سایت اختصاصی
مهندسی کنترل

Multivariable control systems

کنترل چندمتغیره

مراجع:

جزوه درسی

[1] M. Athans, "Multivariable Control systems Lecture Notes, MIT Press.

[2] S. Shojestad and I. postlethwaite, "Multivariable Feedback Control Analysis

[3] B.D.O. Anderson, "optimal control: linear Quadratic Methods", prantice Hall, 1990

[4] M. Morari, "Robust process Control", prantice Hall, 1989.

[5] K. Kwakernaak, "Linear Optimal Control, wiley, 1972.

[6] S. Kailath, "Linear systems", prantice Hall, 1980.

[7] S. D'Azzo, "Linear Control systems analysis and Design", Mc Graw Hill, 1981

[8] مقالات که در طول ترم در اختیار شما قرار می‌گیرند

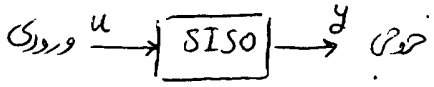
تکلیف: حدود 10 تکلیف در طول ترم داده می‌شود که برای حل برخی از آنها نیاز به دانش هم ابزارهای Control, Robust برنامه مطلب می‌باشد.

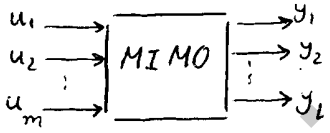
سرفصلهای اصلی درس:

- معرفی سیستمهای چند متغیره و اهداف درس.
- مروری بر طراحی کنترل کننده برای سیستم‌های تک ورودی - تک خروجی (SISO)
- تعریف مسئله طراحی " " " " چند متغیره (MIMO)
- مروری بر مفاهیمی مانند تعقیب ورودی مبنا، حذف اثر اغتشاش
- تعریف نرم (Norm) یک ماتریس، مقادیر تکین (Singular V.) تفکیک یک ماتریس به مقادیر اسنگولر. (SVD. Singular Value Decompo.)
- یادآوری مفاهیم قطب و صفر سیستم‌های چند متغیره - صفر انتقال (transmission z.)، صفر تغییرناپذیر (invariant zero)
- قانون نایکوئیست برای تحلیل سیستم‌های چند متغیره
- نمایش خطاهای مدل‌سازی به صورت جمعی یا ضربی
- کنترل کننده هایی که از ترکیب روبت کننده حالت و فیدبک حالت حاصل می‌شوند (MBC)
- اشاره‌ای به فیلتر کالمن و مسئله رگولاتور بهینه (LQR. Linear Quadratic regulator)
- چگونگی انتخاب وزنهای Q و R در مسئله LQR برای تغییر خواص بهره حلقه (Loop Gain)
- تعریف مسئله بازیابی بهره حلقه (LTR Loop transfer Recovery)
- نکات عملی در طراحی سیستم‌های کنترل از قبیل خطی‌سازی، شناسایی سیستم، برنامه‌ریزی بهره کنترل کننده
- معرفی مبحث کاهش مرتبه کنترل کننده: تعریف گرامیان‌ها، تحقق‌های بالانس شده (Balance Realization)، استفاده از این تحقق‌ها در کاهش مرتبه کنترل کننده (Control order Reduction)

مقدمه:

تاکنون با سیستم‌های تک ورودی - تک خروجی SISO سروکار داشتیم اما در حالت کلی ممکن است چندین ورودی و چندین خروجی رفتار یک سیستم را مشخص کنند. به چنین سیستمی چند متغیره یا چند ورودی - چند خروجی (MIMO) گفته می‌شود.

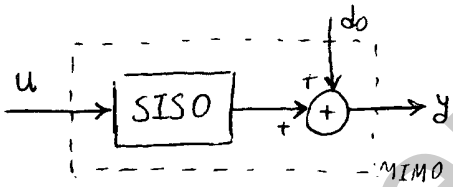




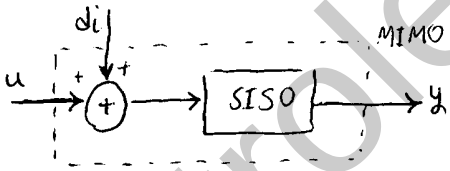
بردار ورودی‌ها : $\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$ بردار خروجی : $\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_l \end{bmatrix}$

$\underline{u} \in R^{m\times 1}$ $\underline{y} \in R^{l\times 1}$

سیستم MIMO دارای m ورودی و l خروجی می‌باشد. اگر در حالت خاص تعداد ورودی‌ها با خروجی‌ها برابر باشد $(m=l)$ سیستم چند متغیره یک سیستم مربعی خواهد بود. به عنوان یک مثال ساده از سیستم MIMO می‌توان به در نظر گرفتن اثر اغتشاش یا (Disturbance) در قانون کنترل خطی اشاره نمود.



دو ورودی d_o و u و یک خروجی y.

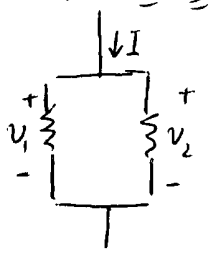


دو ورودی d_i و u و یک خروجی y.

توجه: برای داشتن کنترل هرچه بیشتر بر روی یک سیستم MIMO لازم است حداقل تعداد ورودی‌ها برابر تعداد خروجی‌ها باشد. یعنی $(m \geq l)$.

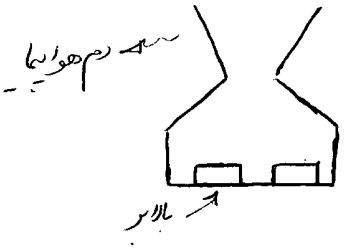
در برخی موارد به علت وابستگی ورودی‌ها در یک سیستم ظاهراً MIMO آن سیستم MIMO محسوب نمی‌گردد. زیرا ورودی‌های وابسته رفتاری یکسان در خروجی ایجاد می‌کنند و در حقیقت یک ورودی وجود دارد.

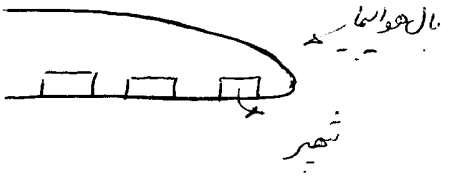
مثال 1. در مدارات الکترونیک دیده ایم که برای بالا بردن قابلیت اطمینان به جای به کارگیری یک مقاومت از دو مقاومت موازی استفاده می‌گردد.



این سیستم در حقیقت تک ورودی - تک خروجی است در صورت سوختن یکی از مقاومت‌ها مقاومت کل مدار بی‌نهایت نشده و مقداری باقی می‌ماند.

مثال دوم. در بالابرها یا شهپرهای (Aileron) هواپیما:





عموماً رابطهٔ میان ورودی‌ها و خروجی‌های یک سیستم چند متغیره توسط ماتریس تابع تبدیل بیان می‌شود.

$$\underline{Y}(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_l(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) & \cdots & g_{1m}(s) \\ g_{21}(s) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ g_{l1}(s) & \cdots & & g_{lm}(s) \end{bmatrix}}_{l \times m} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \\ \vdots \\ u_m(s) \end{bmatrix}$$

$G(s) \triangleq$ ماتریس تابع تبدیل

عنصر $g_{ij}(s)$ معرف رابطهٔ میان خروجی i‌ام و ورودی j‌ام است. ستون j‌ام $G(s)$ نشان می‌دهد که ورودی j‌ام چه اثری روی کلیه خروجی‌ها دارد. به عنوان مثال فرض کنید:

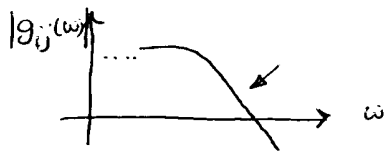
$$u_2 = u_3 = \cdots = u_m = 0$$

$$\underline{\tilde{Y}}(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) \\ g_{21}(s) \\ \vdots \\ g_{l1}(s) \end{bmatrix} u_1$$

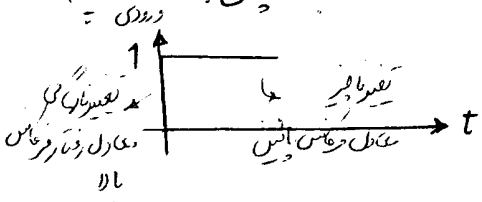
در عمل نیز از فرض فوق جهت شناسایی سیستم استفاده می‌شود.

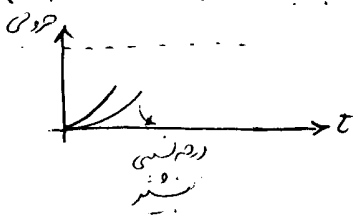
در اینجا فرض می‌گردد $g_{ij}(s)$ تابعی گویا و حقیقی (Real Rational) و حداقل سره (proper) باشد ($G(\infty) = cte$).

از آنجایی که اکثر سیستم‌های فیزیکی دارای متحمه پایین‌گذر می‌باشند بنابراین کلیتاً سره (strictly proper) می‌باشند ($G(\infty) = 0$).



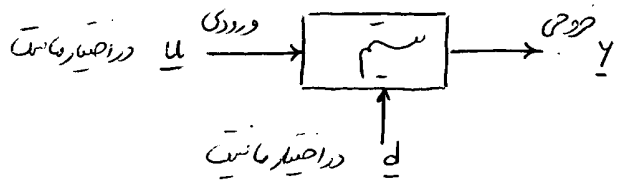
هرچه تفاوت درجه صورت و مخرج (درجه نسبی Relative degree) بیشتر باشد زمان صعود خروجی در پاسخ به ورودی پله بیشتر خواهد بود.



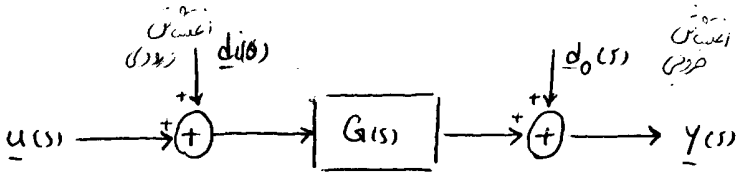


توجه ۱: در اینجا، $G(s)$ مدل یک سیستم واقعی است که آن نیز از روش‌های همچون نوشتن معادلات ریاضی و دینامیکی حاکم بر سیستم (قوانین نیوتن، ...) شناسایی سیستم بدست آورده شده است. البته سعی می‌گردد تا حد امکان $G(s)$ یک مدل دقیق از سیستم واقعی باشد.

توجه 2: برخی از ورودی‌های وارد به سیستم در اختیار ما نمی‌باشند، به عنوان مثال اغتشاش.

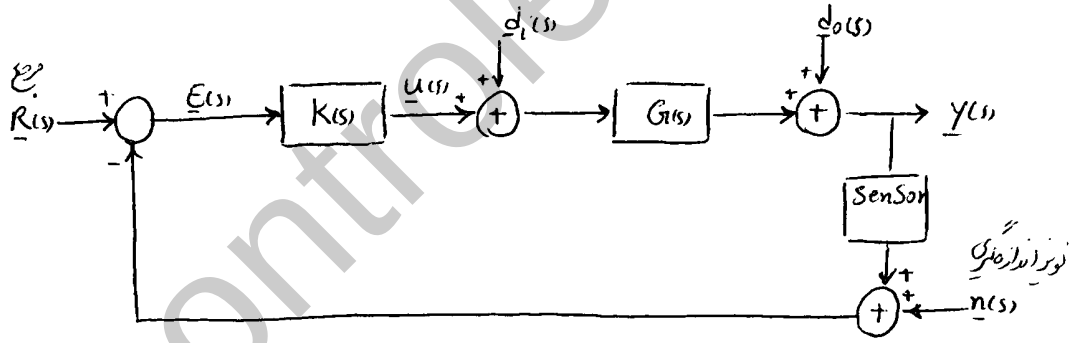


اغتشاش اغلب به صورت‌های زیر مدل می‌گردد:



البته می‌توان $d_o(s)$ را در $G^{-1}(s)$ ضرب کرده و به همراه $d_i(s)$ آورد. یا می‌توان $d_i(s)$ را در $G(s)$ ضرب کرده و به همراه $d_o(s)$ آورد.

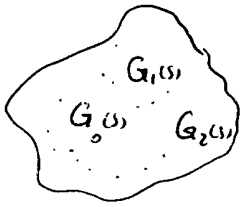
ساختار سیستم حلقه بسته:



توجه کنید مستقیماً به $Y(s)$ دسترسی نداریم و دینامیک اندازه‌گیری آن را در اختیار ما برای فیدبک قرار می‌دهد. اغلب دینامیک اندازه‌گیر به علت سریع بودن مودهای آن صرفنظر می‌شود.

هدف: بدست آوردن کنترل‌کننده $K(s)$ به گونه‌ای است که سیستم حلقه بسته پایدار باشد، خروجی $y(t)$ سیگنال مبنای $r(t)$ را دنبال کند، اثر اغتشاش‌های d_i و d_o بر روی خروجی $y(t)$ کاهش یابد، اثر نویز اندازه‌گیری n بر روی خروجی کاهش یابد.

توجه ۱. پایداری سیستم حلقه بسته در حضور تمامی خطاهای مدلسازی نیز باید محفوظ بماند.



توجه 2. همانطوری که دیده می‌شود نویز n مثل سیگنال مبنای r روی y تأثیر می‌گذارد در نگاه اول به نظر می‌رسد اهداف 2 و 4 با همدیگر در تناقض می‌باشند ولی اینطور هم نیست زیرا این دو سیگنال دارای طیف یکسان نمی‌باشند، به عبارت دیگر محدوده فرکانسی که آنها دارای بیشترین انرژی می‌باشند متفاوت است. (n در فرکانسهای خیلی بالاست)

تک‌ورودی - تک‌خروجی ادامه می‌دهیم.

تعقیب ورودی مرجع: Refrence Input Tracking

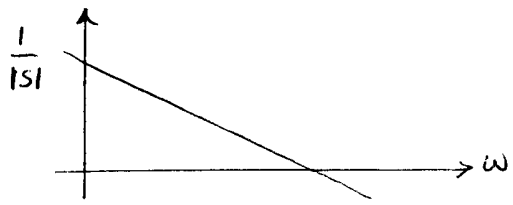
مطابق بلوک دیاگرام سیستم کنترل حلقه بسته تابع تبدیل از ورودی R به خروجی Y به صورت زیر است.

$$Y(s) = \frac{K(s)\,G(s)}{1 + K(s)\,G(s)}\,R(s)$$

$$T(s) \triangleq [1 + K(s)\,G(s)]^{-1} K(s)G(s)$$ مکمل حساسیت

برای اینکه خروجی Y سیگنال مرجع R را بدون خطای ماندگار دنبال کند باید بهره حلقه $K(s).G(s)$ قطبهای $R(s)$ را شامل باشد. (قطبهای ناپایدار). به عبارت دیگر اگر سیگنال $R(t)$ بیشترین انرژی خود را در محدوده فرکانسی Ω_r داشته باشد باید بهره حلقه $K(s).G(s)$ در این محدوده فرکانسی بزرگ انتخاب گردد. (بدون توجه به فاز آن).

مثال 1: برای اینکه سیستم حلقه بسته بتواند ورودی پله را دنبال کند باید $K(s).G(s)$ حداقل باید یک انتگرال‌گیر در درون خود داشته باشد. یک انتگرال‌گیر در فرکانسهای پایین بهره بزرگی دارد و بنابراین سبب می‌گردد ورودی با تغییرات آرام (فرکانسهای پایین = DC) دنبال گردد.

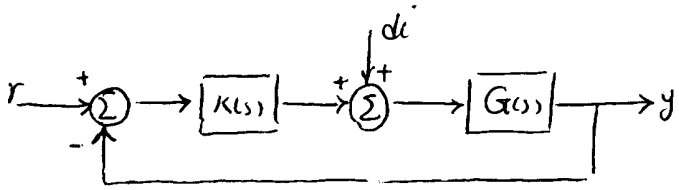


مثال 2. برای اینکه سیستم حلقه بسته بتواند ورودی سینوسی را دنبال کند باید $K(s)\,G(s)$ در فرکانس آن سینوسی بزرگ باشد.

$$\left.\frac{K(s)\,G(s)}{1+K(s)\,G(s)}\right|_{\omega=\omega_0} \longrightarrow 1$$

حذف اثر اغتشاش: (Disturbance Rejection)

در ورودی:



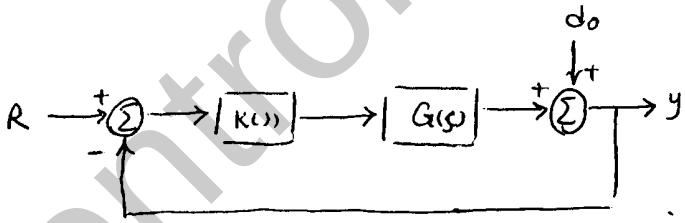
رابطه میان اغتشاش d_i و خروجی y به صورت زیر است:

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)\,K(s)}\,D_i(s) \qquad , \qquad D_i(s) \triangleq \mathcal{L}(d_i(t))$$

برای اینکه اثر اغتشاش در حالت ماندگار از خروجی حذف گردد، باید $K(s)$ قطب‌های ناپایدار $D_i(s)$ را شامل گردد. اگر بهره حلقه در فرکانس‌هایی که d_i بیشترین انرژی خود را دارد بزرگ باشد و این بزرگ بودن بهره حلقه ناشی از $K(s)$ باشد، آنگاه اثر اغتشاش بر روی خروجی کاهش یا حذف می‌شود.

$$Y(s) \simeq \frac{1}{K(s)}\,D_i(s)$$

در خروجی:



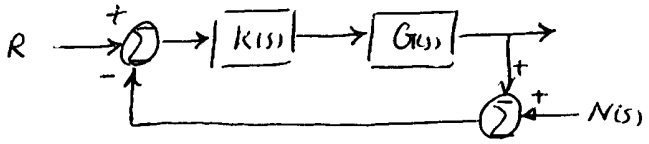
رابطه میان اغتشاش d_o و خروجی y به صورت زیر است:

$$Y(s) = \frac{1}{1+G(s)\,K(s)}\,D_o(s) \qquad D_o(s) \triangleq \mathcal{L}\{d_o(t)\}$$

توجه $S + T = 1$ است. $\qquad S \triangleq \dfrac{1}{1+G(s)\,K(s)}$ تابع حساسیت

برای اینکه اثر اغتشاش در حالت ماندگار از خروجی حذف گردد باید بهره حلقه در جایی که d_o بیشترین انرژی خود را دارد بزرگ باشد.

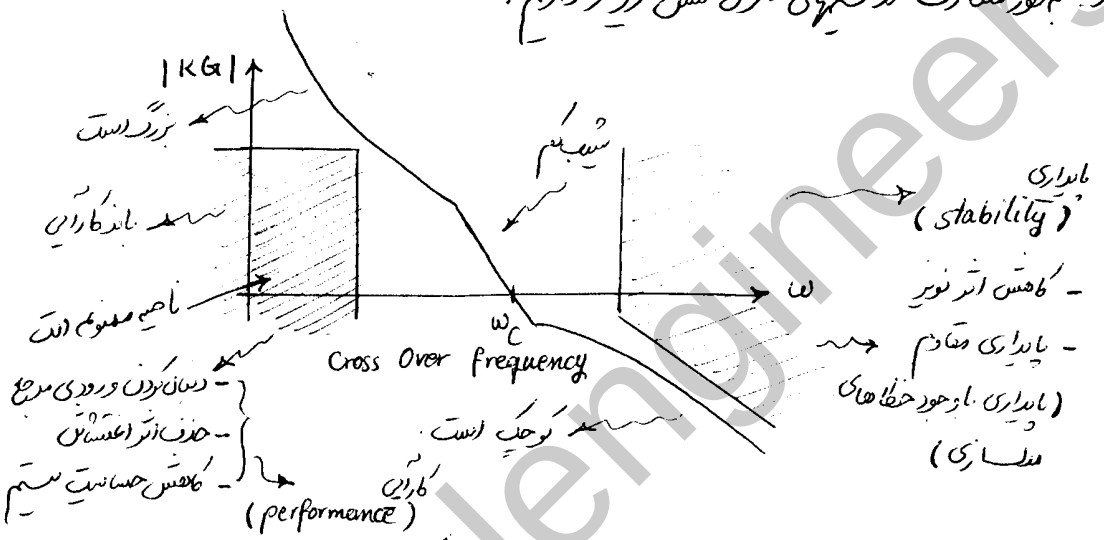
کاهش اثر نویز اندازه‌گیری:



رابطه میان $N(s)$ و خروجی $Y(s)$ به صورت زیر است:

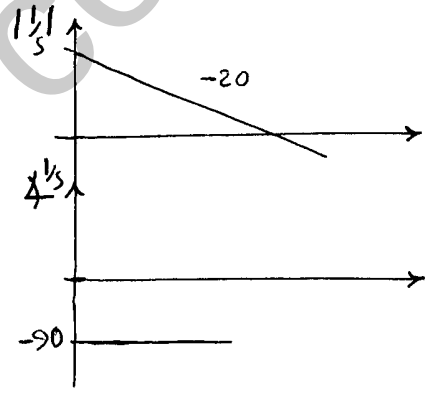
$$Y(s) = -\frac{K(s)\,G(s)}{1+K(s)\,G(s)}\,N(s)$$

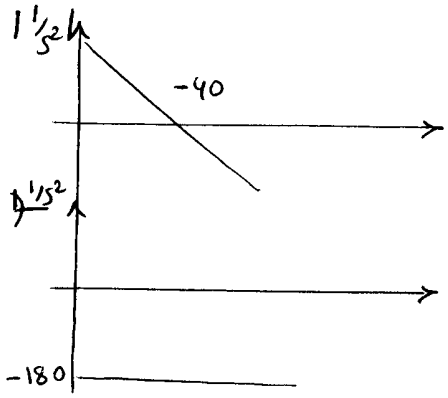
اگر بهره حلقه در فرکانس‌هایی که $N(t)$ بیشترین انرژی خود را دارد کوچک باشد آنگاه اثر نویز روی خروجی کاهش می‌یابد.
با توجه به نکات فوق، به نوعی بهره حلقه $K(s)\,G(s)$ شکل داده می‌شود (Loop shaping) یعنی در برخی فرکانس‌ها بزرگ و در برخی دیگر کوچک باشد. به طور متعارف در سیستم‌های کنترل شکل زیر را داریم:



$|KG|$ نباید دارد ناحیه هاشور زده شود، که البته این ناحیه برای مسائل مختلف فرق می‌کند.

توجه 1: شیب اندازه KG در فرکانس ω_c باید تا حد امکان کم باشد که اغلب $-20\ dB/dec$ انتخاب می‌گردد.
اگر این شیب تند باشد سبب تغییر شدید (کاهش) فاز و کاهش حد فاز (phase Margin) و در نتیجه پایداری می‌گردد.

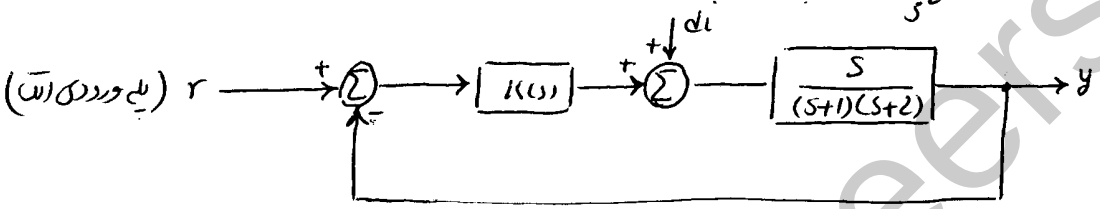




توجه 2. اگر دو ناحیه کارایی یا پایداری یا مناطق هاشور زده به هم نزدیک باشد طراح مجبور است شیب عبور از ω_c را بزرگتر انتخاب کند که این مستلزم ضعیف شدن حاشیه پایداری سیستم است.
(حتی ممکن است مسئله جواب نداشته باشد یعنی نتوان کنترل کننده پایدارسازی که کارایی ها را هم فراهم کند طراحی کرد).

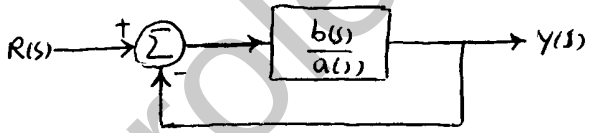
توجه 3. از روی منحنی اندازه، می‌توان منحنی فاز را صرف‌نظر از یک اختلاف فاز 180° بدست آورد.

سؤال: آیا می‌توان با $K(s)$ مساوی با $\frac{K}{s^2}$ خروجی y ورودی r را دنبال کند.



بررسی اثر حذف صفر و قطب:

فرض کنید $K(s)G(s)=\frac{b(s)}{a(s)}$ که $b(s)$ و $a(s)$ دو چندجمله‌ای می‌باشند. $b(s)$ و $a(s)$ نسبت به هم اول‌اند رشته مشترک ندارند و همچنین درجه $b(s)$ از $a(s)$ کوچکتر باشد.



$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{b(s)}{b(s)+a(s)}$$

واضح است که فرمه صورت $\frac{Y}{R}$ از مخرج آن کمتر است.

صفرهای سیستم حلقه باز و حلقه بسته تشکیل می‌باشند. فرض کنید s_0 یک صفر از $a(s)$ باشد آنگاه:

$$a(s_0)=0$$

اگر بخواهیم $b(s_0)+a(s_0)$ مساوی صفر باشد باید $b(s_0)$ نیز برابر صفر باشد و این هم با فرض اول در تناقض است پس نتیجه می‌گیریم قطبهای سیستم حلقه بسته ریشه‌های $a(s)+b(s)=0$ باشند که با ریشه‌های سیستم حلقه باز متفاوتند پس با فیدبک می‌توان محل قطبها را تغییر داد.

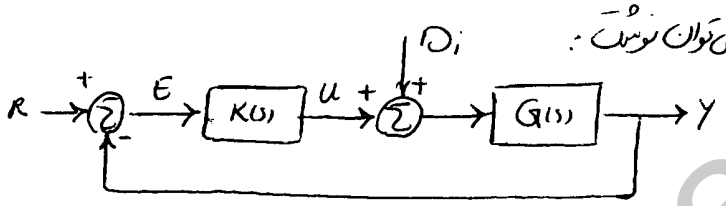
در برخی موارد در حین تشکیل بهره حلقه صفرهای حلقه باز با قطبهای کنترل کننده حذف می‌شوند یا قطبهای حلقه باز با صفرهای کنترل کننده حذف می‌شوند.

فرض کنید :

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{\bar{b}(s)\ \beta(s)}{\bar{a}(s)\ \alpha(s)} \quad , \quad K(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{\bar{n}(s)\cdot\alpha(s)}{\bar{d}(s)\cdot\beta(s)}$$

- $a(s)$ و $b(s)$ نسبت به هم اولند.
- $n(s)$ و $d(s)$ " " " .
- $\alpha(s)$ چندجمله‌ای مشترک بین $a(s)$ و $n(s)$ است.
- $\beta(s)$ " " بین $b(s)$ و $d(s)$ است.

چهار تابع تبدیل را با توجه به بلوک دیاگرام زیر می‌توان نوشت :



$$G_{RY}(s) = \frac{K(s)\,G(s)}{1+K(s)\,G(s)} = \frac{\bar{n}(s)\,\bar{b}(s)}{p(s)} \qquad (1)$$

$$G_{DY}(s) = \frac{G(s)}{1+K(s)\,G(s)} = \frac{\bar{d}(s)\,\bar{b}(s)\,\beta(s)}{p(s)\,\alpha(s)} \qquad (2)$$

$$(1+K(s)\,G(s)=0)$$

$$p(s) \triangleq \bar{d}(s)\,\bar{a}(s) + \bar{n}(s)\,\bar{b}(s)$$

$$G_{RU}(s) = \frac{K(s)}{1+K(s)\,G(s)} = \frac{\bar{n}(s)\,\bar{a}(s)\,\alpha(s)}{p(s)\,\beta(s)} \qquad (3)$$

$$G_{RE}(s) = \frac{1}{1+K(s)\,G(s)} = \frac{\bar{d}(s)\,\bar{a}(s)}{p(s)} \qquad (4)$$

برای پایداری (داخلی Internal stability) باید چهار تابع تبدیل فوق پایدار BIBO باشند. (یعنی یک ورودی در هر نقطه یک خروجی محدود در نقطه‌ای دیگر ایجاد کند).

با توجه به توابع تبدیل (2) و (3) اگر حذف ناپایدار اتفاق بیافتد، صفر و قطب‌های ناپایدار بالاخره در یکی از توابع تبدیل (2) یا (3) خودشان را نشان می‌دهند و سبب ناپایداری به مفهوم داخلی می‌شوند. حتی اگر حذف صفر و قطب پایدار اتفاق بیافتد ولی ریشه‌های $\alpha(s)$ و $\beta(s)$ نزدیک محور موهومی باشند توابع تبدیل (2) و (3) دارای میرایی کندی هستند.

سؤال: تحت چه شرایطی فقط با بررسی دو تابع تبدیل از چهار تابع تبدیل ذکر شده می‌توان پی به پایداری داخلی یک سیستم فیدبک برد؟ آن دو تابع تبدیل کدامند؟

مثال: فرض کنید در بلوک دیاگرام سیستم فیدبک داشته باشیم: $G(s)=\frac{s-1}{s+1}$, $K(s)=\frac{1}{s(s-1)}$ ← باعث ایجاد پایدارگی در جواب پله می‌شود.

