سایت اختصاصی
مهندسی کنترل

مسائل

۱-۱- نشان دهید که مجموعه اعداد مختلط C به‌روی میدان اعداد حقیقی R یک فضای خطی‌است، لیکن مجموعه‌اعدادحقیقی R به‌روی میدان اعداد مختلط C یک فضای خطی نیست.

۱-۲- قضیه ۱-۲ را اثبات کنید.

۱-۳- قضیه ۱-۴ را اثبات کنید.

۱-۴- نشان دهید که مجموعه توابع گویا با ضرایب حقیقی به‌روی میدان اعداد حقیقی یک فضای خطی است. همچنین نشان دهید که این مجموعه به‌روی میدان توابع گویا با ضرایب حقیقی نیز یک فضای خطی است.

۱-۵- بُعد فضای برداری تولید شده توسط هر کدام از مجموعه بردارهای زیر را تعیین نمائید:

(i) {۱ , ۱ , ۰}، {۱ , ۰ , ۱}، {۰ , ۱ , ۱}

(ii) {۱ , ۰ , ۰}، {۰ , ۱ , ۰}، {۰ , ۰ , ۱}، {۱ , ۱ , ۱}

(iii) {۱ , ۱ ,۱}، {۱ , ۰ , ۱}، {۱ , ۲ , ۱}

۱-۶- تعیین کنید که آیا بردار {۲ , ۶- , ۱ , ۶} در فضای خطی تولید شده توسط

بردارهای {۰ , ۱- , ۱-, ۱} ، {۱ , ۱ , ۰ , ۱-} و {۱ , ۱- , ۱ , ۱} قرار دارد؟

۱-۷- نشان دهید که مجموعه کلیه ماتریس‌های ۲×۲ با ضرایب حقیقی یک فضای خطی به روی R با بُعد ۴ تشکیل می‌دهند.

۱-۸- رتبه و پوچی ماتریس‌های زیر را تعیین کنید.

$$A_1=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_3=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix} \quad A_4=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

۱-۹- پایه‌های فضاهای گستره و فضاهای پوچی ماتریس‌های داده شده درمسئله ۱-۸ را بدست آورید.

۱-۱۰- دستگاه معادلات زیر را درصورت امکان حل کنید.

(i)

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 4x_1 - 7x_2 - 5x_3 &= 2 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 1 \end{aligned}$$

۱-۱۱- نشان دهید که مجموعه زیر

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= \lambda x_1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= \lambda x_2 \\ -x_1 + 2x_2 &= \lambda x_3 \end{aligned}$$

تنها در صورتی پاسخهای غیر جزئی دارد که $\lambda = 1$ یا $\lambda = -3$ باشد. در هر دو حالت پاسخ کلی را تعیین کنید.

۱-۱۲- معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$x(n) = A^n x(0) + A^{n-1} bu(0) + A^{n-2} bu(1) + \dots + Abu(n-2) + bu(n-1)$$

که در آن A یک ماتریس ثابت $n\times n$ و b یک بردار ستونی $n\times 1$ می‌باشند. تحت چه شرایطی بروی A و b، برای هر $x(n)$ و $x(0)$ داده شده، $u(0)$، $u(1)$, ..., $u(n-1)$ وجود خواهند داشت که معادله را برآورده سازند؟

راهنمائی : معادله را به صورت زیر تبدیل کنید

$$x(n) - A^n x(0) = [b\ Ab\ \dots\ A^{n-1}b] \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

۱-۱۳- قضیه ۱-۱۱ را اثبات کنید.

۱-۱۴- نشان دهید

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

که در آن λ_iها مقادیر ویژه ماتریس A $n\times n$ می‌باشند.

۱-۱۵- نشان دهید که یک ماتریس مربع ناویژه است، اگر و فقط اگر کلیه مقادیر ویژه آن غیر صفر باشند.

۱-۱۶- اثبات کنید که ماتریس‌های مشابه مقادیر مشخصه‌های یکسان دارند.

۱-۱۷- ماتریس زیر را ماتریس وندرموند[1] گویند

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

نشان دهید که $\det A = \prod_{1\le i<j\le n} (\lambda_i - \lambda_j)$.

۱-۱۸- ماتریس زیر را درنظر بگیرید.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

(i) نشان دهید که معادله مشخصه این ماتریس به صورت زیر است:

$$\det(\lambda I-A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

(ii) اگر λ_1 مقدار ویژه‌ای از A است، نشان دهید که بردار ویژه متناظر با آن عبارتست از

$$v_1 = [1\ \lambda_1\ \lambda_1^2 \dots \lambda_1^{n-1}]^T$$

۱-۱۹- چند جمله‌ای می‌نیمال[1] $\Psi(\lambda)$ یک ماتریس A چندجمله‌ای تکین[2] حداقل درجه‌ای است که $\Psi(A)=0$. (چند جمله‌ای تکین، چند جمله‌ای است که ضریب بالاترین توان آن یک باشد.) نشان دهید که چند جمله‌ای می‌نیمال ماتریس‌های مشابه یکسان می‌باشند.

۱-۲۰- نشان دهید که اگر λ_i یک مقدار ویژه از A است، آنگاه $f(\lambda_i)$ یک مقدار ویژه از تابع ماتریسی $f(A)$ می‌باشد. (راهنمائی: نشان دهید که یک بردار غیر صفر x چنان وجود دارد که $(f(A)x = f(\lambda_i)x$

۱-۲۱- ماتریس $n\times n$، A را در نظر بگیرید. با استفاده از قضیه کیلی-هامیلتون نشان دهید که هر A^k برای $k \geq n$ را می‌توان به صورت ترکیب خطی از $\{I, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$ نوشت. اگر درجه چند جمله‌ای می‌نیمال A مشخص باشد، چه اصلاحی می‌توانید انجام دهید؟

۱-۲۲- روابط زیر را با فرض ناویژه بودن A و B برای ماتریس‌های بلوکی زیر اثبات کنید:

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix} \qquad \text{(i)}$$

$$\begin{bmatrix} A & D \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}DB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \qquad \text{(ii)}$$

۱-۲۳- اگر A ناویژه باشد، نشان دهید که

$$\begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1}+E\Delta^{-1}F & -E\Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1}F & \Delta^{-1} \end{bmatrix} \qquad \text{(ii)}$$

که در آن $\Delta=B-CA^{-1}D$، $E=A^{-1}D$ و $F=CA^{-1}$. نشان دهید که اگر B ناویژه باشد، آنگاه عنصر (۱و۱) معکوس را می‌توان به صورت $[A-DB^{-1}C]^{-1}$ نوشت. Δ را متمم شر[1] ماتریس A می‌نامند.

۱-۲۴- اگر A، B، C و D به ترتیب ماتریس‌های $n\times n$ و $n\times m$، $m\times n$ و $m\times m$ باشند، آنگاه لم معکوس‌سازی ماتریس در زیر را اثبات کنید:

$$(A+BDC)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}B(D^{-1}+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$$

که در آن فرض شده است معکوس‌های آورده شده وجود دارند.

۲-۲- معادله حالت و خروجی سیستمی در زیر داده شده است.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -۶ & ۴ \\ -۲ & ۰ \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

پاسخ این سیستم به ورودی پله واحد را برای شرایط اولیه $\mathbf{x}(۰) = [۲ \quad ۰]^T$ بدست آورید.

سیستم داده شده زیر

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

پاسخ سیستم را برحسب شرایط اولیه $x_1(0)$، $x_2(0)$ و $x_3(0)$ بدست آورید.

۲-۴- نشان دهید که پاسخ معادله دیفرانسیل ماتریسی زیر

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}(t)\mathbf{B}$$

با شرط اولیه $\mathbf{x}(0) = \mathbf{C}$ عبارت است از

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{C}e^{\mathbf{B}t}$$

۲-۵- تابع تبدیل سیستم داده شده با معادلات حالت و خروجی زیر را بدست آورید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

۲-۶- معادله حالت سیستمی عبارت است از

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

ماتریس انتقال حالت آن را با استفاده از روش لاپلاس بدست آورید.

