j^2\omega^2 + 15j\omega + 50} = \frac{-\omega^2 + 7\omega j}{-\omega^2 + 15\omega j + 50}$$

در مثال بالا،

مثال ۵) اگر ورودی $i_s(t) = 10\cos 5t$ یک جواب خصوصی بدست آورید.

$$\frac{V}{I_s} = Z(\omega) \Rightarrow V = Z(5)\times 10 = \frac{-25+35j}{+25+75j}\times 10 = 5.44\, e^{j53.97^\circ}$$

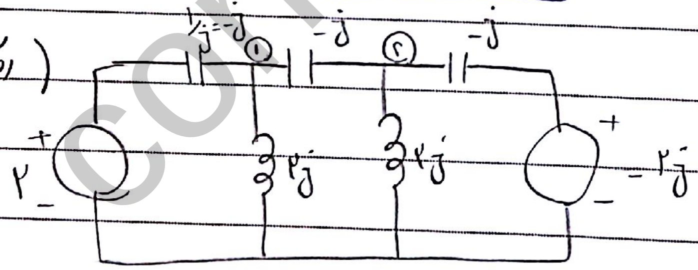
$$\Rightarrow V(t) = 5.44\cos(5t + 53.97^\circ)$$



مثال ۶)

$$\begin{cases} V_1 = 2\cos 2t \\ V_2 = 2\sin 2t = 2\cos(2t - \pi/2) \end{cases}$$

حل)



$$V_1 = 2,\quad V_2 = 2e^{-j\pi/2} = -2j$$

$$KCL1: \frac{V_1 - 2}{-j} + \frac{V_1}{2j} + \frac{V_1 - V_2}{-j} = 0$$

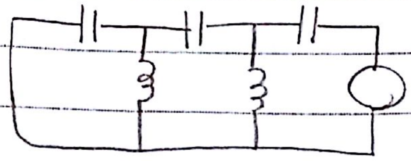
$$KCL2: \frac{V_2 - V_1}{-j} + \frac{V_2}{2j} + \frac{V_2 + 2j}{-j} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3V_1 - 2V_2 = 4 \\ 2V_1 - 3V_2 = 4j \end{cases} \Rightarrow 5\underbrace{(V_1 - V_2)}_{V_0} = 4(j+1) \Rightarrow V_0 = \frac{4}{5}(j+1)$$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{4}{5}\sqrt{2}\, e^{j\pi/4} \Rightarrow v_0(t) = \frac{4\sqrt{2}}{5}\cos(2t + \pi/4)$$

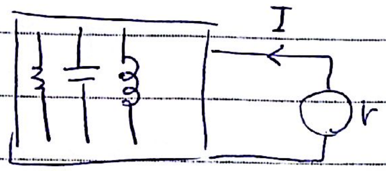
Subject :

Year : Month : Date :



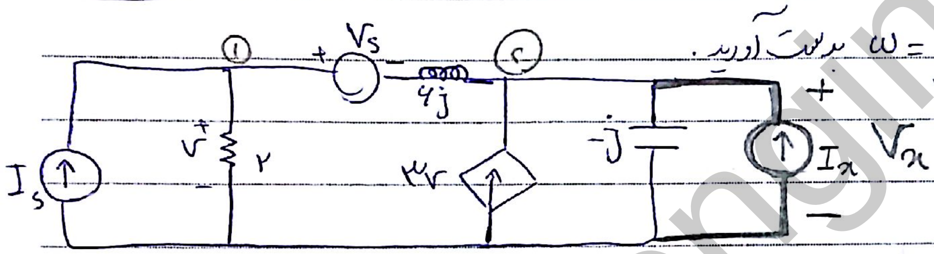
روش II) با استفاده از جمع آثار، اول یه منبع رو کنار می‌ذاریم بعد اول یکی رو! دو تا جواب رو با هم جمع می‌کنیم!
طولانی! سخت هم! بیخیال!

نکته:



$$V = Z_{th} I + E_{oc}$$

مثال) مدار معادل را از دو سر خازن برای $\omega = 2$ بدست آورید.



$$KCL1: -I_s + \frac{V}{2} + \frac{V - V_s - V_x}{4j} = 0 \Rightarrow V = \frac{1}{3j+1}(4j I_s + V_s + V_x)$$

$$KCL2: -3V + \frac{V_x - V + V_s}{4j} + \frac{V_x}{-j} - I_x = 0$$

$$\Rightarrow (1+18j)V = -4j I_x - 4V_x + V_s$$

$$\Rightarrow \frac{1+18j}{1+3j}(4j I_s + V_s + V_x) = -4j V_x + V_s \Rightarrow V_x = (-0.08 - 0.46j) I_x + \left[(0.4 - 53.2) I_s - (0.44 + 0.08j) V_s\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z_{th} = -0.08 - 0.46j \\ E_{oc} = (0.4 - 53.2j) I_s - (0.44 + 0.08j) V_s \end{cases}$$

Derakhshan