آیا سیستم حلقه بسته پایدار داخلی است؟

$$G_{RY}(s)=\frac{1}{s^2+s+1} \longrightarrow \text{پایدار است}$$

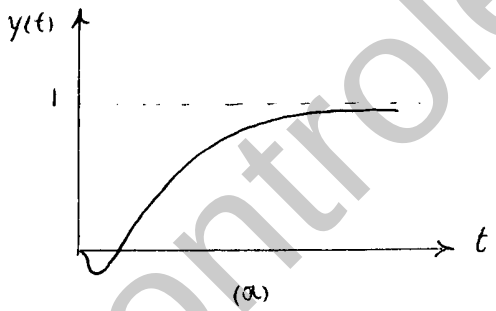
$$G_{DY}(s)=\frac{s(s-1)}{s^2+s+1} \longrightarrow \text{〃}$$

$$G_{RE}(s)=\frac{s(s+1)}{s^2+s+1} \longrightarrow \text{〃}$$

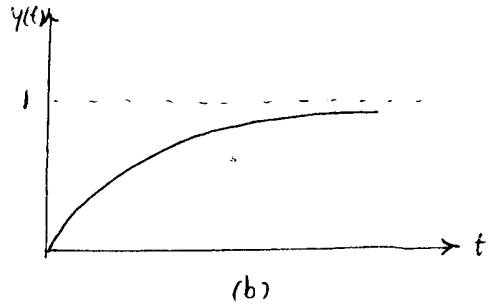
سیستم پایدار داخلی نیست.

$$G_{RU}(s)=\frac{s+1}{(s-1)(s^2+s+1)} \longrightarrow \text{ناپایدار است}$$

سؤال: دانشجویی در جلسه دفاعیه خود ادعا می‌کند روشی متنی بر فیدبک ابداع نموده است که می‌تواند پاسخ پله سیستم را از حالت (a) به حالت (b) تغییر وضعیت دهد. آیا ادعای او صحیح است.



(a)

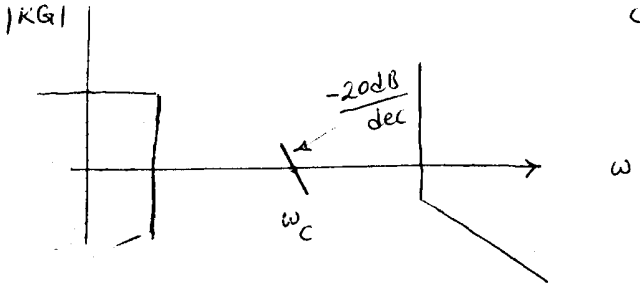


(b)

رابطه تقریبی میان فرکانس عبور از صفر بهره حلقه و سیستم حلقه بسته:

همانطور که اشاره شد شیب عبور از فرکانس ω_c تا حد امکان کم باشد. با فرض شیب $-20\frac{dB}{dec}$ داریم

پس $K(s)G(s)$ را حوالی ω_c می‌توان به صورت زیر تقریب زد:



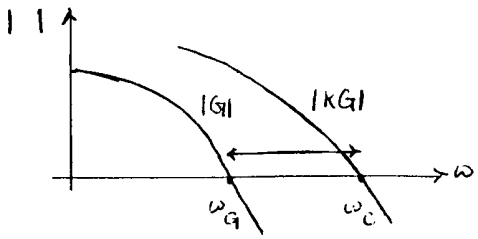
$$K(s)G(s) \triangleq L(s)=\frac{1}{1+\frac{s}{\omega_c}}$$

$$\Rightarrow T(s)=\frac{L(s)}{1+L(s)}=\frac{1}{2+\frac{s}{\omega_c}}=\frac{1/2}{1+\frac{s}{2\omega_c}}$$

در حالت فیدبک فرکانس عبور از صفر حلقه بسته می‌تواند حداکثر $2\omega_c$ باشد.

محدودیت نهایی باند:

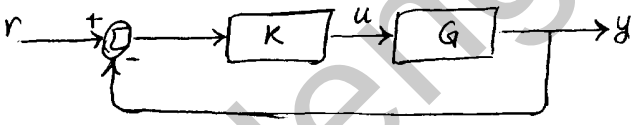
فرض کنید فرکانس عبور از صفر سیستم حلقه باز $G(s)$ برابر ω_G و فرکانس عبور از صفر بهره حلقه به مراتب بزرگتر از ω_G و برابر ω_c باشد.



داشتیم: $G_{Ru}(s) = \dfrac{K(s)}{1+K(s)G(s)}$. در ناحیه فرکانسی میان ω_G و ω_c با بزرگ بودن اندازه $|KG|$ می‌توان نوشت

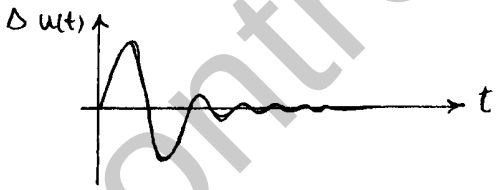
$$G_{Ru}(s) \simeq \frac{1}{G(s)}$$

از آنجایی که $G(s)$ در این ناحیه کوچک است (زیر صفر dB است)؛ پس $G_{Ru}(s)$ بزرگ بوده و سبب بزرگ شدن سیگنال کنترل u که به سیستم اعمال می‌گردد می‌شود. این نکته می‌تواند سبب به اشباع رفتن عملگرها شده و سیستم را از حالت خطی خود خارج کند.



بنابراین:

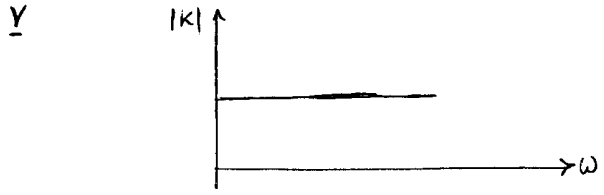
1- در حین طراحی به همان اندازه که به $G_{Ry}(s)$ و پاسخ $y(t)$ توجه می‌گردد به $G_{Ru}(s)$ و $u(t)$ توجه گردد. یک سیگنال کنترلی خوب باید دارای دامنه کم بوده و تغییرات آن هرچه سریعتر صفر گردد.

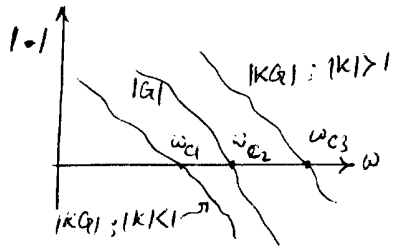


2- برای کاهش اثر فوق باید ω_c را تا حد امکان نزدیک ω_G انتخاب کرده و یا از عملگرهایی که به قابلیت اعمال سیگنال‌های بزرگ را دارند استفاده نمود.

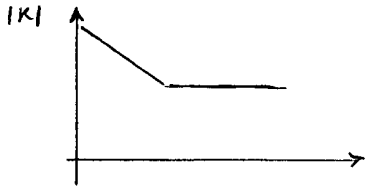
چگونگی شکل دهی حلقه:

1. با استفاده از یک بهره ثابت یا کنترل‌کننده تناسبی (propertional) K_p می‌توان کل دامنه $|GK|$ را کم یا زیاد نمود ولی اثر اصلی آن روی جابجایی فرکانس ω_c است.





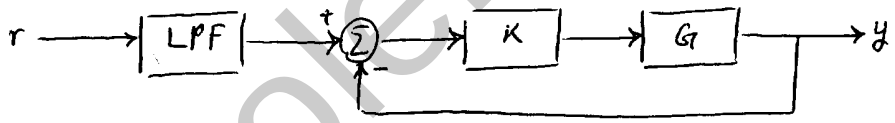
2. با استفاده از یک کنترل‌کننده Lag می‌توان اندازه KG را در فرکانس‌های پایین بالا برد. وجود صفر در کنترل‌کننده Lag سبب می‌گردد که تأثیر نامطلوب کاهش فاز در فرکانس‌های بالاتر به خصوص ω_c اتفاق نیافتد.



توجه کنید یک انتگرال‌گیر حالت خاصی از یک Lag است که یک اختلاف فاز -90° ایجاد می‌کند. به خاطر داشته باشید اثر اندازه یک کنترل‌کننده Lag مثبت و اثر فاز یک کنترل‌کننده Lag منفی است.

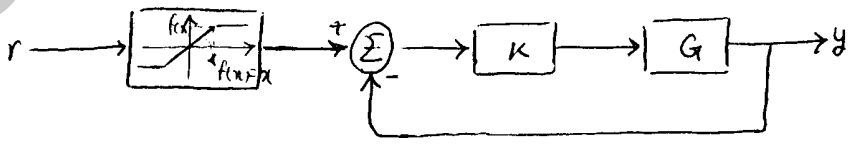
3. با استفاده از یک کنترل‌کننده Lead می‌توان فاز را حوالی ω_c افزایش داد. به خاطر داشته باشید اثر اندازه یک کنترل‌کننده Lead منفی و اثر فاز یک کنترل‌کننده Lead مثبت است.

4. استفاده از یک پیش‌فیلتر پایین‌گذر (L.P. prefilter) خارج از حلقه کنترل:



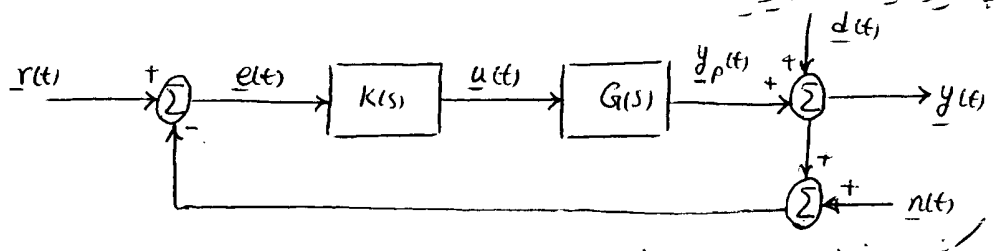
سبب می‌گردد تا اندازه KG وارد ناحیه هاشور خورده فرکانس بالا (باند پایداری مقاوم) نگردد.

5. استفاده از اشباع‌کننده (Limmiter)



پس از ذکر این یادآوری به سراغ سیستم‌های چند ورودی چند خروجی می‌رویم.

بلوک دیاگرام سیستم چند متغیره زیر را در نظر بگیرید:



* متغیرهایی که زیر آنها خط کشیده می‌شوند از نوع بردار هستند.

ماتریس تابع تبدیل $G(s)$ می‌تواند دارای تحقق فضای حالتی به صورت زیر باشد:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = A\,\underline{x}(t) + B\,\underline{u}(t) \\ \underline{y}_p(t) = C\,\underline{x}(t) + D\,\underline{u}(t) \end{cases} \qquad G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

در ادامه رابطه میان $\underline{y}(s)$ و ورودی‌های $\underline{R}(s)$ ، $\underline{D}(s)$ ، $\underline{N}(s)$ بدست آورده می‌شود:

$$G(s)\,K(s)\left[\underline{R}(s) - \underline{N}(s) - \underline{y}(s)\right] = \underline{y}(s) - \underline{D}(s)$$

پس از مرتب سازی داریم:

سهم ورودی در خروجی حلقه بسته

$$\underline{y}(s) = [I + G(s)K(s)]^{-1}G(s)\cdot K(s)\,\underline{R}(s) - [I + G(s)K(s)]^{-1}G(s)\,K(s)\,\underline{N}(s)$$

سهم نویز در خروجی حلقه بسته

$$+ [I + G(s)K(s)]^{-1}\underline{D}(s)$$

سهم ورودی اغتشاش در خروجی حلقه بسته است.

چند تعریف:

$\longrightarrow$ $G(s)K(s) \triangleq L(s)$ Loop Gain — بهره حلقه

$\longrightarrow$ $I + G(s)K(s) \triangleq$ Return Difference — ماتریس تفاوت برگشت

$\longrightarrow$ $[I + G(s)K(s)]^{-1} \triangleq S(s) \triangleq$ Sensivity function

$\longrightarrow$ $G(s)K(s)[I + G(s)K(s)]^{-1} \triangleq T(s) \triangleq C\,S(s) \triangleq$ Complementady Sensivity

$\longrightarrow$ $S(s) + T(s) = I$

توجه: $G(s)K(s)$ با $K(s)\cdot G(s)$ برابر نیستند.

$$[I + G(s)K(s)]^{-1}G(s)\,K(s) = G(s)K(s)[I + G(s)K(s)]^{-1}$$

سهم با التقارن زیرا معکوس ماتریس.

تعقیب ورودی مرجع:

برای اینکه ورودی مرجع $r(t)$ توسط خروجی $y(t)$ دنبال گردد باید:

$$[I + G(s)K(s)]^{-1} G(s) K(s) \cong I \quad ; \quad \omega \in \Omega_r \qquad (2)$$

Ω_r ناحیه‌ای است که در آن $r(t)$ بیشترین انرژی خود را دارد.

اگر $G(s)K(s)$ به ازای $\omega \in \Omega_r$ بزرگ باشد آنگاه:

$$I + G(s)K(s) \approx G(s)K(s)$$

و شرط (2) نیز محقق خواهد شد.

حذف اثر اغتشاش:

برای اینکه تأثیر اغتشاش $d(t)$ روی خروجی $y(t)$ کم گردد باید: $\omega \in \Omega_d : [I + G(s)K(s)]^{-1} \cong 0 \quad Or \quad S(s) = 0 \quad (3)$

Ω_d ناحیه فرکانسی است که سیگنال $d(t)$ در آن بیشترین انرژی خود را دارد. اگر $G(s)K(s)$ در این ناحیه بزرگ باشد در این صورت شرط (3) محقق خواهد شد.

حذف اثر نویز اندازه‌گیری:

برای اینکه تأثیر نویز $n(t)$ روی خروجی $y(t)$ کم شود باید:

$$[I + G(s)K(s)]^{-1} G(s)K(s) \cong 0 \quad Or \quad T(s) = 0 \quad ; \quad \omega \in \Omega_n \qquad (4)$$

Ω_n ناحیه‌ای است که در آن نویز اندازه‌گیری $n(t)$ دارای بیشترین انرژی خود است. اگر $G(s)K(s)$ در این ناحیه بسیار کوچک باشد در این صورت شرط (4) محقق می‌گردد.

خطاهای مدلسازی و حساسیت پاسخ سیستم به آن:

فرض کنید تابع تبدیل واقعی سیستم حلقه باز $\bar{G}(s)$ و تابع تبدیل مدل نامی (مرکزی) $G(s)$ باشد. $\bar{G}(s)$ با $G(s)$ تفاوت‌هایی دارد که هرچه کمتر باشد بهتر است. این تفاوت‌ها با نام خطاهای مدلسازی (Modeling Errors) شناخته می‌شوند (البته تحت عنوان عدم قطعیت (Uncertainty) نیز مطرح می‌گردند). دو نوع معروف آن عبارتند از:

۱- خطای مدلسازی جمعی: (Additive)

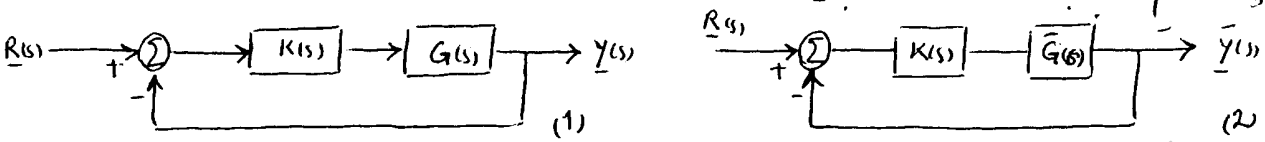
$$\bar{G}(s) = G(s) + \Delta(s) \qquad \text{(خطای مطلق)}$$

۲- 〃 〃 ضربی: (Multiplicative)

$$\bar{G}(s) = G(s)[I + \Delta(s)] \qquad \text{(خطای نسبی)}$$

توجه کنید $\Delta(s)$ ناشناخته (با کراندار است. (Unknown But Bounded)

تغییرات پاسخ سیستم نسبت به خطای مدل‌سازی جمعی:



برای یک طراح $G(s)$ در اختیار است و کنترل کننده $K(s)$ براساس $G(s)$ طراحی می‌گردد. ولی در عمل به سیستم واقعی یعنی $\bar{G}(s)$ وارد می‌گردد پس باید تا حد امکان $\underline{Y}(s)$ به $\bar{\underline{Y}}(s)$ نزدیک باشد. خطای میان این دو عبارتند از:

$$\bar{\underline{Y}}(s) - \underline{Y}(s) = \underbrace{\left[I + \bar{G}(s)K(s)\right]^{-1} \bar{G}(s)\, K(s)\, \underline{R}(s)}_{(2)} - \underbrace{\left[I + G(s)K(s)\right]^{-1} G(s)\, K(s)\, \underline{R}(s)}_{(1)}$$

جایگذاری

$$\bar{G}(s) = G(s) + \Delta(s) \Rightarrow \left[I + \bar{G}(s)K(s)\right]^{-1}\left(G(s) + \Delta(s)\right)K(s)\,\underline{R}(s) - \left[I + G(s)K(s)\right]^{-1} G(s)\, K(s)\, \underline{R}(s)$$

حال با فاکتورگیری $\left[I + \bar{G}(s)K(s)\right]^{-1}$ از سمت چپ داریم: جایگذاری

$$\Rightarrow \left[I + \bar{G}(s)K(s)\right]^{-1}\left\{ G(s)K(s) + \Delta(s)K(s) - \left[I + \bar{G}(s)K(s)\right]\left[I + G(s)K(s)\right]^{-1} G(s)\, K(s) \right\} \underline{R}(s)$$

$$\Rightarrow \left[I + \bar{G}(s)K(s)\right]^{-1}\left\{ G(s)K(s) + \Delta(s)K(s) - \left[I + G(s)K(s) + \Delta(s)K(s)\right]\left[I + G(s)K(s)\right]^{-1} G(s)\, K(s) \right\} \underline{R}(s)$$

$$= \left[I + \bar{G}(s)K(s)\right]^{-1}\left\{ G(s)K(s) + \Delta(s)K(s) - \left[I + G(s)K(s)\right]\left[I + G(s)K(s)\right]^{-1} G(s)\, K(s) + \Delta(s)K(s)\left[I + G(s)K(s)\right]^{-1} G(s)\, K(s) \right\} \underline{R}(s)$$

$$= \left[I + \bar{G}(s)K(s)\right]^{-1} \cdot \Delta(s)K(s)\, \underbrace{\left\{ I - \overbrace{\left[I + G(s)K(s)\right]^{-1} G(s)\, K(s)}^{T(s)} \right\}}_{S(s)} \underline{R}(s)$$

$$= \bar{\underline{Y}}(s) - \underline{Y}(s) = \left[I + \bar{G}(s)K(s)\right]^{-1} \cdot \Delta(s)K(s)\left[I + G(s)K(s)\right]^{-1} \underline{R}(s) \qquad (A)$$

از آنجایی که $\underline{Y}(s) = G(s)K(s)\left[I + G(s)K(s)\right]^{-1}\underline{R}(s)$ است، با فرض معکوس پذیر بودن سیستم (معکوس پذیری $G(s)$) می‌توان نوشت:

$$K(s)\left[I + G(s)K(s)\right]^{-1} R(s) = G^{-1}(s)\, Y(s) \qquad (B)$$

از طرفی (C) $\Delta(s) = \bar{G}(s) - G(s)$ حال با جایگذاری B و C در A داریم:

$$\bar{y}(s) - y(s) = [I + \bar{G}(s)K(s)]^{-1} \underbrace{[\bar{G}(s) - G(s)]}_{\text{خطای نسبی مدل}} G^{-1}(s)\, y(s) \longrightarrow$$ در کل، خطای نسبی خروجی است.

عبارت فوق در حقیقت بیانگر تغییرات نسبی خروجی سیستم به تغییرات نسبی مدل است که با ضریب $[I+\bar{G}(s)K(s)]^{-1}$ صورت می‌پذیرد. اگر خطای مدل‌سازی بزرگ نباشد بطور تقریبی می‌توان فرض کرد که:

$$[I + \bar{G}(s)K(s)]^{-1} \cong [I + G(s)K(s)]^{-1} = S(s)$$

بنابراین برای کاهش اثر خطای مدل‌سازی جمعی بر روی خروجی سیستم باید تا حد امکان تابع حساسیت $S(s)$ را کم انتخاب کنیم. توجه کنید در اینجا $S(s)$ یک تابع تبدیل ماتریسی است و باید منظور از بزرگ و کوچک بودن آن درک گردد.

توجه: بررسی اثر خطاهای مدل‌سازی با بکارگیری قضیه بهره کوچک (Small gain Theorem) بسیار آسان‌تر است.

در ابتدا با یک مثال ساده شروع می‌کنیم:

مثال: فرض کنید رابطه میان ورودی u و خروجی y توسط رابطه $y = Au$ بیان شود که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 10^3 & 0 \\ 0 & 10^{-3} \end{bmatrix}$$

خروجی ناشی از ورودی‌های $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ بدست آورده و مقایسه کنید.

$$y_1 = Au_1 = \begin{bmatrix} 10^3 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{طول بزرگ} \qquad y_2 = Au_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10^{-3} \end{bmatrix} \rightarrow \text{طول کوچک}$$

توجه کنید علاوه بر یکسان بودن طول u_1 و u_2 دو خروجی با طولهای کاملاً متفاوت بدست آمده است. این نکته ناشی از این است که هرچند طول u_1 و u_2 یکسان است ولی دارای جهتهای متفاوت می‌باشند. (نمودار)

مثال فوق بیانگر این موضوع است که یک ماتریس بزرگ است اگر در تمامی جهات ممکن بزرگ باشد و برعکس.

یکی از معیارها برای کوچکی یا بزرگی یک ماتریس نرم می‌باشد.

تعریف نرم: نرم بردار $x \in C^{n\times 1}$ (میدان اعداد مختلط) نگاشت است از $C^{n\times 1}$ به اعداد حقیقی غیرمنفی که دارای خواص زیر است: $\|\cdot\|$

$$\|\cdot\| : C^{n\times 1} \longrightarrow R^+ + \{0\}$$

1) $\|\underline{x}\| \geq 0$

2) $\|\underline{x}\| = 0 \iff \underline{x} = 0$

3) $\|\underline{x}+\underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\| \quad ; \quad \underline{x}, \underline{y} \in C^{n\times 1}$ نامساوی مثلثی

4) $\|\alpha \underline{x}\| = |\alpha| \cdot \|\underline{x}\| \quad ; \quad \alpha \in C$

یکی از نرم‌های معروف برداری نرم-p است که به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\|\underline{x}\|_p \triangleq \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{1/p} \quad ; \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad p \geq 1$$

معمولاً نرم-p به ازای $p = 1, 2, \infty$ استفاده می‌گردد:

نرم-1 : $\|\underline{x}\|_1 \triangleq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

نرم-2 : $\|\underline{x}\|_2 \triangleq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} = \left(\underline{x}^H \cdot \underline{x}\right)^{1/2}$ طول اقلیدسی بردار

منظور از $\underline{x}^H$ همان ترانهاده مزدوج مختلط $\underline{x}$ است: (Complex Conjugate Transpose)

نرم-∞ : $\|\underline{x}\|_\infty \triangleq \max_i |x_i|$

$$\text{if } \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{x}^H = [\bar{x}_1 \ \ \bar{x}_2 \ \cdots \ \bar{x}_n]$$

$\bar{x}_i$ مزدوج مختلط x_i است.

توجه: اپراتور هرمیشین (Hermition) برای هر ماتریس X متشکل از ستون‌های x_1 تا x_n به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$X = [\underline{x}_1 \ \ \underline{x}_2 \ \cdots \ \underline{x}_n] \longrightarrow X^H = \begin{bmatrix} \underline{x}_1^H \\ \underline{x}_2^H \\ \vdots \\ \underline{x}_n^H \end{bmatrix}$$

- اگر $X = X^H$ باشد آنگاه X یک ماتریس هرمیشین است.
- مقادیر ویژه یک ماتریس هرمیشین حقیقی است
- اگر $-X = X^H$ باشد آنگاه X یک ماتریس skew_Hermition است

نرم - ماتریسها :

نرم یک ماتریس مختلط $X \in \mathbb{C}^{m\times n}$ یک نگاشت از فضای $\mathbb{C}^{m\times n}$ به روی اعداد حقیقی غیرمنفی است. یعنی :

$$\|X\| : \mathbb{C}^{m\times n} \longrightarrow R^{+} + \{0\}$$

نرم یک ماتریس نیز خواص ذکر شده برای نرم در حالت کلی را دارا است . برخی از نرمهای ماتریسی دارای خاصیت زیرضربی sub-multiplicative نیز به صورت زیر می باشند:

$$\|XY\| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$$

نرم-p برداری یک نرم را بر ماتریسها القاء می کند که به آن نرم القایی یا Induced Norm گفته می شود. و به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\|A\|_p \triangleq \sup_{\underline{X}\neq 0} \frac{\|A\underline{X}\|_p}{\|\underline{X}\|_p}$$

(بیانگر بهره سیستمی است که با ماتریس A نمایش داده می شود.)

در رابطه فوق عمل sup روی تمامی $X\neq 0$ انجام می گیرد که به صورت زیر نیز قابل بیان است :

$$\|A\|_p = \sup_{\underline{X}\neq 0} \left\| A \frac{\underline{X}}{\|\underline{X}\|_p} \right\|_p = \sup_{\|\underline{Y}\|_p=1} \|A\underline{Y}\|_p \quad , \quad Y = \frac{\underline{X}}{\|\underline{X}\|_p}$$

در رابطه جدید عمل sup روی Yهای صورت می گیرد که $\|\underline{Y}\|_p = 1$.

عموماً نرم-p القایی یک ماتریس به ازای $p=1,2,\infty$ استفاده می گردد.

$$\text{if} \quad A=[a_{ij}]_{m\times n} \Rightarrow \|A\|_1 = \max_j \left(\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|\right) \rightarrow$$ ماکزیمم جمع قدرمطلق عناصر ستون

$$\|A\|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right)$$ " " " " سطر

$$\|A\|_2 = \max_i \left[\lambda_i^{1/2}(A^H A)\right]$$

λ_i ، i امین مقدار ویژه مربوط به $A^H A$ است که از حل معادله زیر قابل بدست آوردن است :

$$\det(\lambda_i I - A^H A) = 0$$

توجه : مقادیر ویژه غیرصفر ماتریسهای AB و BA مساوی است .

مثال :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix} \quad , B=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} \Rightarrow AB = 1 \qquad BA=\begin{bmatrix}3 & 6\\-1 & -2\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1 \longleftrightarrow \lambda_1 = 1 \ , \ \lambda_2 = 0$$

تمامی مقادیر ویژه ماتریسهای AB و BA مساوی هستند اگر AB و BA دارای بردارهای ویژه همراستا هستند.

نرم فروبنیوس:

$$A=[a_{ij}]_{m\times n} \qquad \|A\|_F \triangleq \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}=\left[tr(A^HA)\right]^{1/2}$$

جذر مجموع مقادیر ویژه A^HA است

به نرم فروبنیوس یک ماتریس نرم اقلیدسی هم گفته می‌شود و با نرم $\|\cdot\|_E$ نیز نمایش داده می‌شود.

تعریف: - اگر $A^T=A^{-1}$ باشد در اینصورت ماتریس A متعامد (Orthogonal) گفته می‌شود.

- اگر $A^H=A^{-1}$ " " " " A یکه (Unitary) " " .

خاصیت مهم نرم-2 و نرم فروبنیوس.

نرم-2 و فروبنیوس ماتریس A تحت تبدیلهای یکه تغییری نمی‌کند. به عبارت دیگر اگر U و V ماتریسهای یکه با ابعاد مناسب باشند آنگاه:

$$\|UAV\|_2=\|A\|_2 \qquad \text{و} \qquad \|UAV\|_F=\|A\|_F$$

(دوران باعث تغییر نرم-2 و فروبنیوس نمی‌گردد).

معیار کوچکی و بزرگی یک ماتریس:

توجه: برای هر ماتریس هرمیتی A ماتریس یکه V وجود دارد که،

$$V^HAV=\Lambda \qquad A=V\Lambda V^H$$

Λ یک ماتریس قطری است که عناصر روی قطر اصلی آن عناصر ویژه ماتریس A می‌باشند.