۲-۷- ماتریس انتقال حالت $e^{\mathbf{A}t}$، ماتریس زیر را با استفاده از بسط سری بی‌نهایت بدست آورید.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۲-۸- سیستم‌های داده شده با معادلات حالت و خروجی زیر را قطری‌سازی کنید:

(الف)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

(ب)

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & -۱ \\ ۰ & -۲ & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$$

ج

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix} ۷ & ۴ & -۸ \\ ۴ & -۸ & -۱ \\ -۴ & -۱ & -۸ \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$$

۲-۹- ماتریس‌های حالت زیر را درنظر بگیرید. ماتریس تبدیل مناسبی که آنها را به صورت جردن تبدیل می‌کند، تعیین کرده و صورت جردن آنها را بنویسید.

(الف)

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳/۵ & -۴/۵ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

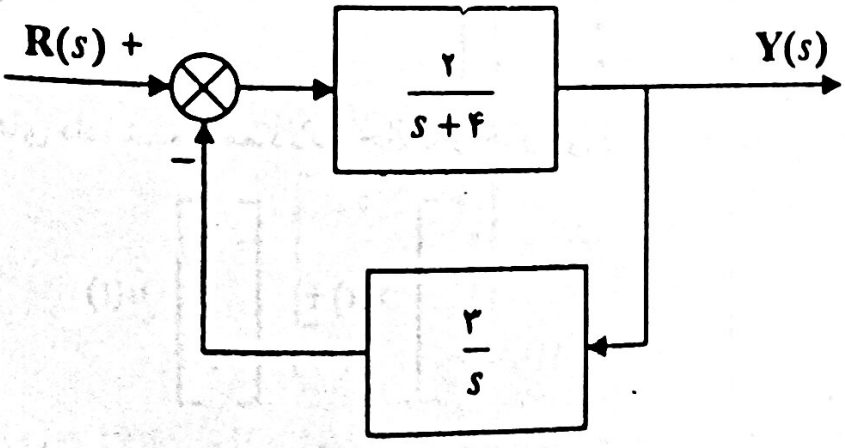
(ب)

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

(ج)

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ & -۴ \\ ۰ & ۱ & -۳ \end{bmatrix}$$

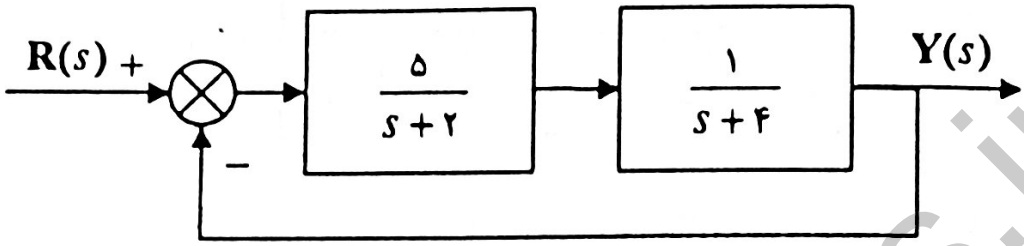
۲-۱۰- سیستم نشان داده شده در شکل ۲-۹ رادر نظر بگیرید. نخست، یک نمایش فضای



شکل ۲-۹

حالت می‌نیمال برای آن پیدا کرده و سپس ماتریس انتقال حالت آن را محاسبه کنید. همچنین، برای ورودی پله‌واحد و شرایط اوّلیه صفر، خروجی آنرا تعیین کنید.

۲-۱۱- یک نمایش فضای حالت می‌نیمال برای سیستم نشان داده شده در شکل ۲-۱۰ پیدا کنید.



شکل ۲-۱۰

۲-۱۲- تابع تبدیل سیستمی بدین صورت داده شده است

$$g(s) = \frac{۶}{(s+۳)^۳} + \frac{۷}{(s+۳)^۲} + \frac{۲}{s+۳} + \frac{۵}{s+۴}$$

نشان دهید که توصیف فضای حالت سیستم به فرم جردن عبارت است از

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -۳ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۴ \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [۶ \quad ۷ \quad ۲ \quad ۵]x(t)$$

۲-۱۳- معادله حالت سیستمی به صورت زیر است

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} A_{۱۱} & A_{۱۲} \\ ۰ & A_{۲۲} \end{bmatrix} x(t)$$

اگر

$$\Phi(t,t_۰) = \begin{bmatrix} \Phi_{۱۱}(t,t_۰) & \Phi_{۱۲}(t,t_۰) \\ \Phi_{۲۱}(t,t_۰) & \Phi_{۲۲}(t,t_۰) \end{bmatrix}$$

ماتریس انتقال حالت سیستم باشد، نشان دهید که به ازاء کلیه t و t_0، $\Phi_{11}(t,t_0)=0$ و آنکه $\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{ii}(t,t_0)=A_{ii}\Phi_{ii}(t,t_0)$ برای $i=1,2$.

۲-۱۴- معادلات حالت و خروجی سیستم زیر را به صورت کانونیکال جردن تبدیل کنید.

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 20 & 16 \\ 0 & -25 & -20 \end{bmatrix} x(t)+\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} x(t) + 4u(t)$$

۲-۱۵- پاسخ سیستم زیر را

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} x(t)+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} x(t)$$

با شرایط اوّلیه حالت

$$x(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بدست آورید.

۲-۱۶- معادلات حالت و خروجی زیر را به صورت کانونیکال جردن تبدیل کنید.

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

مسائل

۳-۱- سیستم توصیف شده با معادله زیر را درنظر بگیرید

$$\frac{d^2y(t)}{dt}+2\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=\frac{du(t)}{dt}+u(t)$$

متغیرهای حالت را به دو طریق انتخاب کرده و نشان دهید که رؤیت‌پذیری سیستم بستگی به انتخاب متغیرهای حالت خواهد داشت.

۳-۲- کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری سیستم داده شده با معادلات حالت و خروجی زیر را بررسی کنید.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

۳-۳- معادله حالت سیستم زیر را به صورت کانونیکال کنترل‌پذیری تبدیل کرده و مُود کنترل‌ناپذیر را شناسائی کنید.

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t)$$

۳-۴- اثبات کنید که اگر رتبه B برابر با r باشد، آنگاه معادله حالت

$$\dot{x}(t)=A\,x(t)+B\,u(t)$$

که در آن $x(t)$ بردار n- بُعدی حالت و $u(t)$ بردار m-بُعدی ورودی می‌باشند، کنترل‌پذیر حالت است اگر و فقط اگر

$$\text{رتبه}\ [\,B\quad AB\ \dots\ A^{n-r}B\,]=n$$

۳-۵- ثابت کنید که اگر رتبه C برابر با r باشد، آنگاه معادله حالت زیر

$$\dot{x}(t)=A\,x(t)+Bu(t)$$

$$y(t)=Cx(t)$$

که درآن $x(t)$ بردار n-بُعدی حالت، $u(t)$ بردار m-بُعدی ورودی و $y(t)$ بردار l-بُعدی خروجی است، رؤیت‌پذیر است اگر و فقط اگر

$$\text{رتبه}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-r} \end{bmatrix}=n$$

۳-۶- نشان دهید که کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری سیستم زیر

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$

$$y(t)=Cx(t)$$

تحت تبدیل همانندی $z(t)=Tx(t)$ تغییرناپذیر می‌باشند.

۳-۷- یک سیستم خطی توصیف شده با معادله دیفرانسیلی زیر را درنظر بگیرید

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\frac{dy(t)}{dt}+3\,y(t)=\frac{du(t)}{dt}+u(t)$$

با انتخاب $x_1=y$ و $x_2=\dot{y}-u$، به عنوان متغیرهای حالت، رؤیت‌پذیری و کنترل‌پذیری سیستم را بررسی کنید.

۳-۸- مدل فضای حالت سیستمی عبارت است از

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=[\,-1\quad 1\quad 1\,]\,x(t)$$

آن مقدار از α که سیستم را رؤیت‌ناپذیر می‌کند پیدا کنید. با این مقدار α یک نمایش می‌نیمال از سیستم بدست آورید.