با توجه به تعریف نرم-2 ماتریس A می‌توان نوشت:

بنا به تعریف نرم بردار

$$\|A\|_2=\max_{\|\underline{y}\|_2=1}\|A\underline{y}\|_2=\max_{\|\underline{y}\|_2=1}(\underline{y}^HA^HA\underline{y})^{1/2}$$

$$=\max_{\|\underline{y}\|=1}(\underline{y}^HV\Lambda V^H\underline{y})^{1/2}$$

(A^HA هرمیتی است و عناصر قطر Λ مقادیر ویژه آن است)

با تعریف $V^H\underline{y}\triangleq\underline{w}$ داریم:

$$\|A\|_2=\max_{\|\underline{w}\|=1}(\underline{w}^H\Lambda w)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \|A\|_2 = \max_{\|\underline{w}\|_2=1} (w^H \Lambda w)^{1/2} \overset{\text{قطری}}{=} \max_{w_1,\dots,w_n} \left[\lambda_1|w_1|^2+\lambda_2|w_2|^2+\dots+\lambda_n|w_n|^2\right]^{1/2}$$

$$w=\begin{bmatrix} w_1\\ w_2\\ \vdots\\ w_n\end{bmatrix} \qquad \Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0\\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix} \qquad , |w_1|^2+|w_2|^2+\dots+|w_n|^2=1$$

پس باید ضریب بزرگترین λ_i که با λ_{max} نشان می‌دهیم برابر واحد انتخاب کنیم:

$$\max_{\underline{w}} (\underline{w}^H \Lambda \underline{w})^{1/2} = (\lambda_{max})^{1/2}$$

که λ_{max} بزرگترین مقدار ویژه A^HA است.

توجه کنید A^HA یک ماتریس PSD است. (positive semi definite)

اگر k امین مقدار ویژه A^HA برابر λ_{max} باشد آنگاه بردار $\underline{w}$ای که $\underline{w}^H A \underline{w}$ را ماکزیمم می‌کند دارای ساختاری به صورت زیر است:

$$\underline{w}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\e^{j\theta}\\\vdots\\0\\0\end{bmatrix} \leftarrow \text{عنصر } k \quad \Rightarrow \quad V\underline{w}=\underline{y} \rightarrow \underline{y}=e^{j\theta}\cdot \underline{V}_k$$

$\underline{V}_k$ ، k امین ستون ماتریس V است.

پس بردار $\underline{y}$ای که در امتداد بردار ویژه متناظر با بزرگترین مقدار ویژه ماتریس A^HA می‌باشد نرم 2. $\|A\underline{y}\|_2$ را ماکزیمم می‌کند.

با روشی مشابه می‌توان نشان داد که اگر ضریب کوچکترین λ_i در رابطه * برابر مقدار واحد انتخاب گردد آنگاه $(w^H\Lambda w)^{1/2}$ می‌نیمم خواهد شد.

$$\Rightarrow \min_{\|\underline{w}\|_2=1} (\underline{w}^H \Lambda \underline{w})^{1/2} = (\lambda_{min})^{1/2}$$

λ_{min} کوچکترین مقدار ویژه A^HA است.

و بردار $\underline{y}$ای که در امتداد بردار ویژه متناظر با کوچکترین مقدار ویژه ماتریس A^HA می‌باشد. $\|A\underline{y}\|_2$ را می‌نیمم می‌کند.

با توجه به مطالب فوق ماتریس A بزرگ است اگر $\lambda_{min}^{1/2}(A^HA)$ بزرگ باشد (به عبارت دیگر میزان تقویت سیستمی که A نمایشگر آن است بزرگ باشد). ماتریس A کوچک است اگر $\lambda_{max}^{1/2}(A^HA)$ کوچک باشد (" " " " " " " " " " کوچک ").

توجه: مقادیر ویژه و دترمینان یک ماتریس A لزوماً معیارهای خوبی برای بزرگی یا کوچکی ماتریس نمی‌باشند.

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det(A) = 1 \qquad \lambda_1 , \lambda_2 = 1$$

به نظر می‌رسد نظیر ماتریس واحد باشد.

$$\Rightarrow A^H A = \begin{bmatrix} 1 & 100 \\ 100 & 10001 \end{bmatrix}$$

$\lambda_{max}^{1/2} (A^H . A) \simeq 100 \rightarrow$ A در یک جهت خیلی بزرگ

$\lambda_{min}^{1/2} (A^H . A) \simeq .01 \rightarrow$ A " " " " کوچک

اگر $\lambda_{min} \simeq \lambda_{max}$ باشد آنگاه ماتریس بالانس شده است.

تفکیک به مقادیر تکین: Singular Value Decomposition (SVD)

یک ماتریس را می‌توان به طرق مختلف تفکیک یا تجزیه نمود. از آن جمله می‌توان، روش QR، روش cholesky، روش UDU، روش SVD اشاره کرد. در ادامه به روش SVD پرداخته می‌شود که از اهمیت بیشتری برخوردار است.

ماتریس $A \in C^{m \times n}$ را در نظر بگیرید، ماتریس‌های یکه U و V وجود دارند به طوری که:

$$A = U \Sigma V^H \qquad Or \qquad \Sigma = U^H A V$$

که:

$$U = [u_1 \; u_2 \cdots u_m] \qquad V = [v_1 \; v_2 \cdots v_n]$$

و ماتریس Σ دارای ساختاری به صورت زیر است:

$$\Sigma = \begin{cases} \begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix} & m > n \\ \Sigma_1 & ; m = n \\ [\Sigma_1 \; \vdots \; 0] & ; m < n \end{cases}$$

منظور از این 0 در ماتریس‌های فوق ماتریس صفر با ابعاد مناسب است.

Σ_1 یک ماتریس قطری به صورت زیر است:

$$\Sigma_1 = diag(\sigma_1 , \sigma_2 , \cdots , \sigma_K) \qquad ; \quad K = min(m , n)$$

σ_iها همواره غیرمنفی بوده و:

$$\sigma_i = \begin{cases} \lambda_i^{1/2} (A^H A) & : m \geq n \\ \lambda_i^{1/2} (A A^H) & ; m < n \end{cases}$$

به هر یک از مقادیر تکین یا استثنایی ماتریس A گفته می‌شود. این مقادیر اغلب به صورت نزولی مرتب می‌شوند:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_k \geq 0$$

اغلب بزرگترین مقدار σ_i یعنی σ_1 را با: $\sigma_{max} = \bar{\sigma}$ و کوچکترین مقدار σ_i یعنی σ_k با $\sigma_{min} = \underline{\sigma}$ نشان می‌دهند.

ساختار ماتریس V: با توجه به رابطه:

$$A = U \Sigma V^H$$

$$\Rightarrow A^H = V \Sigma^H U^H \quad \Rightarrow \quad A^H A = V \Sigma^H \underbrace{U^H U}_{I} \Sigma V^H = V \Sigma^H \Sigma V^H =$$

چون یکه است

$$\overset{\text{تا یکه است}}{=} V \Sigma^H \Sigma V^{-1} \quad \Rightarrow \quad A^H A = V \underbrace{(\Sigma^H \Sigma)}_{\text{قطری}} V^{-1}$$

با یادآوری از تبدیل متشابه Similarity Transformation می‌توان گفت که ستون‌های ماتریس V بردارهای ویژه ماتریس $A^H A$ می‌باشند که به آنها بردارهای تکین طرف راست A نیز گویند.

ساختار ماتریس U: با توجه به رابطه:

$$A = U \Sigma V^H \longrightarrow A^H = V \Sigma^H U^H \quad \Rightarrow \quad A A^H = U \Sigma \underbrace{(V^H V)}_{I} \Sigma^H U^H = U (\Sigma \Sigma^H) U^H$$

یکه است

$$\Rightarrow \quad A A^H = U \underbrace{(\Sigma \Sigma^H)}_{\text{قطری}} U^{-1}$$

می‌توان گفت که ستون‌های ماتریس U بردارهای ویژه ماتریس AA^H می‌باشند که به آنها بردارهای تکین طرف چپ A نیز می‌گویند.

$$\text{if } m > n: \quad A = U \Sigma V^H = [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_m] \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_k \\ \hline & 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^H \\ v_2^H \\ \vdots \\ v_n^H \end{bmatrix} = \sigma_1 u_1 v_1^H + \sigma_2 u_2 v_2^H + \cdots + \sigma_k u_k v_k^H$$

$$\Rightarrow A = \sum_{i=1}^{k} (\sigma_i u_i v_i^H) \qquad (*)$$

با ضرب طرفین رابطه ستاره v_j از سمت راست داریم:

بردار تکین سمت راست

$$\Rightarrow A v_j = \sigma_j u_j \qquad (1)$$

با ضرب طرفین رابطه ستاره u_j^H از سمت چپ داریم:

بردار تکین سمت چپ

$$u_j^H A = \sigma_j v_j^H$$

توجه 1: تفکیک یک ماتریس به مقادیر تکین یکتا نیست. مثلاً اگر $A=I$ باشد، آنگاه داریم:

$$A = U I V^H = I$$

U و V در تساوی فوق می‌توانند هر دو ماتریس متعامد یکه‌ای باشند.

توجه 2: تعداد مقادیر تکین غیرصفر یک ماتریس برابر رتبه آن ماتریس است. (Rank)

اگر $m>n$ باشد و هیچ‌کدام از مقادیر تکین صفر نباشند آنگاه ماتریس دارای رتبه کامل ستونی است. (Full column Rank)

" $m<n$ " " " " " " " " " " " " " " " سطری است. (Full Row Rank)

توجه 3: با استفاده از SVD می‌توان زیرفضاهای مختلف یک ماتریس را محاسبه کرد. فرض کنید p تا از مقادیر اسکالر تکین غیرصفر باشند یعنی:

$$\Sigma_1 = \mathrm{diag}(\underbrace{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{K-p \text{ تا صفر}}) \qquad K = \min(m,n) \overset{\text{if } m\geq n}{=\!=} n$$

همچنین ماتریس‌های U و V^H را می‌توان به صورت زیر تقسیم‌بندی کرد (partition)

$$U = [\underbrace{U_1}_{p \text{ ستون اول}} \vdots \underbrace{U_2}_{m-p \text{ ستون آخر}}]$$

$$V^H = \begin{bmatrix} V_1^H \\ V_2^H \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow p \text{ سطر اول } V^H \\ \leftarrow n-p \text{ سطر آخر } V^H \end{matrix}$$

هر بردار در زیرفضای تهی سمت راست A را می‌توان به صورت ترکیب خطی از ستون‌های V_2 نوشت:

null space Or Kernel $\{ \underline{x} : A\underline{x} = 0 \}$

هر بردار در زیرفضای تهی سمت چپ A را می‌توان به صورت ترکیب خطی از سطرهای U_2^H نوشت:

$$\{ \underline{x} : \underline{x}^H A = 0 \}$$

هر بردار از زیرفضای ستونی ماتریس A را می‌توان به صورت ترکیب خطی از ستون‌های U_1 نوشت؛

" " " سطری " " " " " " " " " سطرهای V_1^H نوشت؛

توجه 4: با توجه به مطالب قبلی از (A)ته کوچک باشد ماتریس A کوچک است و اگر (A)ته بزرگ باشد ماتریس A بزرگ است.

(به نسبت $\bar{\sigma}(A)$, $\underline{\sigma}(A)$ را اصطلاح عدد شرطی (Condition Number) می‌گویند.)

اگر عدد شرطی یک ماتریس برابر یک باشد آن ماتریس سفید نامیده می‌شود. ← روش کیفیت است.

نوع 5: کوچک بودن مقادیر تکین یک ماتریس معرف این است که با کمی تغییرات در عناصر ماتریس می‌توان آن را تکین (Singular) کرد.

SVD دارای کاربردهای متعددی است که می‌توان به آنها اشاره نمود:

- بدست آوردن پایه‌هایی برای زیرفضاهای اساسی یک ماتریس.
- محاسبه رتبه یک ماتریس. ← تعداد مقادیر تکین غیرصفر
- حل مسئله حداقل مربعات (Least square)
- محاسبه نزدیک‌ترین ماتریس با رتبه مشخص به یک ماتریس داده شده.

فرض کنید $l < p = \text{rank}(A)$, $A_l \triangleq \sum_{i=1}^{l} \sigma_i u_i v_i^H$ آنگاه:

$$\min \|A-B\|_2 = \|A - A_l\|_2 = \sigma_{l+1}$$

$\text{Rank}(B) \le l$

مثلاً رتبه یک ماتریس 3 است و از ما خواسته شده تا نزدیکترین ماتریس با رتبه 2 را پیدا کنیم.

مسئله فوق یک حالت ساده از مسئله minimum Distance است.

- نرم-2 یک ماتریس برابر بزرگترین مقدار تکین آن ماتریس است. $\|A\|_2 = \bar{\sigma}$
- اگر عناصر یک ماتریس به اندازه‌ای تغییر داده شوند آنگاه مقادیر تکین نیز به اندازه‌ای تغییر می‌کنند، در این مورد نامساوی زیر را داریم:

$$|\underline{\sigma}(A+E) - \underline{\sigma}(A)| \le \bar{\sigma}(E) \qquad \forall A, E \in C^{m\times n}$$

Perturbation

نامساوی فوق بیان می‌کند با در اختیار داشتن کران تغییرات E می‌توان پی به کرانی برای تغییرات مقادیر تکین A در اثر تغییرات E برد.

همچنین:

$$\underline{\sigma}(AE) \ge \underline{\sigma}(A).\underline{\sigma}(E)$$

- اگر A یک ماتریس مربعی و معکوس‌پذیر باشد آنگاه بزرگترین مقدار تکین A برابر است با:

$$\bar{\sigma}(A) = \frac{1}{\underline{\sigma}(A^{-1})}$$

اثبات:

$$\bar{\sigma}(A) \triangleq \max_{\underline{x}\neq 0} \frac{\|A\underline{x}\|_2}{\|\underline{x}\|_2} \quad , \underline{y} \triangleq A\underline{x} \implies \bar{\sigma}(A) = \max_{\underline{y}\neq 0} \frac{\|\underline{y}\|_2}{\|A^{-1}\underline{y}\|_2}$$

$$\bar{\sigma}(A) = \max_{\underline{y}\neq 0} \frac{1}{\frac{\|A^{-1}y\|_2}{\|\underline{y}\|_2}} = \frac{1}{\min_{\underline{y}\neq 0} \frac{\|A^{-1}y\|_2}{\|y\|}} = \frac{1}{\underline{\sigma}(A^{-1})}$$

با توجه به روابط $A = U\Sigma V^H$, $A^{-1} = U\Sigma^{-1}V^H$ تساوی فوق قابل لمس تر است.

— ماتریس شبه معکوس یا (pseudo inverse) ماتریس های غیر مربعی است.

فرض کنید $A \in C^{m\times n}$, $X, Y \in C^{n\times m}$ آنگاه:

X معکوس راست A است اگر $AX = I$ باشد یک جواب برای X به صورت: $X = A^H(AA^H)^{-1}$ باشد.

Y " چپ " " " " $YA = I$ " " " " " Y " $Y = (A^HA)^{-1}A^H$ " .

در اصطلاح به X و Y شبه معکوس مربعی گویند که دارای خواص زیر است:

اگر شبه معکوس A را با $A^\dagger$ نمایش دهیم:

$$AA^\dagger A = A \quad , \quad A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger \quad , \quad (AA^\dagger)^H = AA^\dagger$$
$$(A^\dagger A)^H = A^\dagger A$$

اگر $A = BC$ باشد و B دارای رتبه کامل ستونی و C دارای رتبه کامل سطری است، آنگاه:

$$A^\dagger = C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H$$

با استفاده از SVD:

$$A = U\Sigma V^H \quad , \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \Sigma_r > 0$$

$$\Rightarrow A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^H \quad \Rightarrow \quad \Sigma^\dagger = \begin{bmatrix} \Sigma_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

— اگر ماتریس A مربعی و معکوس پذیر باشد:

$$A = U\Sigma V^H \longrightarrow A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^H$$

$$\Rightarrow AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

نمود خلاصه برخی از خواص مقادیر تکین به شرح زیر است:

$$\bar{\sigma}(A) = \max_{\underline{x}\neq 0} \frac{\|A\underline{x}\|_2}{\|\underline{x}\|_2}$$ بزرگترین تکین در تمام مقادیر تکین

$$\underline{\sigma}(A) = \min_{\underline{x}\neq 0} \frac{\|A\underline{x}\|_2}{\|\underline{x}\|_2}$$ کوچکترین بهره در تمام جهات ممکن (خود راستای $\underline{\sigma}$)

آن جهت در راستای بردار ویژه مربوط به $\underline{\sigma}$ است.

- $\underline{\sigma}(A) \le |\lambda_i(A)| \le \bar{\sigma}(A)$ که در آن $\lambda_i(A)$ ها مقادیر ویژه ماتریس A هستند. (تساوی A قطری است).
- $\underline{\sigma}(A) = \dfrac{1}{\bar{\sigma}(A^{-1})}$ در صورت وجود A^{-1}
- $\bar{\sigma}(A) = \dfrac{1}{\underline{\sigma}(A^{-1})}$ . . . .
- $\bar{\sigma}(\alpha A) = |\alpha| \cdot \bar{\sigma}(A)$ $\quad \alpha \in C$ (scaling)
- $\bar{\sigma}(A+B) \le \bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B)$ (نامساوی مثلثی)
- $\bar{\sigma}(AB) \le \bar{\sigma}(A) \cdot \bar{\sigma}(B)$

$\bar{\sigma}$ نرم 2 است. همگی از نرم 2 بدست می‌آیند.

- $\underline{\sigma}(A) - \bar{\sigma}(E) \le \underline{\sigma}(A+E) \le \underline{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(E)$ ← کاربرد زیادی دارد
- $\max\{\bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B)\} \le \bar{\sigma}(\underbrace{[A\ B]}_{matrix}) \le \sqrt{2}\max\{\bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B)\}$ نامساوی محافظه کاری دارد.
- $\max_{i,j} |a_{ij}| \le \bar{\sigma}(A) \le n \max_{i,j} |a_{ij}|$ $\quad \because A_{m\times n},\ m \ge n,\ A = [a_{ij}]_{max}$
- $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = trace(A^H A) = \|A\|_F^2$

کاربرد SVD در کنترل

سیستم زیر را در نظر بگیرید،

رابطه پاسخ فرکانسی سیستم بصورت زیر است:

$$\underline{u}(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow \underline{y}(s)$$

$$\underline{Y}(j\omega) = G(j\omega)\,\underline{U}(j\omega) \longrightarrow \underline{Y}^H(j\omega) = \underline{U}^H(j\omega) \cdot G^H(j\omega)$$

$$\underline{Y}^H(j\omega)\,\underline{Y}(j\omega) = \underline{U}^H(j\omega) \cdot G^H(j\omega) \cdot G(j\omega) \cdot \underline{U}(j\omega) = \|\underline{Y}(j\omega)\|_2^2$$

← با ضرب نرم دو سمت بردار اف

اگر بهره سیستم بصورت زیر تعریف شود:

$$\frac{\|\underline{Y}(j\omega)\|_2}{\|\underline{u}(j\omega)\|_2}$$ کمره

با توجه به تعریفی که از مولفه‌ترین مقدار تکین داشتیم:

$$\max_{\underline{u}\neq 0} \frac{\|\underline{Y}(j\omega)\|_2}{\|\underline{u}(j\omega)\|_2} = \bar{\sigma}(G(j\omega))$$ بزرگترین بهره سیستم که البته تابعی از فرکانس است.

در مباحث قبلی دیدیم که برای تعقیب ورودی مرجع $r(t)$ و کاهش اثر اغتشاش $d(t)$ باید $S(j\omega)$ را در فرکانس‌هایی که این سیگنال‌ها بیشترین انرژی خود را دارند تا حد امکان کوچک کنیم.

یک معیار برای انرژی سیگنال نرم-2 آن است، به عبارت دیگر $r(t)$ در محدوده فرکانسی Ω_r بیشترین انرژی خود را دارد اگر نرم-2 $r(j\omega)$ ($\|r(j\omega)\|_2$) از کرانی بزرگتر باشد (Ω_r)

$$\text{انرژی } r(t) \triangleq \int_0^{+\infty} r^T(t)\, r(t)\, dt \underset{\text{تساوی پارسوال}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} R^H(j\omega)\, R(j\omega)\, d\omega$$

با فرض پایین‌گذر بودن $R(j\omega)$ تساوی بالا را داریم:

$$\text{انرژی } r(t) \simeq \int_0^{\Omega_r} R^H(j\omega)\cdot R(j\omega)\, d\omega$$

$$\text{اگر پایین‌گذر نباشد} \simeq \int_{\Omega_r} R^H(j\omega)\cdot R(j\omega)\, d\omega$$

حال با توجه به تعریفی که برای کوچک بودن یک ماتریس داشتیم باید: $\bar{\sigma}[S(j\omega)] \ll 1 \;;\; \omega \in \Omega_r$

$$\Rightarrow \bar{\sigma}\left[(I+G(j\omega)K(j\omega))^{-1}\right] \ll 1 \Rightarrow \underline{\sigma}\left\{[I+G(j\omega)K(j\omega)]\right\} \gg 1$$

با به نامساوی: $\underline{\sigma}(A)-\bar{\sigma}(E) \le \underline{\sigma}(A+E) \le \underline{\sigma}(A)+\bar{\sigma}(E)$. اگر $E=I$ باشد داریم:

$$\Rightarrow \underline{\sigma}(A)-1 \le \underline{\sigma}(I+A) \le \underline{\sigma}(A)+1$$

در عبارت بالا کافی است $\underline{\sigma}(G(j\omega)K(j\omega)) \gg 1$ باشد؛

این رابطه به مفهوم بزرگ بودن بهره حلقه در محدوده فرکانسی مطلوب (فرکانس پایین) می‌باشد.

همچنین دیدیم که برای کاهش اثر نویز روی خروجی سیستم باید $T(j\omega)$ در فرکانس‌هایی که $n(t)$ بیشترین انرژی خود را دارد کوچک باشد. یعنی از لحاظ ریاضی:

$$\bar{\sigma}[T(j\omega)] \ll 1 \quad \therefore \quad \omega \in \Omega_n$$

$$\Rightarrow \bar{\sigma}\left[G(j\omega)K(j\omega)[I+G(j\omega)K(j\omega)]^{-1}\right] \ll 1 \qquad (1)$$

با استفاده از خاصیت زیر داریم:

$$\bar{\sigma}\left\{G(j\omega)K(j\omega)[I+G(j\omega)K(j\omega)]^{-1}\right\} \le \bar{\sigma}\left\{G(j\omega)K(j\omega)\right\}\cdot\bar{\sigma}\left\{[I+G(j\omega)K(j\omega)]^{-1}\right\}$$

برای برقراری (1) کافی است:

$$\bar{\sigma}\left[G(j\omega)K(j\omega)\right] \cdot \bar{\sigma}\left\{\left[I+G(j\omega)K(j\omega)\right]^{-1}\right\} \ll 1$$

$$\rightarrow \quad \bar{\sigma}\left[G(j\omega)K(j\omega)\right] \ll \frac{1}{\bar{\sigma}\left\{\left[I+G(j\omega)K(j\omega)\right]^{-1}\right\}} = \underline{\sigma}\left\{\left[I+G(j\omega)K(j\omega)\right]\right\}$$

$$\rightarrow \quad \frac{\bar{\sigma}\left[G(j\omega)K(j\omega)\right]}{\underline{\sigma}\left[I+G(j\omega)K(j\omega)\right]} \ll 1 \qquad (2)$$

اگر $\bar{\sigma}\left[G(j\omega)K(j\omega)\right] \ll 1$ باشد با توجه به نامساوی :

$$1-\bar{\sigma}\left(G(j\omega)K(j\omega)\right) \le \underline{\sigma}\left\{\left[I+G(j\omega)K(j\omega)\right]\right\} \le \bar{\sigma}\left[G(j\omega)K(j\omega)\right]+1$$

$1 \rightarrow$ $\qquad$ $1 \rightarrow$

حال داریم :

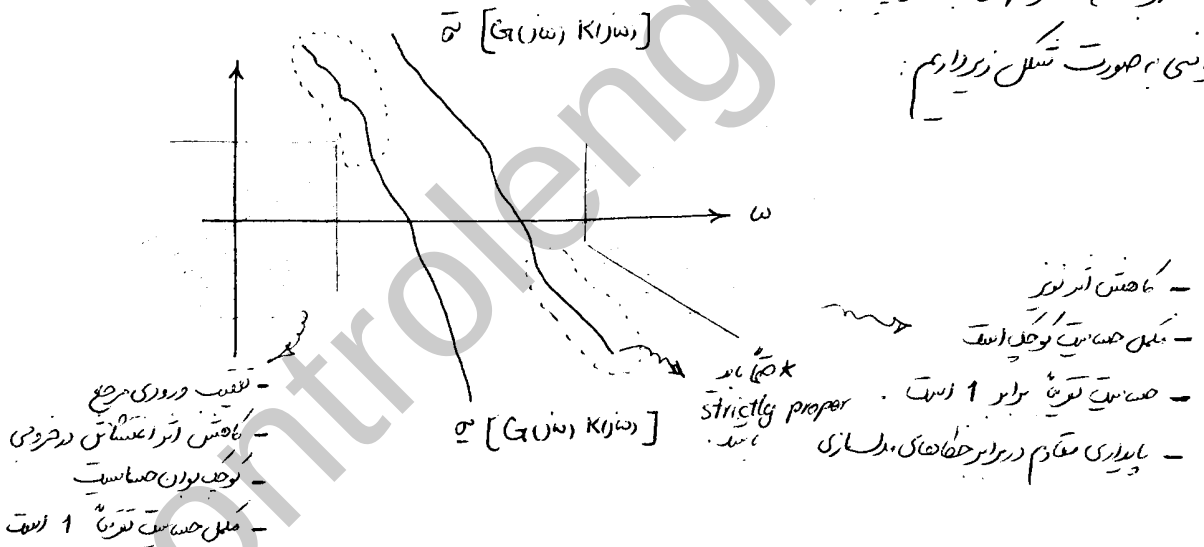
$$\underline{\sigma}\left\{\left[I+G(j\omega)K(j\omega)\right]\right\} \simeq 1$$

بنابراین شرط (2) محقق خواهد شد . به طور خلاصه برای کاهش اثر نویز باید :

$$\bar{\sigma}\left[G(j\omega)K(j\omega)\right] \ll 1 \qquad \therefore \omega \in \Omega_n \rightarrow$$ فرکانسهای بالا

به مفهوم این است که بهره حلقه در فرکانسهای بالا کوچک باشد

پس یک باند فرکانسی به صورت شکل زیر داریم :



توجه کنید مباحث فوق در صورتی معنی دار خواهند بود که در قدم اول سیستم ناحی پایدار باشد

در مورد شیب عبور از صفر در سیستم های SISO از طرح نظر کردیم که این شیب تا حد امکان کم باشد تا حاشیه پایداری ضعیف نگردد ، ولی در اینجا در مورد آن بحثی نداریم چون پایداری سیستم های MIMO بر اساس اصول دیگری است که ارتباطی به SVD ندارد .

تعریف صفرهای سیستم چندمتغیره

مرجع: A.G.J. MacFarlane and N. Karcanias, "poles and zeros of multivariable systems: A survey of the algebric, geometric and complex variable theory", International Journal of control, Vol. 24, No. 1, pp. 33-74, Jan 1976

قضیه:

فرض کنید ماتریس تابع تبدیل یک سیستم $G(s)$ دارای تحقق مینیمال از آن به صورت

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) = C\underline{x}(t) + D\underline{u}(t) \end{cases} \quad (*) \quad ; \quad G(s) = C(SI-A)^{-1}B + D$$

باشد.

قطب‌های این سیستم چندمتغیره مقادیر ویژه ماتریس A می‌باشند که از حل معادله مشخصه ترمینال

$$\det(p_i I - A) = 0$$

بدست آورده می‌شوند. (روش غیرمستقیم)

به خاطر داریم که تحقق $*$ یک تحقق مینیمال است اگر هم کنترل‌پذیر و هم رویت‌پذیر باشد.

قضیه: 1. زوج (A,B) کنترل‌پذیر است اگر و فقط اگر رتبه ماتریس $[SI-A_{n\times n} \quad B]$ برای تمامی مقادیر s برابر n باشد.

2. زوج " " " " " رتبه ماتریس کنترل‌پذیری $\mathcal{C} = [A \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$ برابر n باشد.

توجه: بند 1 قضیه فوق، در اصطلاح تست کنترل‌پذیری PBH (Popov - Belevitch - Hautus) نامیده می‌شود و تنها کافی است در مقادیر ویژه ماتریس A انجام گردد.

قضیه: 1. زوج (C,A) رویت‌پذیر است اگر و فقط اگر رتبه ماتریس $\begin{bmatrix} SI-A_{n\times n} \\ C \end{bmatrix}$ برای تمامی مقادیر s برابر n باشد.

2. زوج (C,A) " " " " " رویت‌پذیری $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ برابر n باشد

توجه: بند 1 قضیه فوق در اصطلاح تست رویت‌پذیری PBH گویند. که تنها کافی است در مقادیر ویژه A صورت گیرد.

به طور مستقیم هم از روی $G(s)$ می‌توان قطب‌های سیستم را بدست آورد. فرض کنید قطب‌های $G(s)$ ریشه‌های چندجمله‌ای مونیک (monic) $p(s)$ باشند. (ضریب بزرگترین توان s در آن برابر یک است). با توجه به نکته قبل:

$$p(s) = \det(sI - A) \triangleq$$ چندجمله‌ای مشخصه

قضیه: چندجمله‌ای مشخصه $p(s)$ برابر با کوچکترین مخرج مشترک درایه‌های تمام ماینورهای غیرصفر $G(s)$ می‌باشد.

مثال: قطب‌های $G(s)$ را بیابید:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & \frac{s-1}{(s+1)(s+2)} \\ -\frac{1}{s-1} & \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} = \frac{1}{(s-1)(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} (s-1)(s+2) & 0 & (s-1)^2 \\ -(s+1)(s+2) & (s-1)(s+1) & (s-1)(s+1) \end{bmatrix}$$

در اینجا منظور از $G_{ij}^{kl}(s)$ ماتریسی است که از حذف سطرهای i و j و ستون‌های k و l از ماتریس $G(s)$ بدست می‌آید.

ماینورهای تک

$$\det[G_{11}^{11}(s)] = \frac{1}{s+1} \qquad \det[G_{11}^{33}(s)] = \frac{s-1}{(s+1)(s+2)}$$

$$\det[G_{11}^{22}(s)] = 0 \qquad \det[G_{22}^{11}(s)] = -\frac{1}{s-1}$$

$$\det[G_{22}^{22}(s)] = \frac{1}{s+2} \qquad \det[G_{22}^{33}(s)] = \frac{1}{s+2}$$

ماینورهای 2x2

$$\det[G_{12}^{12}(s)] = \det\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ -\frac{1}{s-1} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$\det[G_{12}^{13}(s)] = \det\begin{bmatrix} 1/s+1 & (s-1)/(s+1)(s+2) \\ -1/s-1 & 1/s+2 \end{bmatrix} = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

$$\det[G_{12}^{23}(s)] = \det\begin{bmatrix} 0 & (s-1)/(s+1)(s+2) \\ 1/s+2 & 1/s+2 \end{bmatrix} = \frac{-(s-1)}{(s+1)(s+2)^2}$$

بنابراین کوچکترین مخرج مشترک عبارتند از:

$$p(s) = (s-1)(s+1)(s+2)^2 = 0$$

پس $G(s)$ دارای یک قطب در $s=1$ و $s=-1$ و دو قطب در $s=-2$ می‌باشد.

توجه: درجه چندجمله‌ای $p(s)$ همان مرتبه تحقق مینیمال سیستم است که بدان درجه مک میلان (Mac Millan degree) گویند.

صفرها :

فرض کنید $G(s)$ تابع تبدیلی با بستم m ورودی و l خروجی باشد ($G_{l\times m}(s)$). منظور از رتبه (Rank) $G(s)$ تعداد ستونها و یا سطرهای مستقل خطی $G(s)$ می‌باشد که آنرا با r نمایش می‌دهیم و داریم:

$$\text{Rank}\,[G(s)] = r \quad , \quad r \le \min(m, l)$$

مثالی برای یادآوری استقلال و وابستگی خطی :

فرض کنید :

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{(s+2)^2} \end{bmatrix}$$

استقلال سطرهای ماتریس فوق به صورت زیر بررسی می‌شوند :

$$a\left[\frac{1}{s+1} \quad \frac{1}{(s+1)(s+2)}\right] + b\left[\frac{1}{s+2} \quad \frac{1}{(s+2)^2}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{s+1} + \frac{b}{s+2} = 0 \\ \frac{a}{(s+1)(s+2)} + \frac{b}{(s+2)^2} = 0 \end{cases} \longrightarrow b = 1 \,,\; a = -\frac{s+1}{s+2}$$

معنی وابستگی سطرها در میدان توابع گویا می‌باشد.

پس دو سطر فوق در میدان اعداد حقیقی استقلال خطی دارند زیرا $a = b = 0$ فقط عبارتهای بالا را صفر می‌کند.

تعریف : به یک صفر $G(s)$ اطلاق اگر $G(s)$ به ازای $s = z_0$ رتبه از دست دهد، به چندجمله‌ای که ریشه‌های آن همان صفرهای $G(s)$ باشند چندجمله‌ای صفرهای $G(s)$ گویند و با $Z(s)$ نمایش می‌دهند. فرض می‌شود $Z(s)$ مونیک باشد.

قضیه : فرض کنید رتبه $G(s)$ برابر r باشد چندجمله‌ای $Z(s)$ برابر بزرگترین مقسوم علیه مشترک چندجمله‌ای‌های صورت درمیان تمامی مینورهای درجه r ماتریس $G(s)$ است. با شرطی که صورت و مخرج آنها به گونه‌ای تجمیع شده باشند که مخرج تمامی آنها برابر $p(s)$ باشند.

توجه : به ریشه‌های $Z(s) = 0$ صفرهای انتقال یا (Transmission Zeroes) می‌گویند.

مثال : صفرهای $G(s)$ را بیابید :

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1/s+1 & 0 & (s+1)/(s+1)(s+2) \\ -1/s-1 & 1/s+2 & 1/(s+2)^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Rank}\,[G(s)] = r = 2$$

ماینورهای درجه 2 آن بصورت زیر هستند:

$$\det\left[G_{12}^{12}(s)\right] = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \xrightarrow[\text{تصحیح صورت و مخرج}]{P(s)=(s-1)(s+1)(s+2)^2} \frac{(s-1)(s+2)}{(s-1)(s+1)(s+2)^2}$$

$$\det\left[G_{12}^{23}(s)\right] = -\frac{s-1}{(s+1)(s+2)^2} \xrightarrow[\text{"}]{\text{"}} \frac{-(s-1)^2}{(s-1)(s+1)(s+2)^2}$$

$$\det\left[G_{12}^{13}(s)\right] = \frac{2}{(s+1)(s+2)} \xrightarrow[\text{"}]{\text{"}} \frac{2(s-1)(s+2)}{(s-1)(s+1)(s+2)^2}$$

بزرگترین مقسوم علیه مشترک عبارت است از: $Z_{(s)} = s-1 \longrightarrow s=1$. پس $G(s)$ یک صفر انتقال در $s=1$ دارد.

همانطور که دیده می‌شود یک سیستم چند متغیره برخلاف SISO می‌تواند در یک فرکانس هم صفر و هم قطب داشته باشد؛ $s=1$ هم صفر و قطب سیستم مورد نظر است.

تعریف: ماتریس مربعی $A(s)$ با عناصر چندجمله‌ای از s یک ماتریس Unimodular است اگر دترمینان $A(s)$ یک عدد حقیقی غیرصفر باشد.

$$\det\left[A(s)\right] = cte \neq 0 \;,\; \in R$$

خاصیت 1: یک ماتریس Unimodular معکوس‌پذیر بوده و معکوسش هم Unimodular است. در حالت کلی ژنگین ماتریس‌ها تشکیل یک میدان می‌دهند

" 2: رتبه یک ماتریس Unimodular مستقل از s است.

در مثال فوق می‌توان نشان داد که ماتریس‌های Unimodular، $L(s)$ و $R(s)$ وجود دارند بطوری که:

$$G(s) = L(s)\begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)(s-1)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s-1}{s+2} & 0 \end{bmatrix} R(s)$$

به ماتریسی که در میان $L(s)$ و $R(s)$ قرار گرفته است در اصطلاح Smith-MacMillan form گویند. در حالت کلی با در اختیار داشتن فرم فوق صفرهای $G(s)$ ریشه‌های چندجمله‌ای عناصر صورت می‌باشند. و قطبهای $G(s)$ ریشه‌های چندجمله‌ای مخرج عناصر می‌باشند.

مثال: صفرها و قطب‌های $G(s)$ را بیابید:

$$G(s)=\begin{bmatrix}\frac{s+3}{s+1} & \frac{2}{s+1}\\ \frac{3}{s+1} & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}$$

در ابتدا می‌بایست چندجمله‌ای مشخصه $p(s)$:

$$\det\left[G_{11}^{11}(s)\right]=\frac{s+3}{s+1} \qquad \det\left[G_{22}^{11}(s)\right]=\frac{3}{s+1}$$

$$\det\left[G_{11}^{22}(s)\right]=\frac{2}{s+1} \qquad \det\left[G_{22}^{22}(s)\right]=\frac{1}{s+1}$$

$$\det\left[G_{12}^{12}(s)\right]=\frac{s+3}{(s+1)^2}-\frac{6}{(s+1)^2}=\frac{(s-3)}{(s+1)^2}$$

$$\Rightarrow p(s)=(s+1)^2=0 \Rightarrow s=-1$$ قطب مرتبه دوم است.

همانطوری که واضح است رتبه $G(s)$ برابر $r=2$ است. دترمینان ماتریس 2×2 عبارت است از:

$$\det\left[G(s)\right]=\frac{s-3}{\underbrace{(s+1)^2}_{p(s)}} \longrightarrow Z(s)\Rightarrow(s-3)=0 \longrightarrow s=3$$

یک صفر در $Z_0=3$ دارد.

توجه: در مثال فوق دیدیم که علاوه‌بر اینکه هر یک از عناصر $G(s)$ حداقل فاز هستند ولی سیستم چندمتغیره توصیف شده با $G(s)$ با توجه به $Z_0=3$ حداقل فاز نمی‌باشد.

تعریف صفر سیستم چندمتغیره براساس یک توصیف فضای حالت:

فرض کنید سیستم چند ورودی - چند خروجی مربعی $(m=l)$ دارای تحقق فضای حالت زیر باشد:

$$\begin{cases}\dot{\underline{x}}(t)=A\,\underline{x}(t)+B\,\underline{u}(t)\\ \underline{y}(t)=C\,\underline{x}(t)+D\,\underline{u}(t)\end{cases}$$

$s=Z_k$ یک صفر این سیستم است، اگر بردارهای $u_k\in\mathbb{R}^m$ و $x_k\in\mathbb{R}^n$ چنان وجود داشته باشند که با انتخاب

1. $\underline{x}(0)=\underline{x}_k$ حالت اولیه
2. $\underline{u}(t)=\underline{u}_k e^{z_k t}$ ورودی

خروجی $\underline{y}(t)$ برای $t>0$ متحد با صفر باشد.

توجه فیزیکی:

وجود صفر در یک سیستم باعث جذب انرژی می‌گردد.

مقادیر Z_k و u_k و x_k در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند:

$P(s)$ = ماتریس سیستم

$$P(s)=\begin{bmatrix} sI-A & -B \\ C & D \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} Z_k I-A & -B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

ماتریس $P(s)$ به رابطهٔ فوق، به ازای $s=Z_k$ ماتریس $P(s)$ رتبه از دست می‌دهد، $\begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix}$ در زیرفضای تهی $P(s)$ قرار دارد.

توجه: اگر
- سیستم چند متغیره کاملاً سره باشد ($D=0$)
- $x_k=0$ باشد
- u_k در فرکانس‌های پوچ B باشد. ($Bu_k=0$)

آنگاه تمامی مکان‌ها صفرهای سیستم می‌باشند.

رابطهٔ $*$ را به صورت زیر نیز می‌توان بازنویسی کرد:

$$(Z_k E-M)\underline{v}=0$$

که در آن:

$$E=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M=\begin{bmatrix} A & B \\ -C & -D \end{bmatrix}, \quad \underline{v}=\begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix}$$

به مسئله فوق مسئله مقدار ویژه تعمیم یافته (Generalize Eigen Value Problems) می‌گویند.

(مطلب نیز آنرا حل می‌کند.)

$$M\underline{v}=Z_k E\underline{v}$$

بطور خلاصه: به مقادیری از Z_k که به ازای آنها ماتریس سیستم $P(s)$ رتبه از دست می‌دهد صفرهای ناتغییر (Invariant Zero) گفته می‌شود.

توجه 1: برای یک تحقق مینیمال صفرهای ناتغییر همانند صفرهای انتقال می‌باشند.

توجه 2: در حالتی که سیستم مربعی نباشد ($m \neq l$) با استفاده از روشهایی از قبیل افزودن ورودیها یا خروجی‌های جدید می‌توان مسئله را به یک مسئله سیستم مربعی تبدیل و صفرهای ناتغییر را بدست آورد. که جزئیات آن در مراجع زیر آورده شده است:

[1] A.J. Laub and B.C. Moore, "Calculation of transmission zeros using QZ techniques", Automatica, Vol. 14, No. 6, pp. 557–566, Nov. 1978.

[2] A. Emami Naeini and P. Van Dooren, "Computation of zeros of linear multivariable systems", Automatica, Vol. 18, No. 4, pp. 415–430, April 1982.

مثال: صفر نامتغیر و صفر انتقال سیستم مقابل را بدست آورید:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \overset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}} \underline{x} + \overset{B}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \underline{u} \\ \underline{y} = \underset{C}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}} \underline{x} + 0 \end{cases}$$

ماتریس کنترل پذیری $\mathcal{C} = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow Rank(\mathcal{C}) = 2 \rightarrow$ کنترل پذیر

" رویت پذیری $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow Rank(\mathcal{O}) = 2 \rightarrow$ رویت پذیر

پس تحقق فوق مینیمال است:

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI-A & -B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 6 & s+5 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det\{P(s)\} = s+1 = 0$$

در حالت کلی رتبه $P(s)$ برابر 3 است ولی به ازای $s=-1$ رتبه از دست می‌دهد پس $s=-1$ صفر نامتغیر این سیستم است.

محاسبه صفر انتقال: به سراغ تابع تبدیل می‌رویم،

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI-A)^{-1}B + D = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} = 0 \rightarrow s=-1$$

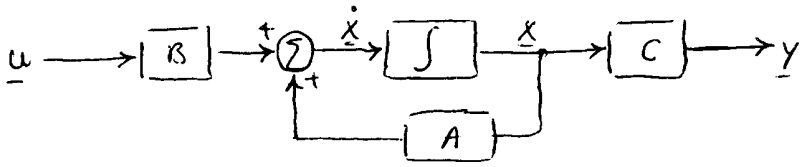
پس $s=-1$ صفر انتقال سیستم نیز می‌باشد. (چون تحقق مینیمال بود مثل پیش سهمی و انتظار است.)

نکته: با بکارگیری فیدبک حالت می‌توان صفر انتقال را با قرار دادن قطبی در محل آن حذف کرد ولی صفر نامتغیر را نمی‌توان با فیدبک حالت عوض کرد.

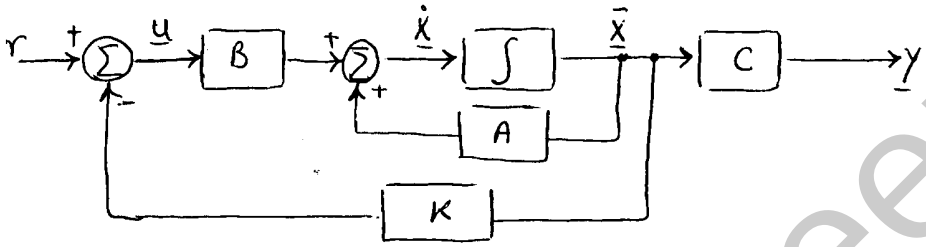
این نکته اثبات می‌گردد. قبل از آن یک یادآوری نیاز می‌باشد:

یادآوری:

- بلوک دیاگرام حلقه باز:

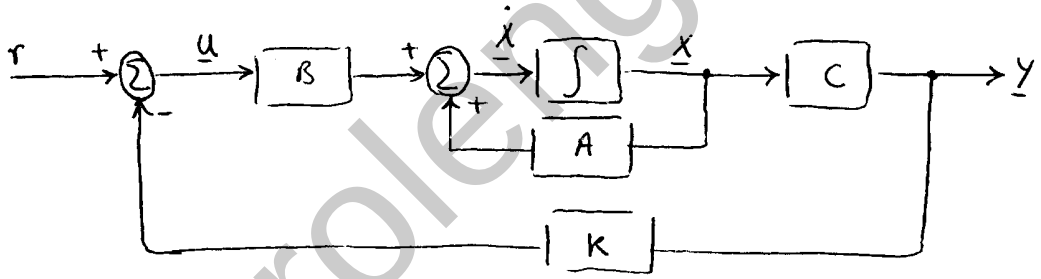


- بلوک دیاگرام فیدبک حالت استاتیک:

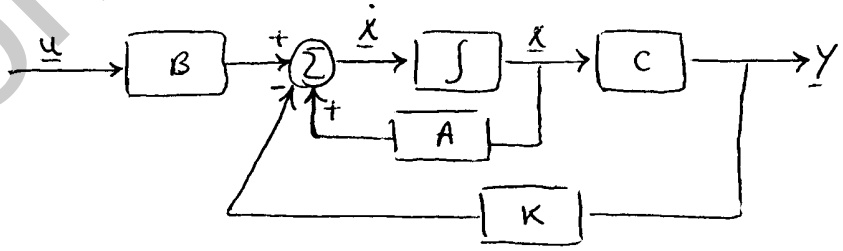


اگر بهره ساده K به تابع تبدیلی مثل K(s) که آن نیز دارای تحقق فضای حالت است تغییر کند فیدبک حالت از نوع دینامیک است.

- فیدبک خروجی استاتیک:



- تزریق خروجی استاتیک:



در ادامه به اثبات نکته فوق پرداخته می‌شود:

حلقه باز
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

قانون فیدبک حالت: $u = r - Kx$ است، با جایگذاری داریم:

حلقه بسته :
$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B(\underline{r} - K\underline{x}) = (A - BK)\underline{x} + B\underline{r} \\ \underline{y} = C\underline{x} \end{cases}$$

$$p(s)_{\text{حلقه باز}} = \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix} \qquad p(s)_{\text{حلقه بسته}} = \begin{bmatrix} sI - A + BK & -B \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ -K & I \end{bmatrix}}_{\text{full rank}}$$

یک ماتریس رتبه کامل است

از آنجایی که در اثر حاصل ضرب یک ماتریس رتبه کامل در ماتریس دیگر رتبه آن ماتریس تغییری نمی‌کند، رتبه ماتریس $p(s)$ حلقه باز با حلقه بسته ناشی از فیدبک حالت یکسان بوده و بنابراین صفرهای نامتغیر با فیدبک حالت عوض نمی‌گردد.

نکته: صفرهای نامتغیر با بکارگیری تزریق خروجی نیز عوض نمی‌شوند؛ اثبات:

$$\text{حلقه باز}: \begin{cases} \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} = C\underline{x} \end{cases} \xrightarrow[-KC\underline{x} \rightsquigarrow \dot{\underline{x}}]{\text{قانون تزریق خروجی}} \text{حلقه بسته}: \begin{cases} \dot{\underline{x}} = A\underline{x} - KC\underline{x} + B\underline{u} = (A - KC)\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} = C\underline{x} \end{cases}$$

$$p(s)_{\text{حلقه باز}} : \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix} \qquad p(s)_{\substack{\text{حلقه بسته} \\ \text{تزریق خروجی}}} = \begin{bmatrix} sI - A + KC & -B \\ C & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I & K \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{\text{full rank}} \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

چون ماتریس $\begin{bmatrix} I & K \\ 0 & I \end{bmatrix}$ صرف‌نظر از K یک ماتریس رتبه کامل است پس رتبه $p(s)$ حلقه باز با $p(s)$ حلقه بسته ناشی از تزریق خروجی دارای رتبه یکسان می‌هستند. بنابراین صفرهای نامتغیر با تزریق خروجی عوض نمی‌شوند.

نکته: برای سیستم مرتبه‌ی ترمینال $p(s)$ قابل تعریف و محاسبه است و می‌توان نوشت:

$$\det[p(s)] = \det \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(sI - A) \cdot \det\left[C(sI - A)^{-1}B + D\right] = 0$$

اگر s مقدار ویژه ماتریس A (قطب‌های سیستم) نباشد $(\det(sI - A) \neq 0)$ در این صورت ریشه‌های معادله:

$$\det\left[G(s)\right] = 0$$

صفرهای نامتغیر سیستم می‌باشند. به عبارت دیگر اگر صورت و مخرج $\det[p(s)]$ را به گونه‌ای اصلاح کنیم که مخرج آن برابر چندجمله‌ای مشخصه شود آنگاه ریشه‌های صورت برابر صفرهای نامتغیر سیستم می‌باشند.

یادآوری از کنترل مدرن.

1. فیدبک حالت: کنترل‌پذیری تغییر نمی‌کند، ولی رویت‌پذیری می‌تواند تغییر کند.
2. تزریق خروجی: " می‌تواند تغییر کند ولی رویت‌پذیری تغییری نمی‌کند.
3. فیدبک خروجی: " تغییری نمی‌کند و رویت‌پذیری هم تغییری نمی‌کند.

ثابت کنید فوق سرراست است PBH بوده و بسیار آسان است. به عنوان مثال در مورد فیدبک حالت داریم:

PBH: $[sI-A \;\vdots\; B]$ حلقه باز

$[sI-A+BK \;\vdots\; B]$ حلقه بسته $= [sI-A \quad B]\begin{bmatrix} I & 0 \\ K & I \end{bmatrix}$ → full Rank

$\Rightarrow \text{Rank}\,[sI-A \;\vdots\; B] = \text{Rank}\,[sI-A+BK \;\vdots\; B]$

❀ قانون ناکوئیست برای سیستم‌های چندمتغیره ❀

تابع تبدیل سیستم حلقه باز مربعی $G(s)$ (می‌تواند شامل plant و Controller) با تحقق مینیمال زیر را در نظر بگیرید:

$$G(s): \begin{cases} \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} = C\underline{x} \end{cases} \qquad G(s) = C(sI-A)^{-1}B$$

این سیستم در حلقه فیدبک به صورت زیر قرار می‌گیرد

فیدبک خروجی استاتیک واحد

می‌دانیم که قطب‌های سیستم حلقه باز ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه می‌باشند:

$$\phi_{ol}(s) = \det(sI-A)$$

معادلات حالت سیستم حلقه بسته با در نظر گرفتن فیدبک خروجی به صورت زیر می‌باشد:

قانون فیدبک : $\underline{u} = \underline{r} - \underline{y} = \underline{r} - C\underline{x}$

$$\Rightarrow \hat{G}(s) \begin{cases} \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{r} - BC\underline{x} \\ \underline{y} = C\underline{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\underline{x}} = (A-BC)\underline{x} + B\underline{r} \\ \underline{y} = C\underline{x} \end{cases}$$

از آنجایی که فیدبک خروجی کنترل‌پذیری و رویت‌پذیری را تغییری نمی‌دهد این تحقق نیز مینیمال است.

قطب‌های سیستم حلقه بسته ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه نیز می‌باشند.

$$\phi_{cl}(s) = \det(sI - A + BC)$$

برای پایداری سیستم حلقه بسته، باید ریشه‌های معادله فوق و یا به عبارتی مقادیر ویژه ماتریس $A-BC$ در نیم صفحه سمت چپ محور موهومی قرار گیرند:

$$Re[\lambda_i(A-BC)] < 0$$

در ادامه رابطه‌ای میان ضابطه‌ای مشخصه حلقه باز $\phi_{ol}(s)$ و مشخصه حلقه بسته $\phi_{cl}(s)$ بدست آورده می‌شود:

$$\phi_{cl}(s) = \det(sI - A + BC) \xrightarrow[(sI-A)]{\text{فاکتورگیری از چپ}} \det\{[sI-A][I+(sI-A)^{-1}BC]\}$$

از آنجایی که: $\det(ST) = \det(S)\det(T)$

$$= \det[sI-A] \cdot \det[I + \underbrace{(sI-A)^{-1}}_{M}\underbrace{BC}_{N}]$$

همچنین می‌دانیم $\det(I+MN) = \det(I+MN)$

$$= \underbrace{\det[sI-A]}_{\phi_{ol}(s)} \cdot \det[I + \underbrace{C(sI-A)^{-1}B}_{G(s)}]$$

$$\Rightarrow \phi_{cl}(s) = \phi_{ol}(s) \cdot \det[I + G(s)]$$

* رابطه‌ای است که به آن زیاد کار خواهیم کرد.

برای درک بهتر رابطه فوق فرض کنید سیستم تک ورودی تک خروجی باشد.

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \rightarrow \det[I+G(s)] = \det\left(1 + \frac{n(s)}{d(s)}\right) \overset{\text{اگر}}{\underset{\text{دقت}}{=}} \frac{d(s)+n(s)}{d(s)}$$

می‌دانیم که: $\phi_{ol}(s) = d(s)$

بنابراین از رابطه * داریم:

$$\phi_{cl}(s) = d(s) \cdot \frac{d(s)+n(s)}{d(s)} = d(s) + n(s)$$

ما توجه به:

$$G_{cl}(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{n(s)/d(s)}{1 + n(s)/d(s)} = \frac{n(s)}{d(s)+n(s)}$$

درستی آن واضح است.

اگر $s = j\omega_0$ یک قطب سیستم حلقه بسته باشد و یا قطب سیستم حلقه باز نباشد:

$$\phi_{cl}(s)\Big|_{s=j\omega_0} \neq 0$$

بنابراین از * :

$$\phi_{cl}(s)\Big|_{s=j\omega_0} = 0 \Rightarrow \det[I + G(j\omega_0)] = 0$$

بنابراین اگر سیستم حلقه بسته قطبی روی محور موهومی داشته باشد ماتریس تفاوت برگشت $[I+G(s)]$ تکین (Singular) خواهد شد.

تعریف: تابع $f(s): \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ تحلیلی در $s=s_0$ است اگر $\frac{df(s)}{d(s)}$ در $s=s_0$ و یک همسایگی حول آن وجود داشته باشد.
یک تابع $f(s)$ گویا در قطبهای هش تحلیلی نیست.

اصل آرگومان

فرض کنید C (Countour) یک مسیر بسته ساده (خودش را قطع نمی‌کند) با جهتی در جهت حرکت عقربه‌های ساعت در صفحه اعداد مختلط باشد. اگر:

1. $f(s)$ صفر و قطبی روی مسیر C نداشته باشد.
2. $f(s)$ درون C بجز نقاط محدودی تحلیلی باشد.
3. $f(s)$ دارای تعداد Z صفر و P قطب درون C باشد.

آنگاه تصویر C تحت نگاشت $f(s)$ معادل صفحه مختلط را به تعداد $Z-P$ در جهت عقربه‌های ساعت دور خواهد زد.

تعداد دوران حول نقطه a توسط تصویر C تحت نگاشت f با $N(a, f(s), C)$ نمایش داده می‌شود پس اصل آرگومان به طور خلاصه عبارتست از:

$$N(0, f(s), C) = Z-P$$

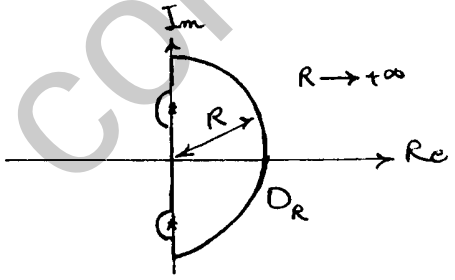
نکته 1: اگر $f(s) = f_1(s) \cdot f_2(s)$ باشد و $f_1(s)$ و $f_2(s)$ خواص ذکر شده در اصل آرگومان را داشته باشند آنگاه

$$N(0, f(s), C) = N(0, f_1(s), C) + N(0, f_2(s), C)$$

به عبارت دیگر اگر $f_1(s)$ دارای Z_1 صفر و P_1 قطب درون C و $f_2(s)$ دارای Z_2 صفر و P_2 قطب درون C باشد آنگاه:

$$Z-P = (Z_1-P_1) + (Z_2-P_2)$$

در مسائل کنترلی مسیر C به صورت زیر انتخاب می‌شود:



اصل آرگومان برای $\phi_{cl}(s)$ به صورت زیر است:

$$N(0, \phi_{cl}, D_R) = Z_{\phi_{cl}} - P_{\phi_{cl}}$$ برای حرکتی برخلاف

$P_{\phi_{cl}}$ صفر است چون ϕ_{cl} یک چندجمله‌ای است پس:

$$N(0, \phi_{cl}, D_R) = Z_{\phi_{cl}}$$

تعداد صفرهای چندجمله‌ای مشخصه حلقه بسته
یا تعداد قطبهای سیستم حلقه بسته درون D_R

برای پایداری سیستم حلقه بسته باید: $Z_{\phi_{cl}} = 0$ باشد یا: $N(0, \phi_{cl}, D_R) = 0$ باشد.

حال با جایگذاری $\phi_{cl}(s)$ از ستاره * داریم: با توجه به نکته 1:

$$N(0, \phi_{cl}, D_R) = N(0, \phi_{ol}, D_R) + N(0, \det(I+G(s)), D_R) = 0 \rightarrow \text{for stability}$$

یا به عبارت دیگر:

$$-N(0, \phi_{ol}, D_R) = N(0, \det[I+G(s)], D_R)$$

توجه کنید $N(0, \phi_{ol}, D_R)$ برابر تعداد صفرهای $\phi_{ol}(s)$ درون D_R یا همان قطبهای ناپایدار سیستم حلقه باز می‌باشند.