۳-۹- نشان دهید که سیستم توصیف شده با معادله حالت زیر کاملا کنترل‌پذیر حالت است

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t)$$

یک ورودی کنترل $u(t)=\alpha$ برای $t\geq 0$ چنان پیدا کنید که در آن α ثابت است و حالت به $\mathbf{x}(\log_e 2)=[0 \quad 0]^T$ از $\mathbf{x}(0)=[-1 \quad 4]^T$ انتقال داده شود.

۳-۱۰- سیستم n-بُعدی زیر را درنظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t)+B\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t)=C\mathbf{x}(t)$$

رتبه ماتریس کنترل‌پذیری این سیستم

$$\Phi_c=[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

برابر با $n_1(<n)$ فرض شده است. فرض کنید که T_1 یک ماتریس $n\times n_1$ تشکیل شده از n_1 بردارهای ناوابسته خطی Φ_c باشد. فرض کنید که T_2 یک ماتریس $n_1\times n$ باشد که $T_2T_1=I_{n_1}$ (I_{n_1} = ماتریس واحد $n_1\times n_1$). نشان دهید که سیستم n_1-بُعدی زیر

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t)=T_2AT_1\,\bar{\mathbf{x}}(t)+T_2B\,\mathbf{u}(t)$$

$$\bar{\mathbf{y}}(t)=CT_1\,\bar{\mathbf{x}}(t)+D\mathbf{u}(t)$$

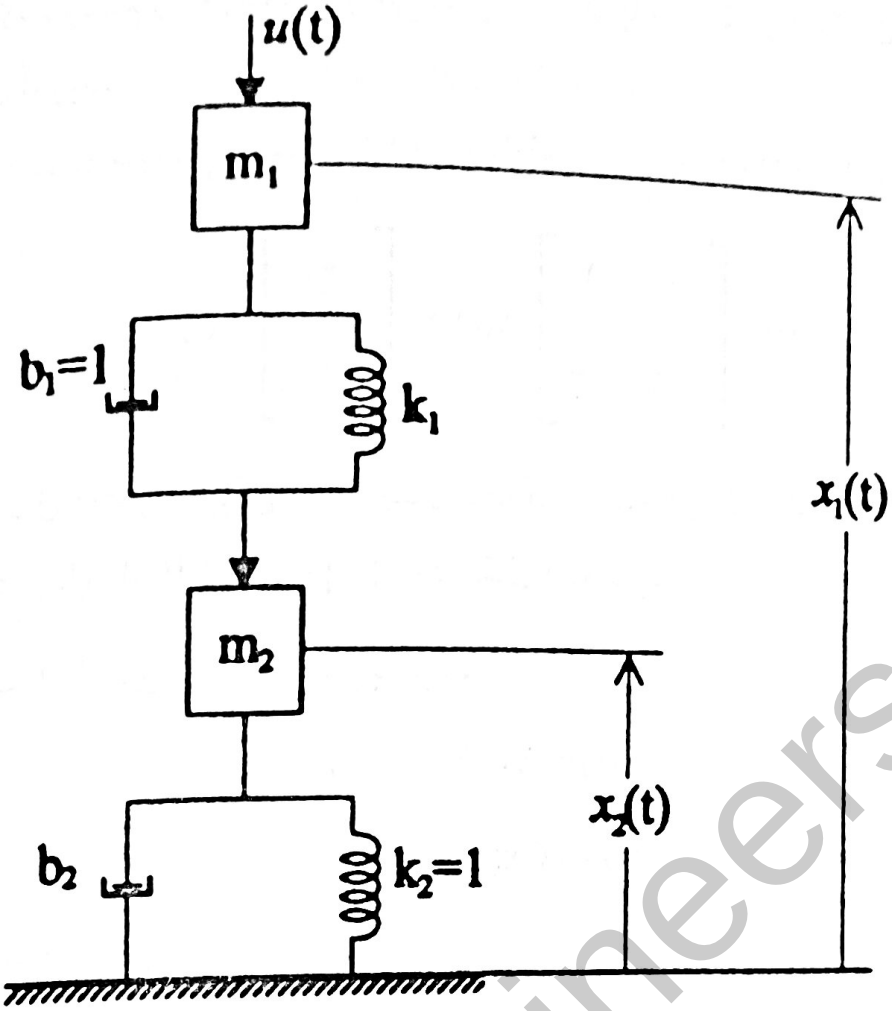
کنترل‌پذیر می‌باشد.

۳-۱۱- مسئله ۱۰ را با تغییرات مناسب برای یک سیستم رؤیت‌ناپذیر تکرار کنید.

۳-۱۲- سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}u(t)$$

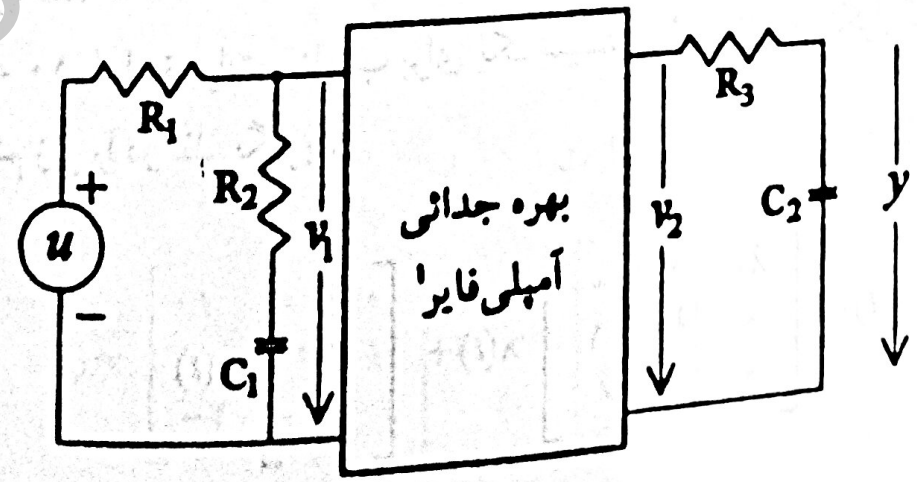
کنترل‌پذیری کامل حالت را برای مقادیر مختلف a، b و c بررسی کنید.



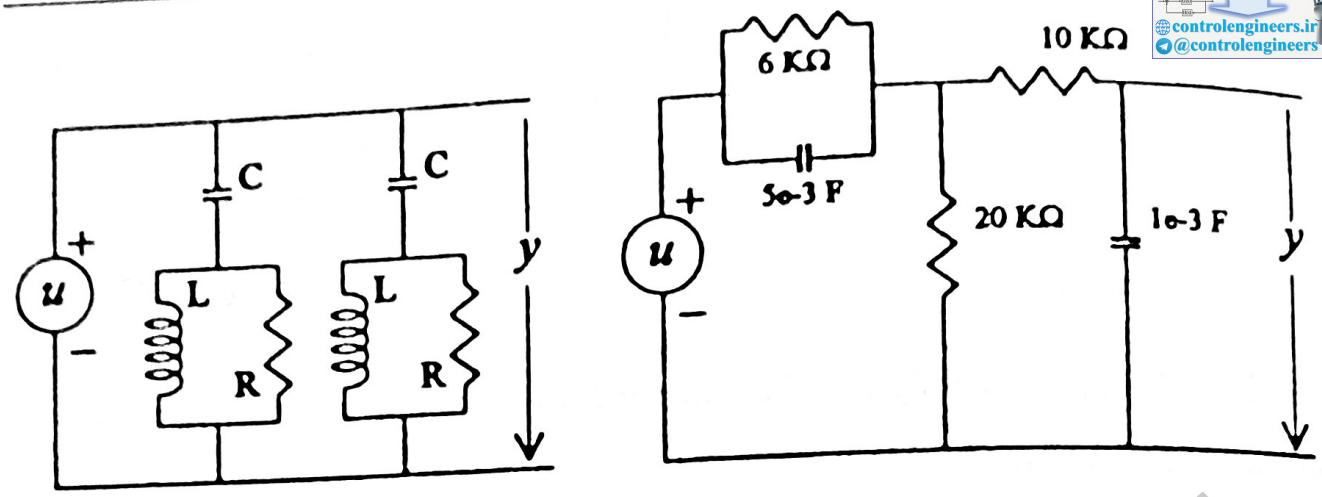
شکل ۳-۲۰ سیستم مکانیکی مسئله ۳-۱۳

۳-۱۳- سیستم مکانیکی نشان داده شده در شکل ۳-۲۰ را در نظر بگیرید. با فرض کوچک بودن جرم‌های m_1 و m_2 وبا استفاده از $x_1(t)$ و $x_2(t)$ به‌عنوان متغیرهای حالت، $u(t)$ به‌عنوان نیروی ورودی $y(t)=x_1(t)$ به‌عنوان خروجی سیستم، کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری سیستم را بررسی کنید.