پس شرط پایداری به صورت زیر خلاصه می‌گردد:

$$N(0, \det[I+G(s)], D_R) = -(\text{تعداد قطبهای ناپایدار سیستم حلقه باز})$$

برای حالت SISO: $N(0, \det(1+G(s)), D_R) = N(-1, G(s), D_R) = -(\text{تعداد قطبهای ناپایدار سیستم حلقه باز})$

مثال: با بکارگیری قانون ناکوئیست پایداری سیستم حلقه بسته ناشی از حلقه فیدبک سیستم حلقه باز زیر را بررسی کنید:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s+1} & \frac{1000}{s+1} \\ 0 & \frac{s+2}{s+1} \end{bmatrix}$$

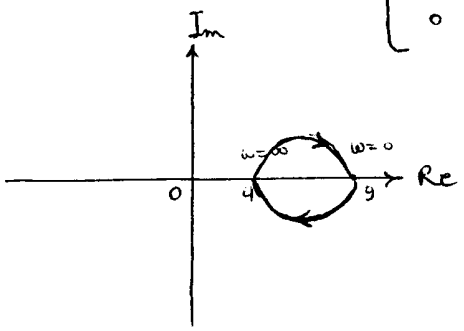
در ابتدا قطب‌های حلقه باز بدست آورده می‌شوند:

$$\det[G_{11}^{11}(s)] = \frac{s+2}{s+1} \qquad \det_{22}[G_{22}^{22}(s)] = \frac{s+2}{s+1}$$

$$\det[G_{11}^{22}(s)] = \frac{1000}{s+1} \qquad \det[G_{12}^{12}(s)] = \frac{(s+2)^2}{(s+1)^2}$$

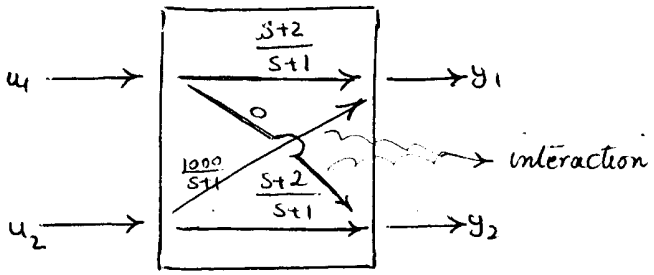
$$\rightarrow \phi_{ol}(s) = (s+1)^2 = 0 \Rightarrow s = -1$$ حلقه باز قطب ناپایداری ندارد.

$$\det[I+G(s)] = \det\begin{bmatrix} \frac{2s+3}{s+1} & \frac{1000}{s+1} \\ 0 & \frac{2s+3}{s+1} \end{bmatrix} = \frac{(2s+3)^2}{(s+1)^2}$$



$$N(0, \frac{(2s+3)^2}{(s+1)^2}, D_R) = 0$$

برای تعداد قطبهای حلقه باز ← سیستم حلقه بسته پایدار است.



همانطوری که دیده شد تعاملی بین خروجی دوم و ورودی اول وجود نداشته و تعامل بین خروجی اول و ورودی دوم به صورت $\frac{1000}{s+1}$ است با توجه به روابط نوشته شده دیده می‌شود که این تعامل هرچقدر هم بزرگ باشد تأثیری در پایداری سیستم حلقه بسته ندارد.

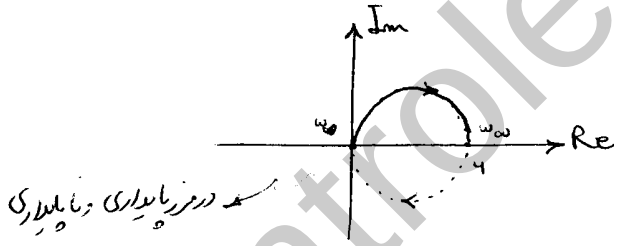
در ادامه تعاملی به صورت $\frac{\beta}{s+1}$ بین خروجی اول ایجاد می‌گردد:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s+1} & \frac{1000}{s+1} \\ \frac{\beta}{s+1} & \frac{s+2}{s+1} \end{bmatrix} \rightarrow \Phi_{\alpha}(s) = (s+1)^2 = 0 \rightarrow$$ قطب ناپایدار ندارد.

$$\det[I+G(s)] = \begin{bmatrix} \frac{2s+3}{s+1} & \frac{1000}{s+1} \\ \frac{\beta}{s+1} & \frac{2s+3}{s+1} \end{bmatrix} = \frac{(2s+3)^2 - 1000\beta}{(s+1)^2}$$

اگر $\beta = 1000$ باشد در این صورت داریم:

$$\det[I+G(s)] = \frac{4s(s+3)}{(s+1)^2}$$



به سادگی می‌توان تحقیق کرد که برای $\beta > 1000$ مسیر محیط مختلط توسط تصویر دور زده شده و سیستم حلقه بسته ناپایدار خواهد شد و تعداد قطب ناپایدار آن یک می‌باشد.

در مثال قبل می‌توان تأثیر تعامل کانال‌های مختلف را به صورت خطای مدل‌سازی در نظر گرفت یعنی:

$$\bar{G}(s) = G(s) + E(s)$$

تابع تبدیل واقعی — تابع تبدیل قطری — خطا

دیدیم که اگر $E(s)$ به صورت زیر باشد داریم:

$$E(s) = \begin{bmatrix} 0 & e_{12}(s) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

هیچ تأثیری در $\det[I+G(s)]$ نداشته و بنابه قانون ناکوئیست تأثیری در پایداری سیستم حلقه بسته ندارد ولی اگر $E(s)$ به صورت زیر باشد:

$$E(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e_{21}(s) & 0 \end{bmatrix}$$

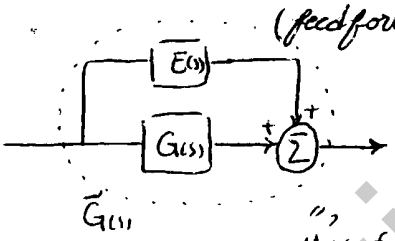
می‌تواند سبب ناپایداری سیستم حلقه‌بسته شود.

بطور خلاصه جهت خاص وجود دارد که اگر تقابل (خطای مدلسازی) در آن وارد شود می‌تواند سبب ناپایداری سیستم حلقه‌بسته شود و تنها داشتن کرانی برروی $E(s)$ برای محفوظ ماندن پایداری کفایت نمی‌کند. یعنی ساختار $E(s)$ هم از لحاظ جهت و هم از لحاظ بزرگی مهم است.

خطاهای مدلسازی و پایداری مقاوم

طرز نمایش خطای مدلسازی: خطای مدلسازی اغلب به یکی از صورتهای زیر نمایش داده می‌شود:

1. جمعی (additive) یا پیش‌خور (feedforward)

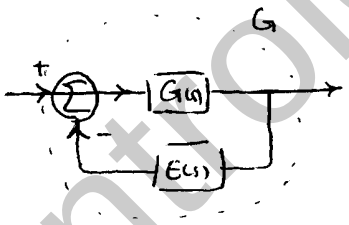


$\tilde{G}(s) = G(s) + E(s)$ خطای مطلق سیستم

عموماً $E(s)$ ناشناخته است ولی کرانی از آن در اختیار داریم، مثلاً

$\bar{\sigma}[E(j\omega)] \le l(\omega)$ کران بالا

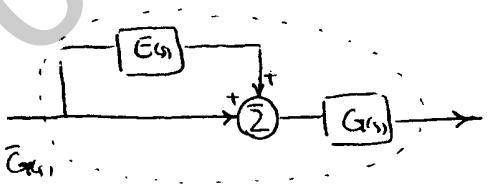
2. ترکیبی (subtraction) یا فیدبکی (feedback)



$$\tilde{G}(s) = [G^{-1}(s) + E(s)]^{-1}$$
$$= [I + G(s)E(s)]^{-1} G(s)$$

$\Rightarrow E(s) = \tilde{G}^{-1}(s) - G^{-1}(s)$ خطای مطلق بین معکوس‌های تابع تبدیل

3. ضربی (multiplication)

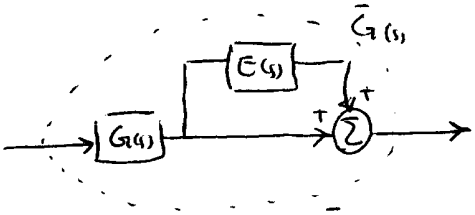


الف: pre-multiplicative error

یا خطای مدلسازی در ورودی

$$\tilde{G}(s) = G(s) + G(s)E(s) = G(s)[I + E(s)]$$

$\Rightarrow E(s) = G^{-1}(s)[\tilde{G}(s) - G(s)]$ خطای نسبی

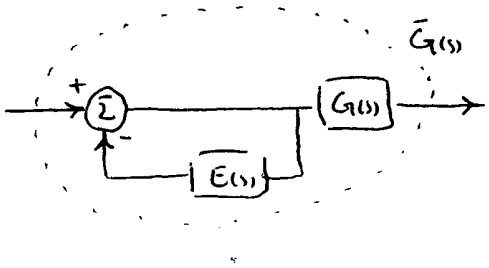


ب : post-multiplicative error

خطای مدل‌سازی در خروجی

$$\bar{G}(s) = G(s) + E(s)\,G(s) = [I + E(s)]\,G(s)$$

$$\Rightarrow E(s) = [\bar{G}(s) - G(s)]\,G^{-1}(s)$$ خطای نسبی



4. تقسیمی (Division)

$$\bar{G}(s) = G(s)\,[I + E(s)]^{-1}$$

$$E(s) = [\bar{G}^{-1}(s) - G^{-1}(s)]\,G(s)$$ خطای نسبی است.

طرز نمایش خطای مدل‌سازی ضربی نسبت به جمعی دارای مزایایی است، از جمله:

۱. فرض کنید $G(s)$ متشکل از دو جزء $G_1(s)$ و $G_2(s)$ به صورت $G(s) = G_1(s)\,G_2(s)$ باشد. می‌توان فرض کرد که $G_1(s)$ کنترل کننده بوده و کاملاً مشخص است و در $G_2(s)$ عدم اطمینان و خطا وجود دارد. طرز نمایش خطا باید این عدم اطمینان را به وضوح نشان دهد.

خطای جمعی:

$$\bar{G}(s) = G_1(s)\,\bar{G}_2(s) \quad \text{and} \quad G(s) = G_1(s)\,G_2(s)$$

$$E(s) = \bar{G}(s) - G(s) = G_1(s)\,[\bar{G}_2(s) - G_2(s)]$$

خطای مطلق به $G_1(s)$ نیز وابسته است که خوب نیست.

خطای ضربی:

$$E(s) = \bar{G}^{-1}(s)\,[\bar{G}(s) - G(s)] \quad \Rightarrow \quad E(s) = G_2^{-1}(s)\,[\bar{G}_2(s) - G_2(s)]$$

به $G_1(s)$ که کاملاً شناخته شده بود بستگی ندارد.

2. با استفاده از طرز نمایش خطای مدل‌سازی ضربی می‌توان مسئله کنترل سیستم‌های نمینیمم فاز را به مسئله کنترل مقاوم سیستم‌های مینیمم فاز تبدیل کرد.

$$\frac{s-10}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} = \underbrace{\frac{s+10}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}}_{\bar{G}(s)} \cdot \underbrace{\frac{s-10}{s+10}}_{1+E(s)}$$

پایداری مقاوم (Robust stability)

منظور از پایداری مقاوم، محفوظ ماندن پایداری سیستم حلقه بسته در حضور خطاهای مدلسازی است. به عبارت دیگر اگر کنترل کننده $K(s)$ مدل نامی $G(s)$ را پایدار می‌کند باید سیستم واقعی $\bar{G}(s)$ را نیز پایدار کند. شرط پایداری مقاوم برای انواع نمایش خطاهای مدلسازی متفاوت است. در ادامه به پایداری مقاوم برای خطای جمعی پرداخته می‌شود.

فرض کنید سیستم واقعی را بتوان به صورت زیر نوشت:

$$\bar{G}(s) = G(s) + E(s)$$

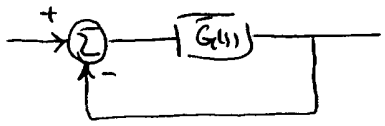
تابع $G(s,\varepsilon)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$G(s,\varepsilon) = G(s) + \varepsilon E(s) \quad ; \quad \varepsilon \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \quad G(s,0) = G(s) \quad , \quad G(s,1) = \bar{G}(s)$$

سیستم حلقه بسته به صورت زیر تشکیل می‌گردد:

سیستم حلقه بسته واقعی



سیستم حلقه بسته فوق دارای چندجمله‌ای مشخصه $\bar{\Phi}_{cl}(s)$ می‌باشد.

قضیه 1. چندجمله‌ای مشخصه $\bar{\Phi}_{cl}(s)$ صفری در نیم صفحه بسته سمت راست (CRHP) ندارد (سیستم حلقه بسته واقعی پایدار است) اگر شرایط زیر برقرار باشد:

1. الف: تعداد صفرهای چندجمله‌ای مشخصه حلقه باز $\Phi_{ol}(s)$ (مربوط به $G(s)$) و $\bar{\Phi}_{ol}(s)$ (مربوط به $\bar{G}(s)$) در CRHP یکسان باشند.

ب: صفرهای $\Phi_{ol}(s)$ و $\bar{\Phi}_{ol}(s)$ روی محور موهومی دقیقاً یکسان باشند.

$$\bar{\Phi}_{ol}(j\omega_0) = 0 \iff \Phi_{ol}(j\omega_0) = 0$$

پ: چندجمله‌ای مشخصه حلقه بسته نامی صفری در CRHP نداشته باشد. (سیستم حلقه بسته نامی پایدار باشد).

2. دترمینان $\det[I + G(s,\varepsilon)]$ مخالف صفر باشد

$$\det[I + G(s,\varepsilon)] \neq 0 \quad \forall s \in \Omega_R \quad \varepsilon \in [0,1]$$

سمت تکین نباشد.

توجه: نزدیکی شرط فوق این است که تعداد دوران حول مبدأ در قانون نایکوئیست تغییر نکند.

در ادامه دنبال این هستیم که شرط (2) را به گونه‌ای بر حسب کرانی بر روی $E(s)$ بیان نماییم. در ابتدا لازم است نکته‌ای از جبر خطی یادآوری شود.

یادآوری از جبر خطی:

ماتریس‌های مربعی $A_{n\times n}$ ، $E_{n\times n}$ را داریم می‌دانیم ماتریس A تکین نمی‌باشد (یعنی $\det(A)\neq 0$) در پی یافتن شرطی بر روی E می‌باشیم به گونه‌ای که $A+E$ تکین نباشد.

برای اینکه $A+E$ تکین باشد باید بردار غیرصفر $\underline{x}$ وجود داشته باشد که: $(A+E)\underline{x}=0$ باشد.

به عبارت دیگر باید $\underline{x}$ در فضای تهی (Null space) ماتریس $(A+E)$ قرار گیرد.

فضای تهی $\mathcal{N} \triangleq (A+E)$; $\underline{x}\in\mathcal{N}$, $\underline{x}\neq 0$; $\rightsquigarrow A\underline{x}=-E\underline{x}$

$$\rightsquigarrow \|A\underline{x}\|_2=\|E\underline{x}\| \underset{\|\underline{x}\|_2\neq 0}{\Longrightarrow} \frac{\|A\underline{x}\|_2}{\|\underline{x}\|_2}=\frac{\|E\underline{x}\|_2}{\|\underline{x}\|_2} \qquad (1)$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\min_{\underline{x}\neq 0}\frac{\|A\underline{x}\|_2}{\|\underline{x}\|_2}\leq\frac{\|A\underline{x}\|_2}{\|\underline{x}\|_2} \qquad (2)$$

$$\max_{\underline{x}\neq 0}\frac{\|E\underline{x}\|_2}{\|\underline{x}\|_2}\geq\frac{\|E\underline{x}\|_2}{\|\underline{x}\|_2} \qquad (3)$$

با توجه به (1) و (2) و (3) اگر $(A+E)$ تکین باشد آنگاه باید

$$\min_{\underline{x}\neq 0}\frac{\|A\underline{x}\|_2}{\|\underline{x}\|_2}\leq\max_{\underline{x}=0}\frac{\|E\underline{x}\|_2}{\|\underline{x}\|_2}$$

$$\rightsquigarrow \underline{\sigma}(A)\leq\bar{\sigma}(E)$$

شرط کافی است.

یعنی میزان perturbation E از حدی بزرگتر باشد

و اگر $\underline{\sigma}(A)>\bar{\sigma}(E)$ باشد آنگاه $(A+E)$ تکین نخواهد بود.

توجه: E کوچک نمی‌تواند باعث تکین شدن A بزرگ شود.

توجه: تمامی ماتریس‌های E را در نظر بگیرید که: $\bar{\sigma}(E)\leq\sigma_0$ فقط معلوم

یعنی فقط کرانی بالا از $\bar{\sigma}(E)$ می‌دانیم نه خود $\bar{\sigma}(E)$ را. آنگاه در صورت عدم برقراری $\underline{\sigma}(A)>\bar{\sigma}_0$ ، می‌توان ماتریس E را پیدا کرد که $(A+E)$ تکین باشد.

اگر تعلق به مقادیر تکین A را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$A = U \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & 0 \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_n \end{bmatrix} V^H \quad , \bar{\sigma}(A) = \sigma_1 > \sigma_2 > \cdots > \sigma_n = \underline{\sigma}(A)$$

و E را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$E = -U \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_n \end{bmatrix} V^H$$

$$\rightsquigarrow \quad A+E = U \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & 0 \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_{n-1} \\ & & & & 0 \end{bmatrix} V^H$$

در این حالت $(A+E)$ تکین است.

پس ماتریس E با نرم-2 برابر $\underline{\sigma}(A)$ وجود دارد که $(A+E)$ تکین باشد.

در اینجا ماتریس E تعریف شده دارای کوچکترین نرم-2 ممکن می‌باشد. انتخابهای دیگر برای تکین شدن $A+E$ می‌تواند به صورت:

$$E = -U \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_{n-1} \\ & & & & 0 \end{bmatrix} V^H \quad \text{Or} \quad E = -U \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_{n-2} & \\ 0 & & & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} V^H$$

حال قضیه پایداری مقاوم در برابر خطای مدل‌سازی جمعی به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

قضیه 2:

فیدبک‌های تضمین $\Phi_{cl}(s)$ صفری در CHRP ندارند اگر:

① شرط 1 قضیه 1 برقرار باشد.

② $\underline{\sigma}[I+G(s)] > \bar{\sigma}[E(s)] \quad , s \in D_R$

اثبات شرط 2: یک شرط کافی برای برقراری

$$\det[I+G(s,\epsilon)] \neq 0 \quad ; s \in D_R$$

$$\det[\underbrace{I+G(s)}_{A} + \underbrace{\epsilon E(s)}_{E}] \neq 0 \quad ; s \in D_R \quad , \epsilon \in [0,1]$$

این است که:

$$\underline{\sigma}[I+G(s)] > \bar{\sigma}[\epsilon E(s)] \quad ; s \in D_R \ , \ \epsilon \in [0,1]$$

با توجه به این که

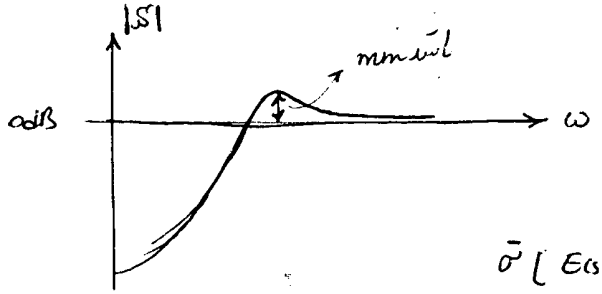
$$\bar{\sigma}[\epsilon E(s)] = \epsilon \bar{\sigma}[E(s)] \leq \bar{\sigma}[E(s)]_{\epsilon=1} \quad \epsilon$$

باید :
$$\underline{\sigma}[I+G(s)] > \bar{\sigma}[E(s)] \qquad ; s\in D_R$$

Or:
$$\frac{1}{\bar{\sigma}\{\underbrace{[I+G(s)]^{-1}}_{S(s)}\}} > \bar{\sigma}[E(s)] \qquad ; s\in D_R$$

Or:
$$\frac{1}{\|S(s)\|_\infty} > \bar{\sigma}[E(s)] \quad ; s\in D_R \Rightarrow \underbrace{\|S(s)\|_\infty^{-1}}_{\text{Modulus Margine}} > \bar{\sigma}(E(s))$$

پس باید تا حد امکان بیشترین امکان تابع حساسیت کوچک باشد .

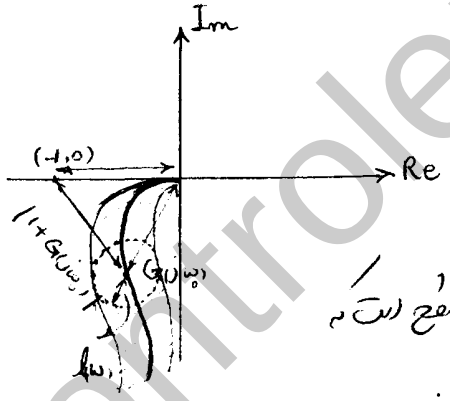


اغلب لذا کران بالا بر روی $\bar{\sigma}[E(s)]$ مطلع هستیم . یعنی
$$\bar{\sigma}[E(s)] \le l(\omega)$$

پس باید :
$$\underline{\sigma}[I+G(s)] > l(\omega) \ge \bar{\sigma}[E(s)]$$

این باعث می‌گردد که مقداری محافظه‌کاری وارد گردد . یعنی شرط فوق برقرار نباشد ولی سیستم حلقه‌بسته واقعی (با خطای مدل‌سازی) پایدار باشد .

برای درک بیشتر شرط پایداری مقاوم $\underline{\sigma}[I+G(s)] > l(\omega) \ge \bar{\sigma}(E)$ ، شرط را برای SISO به صورت گرافیکی توجه می‌کنیم ، در این حالت داریم:



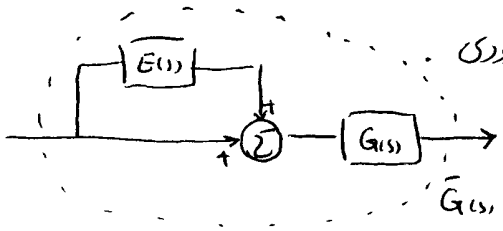
$$|1+G(j\omega)| > l(\omega) \quad ; \forall\omega$$

یعنی طول بردار $1+G(j\omega)$ از شعاع دایره‌ای به مرکز $G(j\omega)$ و شعاع $l(\omega)$ برای تمامی ωها بزرگتر باشد .

برای یک سیستم واقعی دیاگرام نایکوئیست دیگر یک مسیر ساده نیست بلکه یک سطح است که حد امکان برای پایداری مقاوم این سطح از نقطه (-1,0) دور باشد .

داریم :
$$\|S(s)\|_\infty < \frac{1}{\|l(s)\|} \Rightarrow \|S(s)\| < \beta \rightarrow \min_{K(s)} \|S(s)\|_\infty \text{ with to } \|S\|_\infty < \beta$$

شرط پایداری مقاوم با وجود خطای مدل‌سازی ضربی در ورودی .



$$E(s) = G^{-1}(s)\left[\bar{G}(s) - G(s)\right]$$

$$\rightarrow \bar{G}(s) - G(s) = G(s)\,E(s)$$

$$\Rightarrow \quad I+\bar{G}(s) = I + G(s) + G(s)E(s) = G(s)\left[I + G^{-1}(s) + E(s)\right]$$

$$\rightsquigarrow \det G(s) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \det\left[I+\bar{G}(s)\right] = \det\left[G(s)\left\{I+G^{-1}(s)+E(s)\right\}\right]$$

$$= \det[G(s)] \cdot \det\left[I+G^{-1}(s)+E(s)\right] \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \det\left[I+\underbrace{G^{-1}(s)}_{A}+\underbrace{E(s)}_{E}\right] \neq 0$$

با توجه به یادآوری از جبر خطی که داشتیم باید:

$$\underline{\sigma}\left[I+G^{-1}(s)\right] > \bar{\sigma}\left[E(s)\right] \quad ; \quad s \in D_R \qquad (*)$$

درصورتی که $l(\omega)$ کران بالایی برای $\bar{\sigma}[E(s)]$ باشد آنگاه شرط پایداری مقاوم در برابر خطای مدلسازی ضربی به صورت زیر درمی‌آید:

$$\underline{\sigma}\left[I+G^{-1}(j\omega)\right] > l(\omega) \geq \bar{\sigma}\left[E(j\omega)\right]$$

اگر $G(j\omega) = K(j\omega)\,G_1(j\omega)$ باشد که $K(j\omega)$ کنترل‌کننده و $G_1(j\omega)$ مدل نامی سیستم است آنگاه داریم:

$$E(j\omega) = G^{-1}(j\omega)\left[\bar{G}(j\omega) - G(j\omega)\right] = G_1^{-1}(j\omega)\left[\bar{G}_1(j\omega) - G_1(j\omega)\right]$$

پس باید عبارت را داشته باشیم:

$$\underline{\sigma}\left[I+\left[K(j\omega)\,G_1(j\omega)\right]^{-1}\right] > l(\omega) \geq \bar{\sigma}\left[E(j\omega)\right] \qquad (**)$$

Or:

$$\frac{1}{\bar{\sigma}\left\{\left[I+\left(K(j\omega)\,G_1(j\omega)\right)^{-1}\right]^{-1}\right\}} > l(\omega) \geq \bar{\sigma}\left[E(j\omega)\right]$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{1}{\bar{\sigma}\left\{K(j\omega)\,G_1(j\omega)\left[I+K(j\omega)\,G_1(j\omega)\right]^{-1}\right\}} > l(\omega)$$

برای برقراری $(**)$ باید

$$\bar{\sigma}\left[l(\omega)\,K(j\omega)\,G_1(j\omega)\left[I+K(j\omega)\,G_1(j\omega)\right]^{-1}\right] < 1 \quad ; \quad \forall \omega$$

در این حالت داریم:

$$\rightsquigarrow \quad \left\| l(\omega)\,K(j\omega)\,G_1(j\omega)\left[I+K(j\omega)\,G_1(j\omega)\right]^{-1} \right\|_\infty < 1$$

پس شرط پایداری مقاوم به یک مسئله استاندارد H_∞ می‌گردد.

حال اگر $G(j\omega)=G_1(j\omega)K(j\omega)$ نوشته شود خطای مدل‌سازی ضربی به صورت زیر است: $\{\bar{G}(j\omega)=\bar{G}_1(j\omega)K(j\omega)\}$

$$E(j\omega)=[\bar{G}(j\omega)-G(j\omega)]\,G^{-1}(j\omega) \longrightarrow \bar{G}(j\omega)=[I+E(j\omega)]\,G(j\omega)$$

$$\rightarrow I+\bar{G}(j\omega)=E(j\omega)\cdot G(j\omega)+G(j\omega)+I$$

$$\rightarrow E(j\omega)=[\bar{G}_1(j\omega)K(j\omega)-G_1(j\omega)K(j\omega)][G_1(j\omega)K(j\omega)]^{-1}$$

$$=[\bar{G}_1(j\omega)-G_1(j\omega)]\,G_1^{-1}(j\omega)$$

شرط پایداری مقاوم در این حالت به صورت زیر است:

$$\underline{\sigma}\left[I+[G_1(j\omega)K(j\omega)]^{-1}\right] > l(\omega) \geq \bar{\sigma}[E(j\omega)] \quad ;\ \forall\omega$$

از آنجایی که:

$$\underline{\sigma}\left[I+[G_1(j\omega)K(j\omega)]^{-1}\right]=\frac{1}{\bar{\sigma}\left\{[I+[G_1(j\omega)K(j\omega)]^{-1}]^{-1}\right\}}=\frac{1}{\bar{\sigma}\left[G_1(j\omega)K(j\omega)[I+G_1(j\omega)K(j\omega)]^{-1}\right]}$$

پس باید:

$$\bar{\sigma}\Big[l(\omega)\underbrace{G_1(j\omega)K(j\omega)[I+G_1(j\omega)K(j\omega)]^{-1}}_{T_1(j\omega)}\Big]<1 \quad ;\ \forall\omega$$

$$\Rightarrow \bar{\sigma}[l(\omega)\,T_1(j\omega)]<1 \quad ;\ \forall\omega$$

با توجه به تعریف نرم-∞ می‌توان نوشت:

$$\longrightarrow \|l(\omega)\,T_1(j\omega)\|_\infty<1$$

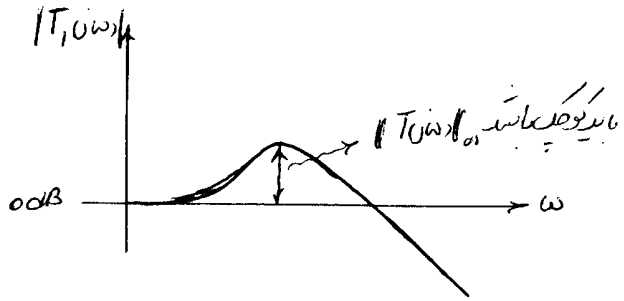
و با توجه به خاصیت زیرضربی نرم-∞ یک شرط کافی برای نامساوی فوق عبارتست از:

$$\|T_1(j\omega)\|_\infty<\frac{1}{\|l(\omega)\|_\infty}=\delta$$

این یک مسئله استاندارد H_∞ است که الگوریتم‌های متعددی برای حل آن وجود دارد. به عبارتی کنترل‌کننده از حل بهینه‌سازی زیر بدست می‌آید:

$$\min_{K(j\omega)}\|T_1(j\omega)\|_\infty \longrightarrow K(j\omega)$$

توجه فیزیکی نامساوی فوق به صورت زیر است:



برای سایر انواع خطاهای مدلسازی از جمله فیدبکی نیز می‌توان شرط پایداری مقاوم را بدست آورد. Fig.18 صفحه 84 تا 97، athens

توجه کنید در اینجا خطای مدلسازی در تابع تبدیل یعنی حوزه فرکانس در نظر گرفته شد. خطای مدلسازی را می‌توان در فضای حالت نیز در نظر گرفت. مراجعی در این زمینه به

نکته‌ای که قابل ذکر است تحلیل این نوع خطای مدلسازی از خطای مدلسازی تابع تبدیل مشکل‌تر است و تحقیق در این زمینه همچنان جای کار دارد.

$$\begin{cases} \dot{\underline{X}} = (A+\Delta A)\underline{X} + (B+\Delta B)\underline{U} \\ \underline{Y} = (C+\Delta C)\underline{X} + (D+\Delta D)\underline{U} \end{cases}$$

مراجع مفید:

[1]. K. Zhou and P.P. Khargonekar, "Stability robustness bounds for linear state-space models with structured uncertainty", IEEE Transaction on Automatic control, Vol. 32, No. 7, July 1987.

خواص فیدبک حالت:

فرض کنید سیستم حلقه باز دارای تحقق فضای حالت زیر است:

$$\begin{cases} \underline{x}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) = C\underline{x}(t) \end{cases} \qquad (1)$$

که $x(t)\in R^n$, $u(t)\in R^m$, $y(t)\in R^p$. در حوزه فرکانس سیستم فوق توسط روابط زیر توصیف می‌گردد.

$$\begin{cases} \underline{X}(s) = (sI-A)^{-1}B\,\underline{U}(s) \\ \underline{Y}(s) = C(sI-A)^{-1}B\,\underline{U}(s) \end{cases} \qquad (2)$$

متغیرهای حالت در بردار $x(t)$ معرف میزان انرژی ذخیره شده در سیستم می‌باشند. این متغیرها می‌توانند جریان سلف‌ها و ولتاژ خازن‌ها، موقعیت‌ها، سرعت‌ها، شتاب‌ها، دماها، فشارها و غیره باشند. هر کدام به نوعی معرف انرژی از نوع جنبشی، پتانسیل، مغناطیسی، الکتریکی و غیره می‌باشند.

اگر این متغیرها به طور مستقیم قابل اندازه‌گیری و در دسترس باشند به آسانی می‌توان ورودی‌های کنترل را بر حسب تابعی از حالت‌ها به گونه‌ای یافت که خروجی سیستم ویژگی‌های مطلوب را داشته باشد.

قانون کنترل فیدبک حالت به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\underline{u}(t) = -G\,\underline{x}(t) + u_c(t) \qquad (3)$$

که G یک ماتریس ثابت $m \times n$ می‌باشد که ماتریس بهره فیدبک حالت نامیده می‌شود. $u_c(t)$ ورودی فرمان است که می‌تواند تعقیب ورودی مبنا و ... مورد استفاده قرار گیرد.

با ترکیب معادلات (1) و (3) تحول فضای حالت به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = (A - BG)\,\underline{x}(t) + B\,u_c(t) \\ \underline{y}(t) = C\,\underline{x}(t) \end{cases}$$

و در حوزه فرکانس سیستم به صورت زیر توصیف می‌گردد:

$$\begin{cases} \underline{X}(s) = (sI - A + BG)^{-1} B\,\underline{U}_c(s) \\ \underline{Y}(s) = C\,(sI - A + BG)^{-1} B\,\underline{U}_c(s) \end{cases}$$

همانطوری که می‌دانیم $\lambda_i(A)$ قطب‌های سیستم حلقه باز و $\lambda_i(A-BG)$ قطب‌های سیستم حلقه بسته می‌باشند. $i=1,2,\dots,n$

نکته 1: اگر زوج (A,B) کنترل‌پذیر باشد آنگاه حداقل یک ماتریس بهره G وجود دارد که $\lambda_i(A-BG)$ را در محل دلخواه در صفحه s قرار دهد. (قطب‌های مختلط به صورت زوج‌های مزدوج مختلط ظاهر می‌گردند.)

کاربرد: حتی اگر تمامی قطب‌های حلقه باز سمت راست محور باشند با بکارگیری فیدبک حالت می‌توان آنها را به نیم‌صفحه چپ منتقل نمود و به پایداری دست یافت. توجه کنید:

کنترل‌پذیری $\Rightarrow$ پایدارشدنی

$\not\Leftarrow$

نکته 2: با بکارگیری فیدبک حالت هیچ صفری به سیستم اضافه نمی‌شود. و همچنین محل صفرهای حلقه باز نیز تغییر نمی‌کند.

قضیه: صفرهای (ناشی‌پذیر) سیستم حلقه باز $G_{ol}(s)$ برابر است با $G_{ol}(s) = C(sI-A)^{-1}B$ با صفرهای حلقه بسته $G_{cl}(s) = C(sI-A+BG)^{-1}B$ برابر است.

اثبات: دیدیم که صفرهای ریشه‌های چندجمله‌ای:

$$\phi_{ol}(s) \triangleq \det \begin{bmatrix} sI-A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

می‌باشند. با توجه به خاصیت دترمینان ماتریس‌های گروهی:

$$\phi_{ol}(s) = \det(sI-A)\,\det\left[C(sI-A)^{-1}B\right] \qquad *$$

همچنین صفرهای سیستم حلقه بسته ریشه‌های چندجمله‌ای:

$$\phi_{cl}(s) = \begin{bmatrix} sI-A+BG & -B \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

می‌باشد که با توجه به خاصیت دترمینان‌ها:

$$\phi_{cl}(s) = \det(sI-A+BG)\cdot \det\left[C(sI-A+BG)^{-1}B\right] \qquad **$$

در نگاه اول به روابط * و ** تساوی $\phi_{cl}(s)$ و $\phi_{ol}(s)$ احساس می‌شود:

$$\begin{bmatrix} sI-A+BG & -B \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI-A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ -G & I \end{bmatrix}$$

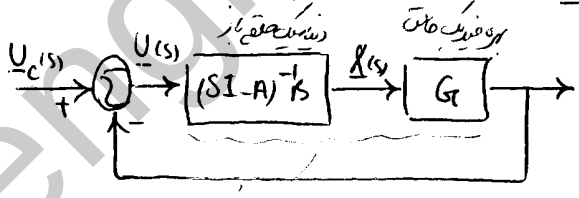
$$\Rightarrow \det \quad '' \quad = \det \quad '' \quad \cdot \underbrace{\det \quad ''}_{1}$$

$$\Rightarrow \phi_{cl}(s) = \phi_{ol}(s) \longrightarrow$$

صفرهای ناتغییر با فیدبک حالت تغییر نمی‌کنند.

بلوک دیاگرام ماتریس تبدیل حلقه (Loop transfer matrix) به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} X(s) = (sI-A)^{-1}B\,U(s) \\ U(s) = -G\,X(s) + U_c(s) \end{cases}$$



$$G_{loop}(s) = G(sI-A)^{-1}B$$

ماتریس تبدیل حلقه نقشی شبیه به ماتریس بهره حلقه یا Loop Gain دارد. به عبارت دیگر تحلیل پایداری، مقاوم‌سازی و غیره مربوط به حلقه سیستم را می‌توان بر اساس G_{loop} انجام داد.

توجه کنید با تغییر G فقط می‌توان صفرهای G_{loop} را تغییر داد.

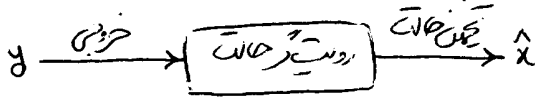
نکته: فیدبک حالت. با توجه به جمله $(sI-A)^{-1}B$ در $G_{loop}(s)$ فیدبک حالت دارای دینامیک نیست زیرا مرتبه یا order سیستم حلقه سیستم حاصل از فیدبک حالت با مرتبه سیستم حلقه باز یکسان است.

نکته 1: برای سیستم‌های SISO برای جایگذاری قطب‌ها در محل خاص فقط یک جواب برای بهره فیدبک G می‌تواند وجود داشته باشد ولی در MIMO می‌توان بی‌نهایت جواب برای G یافت. پس به عبارت دیگر درجه آزادی در اینجا بیشتر است.

نکته 2: با توجه به ماتریس حلقه بسته A-BG نه تنها مقادیر ویژه بلکه بردارهای ویژه آن را نیز می‌توان با G مناسب برای مقدار دلخواه (جهت دلخواه) قرار داد.

مراجع مفید: آدرس میل ارسال شده است.

نکته سوم: درصورتی که حالت‌های یک سیستم در دسترس نباشند باید آنها را از روی خروجی سیستم که در دسترس است تخمین زد. این عمل با رویتگر حالت (observer) یا تخمین‌گر حالت (stimator) صورت می‌گیرد. وجود این رویتگر است که باعث بالا رفتن دینامیک سیستم می‌گردد.



یک رویتگر حالت (خطی) دارای ساختاری به صورت زیر است. خروجی واقعی است و قابل اندازه‌گیری

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + H[y(t) - \hat{y}(t)] \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases}$$

بهره رویتگر — تخمین خروجی قابل محاسبه — innovation

$\hat{x}(t)$ تخمین $x(t)$ و $\hat{y}(t)$ تخمین $y(t)$ و H ماتریس بهره رویتگر حالت است.

توجه کنید $\dot{\hat{x}}(t)$ نسبت به خروجی $y(t)$ تابعی خطی است. ضربت یک رویتگر خطی نسبت به غیرخطی در این است که تحلیل و ساخت آن هم از لحاظ نرم‌افزاری و هم سخت‌افزاری آسان‌تر می‌باشد. اگر H به طور مناسب انتخاب شود رویتگر می‌تواند همه باشد.

خطای رویتگر به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$e(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$$

معیار بهینگی برای سگنال $e(t)$ یا توابعی از آن تعریف می‌گردد. با جایگذاری از معادلات سیستم و رویتگر داریم:

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = Ax(t) + \cancel{Bu(t)} - A\hat{x}(t) - \cancel{Bu(t)} - H[y(t) - \hat{y}(t)]$$

$$y(t) = Cx(t) \quad , \quad \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \quad \Longrightarrow \quad \dot{e}(t) = (A - HC)\,e(t)$$

دینامیک خطای رویتگر

اگر تمامی مقادیر ویژه ماتریس $A-HC$ در سمت چپ محور موهومی قرار گیرند. در این صورت برای تمامی شرایط اولیه با گذشت زمان $e(t)$ به سمت صفر و $\hat{x}(t)$ به سمت $x(t)$ میل می‌کند.

$$Re[\lambda_i(A-HC)] < 0 \longrightarrow \lim_{t\to\infty} e(t) = 0$$

توجه کنید سرعت همگرایی و یا به عبارتی صفر شدن خطا به بزرگی مقادیر ویژه $A-HC$ بستگی دارد.

اگر زوج (C,A) تشخیص دادنی (Detectable) باشد آنگاه ماتریس H را می‌توان به گونه‌ای یافت که مقادیر ویژه $A-HC$ همگی در سمت چپ محور موهومی قرار گیرند.

اگر زوج (C,A) رویت‌پذیر یا (observable) باشد آنگاه ماتریس H را می‌توان به گونه‌ای یافت که مقادیر ویژه $A-HC$ در هر محل دلخواهی قرار گیرند. پس رویت‌پذیری

تشخیص دادنی $\rightleftarrows$ رویت‌پذیری

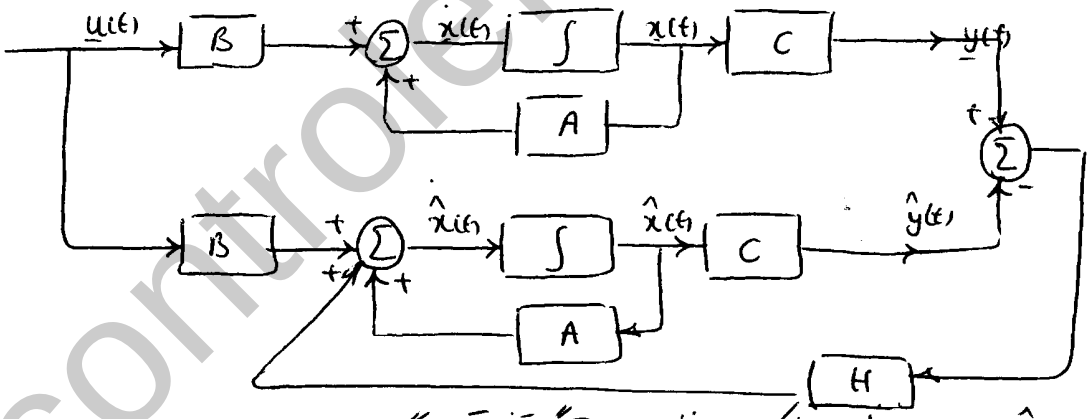
دوگان این موضوع

پایدارشدنی $\rightleftarrows$ کنترل‌پذیری

برای تشخیص دادنی بودن زوج (C,A) کافی است مودهای رویت‌ناپذیر ماتریس A در سمت چپ محور موهومی قرار گرفته باشند.

یک چندجمله‌ای دلخواه با ضرایب حقیقی: چندجمله‌ای مشخصه رویت‌گر $\det(SI-A+HC) \triangleq$

بلوک دیاگرام سیستم حلقه باز به همراه رویت‌گر حالت به صورت زیر است:



اختلاف $y(t)-\hat{y}(t)$ به منظور صفر کردن خطای رویت‌گر تزریق می‌گردد.

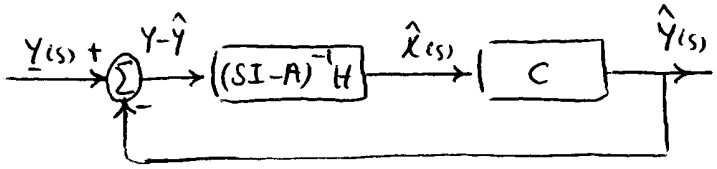
اغلب $u=0$ صفر می‌شود زیرا در حقیقت مسئله رویت‌گر همان مسئله پیدا کردن شرایط اولیه است. با در اختیار داشتن شرایط اولیه و با استفاده از دینامیک معلوم $x(t)$ را در هر لحظه بدست آورد. درصورت وجود $u(t)$ نیز می‌توان از اصل جمع آثار برای در نظر گرفتن تأثیر آن استفاده کرد.

با فرض $u(t)=0$ معادلات رویت‌گر به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\underline{x}}}(t) = A\hat{\underline{x}}(t) + H\underline{y}(t) - H\hat{\underline{y}}(t) \\ \hat{\underline{y}}(t) = C\hat{\underline{x}}(t) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \hat{X}(s) = (SI-A)^{-1}H(\underline{Y}(s) - \hat{\underline{Y}}(s)) \\ \Rightarrow \hat{\underline{Y}}(s) = C\hat{\underline{X}}(s) \end{array}$$

$$\Rightarrow \hat{\underline{Y}}(s) = C(SI-A+HC)^{-1}H\underline{Y}(s)$$

در نتیجه بلوک دیاگرام زیر را داریم:

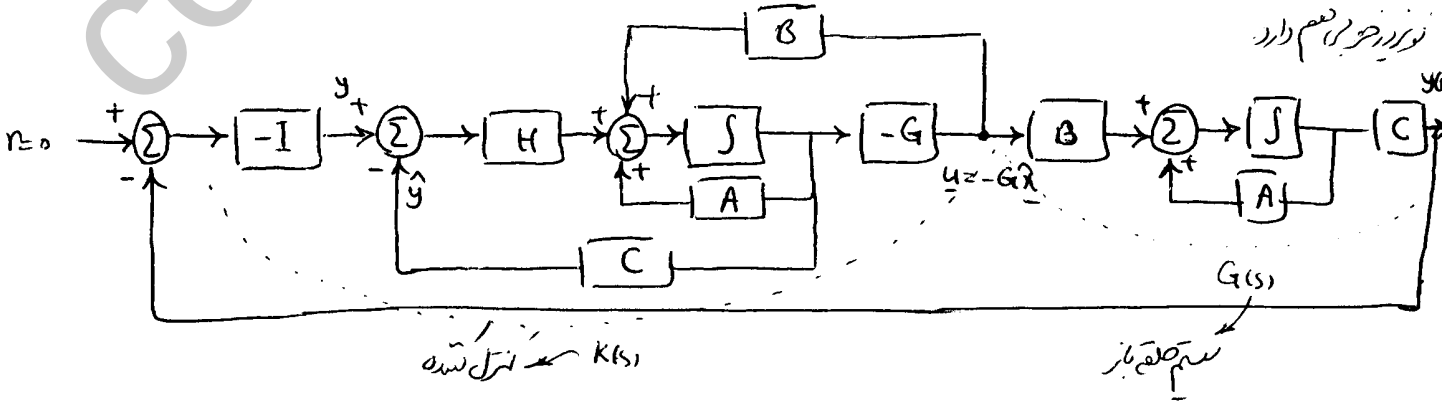


با توجه به عبارت $(SI-A)^{-1}$ قطب‌ها همان قطب‌های حلقه باز هستند و فقط با H می‌توان صفرهای $(SI-A)^{-1}H$ را عوض کرد.
توجه کنید هم در بحث فیدبک حالت و هم در بحث رویتگر حالت داشتن رفتار مناسب برای بهره حلقه هدف اصلی می‌باشد.
در اینجا با دو بهره حلقه مواجه هستیم. بهره حلقه فیدبک حالت $G(SI-A)^{-1}B$ و بهره حلقه رویتگر حالت $C(SI-A)^{-1}H$.
برای طراحی می‌توان یکی از دو شیوه زیر را برگزید:

۱- پیدا کردن G به گونه‌ای که بهره حلقه فیدبک حالت $G(SI-A)^{-1}B$ رفتار مناسبی داشته باشد و سپس پیدا کردن H به گونه‌ای که رفتار کل سیستم حلقه بسته به بهره حلقه فیدبک حالت نزدیک گردد.

۲- پیدا کردن H به گونه‌ای بهره حلقه رویتگر حالت $C(SI-A)^{-1}H$ رفتار مناسبی داشته باشد و سپس پیدا کردن G به گونه‌ای که رفتار کل سیستم (بهره حلقه کل) به بهره فیدبک حالت نزدیک گردد.

بلوک دیاگرام توأم فیدبک حالت، رویتگر حالت و سیستم حلقه باز (به عبارتی سیستم حلقه بسته به صورت زیر است):



توجه 1: چون x را نداریم از تخمین آن یعنی $\hat{x}(t)$ استفاده می‌کنیم. $\underline{u} = -G\hat{x}$

توجه 2: همانطوری که دیده می‌شود در ساختار $K(s)$ مدل سیستم (ماتریس‌های A و B و C) نیز وجود دارند به همین علت به این نوع کنترل کننده‌ها Model Based Compensator نیز می‌گویند.
MBC

توجه 3. $K(s)$ دارای ساختاری به صورت زیر است:

$$K(s) = G(sI - A + HC + BG)^{-1}H$$

پارامترهای آزاد $K(s)$ همان G و H هستند که خانواده‌ای از کنترل کننده‌ها را بدست می‌دهند.

توجه 4: مرتبه (order) $K(s)$ برابر مرتبه سیستم حلقه باز یعنی n است. پس مرتبه کل سیستم حلقه بسته برابر $2n$ می‌باشد.

با توجه به بلوک دیاگرام می‌توان نوشت:

$$K(s) = G(sI - A + HC + BG)^{-1}H$$

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) & (1) \\ \underline{u}(t) = -G\underline{z}(t) \\ \dot{\underline{z}}(t) = A\underline{z}(t) + B\underline{u}(t) - H[\underline{r}(t) - C\underline{x}(t) - \underline{d}(t)] - HC\underline{z}(t) & (2) \\ \underline{y}(t) = C\underline{x}(t) + \underline{d}(t) \end{cases}$$

$\underline{x}(t)$ حالت سیستم حلقه باز و $\underline{z}(t)$ حالت MBC است. اجتماع آنها حالت‌های سیستم حلقه بسته را تشکیل می‌دهد.

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}(t) \\ \dot{\underline{z}}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & -BG \\ HC & A - BG - HC \end{bmatrix}}_{A'} \begin{bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ H \end{bmatrix} [d(t) - r(t)]$$

مقادیر ویژه ماتریس A' را به آسانی می‌توان یافت. بنابراین از تبدیل متشابه برای تغییر متغیرهای حالت به صورت زیر استفاده می‌گردد:

$$\begin{cases} \underline{x}(t) = \underline{x}(t) \\ \underline{w}(t) = \underline{x}(t) - \underline{z}(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{z}(t) \end{bmatrix}$$

با کم کردن طرفین رابطه (2) از طرفین رابطه (1) معادلات حالت به صورت زیر هستند:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BG & BG \\ 0 & A-HC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ H \end{bmatrix} [r(t) - d(t)]$$

می‌دانیم که تحت تبدیل متشابه مقادیر ویژه تغییری نمی‌کند. با توجه به معادلات فوق واضح است که قطب‌های سیستم حلقه‌بسته مقادیر ویژه ماتریس‌های $A-BG$ (حالت) و $A-HC$ (رویتگر حالت) می‌باشند. این نکته بر اساس یک اصل مهم بنام اصل جدایی (seperation) است که به صورت زیر بیان می‌گردد:

اصل جدایی: مدهای سیستم حلقه‌بسته برابرند با اجتماع مدهای فیدبک حالت و رویتگر کننده حالت.

حال اگر زوج (C,A) مشخص‌پذیر و زوج (A,B) پایدارشدنی باشند می‌توان پارامترهای G و H کنترل‌کننده MBC را به گونه‌ای یافت که سیستم حلقه‌بسته پایدار باشد.

توجه: در اینجا از رویتگر مرتبه کامل (Full order Observer) و فیدبک حالت مرتبه کامل (Full order state feedback) استفاده شد. اگر سیستم اولیه دارای خصوصیات ویژه‌ای باشد می‌توان از کاهش مرتبه یافته (Reduced) این اجزاء استفاده کرد. در نتیجه مرتبه کنترل‌کننده را پایین‌تر از n آورد. یک کنترل‌کننده مرتبه پایین هم از لحاظ نرم‌افزاری و هم از لحاظ سخت‌افزاری بسیار مناسب‌تر برای پیاده‌سازی است.

با توجه به بلوک دیاگرام خروجی سیستم حلقه‌بسته به صورت زیر است:

$$y(t) = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + d(t)$$

با فرض $d(t)=0$ در حوزه فرکانس که داریم:

$$Y(s) = [C \quad 0] \begin{bmatrix} (SI-A+BG)^{-1} & N \\ 0 & (SI-A+HC)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ H \end{bmatrix} R(s)$$

$$N = (SI-A+BG)^{-1} BG (SI-A+HC)^{-1}$$

$$\Rightarrow Y(s) = C\left[(SI-A+BG)^{-1} BG (SI-A+HC)^{-1}\right] H \, R(s)$$

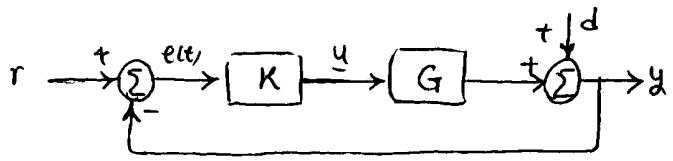
$$\Rightarrow G_{cl}(s) = T(s) = C\left[(SI-A+BG)^{-1} BG (SI-A+HC)^{-1}\right] H$$

با فرض $n(t)=0$ در حوزه که داریم:

$$S(s) = I - T(s)$$

$$Y(s) = \left[I - C(SI-A+BG)^{-1} BG (SI-A+HC)^{-1} H\right] D(s)$$

نکته: بلوک دیاگرام زیر را در نظر بگیرید:



اگر حلقه نزدیک در محل u باز شود و سپس سیگنال u داده شود در این صورت سیگنال $K(s)G(s)U(s)$ از بهره حلقه می‌گذرد.

$$K(s)G(s) = C(SI-A+HC+BG)^{-1}\overbrace{HC}^{HG}(SI-A)^{-1}B$$

G به گونه‌ای انتخاب می‌شود که $G(SI-A)^{-1}B$ رفتار فرکانسی مناسبی داشته باشد. و سپس H به گونه‌ای انتخاب می‌شود که $K(s)G(s)$ به سمت $\underbrace{G(SI-A)^{-1}B}_{\text{بهره حلقه نزدیک}}$ میل کند.

دوگان این نکته نیز صادق است: اگر حلقه نزدیک در محل e باز شود و سپس سیگنال e داده شود آنگاه سیگنال $G(s)K(s)e(s)$ از بهره حلقه می‌گذرد. پس بهره حلقه در این حالت $G(s)K(s)$ است:

$$G(s)K(s) = C(SI-A)^{-1}BG(SI-A+BG+HC)^{-1}H$$

H به گونه‌ای انتخاب می‌شود که $\underbrace{C(SI-A)^{-1}H}_{\text{بهره حلقه روشن‌گر حالت}}$ رفتار فرکانسی مناسبی داشته باشد. و سپس G به گونه‌ای انتخاب می‌شود که $G(s)K(s)$ به سمت $C(SI-A)^{-1}H$ میل کند.

انتخاب دو روش فوق بستگی به این دارد که رفتار $G(s)K(s)$ برای ما مهم است یا رفتار $K(s)G(s)$. یکی از ملاک‌های انتخاب آن دو خطاهای مدل‌سازی است.

- اگر خطای مدل‌سازی در خروجی سیستم $G(s)$ ظاهر شود از $G(s)K(s)$ استفاده می‌شود.
- " " " " ورودی " " " " $K(s)G(s)$ " .

چگونگی پیدا کردن بهره‌های G و H به روش‌های مختلفی صورت می‌گیرد که در ادامه به یکی از آنها پرداخته می‌شود.

رگولاتور بهینه Linear Quadratic Regulator

فرض کنید سیستم حلقه باز خطی و تغییرناپذیر با زمان توسط معادلات حالت زیر داده شده است.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) = C\,x(t) \end{cases}$$

که $x(t)$ متعلق به R^n ، $u(t)\in R^m$ ، $y(t)\in R^p$ و ماتریس‌های A ، B ، C ثابت و با ابعاد مناسب

توجه کنید $y(t)$ متغیر رگوله شده است و لزومی ندارد که حتماً خروجی واقعی سیستم باشد و می‌تواند ترکیبی خطی از حالت‌های سیستم باشد.

هدف: انتخاب ورودی $u(t)$ با کمترین انرژی به گونه‌ای که متغیر رگوله شده $y(t)$ تا حد امکان به مقدار دلخواه (صفر) نزدیک باشد.

برای رسیدن به این هدف تابع هزینه مربعی (Quadratic) زیر را در نظر بگیرید؛ سعی در کمینه نمودن این تابع هزینه داریم:

$$J = \int_0^{t_f} \left[\underline{y}^T(t)\, \underline{y}(t) + \underline{u}^T(t)\, R\, \underline{u}(t) \right] dt$$

که $R = R^T > 0$، یک ماتریس مثبت معین متقارن است که تابع وزنی روی $u(t)$ نیز گفته می‌شود. از آن می‌توان در تنظیم انرژی u (R کوچک ← بزرگ) همچنین مقیاس‌بندی (Scaling) ورودی‌های مختلف که در $\underline{u}(t)$ وجود دارند و از یک جنس نیستند استفاده کرد.

با توجه به رابطه $\underline{y}(t) = C\,\underline{x}(t)$ داریم:

$$J = \int_0^{t_f} \left[\underline{x}^T(t)\, Q\, \underline{x}(t) + \underline{u}^T(t)\, R\, \underline{u}(t) \right] dt \quad ; \quad Q = C^T C \geq 0$$

مسئله بهینه‌سازی:

پیدا کردن $\underline{u}(t)$ برای زمان‌های بین $0 \leq t \leq t_f$ به گونه‌ای که تابع هزینه J نسبت به قید دینامیک حالت $\dot{x} = Ax + Bu$ کمینه شود.

راه حل: اولاً ورودی بهینه $\underline{u}(t)$ همواره به صورت فیدبک حالت متغیر با زمان می‌باشد. بهره حالت.

$$\underline{u}(t) = -G(t)\, \underline{x}(t)$$

در اینجا بهترین بهره فیدبک حالت تابعی از زمان بوده و از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$G(t) = R^{-1} B^T K(t)$$

$K(t)$ یک ماتریس متقارن و حداقل مثبت نیمه‌معین ($K(t) = K^T(t) \geq 0$) و یکتا می‌باشد که از حل معادله دیفرانسیل ریکاتی زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = -K(t)A - A^T K(t) - Q + K(t) B R^{-1} B^T K(t) \\ K(t_f) = 0 \qquad \text{(Boundary Condition)} \end{cases}$$

خواهیم دید که تحت شرایطی داریم:

$$\lim_{t \to \infty} K(t) = K \ \text{ثابت} \longrightarrow G \ \text{ثابت}$$

قضیه: مسئله رگولاتور خطی را در نظر بگیرید. فرض کنید زوج (A,B) کنترل‌پذیر و زوج (C,A) رویت‌پذیر و $Q=C^TC$ باشد. آنگاه بیانهای زیر درست می‌باشند:

1. $K(t)$ وقتی $t_f \to \infty$ میل می‌کند برای تمامی زمانهای t وجود داشته و یکتاست.

$$\lim_{t_f \to \infty} K(t) = K = \text{constant}$$

2. ماتریس K یک ماتریس متقارن و مثبت معین است. $K = K^T > 0$

3. ماتریس K جواب یکتای مثبت معین معادله جبری ریکاتی (ARE) زیر است:

$$-KA - A^TK - Q + KBR^{-1}B^TK = 0$$

4. قانون کنترل بهینه بر اساس فیدبک حالت ثابت زیر بیان می‌شود:

$$\underline{u}(t) = -G\,\underline{x}(t) \quad ; \quad G = R^{-1}B^TK$$

و به گونه‌ای است که سیستم حلقه بسته پایدار می‌باشد.