۳-۱۴- آیا سیستم نشان داده شده در شکل ۳-۲۱ کنترل‌پذیر کامل و رؤیت‌پذیر کامل است؟



شکل ۳-۲۱ سیستم مسئله ۳-۱۴



(ب) (الف)

شکل ۳-۲۲ مدارهای مسئله ۳-۱۵

۳-۱۵- کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری مدارهای نشان داده شده در شکل‌های ۳-۲۲ (الف) و (ب) را معین کنید.

۳-۱۶- معادله سیستمی عبارتست از

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}u(t)$$

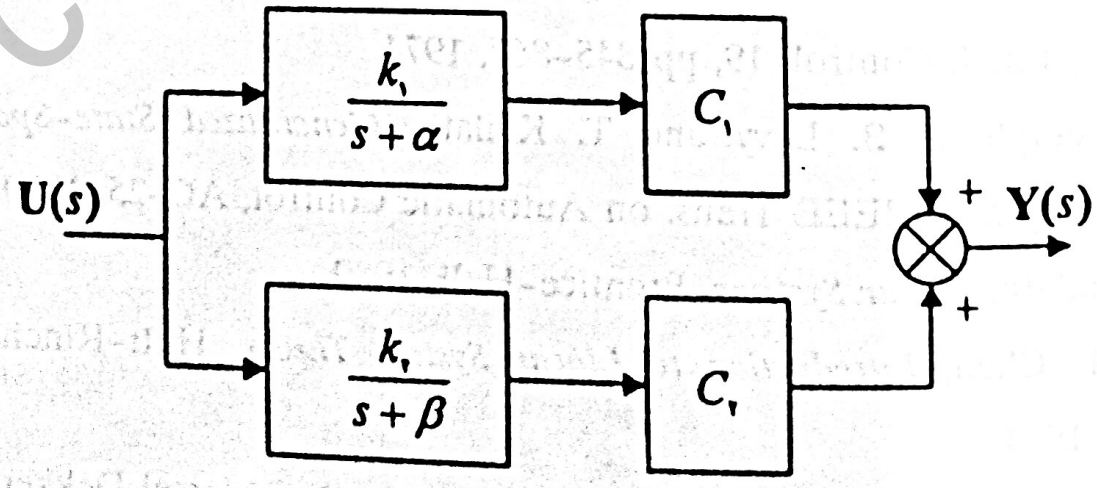
این سیستم کنترل‌پذیر نیست.

(الف) بردارهائی که زیرفضای کنترل‌پذیر سیستم را اسپن می‌کنند تعیین کنید.

(ب) بابکارگیری بردارهای تعریف شده در (الف) و تعریف بردارهای مناسب اضافی، معادله حالت را به فرم کانونیکال کنترل‌پذیری تبدیل کرده، مودهای کنترل‌پذیر و کنترل‌ناپذیر سیستم را شناسائی کنید.

(پ) آیا این سیستم پایداری‌پذیر است؟

۳-۱۷- کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری سیستم نشان داده شده در شکل ۳-۲۳ را بررسی کنید.



شکل ۳-۲۳ سیستم مسئله ۳-۱۷

مسائل

۴-۱- برای تابع تبدیل داده شده زیر

$$g(s)=\frac{۱}{s+۳}$$

(الف) یک تحقق می‌نیمال پیدا کنید.

(ب) یک تحقق کنترل پذیر و رؤیت‌ناپذیر پیدا کنید.

(ج) یک تحقق کنترل‌ناپذیر و رؤیت‌پذیر پیدا کنید.

(د) یک تحقق کنترل‌ناپذیر و رؤیت‌ناپذیر پیدا کنید.

۴-۲- معادلات ورودی-خروجی سیستمی عبارتنداز

$$\dot{y}_۱+۲(y_۱-y_۲)=۴u_۱-u_۲$$

$$\dot{y}_۲+۳(y_۲-y_۱)=۴u_۱-u_۲$$

یک دیاگرام بلوکی برای این سیستم رسم نمائید. معادلات حالت سیستم را بدست آوردید و از معادلات حالت ماتریس تابع تبدیل سیستم را پیدا کنید. با استفاده از ماتریس تابع تبدیل، سیستم را به یک صورت دیگر نیز تحقق دهید. تعداد انتگرال‌گیرهای لازم چند عدد می‌باشند.

۴-۳-(الف) تحقق‌های کانونیکال کنترل‌کننده و کنترل‌پذیری تابع تبدیل زیر رابدست آورید

$$g(s)=\frac{۲}{(s+۱)^۲(s+۳)}$$

(ب) تحقق‌های کانونیکال رؤیتگر و رؤیت‌پذیری تابع تبدیل زیر را بدست آورید

$$g(s)=\frac{s^3+8s^2+17s+8}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

آیا تحقق‌های بدست آمده می‌نیمال می‌باشند. دیاگرام‌های بلوکی این تحقق‌ها را رسم کنید.

۴-۴- مدل‌های فضای حالت، برای معادلات دیفرانسیل زیر پیدا کنید.

(الف)
$$\dddot{y}+3\ddot{y}+2\dot{y}=\dot{u}+u$$

(ب)
$$\dddot{y}+6\ddot{y}+11\dot{y}+6y=u$$

۴-۵- حداقل دو تحقق برای ماتریس‌های تابع تبدیل زیر بدست آورید

(الف)
$$G(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+2} & \frac{1}{s^2+3s+2}\end{bmatrix}$$

(ب)
$$G(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s^2+s+3}\\ \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}$$

(پ)
$$G(s)=\begin{bmatrix}\frac{2s}{(s+1)(s+2)(s+3)}\\ \frac{s^2+2s+2}{s(s+1)^2(s+4)}\end{bmatrix}$$

(ت)
$$G(s)=\begin{bmatrix}\frac{2s+3}{(s+1)(s+2)(s+3)} & \frac{s^2+2s+2}{s(s+1)^2(s+4)}\end{bmatrix}$$

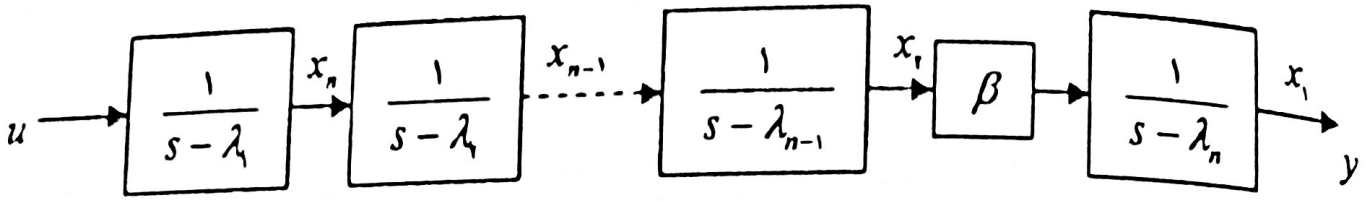
آیا تحقق‌های بدست آمده می‌نیمال می‌باشند؟

۴-۶- یک تحقق می‌نیمال برای ماتریس‌های تابع تبدیل زیر بدست آورید

(الف)
$$G(s)=\begin{bmatrix}\frac{s+2}{s+1} & \frac{1}{s+3}\\ \frac{s}{s+1} & \frac{s+1}{s+2}\end{bmatrix}$$

(ب)
$$G(s)=\begin{bmatrix}\frac{s^2+1}{s^2} & \frac{2s+1}{s^2}\\ \frac{s+3}{s^2} & \frac{2}{s}\end{bmatrix}$$

۴-۷- نمایش فضای حالت دیاگرام بلوکی شکل ۴-۹ را با متغیرهای حالت نشان داده شده پیدا کنید.