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = (A-BG)\,\underline{x}(t) \\ \underline{y}(t) = C\,\underline{x}(t) \end{cases} \quad ; \quad Re[\lambda_i(A-BG)] < 0$$

5. مقدار بهینه تابع هزینه در هر زمان t تا ∞ یعنی:

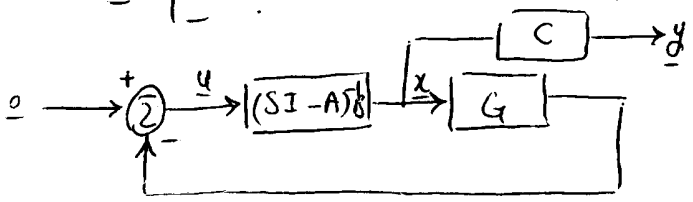
$$J(t) = \int_t^\infty [\underline{x}^T(t)Q\,\underline{x}(t) + \underline{u}^T(t)R\,\underline{u}(t)]\,dt$$

برابر است با:

$$J_{opt}(t) = \underline{x}^T(t)\,K\,\underline{x}(t) > 0 \quad ; \quad \forall\, \underline{x}(t) \neq 0$$

تبصره: قضیه فوق در حالتی که زوج (A,B) پایدارشدنی و زوج (C,A) تشخیص‌دادنی باشد نیز صدق است تنها تفاوتی که وجود دارد این است که ماتریس K می‌تواند مثبت نیمه‌معین (P.S.D) نیز باشد.

توجه: بهره حلقه مسئله LQR به صورت $G_{LQR}(s) = G(sI-A)^{-1}B$ است و ماتریس C ظاهر شده در روابط فوق ماتریس C سیستم حلقه باز می‌باشد. به عبارتی بردار y ظاهر شده فوق خروجی سیستم نیست.



در ادامه نشان داده می‌شود که:

$$[I+G_{LQ}(-s)]^T R [I+G_{LQ}(s)] = R + G_{ol}^T(-s)\, G_{ol}(s)$$

که:

$$G_{ol}(s) = C(sI-A)^{-1}B$$

است یعنی همان تابع تبدیل از ورودی به متغیر کنترل شده است.

به رابطهٔ فوق تساوی کالمن در حوزه فرکانس (Kalman frequancy Domain Equation) می‌گویند K.F.D.E

برای اثبات K.F.D.E به طرفین معادله جبری ریکاتی عبارت $sK-sK$ را اضافه می‌کنیم:

$$sK - KA - A^TK - Q + KBR^{-1}B^TK - sK = 0$$

$$K(sI-A) + (-sI-A^T)K - Q + KBR^{-1}B^TK = 0$$

تساوی فوق را از راست در $(sI-A)^{-1}B$ و از چپ در $B^T(-sI-A^T)^{-1}$ ضرب می‌کنیم:

$$B^T(-sI-A^T)^{-1}KB + B^TK(sI-A)^{-1}B - B^T(-sI-A^T)^{-1}Q(sI-A)^{-1}B +$$
$$B^T(-sI-A^T)^{-1}KBR^{-1}B^TK(sI-A)^{-1}B = 0$$

با توجه به اینکه $Q=C^TC$ ، $G=R^{-1}B^TK$ ، $K=K^T$ داریم:

$$B^T(-sI-A^T)^{-1}G^TR + RG(sI-A)^{-1}B - B^T(-sI-A^T)^{-1}C^TC(sI-A)^{-1}B$$
$$+ B^T(-sI-A^T)^{-1}G^TRG(sI-A)^{-1}B = 0$$

$$\Rightarrow \quad G_{LQ}^T(-s)R + RG_{LQ}(s) - G_{ol}^T(-s)\,G_{ol}(s) + G_{LQ}^T(-s)\,R\,G_{LQ}(s) = 0$$

با افزودن R به طرفین تساوی فوق و فاکتورگیری داریم:

$$[I+G_{LQ}(-s)]^T R [I+G_{LQ}(s)] = R + G_{ol}^T(-s)\,G_{ol}(s)$$

از این رابطه می‌توان پی به رابطه $G_{ol}(s)$ و $G_{LQ}(s)$ برد. در طراحی در ابتدا به $G_{LQ}(s)$ دسترسی داریم و می‌توانیم روی آن مانور دهیم. توسط رابطهٔ فوق می‌توان تا حدی رفتار $G_{ol}(s)$ را نیز پیش‌بینی کرد.

اگر در K.F.D.E قرار دهیم $s=j\omega$:

$$[I+G_{LQ}(j\omega)]^H R [I+G_{LQ}(j\omega)] = R + G_{ol}^H(j\omega)\,G_{ol}(j\omega)$$

اکنون مثبت

با فرض $R=rI$ (به همه ورودی‌ها به یک میزان اهمیت داده می‌شود) داریم:

$$0 \le \underline{x}^T G_{ol}^H(j\omega)\,G_{ol}(j\omega)\,\underline{x} = -r\underline{x}^H\underline{x} + r\underline{x}^H[I+G_{LQ}(j\omega)]^H[I+G_{LQ}(j\omega)]\,\underline{x}$$

از چپ در $\underline{x}^H$ و از راست در $\underline{x}$ ضرب شده است که $\underline{x}$ یک بردار دلخواه و مخالف صفر است.

$$\frac{\underline{x}^H [I+G_{LQ}(j\omega)]^H [I+G_{LQ}(j\omega)]\,\underline{x}}{\underline{x}^H \underline{x}} \geq 1 \quad ; \quad x \neq 0 \,,\ \forall \omega$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_i [I+G_{LQ}(j\omega)] \geq 1 \quad ; \forall \omega$$

یعنی تمامی مقادیر تکین $[I+G_{LQ}(j\omega)]$ از یک بزرگتر می‌باشند.

توجه: نامساوی فوق صرفاً در حالتی که R فقط قطری ولی با r های متفاوت باشد صادق است.

بنابراین:

$$\underline{\sigma}[I+G_{LQ}(j\omega)] \geq 1 \quad ; \forall \omega \qquad (*)$$

همچنین می‌توان نشان داد (در یکی از تکالیف) اگر ماتریس R قطری و مثبت معین باشد داریم

$$\underline{\sigma}[I+G_{LQ}(j\omega)] \geq \frac{1}{2} \quad ; \forall \omega$$

با معکوس کردن طرفین نامساوی فوق:

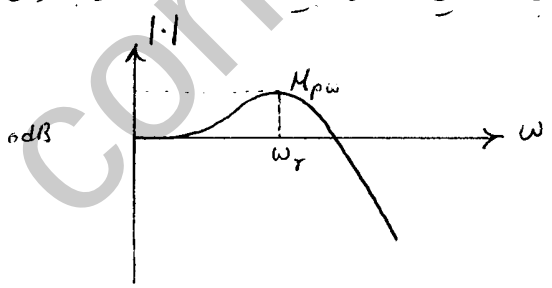
$$\bar{\sigma}\left\{[I+G_{LQ}^{-1}(j\omega)]^{-1}\right\} \leq 2 \quad ; \forall \omega$$

یا:

$$\bar{\sigma}\left\{G_{LQ}(j\omega)\,[I+G_{LQ}(j\omega)]^{-1}\right\} \leq 2 \quad ; \forall \omega$$

اگر فرض کنید خروجی‌ها در این مسئله همان خروجی سیستم باشند بنابراین $G_{LQ}(s)$ همان تابع تبدیل حلقه باز بوده و $G_{LQ}(s)[I+G_{LQ}(s)]^{-1}$ تابع تبدیل حلقه بسته می‌باشد.

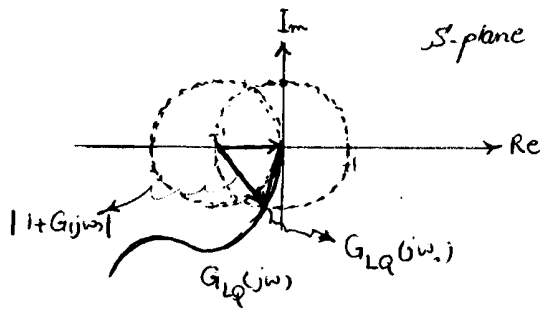
برای اختصار بیشتر نامساوی فوق فرض کنید سیستم تک ورودی تک خروجی است. این نامساوی بیان می‌کند حداکثر بالازدگی در مشخصه فرکانسی یعنی M_{pw} برابر 2 است.



به سراغ رابطه ستاره (*) در SISO می‌رویم:

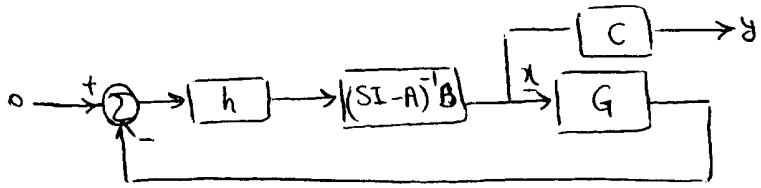
$$|1+G_{LQ}(j\omega)| \geq 1$$

توجه گرافیکی نامساوی فوق در دیاگرام نایکوئیست به صورت زیر است:

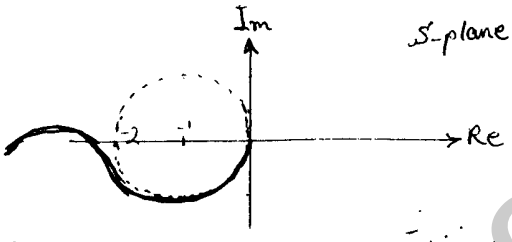


یعنی $G_{LQ}(j\omega)$ همواره در خارج از دایره‌ای به مرکز $(-1,0)$ و شعاع ۱ می‌باشد.
به عبارتی $G_{LQ}(j\omega)$ از $(-1,0)$ دوری می‌کند که بسیار خوب است.

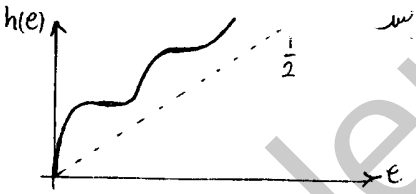
حال فرض می‌کنیم تأخیر ناشی از عملگرها به صورت بهره h در بلوک دیاگرام ظاهر گردد:



اگر h مثبت و بزرگتر از یک باشد، $G_{LQ}(j\omega)$ بیرون از دایره ذکر شده باقی می‌ماند و پایداری همچنان مفروض است. کاهش h می‌تواند باعث ناپایداری گردد. (کاهش ناپایداری). حداقل h می‌تواند $\frac{1}{2}$ باشد، پس حد بهره LQR از طرف بالا بی‌نهایت و از طرف پایین $\frac{1}{2}$ است.



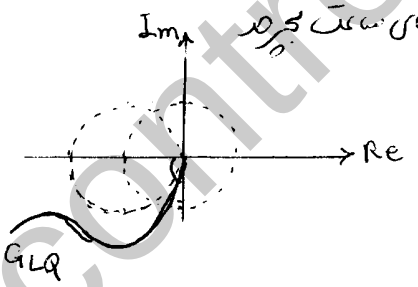
$2\times h=1 \Rightarrow h=\frac{1}{2}$ $\qquad \frac{1}{2}<h<\infty$



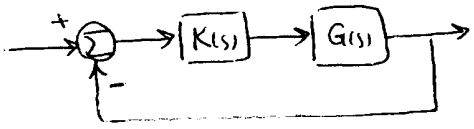
نکته جالب دیگر این است که حتی اگر h تابعی غیرخطی از e (یعنی $h(e)$) نیز باشد که بین شیب‌های $\frac{1}{2}$ و ∞ قرار گیرد باز هم پایداری محفوظ می‌ماند.

حد فاز:

با توجه به شکل روبرو اگر دیاگرام نایکوئیست به اندازه 60° (حتی کمی بیشتر) در جهت عقربه‌های ساعت بچرخد پایداری همچنان محفوظ می‌ماند. زیرا تعداد دور حول $(-1,0)$ تغییری نخواهد کرد.
پس حد فاز برای LQR برابر 60° است.



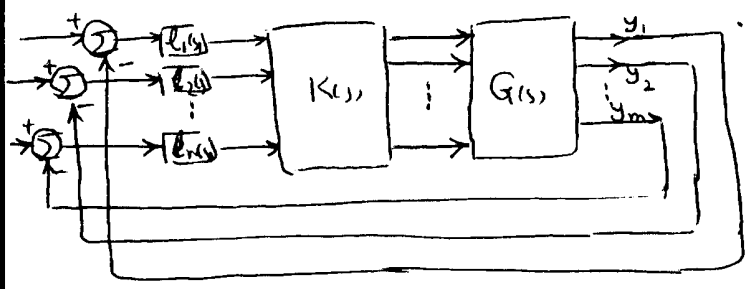
تعبیر حد فاز و حد بهره برای سیستم‌های چندمتغیره:



(1)

بلوک دیاگرام سیستم حلقه بسته را در نظر بگیرید:

حال در نقطه A مقداری Perturbation به صورت زیر وارد می‌کنیم.



(2)

همانطور که واضح است به ازاء

همانطوری که واضح است به ازای $l_1(s)=l_2(s)=\dots=l_m(s)=1$ همان سیستم حلقه بسته نامی تشکیل ! بدست می آید که فرض می شود پایدار است.

تعریف 1: حد بهره سیستم فوق از بالا برابر C_2 و از پایین برابر C_1 است اگر با فرض حقیقی و مثبت بودن $l_i(s)$ ها برای تمامی مقادیر $C_1 < l_i < C_2$ سیستم حلقه بسته تشکیل 2 پایدار باشد.

توجه: مطابق تعریف فوق، بهره هر یک از کانال های سیستم چندمتغیره می تواند بطور جداگانه همزمان با سایر کانالها تغییر کند و پایداری سیستم همچنان محفوظ بماند.

تعریف 2: حد فاز سیستم فوق C_1 درجه است اگر با فرض $l_i(s)=e^{-j\varphi_i}$ برای تمامی مقادیر φ_i بین $-C_1, C_1$ $(-C_1<\varphi_i<C_1)$ سیستم حلقه بسته پایدار بماند.

C_1 ماکزیمم چرخشی است که پایداری محفوظ بماند.

توجه: مطابق تعریف فوق فاز هر یک از کانالهای سیستم چندمتغیره می تواند به طور جداگانه و یا همزمان با سایر کانالها تغییر کند و همچنان پایدار بماند.

قضیه 1: فرض کنید سیستم حلقه بسته تشکیل (2) با فرض $l_i(s)=1$ پایدار باشد و همچنین داشته باشیم:

$$\underline{\sigma}\left[I+G'^{-1}(j\omega)\right]>\alpha \quad ; \forall\omega$$

G' بهره حلقه (مجموع KG)

آنگاه روابط زیر برقرارند:

$$\begin{cases} [1-\alpha \quad 1+\alpha] < GM \\ [-2\sin^{-1}\frac{\alpha}{2} \quad 2\sin^{-1}\frac{\alpha}{2}] < PM \end{cases}$$

در این قضیه PM و GM به صورت زیر تعریف می شوند:

$$GM=(C_1 \quad C_2) \qquad PM=(-C_1, C_1)$$

رابطه (1) کران پایینی برای GM و PM می دهد.

قضیه 2: فرض کنید سیستم حلقه بسته تشکیل 2 با فرض $l_i(s)=1$ پایدار باشد و همچنین داشته باشیم

$$\underline{\sigma}\left[I+G'(j\omega)\right]>\alpha \quad ; \forall\omega$$

در این صورت روابط زیر برقرارند:

$$\left[\frac{1}{1+\alpha} \quad \frac{1}{1-\alpha}\right] < GM \qquad \left[-2\sin^{-1}\frac{\alpha}{2} \quad 2\sin^{-1}\frac{\alpha}{2}\right] < PM$$

برای LQR با $R=rI$ داشتیم: $\bar{\sigma}[I+G_{LQ}(j\omega)]>1$ پس:

$$LQR\begin{cases}[1/2 \quad \infty] < GM\\ [-60 \quad 60] < PM\end{cases}$$

در ادامه در مورد چگونگی انتخاب ماتریس C (بهترین ترکیب خطی حالت‌ها یا به نوعی) Q و R (ماتریس وزن ورودی‌ها) بحث خواهد شد.

$$J=\int_0^{t_f}\left[x^T(t)\,Q\,x(t)+u^TRu\right]dt$$

توجه 1: در اینجا فرض می‌شود که وزن روی ورودی‌ها یکسان باشد یعنی $R=\rho I$.

(البته در مسائل واقعی قبل از طراحی باید تغییر مقیاس Scaling روی ورودی‌ها انجام داد تا تمام آنها از اهمیت یکسانی برخوردار شوند).

توجه 2: با توجه به مطالب گفته شده در قبل، یک طراحی خوب باید C و ρ به گونه‌ای انتخاب شوند که:

در فرکانس‌های پایین: $\bar{\sigma}[G_{LQ}(j\omega)]\gg 1$

در فرکانس‌های بالا: $\bar{\sigma}[G_{LQ}(j\omega)]\ll 1$

با توجه به KFDE می‌توان نوشت:

$$I+\frac{1}{\rho}G_{ol}^H(j\omega)G_{ol}(j\omega)=[I+G_{LQ}(j\omega)]^H[I+G_{LQ}(j\omega)]$$

در فرکانس‌های پایین باید داشته باشیم: $\bar{\sigma}[G_{LQ}(j\omega)]\gg 1$ باشد پس: $I+G_{LQ}(j\omega)\simeq G_{LQ}(j\omega)$

از طرفی چون با این شرط طرف راست خیلی بزرگ است در طرف چپ تساوی فوق باید $\frac{1}{\rho}G_{ol}^H(j\omega)G_{ol}(j\omega)$ در مقایسه با I خیلی بزرگ باشد، پس:

$$\frac{1}{\rho}G_{ol}^H(j\omega)\,G_{ol}(j\omega)\cong G_{LQ}^H(j\omega)\,G_{LQ}(j\omega)$$

پس در فرکانس‌هایی که بهره حلقه LQR بزرگ است داریم:

$$\frac{1}{\rho}\sigma_i[G_{ol}(j\omega)]\approx\sigma_i[G_{LQ}(j\omega)]$$

Or: $$\frac{1}{\sqrt{\rho}}\sigma_i[C(sI-A)^{-1}B]\approx\sigma_i[G(sI-A)^{-1}B]$$

با توجه به رابطه فوق اگر C و ρ به طور مناسب انتخاب شوند مطمئن خواهیم بود که رفتار سیستم حلقه بسته LQR یعنی $G(sI-A)^{-1}B$ مناسب خواهد بود.

پس در ابتدا C و ρ را انتخاب کرده و سپس از تعیین C (وزن Q) به سراغ معادله ریکاتی رفته و از آنجا G را بدست می‌آوریم.
در ابتدا تمامی مقادیر استثنایی $G_{ol}(j\omega)$ را در فرکانس‌های پایین به ما تذکر می‌کنیم.

$$\omega=0 \simeq \text{فرکانس پایین} \longrightarrow G_{ol}(0) = C(j\omega - A)^{-1}B\Big|_{\omega=0} = CA^{-1}B$$

حال C به گونه‌ای انتخاب می‌شود که ماتریس $CA^{-1}B$ یکی باشد آنگاه تمامی مقادیر استثنایی آن برابر یک خواهند بود. جواب‌های C می‌توانند به فرم‌های زیر باشند:

$$C = (B^TA^{-1}B)^{-1}B^T \longrightarrow G_{ol}(0) = -I$$

$$C = (B^TB)^{-1}B^TA \longrightarrow G_{ol}(0) = -I$$

$$A^{-1}B = U\Sigma V^H \Longrightarrow C = \Sigma^T U^H \longrightarrow G_{ol}(0) = -V^H$$

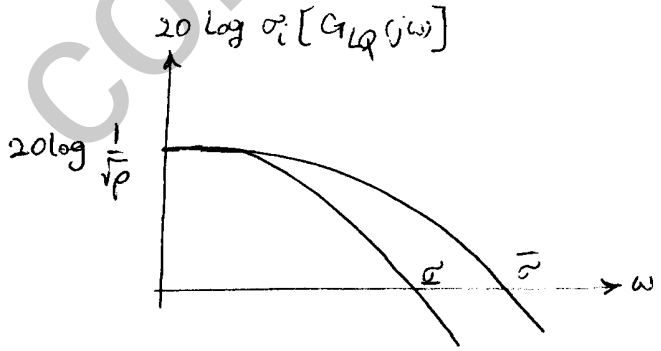
با انتخاب C به یکی از صورت‌های زیر داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{\rho}}\,\sigma_i\left[G_{ol}(j\omega)\right] \approx \sigma_i\left[G_{LQ}(j\omega)\right] \longrightarrow \sigma_i\left[G_{LQ}(j\omega)\right] \approx \frac{1}{\sqrt{\rho}}$$

در فرکانس‌های پایین

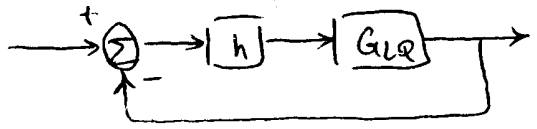
حال با انتخاب ρ می‌توان بهره حلقه LQR را در فرکانس‌های پایین به مقدار دلخواه تنظیم نمود. مثلاً برای داشتن بهره حلقه 20dB باید $\rho=0.01$ باشد.

حال با در اختیار داشتن C و ρ معادله ریکاتی را حل کرده و از آنجا بهره فیدبک G را محاسبه می‌کنیم سپس رفتار $G_{LQ}(j\omega)$ را مشاهده می‌نماییم که آیا مناسب است یا نه؟

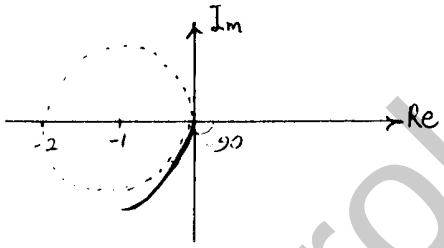


- اگر ρ خیلی کوچک باشد یا به عبارتی وزن روی سیگنال کنترلی u کوچک باشد انرژی زیادی برای کنترل مصرف می‌گردند. به این حالت در اصطلاح cheap control گویند.
- اگر ρ خیلی بزرگ باشد به سیگنال کنترلی u محدودیت اعمال شده است و اجازه مصرف انرژی زیادی برای کنترل داده نمی‌شود. به این حالت در اصطلاح expensive control گویند.

توجه: بهره حلقه LQR یعنی $G_{LQ}(s)=G(sI-A)^{-1}B$ هیچگاه صفر بهره راست ندارد. اگر حلقه فیدبک واحد را دور این بهره حلقه ببندیم و بهره را در حلقه بزرگ کنیم (توسط h) قطب‌های حلقه بسته به سمت صفرهای حلقه باز که همان صفرهای G_{LQ} می‌باشند حرکت خواهند کرد و می‌دانیم که حتی به ازای بهره بی‌نهایت نیز قطب‌های حلقه بسته سمت چپ محور موهومی قرار دارند.



با انتخاب ρ و Q به شیوه‌ای که ذکر شد رفتار فرکانس پایین بهره حلقه بهبود می‌یابد و تضمینی برای یکسان بودن فرکانس عبور از صفر dB کانال‌های مختلف (یکسان بودن سرعت) وجود ندارد که در ادامه بدان پرداخته می‌شود.



توجه: بهره حلقه LQR با شیب $-20\frac{dB}{dec}$ افت می‌کند. به این شیب، Roll off می‌گویند.

داشتیم که $\sigma_i[G_{LQ}(j\omega)]=\frac{1}{\sqrt{\rho}}\sigma_i[G_{OL}(j\omega)]$ (شیب G_{LQ} و G_{OL} یکی است).

در فرکانس قطع ω_c باید:

$$\bar{\sigma}[G_{LQ}(j\omega)]=1 \quad \text{به ازای } \omega=\omega_c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\rho}}\bar{\sigma}[G_{OL}(j\omega)]\Big|_{\omega=\omega_c}=1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\rho}}\bar{\sigma}\left[\frac{C}{j\omega}(I-A/j\omega)^{-1}B\right]\Big|_{\omega=\omega_c}=1$$

در فرکانس‌های حوالی ω_c از ناحیه فرکانس پایین خارج شده و می‌توان از جمله $\frac{A}{j\omega}$ در مقابل I صرفنظر کرد.

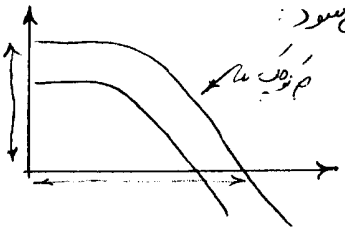
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{1}{\omega}\bar{\sigma}(CB)\Big|_{\omega=\omega_c}=1 \Rightarrow \omega_c\approx\frac{1}{\sqrt{\rho}}\bar{\sigma}(CB)$$

فرکانس قطع dB بزرگترین مقدار تکین.

اگر C به گونه‌ای انتخاب شود که CB یکه باشد آنگاه فرکانس قطع تمامی مقادیر یکین بهره حلقه تقریباً برابر خواهد بود:

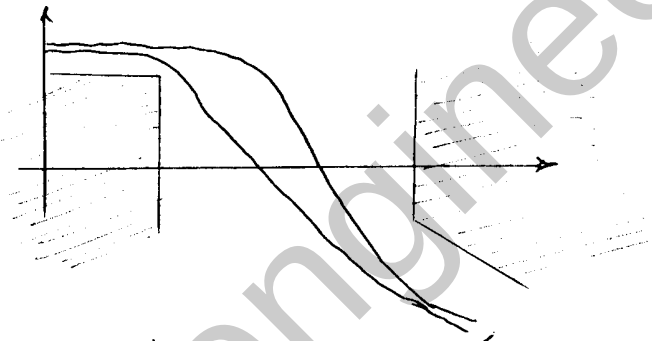
$$\omega_c \simeq \frac{1}{\sqrt{\rho}} \quad ; \quad \sigma_i(CB) = 1$$

بنابه رابطهٔ فوق با کوچک شدن ρ ، ω_c بزرگ می‌شود قبلاً هم دیدیم که بهره هم بزرگ می‌شود:

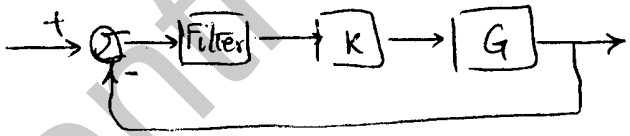


برای اینکه CB یکه باشد می‌توان $C=(B^TB)^{-1}B^T$ انتخاب کرد یا از سه مکون دیگری استفاده کرد:

این انتخاب‌های C با انتخاب‌های C برای بهبود رفتار فرکانس پایین تفاوت دارد. اگر با این انتخاب جدید C مقادیر یکین در فرکانس‌های پایین از هم فاصله بگیرند، اما وارد محدوده غیرمجاز نشوند باز هم جواب قابل قبول است. اصولاً دستیابی به رفتار فرکانس بالا و پایین به طور همزمان مشکل است.



همانطور که دیدیم بهره حلقه LQR با شیب $-20\ \frac{dB}{dec}$ افت می‌کند برای بیشتر کردن این شیب در فرکانس‌های بالا می‌توان از یک فیلتر که بهره‌ای باند آن بزرگتر از ω_c بهره حلقه باشد استفاده کرد. مثلاً می‌توان با استفاده از یک فیلتر با شیب $-60\ \frac{dB}{dec}$ ، شیب نزول را به $-80\ \frac{dB}{dec}$ رساند.