شکل ۴-۹ دیاگرام بلوکی مسئله ۴-۷

۴-۸- چهار تحقق کانونیکال برای $1/s^4$ بدست آورید.

۴-۹- نشان دهید که $a(s)$ و $b(s)$ هیچ فاکتور مشترکی ندارند، اگر و فقط اگر $b(s)+da(s)$ و $a(s)$ هیچ فاکتور مشترکی نداشته باشند. که درآن $a(s)$ و $b(s)$ دوچند جمله‌ای و d یک ثابت حقیقی است.

۴-۱۰- یک معادله فضای حالت کاهش‌ناپذیر برای معادلات دیفرانسیل زیر بنویسید.

$$2\dot{y}_1+2y_1+\dot{y}_2+y_2=\dot{u}_1+u_2$$

$$\dot{y}_1+y_1+\dot{y}_2+y_2=\dot{u}_1+u_1$$

۴-۱۱- نشان دهیدکه پارامترهای مارکوف سیستم تحت تبدیلهای همانندی تغییرناپذیر می‌باشند.

۴-۱۲- نشان دهیدکه ماتریس کنترل‌پذیری تحقق کانونیکال رؤیت‌پذیری، ماتریس هانکل $H[1, n-1]$ می‌باشد.

۴-۱۳- نمایش‌های مختلف فضای حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_k(t)=A_kx_k(t)+B_ku_k(t) \qquad R_k\ (k=1,\ 2,\ \ldots)$$

$$y_k(t)=C_kx_k(t)$$

با فرض مختلف بودن مقادیر ویژه سیستم، $\lambda_i^{(k)}$، ماتریس حالت قطری شده سیستم Λ_k بوده و ماتریس مُدال متناظر U_k می‌باشد. بنابراین

$$A_kU_k=U_k\Lambda_k$$

ماتریس‌های کنترل‌پذیری-مُود[1] و رؤیت‌پذیری-مُود[2] رابه ترتیب با معادلات زیر تعریف می‌کنیم [۱۳]:

$$\Sigma_k = U^{-1}{}_k B_k$$

$$\Omega_k = C_k U_k$$

همچنین، ماتریس تابع تبدیل متناظر با نمایش داده شده فضای-حالت عبارتست از:

$$G_k(s) = C_k(sI - A_k)^{-1} B_k$$

نشان دهید که ماتریس‌های تابع تبدیل $G_1(s)$ و $G_2(s)$ متناظر با نمایش‌های R_1 و R_2 از سیستم داده شده، معادل می‌باشند اگر

$$\Lambda_1 = \Lambda_2$$

$$\Sigma_1 = \Gamma^{-1}\Sigma_2$$

و

$$\Omega_1 = \Omega_2 \Gamma$$

که در آن Γ یک ماتریس مربع قطری ناویژه می‌باشد. همچنین نشان دهید که این شرایط مستقل از کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری نمایش‌های R_1 و R_2 بوده و تنها شرط کافی برای معادل بودن $G_1(s)$ و $G_2(s)$ می‌باشند.

۴-۱۴- نشان دهید که شرایط داده شده در مسئله ۴-۱۳ برای معادل بودن دوماتریس تابع تبدیل $G_1(s)$ و $G_2(s)$، در صورت کنترل‌پذیر و رؤیت‌پذیر بودن دونمایش R_1 و R_2، شرایط لازم و کافی برای معادل بودن $G_1(s)$ و $G_2(s)$ می‌باشند.

(الف) $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ -۱۰ & -۵ & -۶ \end{bmatrix}$ (ب) $A=\begin{bmatrix} ۱۰ & ۶ & ۴ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$

(پ) $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۲ & ۰ \\ ۵ & -۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ (ت) $A=\begin{bmatrix} ۴ & ۴ & ۰ \\ ۳ & ۱ & ۴ \\ ۰ & - & ۲ \end{bmatrix}$

۵-۲- برای دو سیستم داده شده در زیر

(الف) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ -k & -۱ & -۲ \end{bmatrix}\mathbf{x}$ (ب) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ -k & -۵ & -۶ \end{bmatrix}\mathbf{x}$

و

$$V(\mathbf{x})=۶kx_۱^۲+۲kx_۱x_۲+۴۱x_۲^۲+۱۲x_۲x_۳+x_۳^۲$$

نشان دهید که $V(\mathbf{x})$ برای همان گستره‌ای از k که $\dot{V}(\mathbf{x})$ منفی معین است مثبت معین باقی می‌ماند. هم‌چنین نشان دهید که سیستم‌ها پایدار مجانبی فراگیر می‌باشند.

۵-۳- سیستم و تابع لیاپانوف زیر را درنظر بگیرید:

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ -k & -۱ & ۰ \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

و

$$V(\mathbf{x})=۲kx_۱^۲+۲kx_۱x_۲+x_۲^۲+x_۳^۲$$

پایداری این سیستم را برای تغییرات k بررسی کنید.

۵-۴- با استفاده از روش ارائه شده در بخش (۵-۵-۳)، گستره‌ای از مقادیر k را که یک ماتریس مثبت معین $\mathbf{P}$ در تابع لیاپانوف $V(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$ می‌دهد، تعیین کرده و پایداری سیستم‌های زیر را در این گستره بررسی کنید:

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ k & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad N=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} -k & 1 & 0 \\ -11 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad N=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & -5 & -6 \end{bmatrix} \qquad N=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} -1 & k \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad N=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (k\neq 0)$$

۵-۵- برای صورت درجه دوّم $V(x)=x^TQx$ که درآن Q یک ماتریس متقارن است اثبات کنیدکه

$$\frac{dV(x)}{dx}=2Qx$$

۵-۶- یک تابع لیاپانوف برای سیستم زیر پیداکرده و پایداری آنرا تعیین نمائید.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} x$$

۵-۷- پایداری نقطه تعادل سیستم زیر را تعیین کنید.

$$\dot{x}_1=x_2$$

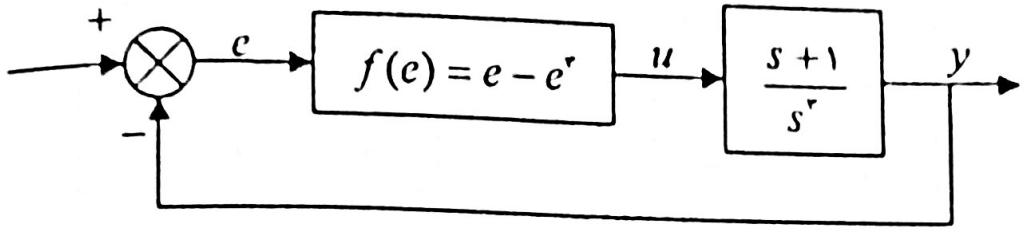
$$\dot{x}_2=-x_1^3-x_2$$

۵-۸- پایداری نقطه تعادل سیستم زیر را تعیین کنید.

$$\dot{x}_1=x_1-x_2-x_1^3$$

$$\dot{x}_2=x_1+x_2-x_1^3$$

۵-۹- نقاط تعادل سیستم زیر را تعیین کرده و پایداری حول آنها را بررسی کنید.



شکل ۵-۶ شکل مسئله ۵-۱۰

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + x_1 x_2$$

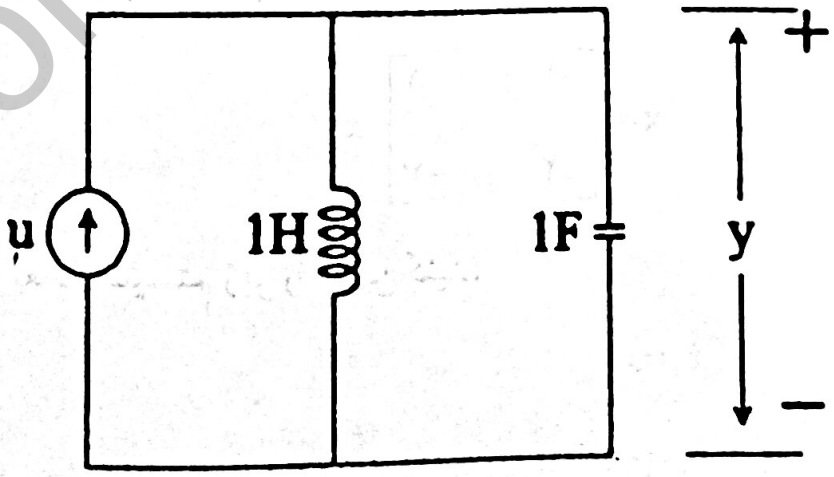
$$\dot{x}_2 = -x_2 + x_1 x_2$$

۵-۱۰- یک آنتن خود-دنبال کننده[1] به علت تغییر در قدرت بازگشتی به صورت تابعی از زاویه خط مرکز پرتو[2] و هدف، یک عنصر غیرخطی غالب دارد. یک تقریب به این مسئله در شکل ۵-۶ برای یک حالت نشان داده شده است.

(الف) متغیرهای حالت را به گونه‌ای تعریف کنید که سیستم خطی به‌صورت کانونیکال‌رؤیتگر باشد و معادلات کامل (غیرخطی) حرکت سیستم را بنویسید.

(ب) با قرار دادن $V=x_1^2+x_2^2$ نشان دهید که V یک تابع لیاپانوف مناسب برای سیستم است.

۵-۱۱- مدار نشان داده شده در شکل ۵-۷ را در نظر بگیرید. آیا این سیستم پایدار BIBO است؟ در صورتی که پایدار BIBO نباشد یک ورودی کراندار پیدا کنید که یک خروجی بی‌کران را ایجاد کند.



شکل ۵-۷ شکل مسئله ۵-۱۱

۵-۱۲- معادلات حالت و خروجی سیستمی عبارتند از

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ -۱ & -۱ & -۲ & -۱۰ & -۴ \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$$

پایداری مجانبی، BIBO و پایداری-T این سیستم را بررسی کنید.

۷-۱- معادلات حالت و خروجی سیستم زیر را درنظر بگیرید

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix} x(t)+\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t)=[\ \alpha \quad ۱\ ]x(t)$$

(الف) به ازاء چه مقادیری از α نمی‌توان یک رؤیتگر برای این سیستم طراحی کرد؟

(ب) برای $\alpha=۰$ یک بردار رؤیتگر L چنان پیدا کنید که خطای تخمین با مقادیر ویژه ۱- و ۲- به سمت صفر میل کند.

۷-۲- برای سیستم زیر:

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۴ & ۰ \end{bmatrix} x(t)+\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t)=[\ ۱ \quad ۰\ ]x(t)$$

یک رؤیتگر با مقادیر ویژه در ۶- و ۵- طراحی کنید. اگر بجای معادله خروجی بالا معادله زیر را داشتیم

$$y(t)=[\ ۱ \quad \alpha\ ]x(t)$$

به ازاء چه مقادیری از α می‌توانستیم رؤیتگری برای سیستم طراحی کنیم؟

۷-۳- سیستم توصیف شده با معادله زیر را درنظر بگیرید

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} x(t)+\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t)=[\ ۲ \quad -۱\ ]x(t)$$

یک رؤیتگر طراحی کنید که خطای تخمین را حداقل با سرعت $e^{-۱۰t}$ به سمت صفر میل دهد.

۶-۲- درجه نسبی[1] یک سیستم خطی، به صورت تفاضل بین درجه چندجمله‌ای‌های مخرج و صورت تعریف می‌گردد. نشان دهید که این درجه تحت فیدبک حالت تغییرناپذیر است.

۶-۳- در واحدهای مناسب بدون بُعد معادلات حرکت یک ارابه با یک چوب یکنواخت جرم m که بروی آن سوار شده و قابل چرخش است (همانطور که در شکل ۶-۱۰ نشان داده شده است.) عبارتند از

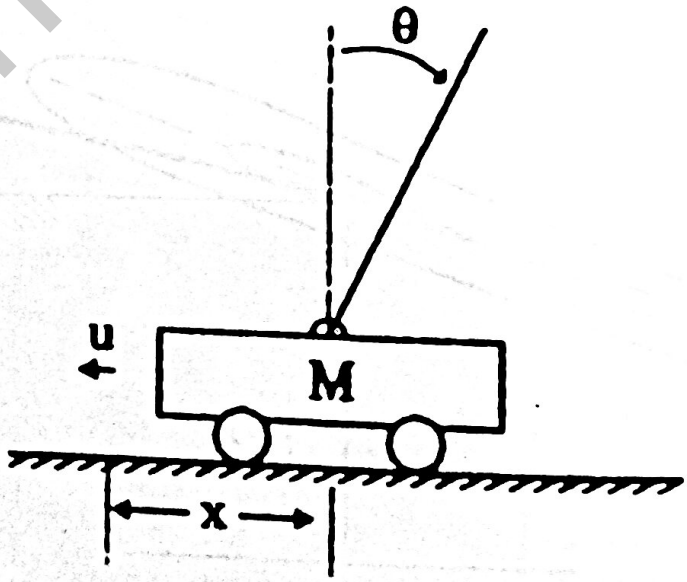
$$\ddot{\theta}=\theta+u$$

$$\ddot{x}=-\beta\theta-u$$

که در آن $\beta=\frac{3}{4}[m/(M+m)]$ و u نیز گشتاور اعمال شده به چرخهای ارابه توسط یک موتور الکتریکی است. مطلوب است قانون کنترلی پیدا کنیم که چوب را بالانس کرده (یعنی $\theta\approx 0$ را نگه دارد) و ارابه را نزدیک $x=0$ نگه دارد. برای این منظور بهره‌های k_1، k_2، k_3 و k_4 را در قانون فیدبک متغیر حالت $u=-k_1\theta_1-k_2\dot{\theta}-k_3x-k_4\dot{x}$ چنان پیدا کنید که سیستم حلقه بسته یک قطب مکرر در $s=-1$ داشته و یک جفت قطب‌های مختلط مزدوج در $s=-1\pm j$ داشته باشد.

۶-۴- یک هلیکوپتر در حال توقف در آسمان را می‌توان توسط معادلات زیر توصیف کرد

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0/02 & -1/4 & 9/8\\ -0/01 & -0/4 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9/8\\ 6/3\\ 0\end{bmatrix}u$$



شکل ۶-۱۰ سیستم مسئله ۶-۳

که در آن x_1 = سرعت افقی، x_2 = نرخ فراز، x_3 = زاویه فراز و u = زاویه انحراف گردنده می‌باشد.

(الف) قطب‌های حلقه باز را تعیین کنید.

(ب) قانون فیدبک حالت را برای جایابی قطب‌ها در $s=-2$ و $s=-1\pm j$ بدست آورید.

(پ) یک کنترل کننده ردیاب سرعت برای این سیستم طراحی کنید.

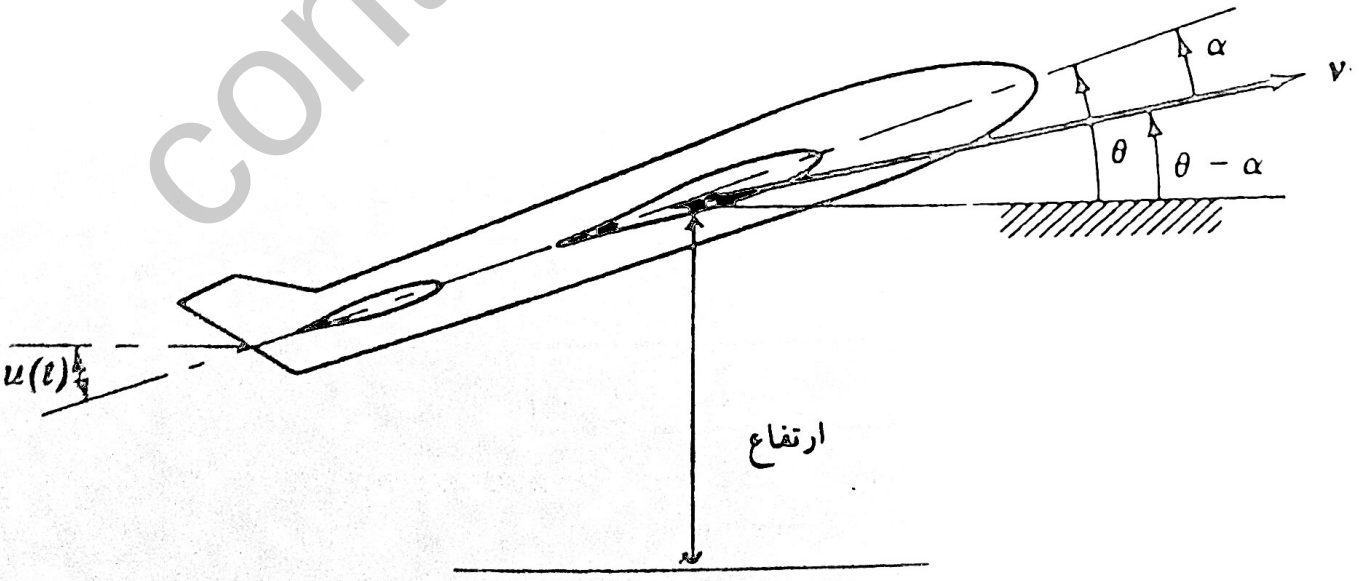
۶-۵- هلیکوپتر مسئله ۶-۴ را با یک باد مخالف ثابت (ولی ناشناخته) درنظر بگیرید. دراین حالت جریان باد $\mathbf{d}$ به صورت $[0 \quad 0/01 \quad -0/02]^T$ به معادلات سیستم اضافه می‌گردد. یک سیستم کنترل فیدبک حالت با کنترل انتگرال برای سیستم طراحی کنید. با بکارگیری فیدبک حالت، قطب انتگرال‌گیر در $s=0$ را به $s=-1$ انتقال دهید و سایر قطب‌ها را در -2 و $-1\pm j$ نگه دارید.

۶-۶- پرواز افقی یک هواپیما (نشان داده شده در شکل ۶-۱۱) را در حالت نزدیک ماندگار می‌توان با معادلات زیر مدل کرد:

$$\tau\dot{\gamma}=\alpha$$

$$\ddot{\theta}=-\omega_0^2(\alpha-Qu)$$

$$\dot{h}=v\gamma$$



شکل ۶-۱۱ سیستم مسئله ۶-۶

که در آن $\gamma=\theta-\alpha$ (زاویه مسیر پرواز نسبت به افق)، θ = انحراف زاویه فراز، α = انحراف زاویه حمله، v = اندازه سرعت نسبت به زمین (ثابت فرض شده است)، u = انحراف بالابر (کنترل)، r = موثری بالابر (ثابت)، τ = ثابت زمانی بالا رفتن و ω_0 = فرکانس طبیعی غیر میرا در حرکت فراز (ثابت). مطلوب است که در مقابل اغتشاشات باد عمودی $h\approx 0$ باقی بماند.

(الف) با استفاده از یک ارتفاع سنج برای اندازه‌گیری h نشان دهید که با فیدبک خطای تناسبی $u=-kh$ سیستم حلقه بسته به ازاء هیچ مقداری از k پایدار نخواهد شد.

(ب) با استفاده از یک ژیرسکوپ برای اندازه‌گیری θ نشان دهید که می‌توان سیستم را با کنترل‌کننده فیدبک حالت $u=-k_1h-k_2\theta$ پایدار کرد.

۶-۷- سیستم خطی توصیف شده باتابع تبدیل زیر را درنظر بگیرید

$$\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{10}{s(s+1)\ (s+2)}$$

کنترل‌کننده فیدبک حالت، چنان طراحی کنید که مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته در $-1\pm j$ و -2 قرار گیرند.

۶-۸- سیستم‌های زیر را درنظر گرفته، با بکارگیری فیدبک حالت و روش‌های ارائه شده برای تعیین بهره فیدبک، قطب‌های حلقه بسته را در مکانهای مطلوب جایگزین نمائید:

(الف)
$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ 2 & 1 & -3\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}10\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u(t)$$

مجموعه قطب‌های مطلوب $\{-3\ ,\ -2\ ,\ -2\}$.

(ب)
$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & -1 & 3\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

مجموعه قطب‌های مطلوب $\{-6\ ,\ -1\pm -2j\}$.

(پ)
$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 2\\ -1 & -2 & 2\\ -2 & 0 & 2\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}u(t)$$

مجموعه قطب‌های مطلوب $\{-1\ ,\ -j\ ,\ j\}$.

(ج)
$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۰ \\ -۱ & -۲ & ۲ \\ -۲ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} x(t)+\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} u(t)$$

مجموعه قطب‌های مطلوب $\{ ۲- , -j , j \}$.

۶-۹- معادلات فضای حالت سیستمی عبارتند از

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix} -۴ & -۴ & -۲ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۶ & ۹ & ۲ \end{bmatrix} x(t)+\begin{bmatrix} -۱ \\ ۰ \\ ۲ \end{bmatrix} u(t)$$

(الف) معادلات حالت و خروجی این سیستم را به صورت کانونیکال کنترل‌کننده تبدیل کنید.

(ب) بهره فیدبک حالت **k** را چنان تعیین کنید تا قطب ناپایدار این سیستم را به ۳- انتقال داده و سایر قطب‌ها را تغییر ندهد.

۷-۱- معادلات حالت و خروجی سیستم زیر را درنظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=[\ \alpha \quad ۱\ ]\mathbf{x}(t)$$

(الف) به ازاء چه مقادیری از α نمی‌توان یک رؤیتگر برای این سیستم طراحی کرد؟

(ب) برای $\alpha=۰$ یک بردار رؤیتگر L چنان پیدا کنید که خطای تخمین با مقادیر ویژه ۱- و ۲- به سمت صفر میل کند.

۷-۲- برای سیستم زیر:

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۴ & ۰ \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=[\ ۱ \quad ۰\ ]\mathbf{x}(t)$$

یک رؤیتگر با مقادیر ویژه در ۶- و ۵- طراحی کنید. اگر بجای معادله خروجی بالا معادله زیر را داشتیم

$$y(t)=[\ ۱ \quad \alpha\ ]\mathbf{x}(t)$$

به ازاء چه مقادیری از α می‌توانستیم رؤیتگری برای سیستم طراحی کنیم؟

۷-۳- سیستم توصیف شده با معادله زیر را درنظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=[\ ۲ \quad -۱\ ]\mathbf{x}(t)$$

یک رؤیتگر طراحی کنید که خطای تخمین را حداقل با سرعت $e^{-۱۰t}$ به سمت صفر میل دهد.

۷-۴- برای سیستم مسئله ۶-۲ از مسائل فصل ۶ یک رؤیتگر حالت مرتبه کامل چنان طراحی کنید که قطب‌های آن در {۱۶- ، ۱۴- ، ۱۲- ، ۱۰-} قرار گیرند. رفتار حالتهای تخمین زده شده و واقعی سیستم را مقایسه کنید. طراحی فیدبک حالت را با رؤیتگر اعمال کنید.

۷-۵- برای هلیکوپتر داده شده در مسئله ۶-۴ از مسائل فصل ۶ یک رؤیتگر حالت مرتبه کامل چنان طراحی کنید که قطب‌های آن در {۷- ، ۶- ، ۵-} قرار گیرند. رفتار حالت‌های تخمین زده شده و واقعی سیستم را مقایسه کنید. طراحی فیدبک حالت را با رؤیتگر اعمال کنید.

۷-۶- در مسئله ۷-۴ رؤیتگر مرتبه کاهش یافته‌ای طراحی کنید که تنها متغیرهای x_3 و x_4 را تخمین زند. طراحی فیدبک حالت را با این رؤیتگر اعمال کنید.

۷-۷- در مسئله ۷-۵ رؤیتگر مرتبه کاهش یافته‌ای طراحی کنید که تنها متغیر x_3 را تخمین زند. فیدبک حالت را با این رؤیتگر اعمال کنید.

۷-۸- سیستم داده شده با معادلات حالت و خروجی زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$$

(الف) یک رؤیتگر مرتبه-کامل با مقادیر ویژه ۳-، ۲- و ۲- برای سیستم طراحی کنید.

(ب) یک رؤیتگر مرتبه-کاهش یافته با مقادیر ویژه ۳- و ۲- برای سیستم طراحی کنید.

۷-۹- سیستم داده شده با تابع تبدیل‌های زیر را درنظر بگیرید. با استفاده از روش تابع تبدیل، یک کنترل‌کننده جایابی قطب-رؤیتگر با مشخصات داده شده برای آنها طراحی کنید.

(الف)
$$g(s)=\frac{s+5}{s^2+3s+2}$$

قطب‌های حلقه بسته در $\{-3\pm 5j\}$ و قطب‌های رؤیتگر در {۸- , ۸-} .

(ب)
$$g(s)=\frac{s+1}{(s-1)(s+3)(s+5)}$$

قطب‌های حلقه بسته، {۲- و $-5\pm 3j$} و قطب‌های رؤیتگر در {۲۰- , ۱۵- , ۱۰-} .

(پ)
$$g(s)=\frac{1}{s(s+3)}$$

قطب‌های حلقه بسته، $\{-2\pm j\}$ و قطب‌های رؤیتگر در $\{-4\}$.

۷-۱۰- (الف) برای سیستم داده شده با معادلات زیر را درنظر بگیرید

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

نشان دهید که با تعریف

$$z=x_2-Lx_1 \qquad , \qquad \hat{z}=\hat{x}_2-Lx_1$$

که در آن L یک ماتریس $(n-1)\times 1$ است، معادله دینامیکی زیر یک رؤیتگر حداقل مرتبه برای سیستم می‌باشد:

$$\dot{\hat{z}}=(A_{22}-LA_{12})\hat{z}+[(A_{22}-LA_{12})L+A_{21}-LA_{11}]y+(b_2-Lb_1)u$$

هم چنین، نشان دهید که با انتخاب مناسب ماتریس L می‌توان خطای رؤیت را صفرکرد.

(ب) برای سیستم داده شده با

$$g(s)=\frac{1}{s(s-1)(s+1)}$$

اگر تنها متغیرهای قابل اندازه‌گیری خروجی و ورودی سیستم باشند، یک کنترل کننده فیدبک حالت با رؤیتگر حداقل مرتبه چنان طراحی کنید که قطب‌های سیستم در $\{-1\pm j,-2\}$ و قطب‌های رؤیتگر در $\{-4\}$ قرار گیرند. قطب‌های سیستم حلقه بسته را تعیین کنید.

مسائل

۸-۱- سیستم مرتبه اول و شاخص عملکرد زیر را درنظر بگیرید

$$\dot{x}(t)=ax(t)+u(t) \qquad x(0)=x_0$$

با

$$J=\int_0^{\infty}[x^2(t)+ru^2(t)]dt$$

حالت‌های حدی $r \to 0$ و $r \to \infty$ را برای هنگامیکه سیستم حلقه باز پایدار ($a < 0$) و ناپایدار ($a>0$) است، جداگانه بررسی کرده و کاملاً توضیح دهید.

۸-۲- نشان دهید کنترل $u(t)$ در سیستم زیر

$$\dot{x}(t)=u(t) \qquad x(0)=x_0$$

که شاخص عملکرد $J=\eta_f x^2(t_f)+\int_0^{t_f} u^2(t)dt$ را حداقل می‌کند، عبارتست از

$$u(t)=-(t_f-t+\eta_f^{-1})^{-1} \qquad 0\le t\le t_f$$

حالت‌های حدی $\eta_f \to \infty$ و $t_f \to \infty$ را توضیح دهید.

۸-۳- معادلات حالت و خروجی سیستمی عبارتند از

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t)+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

کنترل بهینه‌ای که معیار زیر را حداقل کند

$$J=\int_0^\infty [x_1^2(t)+u^2(t)]dt$$

و حالت دنبال روندگی را برای ورودیی که مرجع غیر صفر داشته باشد بوجود آورد، تعیین کنید.

۸-۴- سیستم داده شده زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -a \end{bmatrix} x(t) \qquad x(0)=[c_1 \quad 0 \quad 0]^T$$

که در آن a یک پارامتر قابل تنظیم مثبت است. پارامتر a را چنان تعیین کنید که شاخص عملکرد زیر را حداقل کند.

$$J=\int_0^\infty x^T(t)x(t)dt$$

۸-۵- معادله ورودی-خروجی سیستمی بدین صورت است

$$(a_2\frac{d^2}{dt^2}+a_1\frac{d}{dt})y(t)=b_0u(t)$$

(الف) یک نمایش فضای حالت برای سیستم پیدا کنید.

(ب) قانون کنترل بهینه‌ای پیدا کنید که شاخص عملکرد زیر را حداقل می‌کند.

$$J=\frac{1}{2}\int_0^\infty [y^2(t)+\eta b_0u^2(t)]$$

که در آن η مقادیر داده شده‌ای را اختیار می‌کند. بهره بهینه را برای a_2 $b_0=0/8$ $a_1=5a_2$ و $\eta=10^{-5}$ بدست آورده و قطب‌های حلقه بسته بهینه را تعیین کنید.

۸-۶- سیستم توصیف شده با معادلات حالت زیر

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t)$$

تحت شرایط اولیه $\mathbf{x}^T(0)=[\,2\quad -2\,]$ قرار گرفته است. حالت اولیه را باید با حداقل کردن شاخص عملکرد زیر

$$J=\int_0^1 u^2(t)\,dt$$

به $\mathbf{x}(1)=[\,0\quad 0\,]^T$ برسانیم. کنترل بهینه و حداقل مقدار J را تعیین کنید.

۸-۷- ماتریس هامیلتونین داده شده با معادله (۸-۵-۱۲) را درنظر بگیرید. با فرض اینکه این ماتریس $2n$ مقدار ویژه متمایز دارد نشان دهید که

(الف) اگر λ مقدار ویژه‌ای از H باشد، آنگاه $-\lambda$ نیز مقداری ویژه‌ای از H خواهد بود.

(ب) مقادیر ویژه رگلاتور حلقه بسته بهینه، مقادیر ویژه H با قسمت‌های حقیقی منفی می‌باشند.

(ج) اگر H را به صورت داده شده در (۸-۵-۱۳) قطری کنیم، آنگاه پاسخ حالت ماندگار معادله ریکاتی (۸-۵-۴) را می‌توان به صورت معادله (۸-۵-۱۴) نوشت.

(د) پاسخ رگلاتور بهینه حلقه بسته حالت ماندگار با معادله (۸-۵-۱۵) داده می‌شود.

۸-۸- سیستم داده شده در مسئله ۸-۶ را در نظر بگیرید. اگر بردار اولیه حالت سیستم $\mathbf{x}(0)=[\,c\quad 0\,]^T$ باشد، بردار بهره بهینه در قانون کنترل $u(t)=-\mathbf{k}\mathbf{x}(t)$ را چنان پیدا کنید که شاخص عملکرد

$$J=\int_0^\infty \mathbf{x}^T\mathbf{x}\,dt$$

را حداقل نموده و سیستم حلقه بسته دارای فرکانس طبیعی غیرمیرای مساوی با ۲ (رادیان بر ثانیه) باشد.