نکته: برای صفر کردن خطای حالت ماندگار به ورودی پله در یک سیستم چند ورودی - چند خروجی روش‌های متعددی وجود دارد. یک روش متداول این است که در ابتدا سیستم اولیه (حلقه باز) را با یک انتگرال‌گیر ادغام نمود (augment)

$$G(s) \longrightarrow G'(s) = \frac{G(s)}{s}$$

سپس برای سیستم ادغام شده کنترل‌کننده $K_d(s)$ را طراحی می‌کنیم و در پایان کنترل‌کننده نهایی برابر خواهد بود با:

$$\frac{G(s)}{s} \cdot K_d(s) = G(s) \cdot \frac{K_d(s)}{s} \longrightarrow K(s)$$

چگونگی تغییرات محل قطبهای حلقه بسته نسبت به تغییرات ρ :

در ابتدا برای سادگی فرض کنید u و y اسکالر باشند :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = A\,\underline{x}(t) + \underline{b}\,u(t) \\ y(t) = \underline{c}^T \underline{x}(t) \end{cases} \qquad J = \int_0^{+\infty} \left[y^2(t) + \rho u^2(t) \right] dt$$

و می دانیم

$$G_{ol}(s) = \underline{c}^T (sI - A)^{-1} \underline{b} \quad , \quad G_{LQ}(s) = \underline{g}^T (sI - A)^{-1} \underline{b} \quad , \quad \underline{g}^T = \frac{1}{\rho} \underline{b}^T K$$

جواب ریکاتی

$$KFDE: \quad \left[1 + G_{LQ}(-s)\right]\left[1 + G_{LQ}(s)\right] = 1 + \frac{1}{\rho} G_{ol}(s) G_{ol}(-s)$$

$$\phi_{cl}(s) = \det(sI - A + \underline{b}\,\underline{g}^T) \quad , \quad \phi_{ol}(s) = \det(sI - A)$$

$$\rightarrow \phi_{cl}(s) = \phi_{ol}(s) \cdot \underbrace{\left[1 + \underline{g}^T (sI - A)^{-1} \underline{b}\right]}_{G_{LQ}(s)}$$

حال طرفین KFDE را در $\phi_{ol}(s)\phi_{ol}(-s)$ را ضرب می کنیم :

$$\underbrace{\phi_{ol}(s)\left[1 + G_{LQ}(s)\right]}_{\phi_{cl}(s)} \underbrace{\phi_{ol}(-s)\left[1 + G_{LQ}(-s)\right]}_{\phi_{cl}(-s)} = \phi_{ol}(s)\phi_{ol}(-s) + \frac{1}{\rho} \underbrace{\phi_{ol}(-s) G_{ol}(-s)}_{b(-s)} \underbrace{\phi_{ol}(s) G_{ol}(s)}_{b(s)}$$

حال با تعریف :

$$G_{ol}(s) = \underline{c}^T (sI - A)^{-1} \underline{b} \triangleq \frac{b(s)}{\phi_{ol}(s)}$$

عامل مشترک ندارند

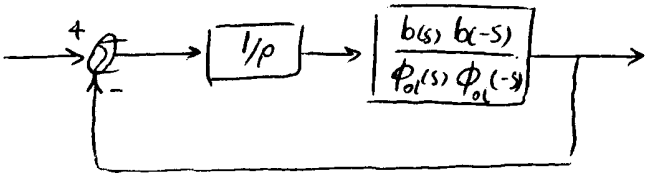
حال داریم :

$$\phi_{cl}(s) \cdot \phi_{cl}(-s) = \phi_{ol}(s)\phi_{ol}(-s) + \frac{1}{\rho} b(s)\, b(-s) \triangleq \Delta(s)$$

قطبهای سیستم حلقه بسته ریشه هایی از $\Delta(s)$ می باشند که در سمت چپ محور موهومی قرار دارند. توجه کنید اگر $s = s_0$ ریشه ای از $\Delta(s)$ باشد در آن صورت $s = -s_0$ هم ریشه ای از $\Delta(s)$ خواهد بود. با استفاده از مکان هندسی ریشه ها می توان چگونگی تغییرات $\Delta(s)$ را با ρ بررسی کرد :

$$\Delta(s) = 0 \Rightarrow \phi_{ol}(s)\phi_{ol}(-s) + \frac{1}{\rho} b(s)\, b(-s) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{\rho} \frac{b(s)\, b(-s)}{\phi_{ol}(s)\phi_{ol}(-s)} = 0$$

به عبارتی با بلوک دیاگرام زیر مواجه هستیم که البته هیچ تعبیر فیزیکی ندارد.



ریشه های $\Delta(s) = 0$ به ازای شرط مقابل در محل ریشه های $\phi_{ol}(s)\phi_{ol}(-s)$ قرار می گیرند.

$$\text{if } \rho \to \infty \rightarrow \left(\frac{1}{\rho} \to 0\right)$$

به ازای $p \to 0$ آن ریشه‌هایی از $\Delta(s)=0$ که محدود می‌ماند به سمت ریشه‌های $b(s)\,b(-s)=0$ رفته و ریشه‌های نامحدود نیز به ∞ میل می‌کنند.

توجه: $\Delta(s)$ نمی‌تواند ریشه‌ای روی محور موهومی داشته باشد زیرا $\phi_{cl}(s)$ پایدار است.

اگر $b(s)$ و $\phi_{ol}(s)$ به صورت زیر بازنویسی شوند:

$$b(s) = b_m \prod_{i=1}^{m}(s-z_i) \qquad \phi_{ol}(s) = \prod_{i=1}^{n}(s-p_i) \longrightarrow \text{monic}$$

با جایگذاری در عبارت * داریم:

$$1+\frac{1}{\rho}\,\frac{b_m^2 \prod_{i=1}^{m}(s-z_i)\prod_{i=1}^{m}(-s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)\prod_{i=1}^{n}(-s-p_i)} = 0$$

$$\longrightarrow 1+\frac{1}{\rho}\,\frac{b_m^2(-1)^m\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)(s+z_i)}{(-1)^n\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)(s+p_i)} = 0 \quad (**) \qquad 1+K\frac{n(s)}{m(s)}=0$$

توجه کنید مخرج مثبت پس اگر $n-m$ زوج باشد آنگاه $K \triangleq \frac{b_m^2}{\rho}(-1)^{n-m}$ بزرگتر از صفر بوده و باید مکان ریشه‌ها را برای حالت $K>0$ رسم کنیم. و اگر " فرد باشد " کوچکتر از صفر بوده و باید مکان " " " " $K<0$ " " .

چون صفرها و قطب‌های $\frac{b(s)\,b(-s)}{\phi_{ol}(s)\,\phi_{ol}(-s)}$ متقارن هستند (صفرها نسبت به هم و قطب‌ها نسبت به هم) در نمودار کل تلاقی مجانب‌ها) در مبداء صفحه مختصات قرار می‌گیرد.

$$\sigma = \frac{(\text{مجموع قطب‌ها}) - (\text{مجموع صفرها})}{n-m} = 0$$

زاویه مجانب‌ها هم به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} \dfrac{(2k+1)\pi}{2n-2m} = \dfrac{(k+\frac{1}{2})\pi}{n-m} & n-m \text{ زوج} \\[2ex] \dfrac{2k\pi}{2n-2m} = \dfrac{k\pi}{n-m} & n-m \text{ فرد} \end{cases}$$

زمانی که ρ به سمت صفر میل کند یا $\frac{1}{\rho}\to\infty$، آنگاه قطب‌ها به سمت صفرها میل خواهند کرد، برای صفرهایی که در بی‌نهایت قرار می‌گیرند ($|s|\to\infty$) با توجه به رابطه (**) و صرف نظر از جملات کم با درجات پایین این صفرها باید در معادلات زیر صدق کنند:

$$(-1)^n s^{2n} + (-1)^m \frac{b_m^2}{\rho} s^{2m} \simeq 0$$

با فاکتورگیری از s^{2m} $(n>m)$:

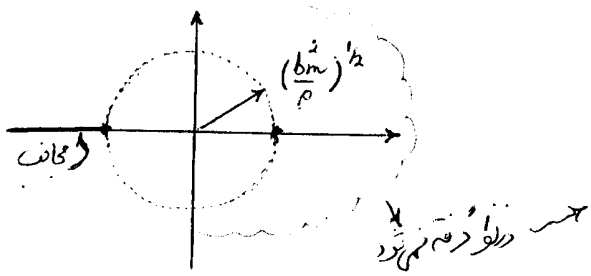
$$s^{2m}\left[(-1)^n s^{2(n-m)} + (-1)^m \frac{b_m^2}{\rho}\right] \simeq 0$$

$s^{2m}=0$ ریشه روی محور نداریم پس می‌تواند صفر باشد

$$\Rightarrow s^{2(n-m)} \simeq (-1)^{m-n+1}\frac{b_m^2}{\rho}$$

تساوی فوق چگونگی حرکت قطب به بی‌نهایت را نشان می‌دهد. توجه کنید فاصله این قطب تا مبداء مختصات تقریباً برابر $\left(\frac{b_m^2}{\rho}\right)^{\frac{1}{2(n-m)}}$ است.

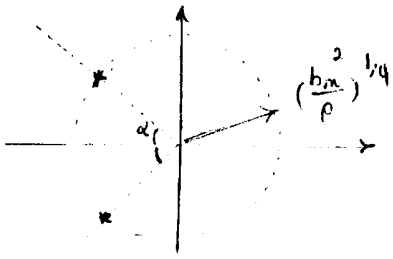
به عنوان مثال: برای $n-m=1$:



توجه کنید قطب‌های حلقه بسته LQR حتماً در نیم صفحه سمت چپ قرار می‌گیرند.

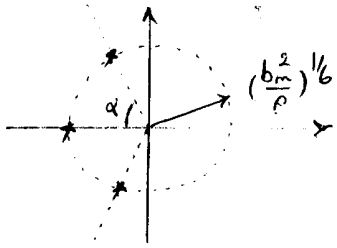
برای $n-m=2$:

با بهره زاویه هم کاری نداریم:



$\alpha = \frac{\pi}{4}$

برای $n-m=3$:



$\alpha = \frac{\pi}{3}$

مثال:

سیستم با معادلات حالت زیر را داریم:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

تابع هزینه $J = \int_0^\infty (x^T c c^T x + \rho u^2)\, dt$ را کمینه کنیم. محل قطب‌های سیستم حلقه بسته را برای مقادیر مختلف ρ با فرض $c^T = [-2 \;\; 1]$ رسم کنید.

توجه: برای پیدا کردن محل قطب‌ها می‌توان به ازای هر ρ معادله ریکاتی را حل کرده و سپس از بدست آوردن K و G قطب‌های حلقه بسته را بدست آورد. که البته برای تغییرات وسیع ρ روش مناسبی نیست. پس باید از روش رسم مکان هندسی ریشه‌ها (Root locus) استفاده کرد:

تابع تبدیل از ورودی به متغیر تولید شده

$$c^T (SI-A)^{-1} b = [-2 \;\; 1] \begin{bmatrix} S & -1 \\ -1 & S \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{S-2}{(S-1)(S+1)} = \frac{b(S)}{\phi_{ol}(S)} \qquad \begin{matrix} m=1 \\ n=2 \end{matrix}$$

حال باید مکان هندسی ریشه‌های $1 + \frac{1}{\rho} \frac{(S-2)(-S-2)}{(S-1)(S+1)(-S-1)(-S+1)}$ را رسم کرده و آن قسمت از مکان را در نظر بگیریم که

در سمت چپ محور موهومی قرار می‌گیرد؛ چون $n-m=1$ است و آن هم فرد است باید مکان هندسی برای $K = \frac{(b_m^2)}{\rho}(-1)^{n-m} = -\frac{1}{\rho} < 0$ را رسم کنیم.

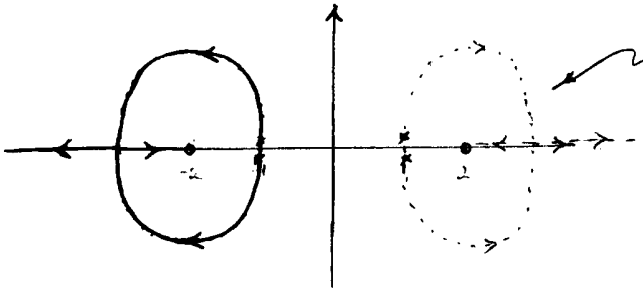
زاویه مجانب هم عبارتند از:

$$\frac{K\pi}{n-m} \to 0,\ \pi$$

فاصله قطب هم که به بی‌نهایت می‌روند تا صفر برابر است با:

$$s^{2(1)} = (-1)^{m-n+1}\frac{b_m^2}{\rho} = \frac{1}{\rho}$$

$$\Rightarrow s = \sqrt{\frac{1}{\rho}}$$

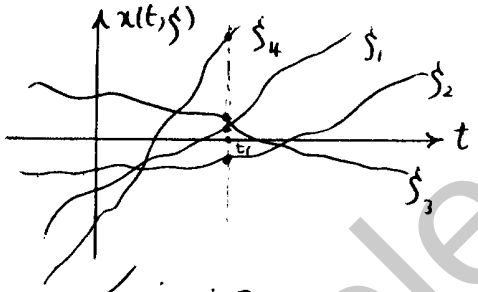


ثابت زمان کاری نداریم.

Kalman Filter

مقدمه‌ای بر فرآیندهای تصادفی و فیلتر کالمن:

یک فرآیند تصادفی (stochastic process) برای هر لحظه زمان t یک متغیر تصادفی (Random Variable) است. به ازای هر t یک فرآیند تصادفی مقداری را بر اساس توزیع احتمال خود اختیار می‌کند.



نقاط مشخص شده روی ξ_iها متغیر تصادفی هستند. اغلب از ξ صرفنظر می‌شود.

متوسط (min) یک فرآیند $x(t)$ به صورت $m(t) = E[x(t)]$ تعریف می‌شود که E همان امید ریاضی یا Expected Value است.

امید ریاضی متغیر تصادفی z و با تابع چگالی احتمال $f_z(z)$ عبارتست از:

$$E(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f_z(z)\, dz$$

در حالت کلی $m(t)$ تابعی از زمان است. اما اغلب با فرآیندهایی سروکار داریم که $m(t)$ یک مقدار ثابت است.

تابع کوواریانس فرآیند $x(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\text{Co-variance}) \rightsquigarrow \quad R_x(t_1,t_2) = E\{[x(t_1)-E[x(t_1)]][x(t_2)-E[x(t_2)]]\}$$

معرف میزان وابستگی x در زمان t_1 به x در زمان t_2 می‌باشد.

در بسیاری از فرآیندها $R_x(t_1,t_2)$ فقط به تفاضل زمانی ($\tau \triangleq t_1 - t_2$) بستگی دارد. به عبارت دیگر

$$R_x(t_1,t_2) = R_x(t_1-t_2, 0) = R_x(\tau)$$

اگر $t_1 = t_2 = t$ باشد آنگاه این تابع اتوکوواریانس خواهد بود، که با $\Sigma(t)$ نشان می‌دهیم:

$$\Sigma(t) = R_X(t,t)$$

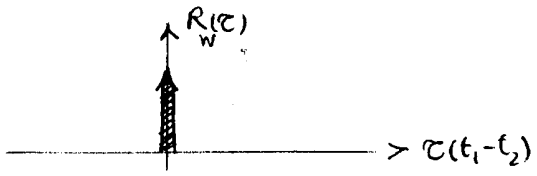
تعریف: به فرآیندی که $m(t)$ آن به زمان بستگی نداشته باشد و $R_X(t_1,t_2)$ فقط به t_1-t_2 بستگی داشته باشد فرآیند استاتیک به مفهوم وسیع (Wide sense Stationary) می‌گویند.

فرآیند نویز سفید:

نویز سفید $W(t)$ فرآیندی تصادفی است که متوسط آن برابر صفر بوده و تابع کوواریانس آن برای تمامی زمان‌های $t_1 \neq t_2$ صفر و برای $t_1 = t_2$ ضربه‌ای با قدرت Q است:

$$E[W(t)] = 0$$

$$E[W(t_1)W(t_2)] = Q\,\delta(t_1-t_2) \quad ; Q>0$$



کوواریانس متقابل یا Cross covariance:

فرآیندهای تصادفی $X(t)$ و $Y(t)$ را در نظر بگیرید، کوواریانس متقابل $X(t)$ و $Y(t)$ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$R_{XY}(t_1,t_2) = E\left\{ [X(t_1)-E(X(t_1))][Y(t_2)-E[Y(t_2)]] \right\}$$

تابع همبستگی $X(t)$ و $Y(t)$ نیز به صورت زیر است:

$$\tilde{R}_{XY}(t_1,t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)]$$

اگر متوسط $X(t)$ و $Y(t)$ صفر باشد آنگاه دو تابع فوق با هم برابرند. این تابع میزان وابستگی فرآیند $X(t)$ در زمان t_1 با فرآیند $Y(t)$ در زمان t_2 نشان می‌دهد.

توجه 1. اگر تابع $\tilde{R}_{XY}(t_1,t_2)=0 \quad \forall t_1,t_2$ آنگاه X و Y برهم عمودند.

" 2. " " $R_{XY}(t_1,t_2)=0 \quad \forall t_1,t_2$ " X و Y ناهمبسته یا uncorrelated هستند.

یک فرآیند می‌تواند به صورت برداری هم مطرح شود که هر یک از عناصر آن بردار خود یک فرآیند تصادفی است:

$$\underline{X}(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{bmatrix}$$

فرآیند تصادفی اسکالر

فرآیند برداری

برای این نوع فرآیند داریم

$$\underline{m}(t) \triangleq E[\underline{X}(t)] = \begin{bmatrix} E[X_1(t)] \\ E[X_2(t)] \\ \vdots \\ E[X_n(t)] \end{bmatrix}$$

$$R_X(t_1,t_2) \triangleq E\left\{ [X(t_1) - E[X(t_1)]][\underline{X}(t_2) - E[X(t_2)]]^T \right\}$$

در اینجا هم می‌گوییم اگر فرآیند تصادفی برداری دارای متوسط ثابت باشد و کوواریانس آن فقط وابسته به تفاضل زمان (t_1-t_2) باشد آنگاه فرآیند WSS است.

اگر $t_1=t_2=t$ باشد آنگاه: $R_X(t,t)$ را با $\Sigma_X(t)$ نشان می‌دهیم: $R_X(t,t) = \Sigma_X(t)$

برای یک فرآیند WSS داریم: $\Sigma_X(t) = \Sigma$ که با توجه به تعریف آن این ماتریس حداقل P.S.D. است: $\Sigma \geq 0$

برای نویز سفید برداری $\underline{W}(t)$ داریم:

$$E[\underline{W}(t)] = \underline{0}$$

$$E[\underline{W}(t_1)\underline{W}^T(t_2)] = Q\,\delta(t_1-t_2)$$

Q یک ماتریس متقارن و حداقل P.S.D است که در اصطلاح قدرت نویز نامیده می‌شود: $Q = Q^T \geq 0$

اثر نویز سفید روی یک سیستم LTI:

معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \underline{\dot{X}}(t) = A\underline{X}(t) + L\underline{W}(t) \quad (*) \\ \underline{Y}(t) = C\underline{X}(t) \end{cases}$$

حالت تصادفی

$\underline{W}(t)$ نویز سفید برداری است. و $\underline{X}(t)$ هم بردار تصادفی است.

$\underline{W}(t)$ " " با قدرت Q بوده و ماتریس های A و L و C ثابت و معین هستند. همچنین فرض کنید بردار حالت تصادفی $\underline{X}(t)$ در زمان t_0 متغیر تصادفی بنام $\underline{X}_0$ باشد:

$$\underline{X}(t_0) = X_0 \rightarrow E[X_0] \triangleq \underline{m}_0$$

و همچنین کوواریانس آن Σ_0 باشد یعنی:

$$E[(\underline{X}_0-\underline{m}_0)(\underline{X}_0-\underline{m}_0)^T] = \Sigma_0$$

فرض می‌شود حالت اولیه $\underline{X}_0$ مستقل از نویز $\underline{W}(t)$ باشد.

چگونگی تحول متوسط $\underline{X}(t)$:

با متوسط گیری از طرفین (*) ستاره داریم:

$$E[\dot{\underline{X}}(t)] = E[A\underline{X}(t) + L\underline{W}(t)]$$

اپراتور E یک اپراتور خطی است و همچنین اپراتور مشتق هم خطی است پس می‌توان جای آنها را با هم عوض کرد:

$$E\left[\frac{d}{dt}\underline{x}(t)\right] = \frac{d}{dt}E[\underline{x}(t)] = A\underbrace{E[\underline{x}(t)]}_{\underline{m}(t)} + L\underbrace{E[\underline{w}(t)]}_{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\underline{m}}(t) = A\underline{m}(t) \\ \underline{m}(t_0) = \underline{m}_0 \end{cases} \Rightarrow \underline{m}(t) = e^{A(t-t_0)}\underline{m}_0 \qquad (1)$$

برای حل آن نیاز به یک شرط اولیه هم داریم: در اینجا بتوسط فرآیند منتقل می‌گردد.

چگونگی تحول کوواریانس $\Sigma_x(t)$:

از کنترل مدرن می‌دانیم که:

$$\underline{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}L\underline{w}(\tau)\,d\tau \qquad (2)$$

$$\Sigma_x(t) = E\left\{[\underline{x}(t)-\underline{m}(t)][\underline{x}(t)-\underline{m}(t)]^T\right\}$$

با جایگذاری از (1) و (2) داریم:

$$\Sigma_x(t) = E\left\{\left[e^{A(t-t_0)}(\underline{x}(t_0)-\underline{m}_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}L\underline{w}(\tau)\,d\tau\right]\left[e^{A(t-t_0)}(\underline{x}(t_0)-\underline{m}_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau_1)}L\underline{w}(\tau)\,d\tau\right]^T\right\}$$

$$= E\left\{e^{A(t-t_0)}(\underline{x}(t_0)-\underline{m}_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}L\underline{w}(\tau)\,d\tau\right]\left[(\underline{x}(t_0)-\underline{m}_0)^T e^{A^T(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} \underline{w}^T(\tau)L^T e^{A^T(t-\tau_1)}\,d\tau\right]\right\}$$

$$= e^{A(t-t_0)}\underbrace{E\left[(\underline{x}(t_0)-\underline{m}_0)(\underline{x}(t_0)-\underline{m}_0)^T\right]}_{\Sigma_0} e^{A^T(t-t_0)} + e^{A(t-t_0)}\int_{t_0}^{t} \underbrace{E\left[(\underline{x}(t_0)-\underline{m}_0)\underline{w}^T(\tau)\right]}_{0} L^T e^{A^T(t-\tau)}\,d\tau$$

$$+ \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}L\underbrace{E\left[\underline{w}(\tau)(\underline{x}(t_0)-\underline{m}_0)^T\right]}_{0} e^{A^T(t-t_0)}\,d\tau + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau_1)}L\underbrace{E[w(\tau_1)w^T(\tau_2)]}_{Q\delta(\tau_1-\tau_2)}L^T e^{A^T(t-\tau_2)}\,d\tau_1 d\tau_2$$

$$\Rightarrow \Sigma_x(t) = e^{A(t-t_0)}\Sigma_0 e^{A^T(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau_1)}LQL^T e^{A^T(t-\tau_1)}\,d\tau_1$$

$$= e^{A(t-t_0)}\Sigma_0 e^{A^T(t-t_0)} + e^{At}\left(\int_{t_0}^{t} e^{-A\tau_1}LQL^T e^{-A^T\tau_1}\,d\tau_1\right)e^{A^Tt} \qquad (3)$$

حال با مشتق‌گیری از طرفین تساوی فوق معادله دیفرانسیلی را که $\Sigma_x(t)$ در آن صدق می‌کند بدست می‌آوریم:

(یادآوری $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$, $\frac{d}{dt}e^{A^Tt} = e^{A^Tt}A^T$)

$$\Rightarrow \dot{\Sigma}_x(t) = Ae^{A(t-t_0)}\Sigma_0 e^{A^T(t-t_0)} + e^{A(t-t_0)}\Sigma_0 e^{A^T(t-t_0)}A^T + Ae^{At}\left(\int_{t_0}^{t} e^{-A\tau_1}LQL^T e^{-A^T\tau_1}\,d\tau_1\right)e^{A^Tt}$$

$$+ e^{At}\cdot e^{-At}LQL^T\cdot e^{-A^T(t)}e^{A^Tt} + e^{At}\left(\int_{t_0}^{t} A^{-A\tau_1}LQL^T e^{-A^T\tau_1}\,d\tau_1\right)\cdot e^{A^Tt}A^T$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} \dot{\Sigma}_x(t) = A\Sigma_x(t) + \Sigma_x(t)A^T + LQL^T \\ \Sigma_x(t_0) = \Sigma_0 \end{cases}$$

معادله دیفرانسیل لیاپانوف

برای حل آن نیاز به شرط اولیه داریم که

اگر مقادیر ویژه ماتریس A دارای قسمت حقیقی منفی باشند آنگاه

$$Re[\lambda_i(A)] < 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} e^{A(t-t_0)} \longrightarrow 0$$

با توجه به ③ داریم:

$$\lim_{t\to\infty} \Sigma_x(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau_1)} LQL^T e^{A^T(t-\tau_1)} d\tau_1$$

با تغییر متغیر $s=(t-\tau_1)$ داریم:

$$\begin{cases} \tau_1 = t_0 \Rightarrow s = t-t_0 \\ \tau_1 = t \Rightarrow s = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \Sigma_x(t) = -\int_{t-t_0}^{0} e^{As} LQL^T e^{A^T s} ds$$

$t \to 0$

اگر سیستم پایدار باشد:

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} \Sigma_x(t) = \int_0^{\infty} e^{As} LQL^T e^{A^T s} ds = cte = \bar{\Sigma}$$

$$\underline{m}(t) = e^{A(t-t_0)} \underline{m}_0 = 0$$

$t \to 0$

بنابراین با گذشت زمان و با فرض پایداری فرآیند حالت برداری $\underline{x}(t)$ یک فرآیند WSS شده است. توجه کنید $\bar{\Sigma}$ به Σ_0 ربطی ندارد. همچنین $\bar{\Sigma}$ در معادله جبری لیاپانوف زیر صدق کند:

$$\dot{\bar{\Sigma}} = 0 = A\bar{\Sigma} + \bar{\Sigma}A^T + LQL^T$$

فرضیات و اهداف در فیلتر کالمن:

معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \underline{x}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) + L\underline{\xi}(t) \\ \underline{y}(t) = C\underline{x}(t) + \underline{\theta}(t) \end{cases}$$

$u(t)$ یک ورودی معین (deterministic)، $\xi(t)$ ورودی نویز سفید حالت سیستم با مشخصات:

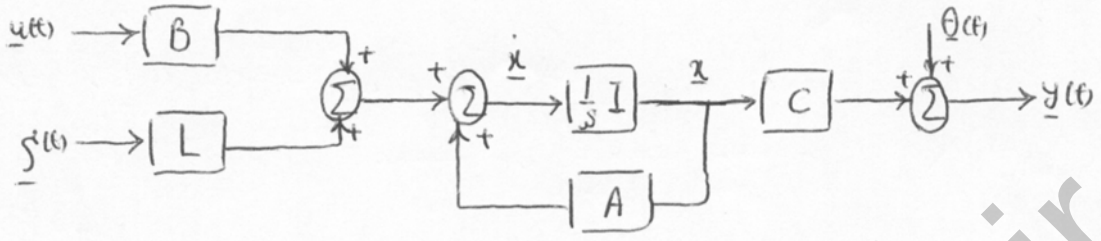
$$E[\underline{\xi}(t)] = 0 \quad , \quad E[\underline{\xi}(t_1)\underline{\xi}^T(t_2)] = T\,\delta(t_1-t_2)$$

که $T = T^T > 0$ است.

$\theta(t)$ هم ورودی نویز سفید خروجی سیستم (نویز اندازه‌گیری) با مشخصات:

$$E[\underline{\theta}(t)] = 0 \quad , \quad E[\underline{\theta}(t_1)\underline{\theta}^T(t_2)] = \Theta\,\delta(t_1-t_2) \quad \Theta = \Theta^T > 0$$

$x(t)$ حالت سیستم و $y(t)$ هم خروجی اندازه‌گیری است. همچنین فرض می‌شود نویزهای $\xi(t)$ و $\theta(t)$ مستقل از یکدیگر می‌باشند.
بلوک دیاگرام سیستم فوق به صورت زیر است:



هدف:

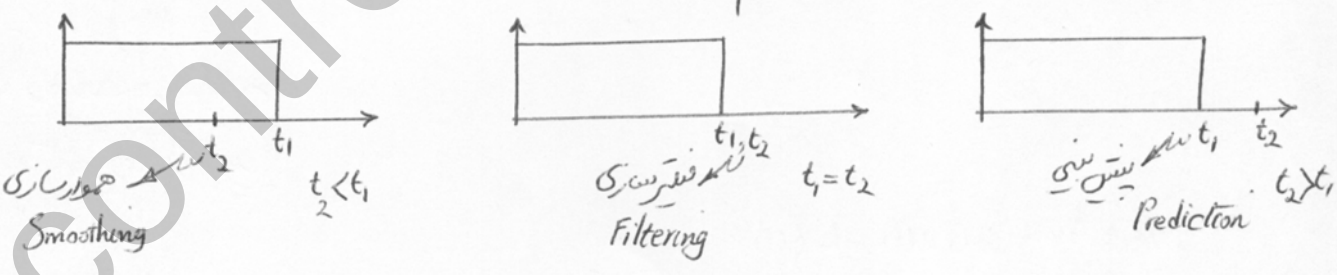
بدست آوردن تخمین $x(t)$ با در اختیار داشتن $y(t)$ و $u(t)$ که آن را با $\hat{x}(t)$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر تابع داریم تخمین حالت در زمان کنونی را به طور بهینه‌ای از اطلاعات زیر بدست آوریم.

$$\begin{cases} u(\tau) & ; -\infty < \tau \leq t \\ y(\tau) & ; -\infty < \tau \leq t \end{cases}$$

داده‌های در دست

در تخمین (Estimation) سه مسئله مطرح می‌شود. این سه مسئله بستگی به زمانی دارد که حالت را نیاز داریم و زمانی که اندازه‌گیری‌ها را در اختیار داریم. شکل زیر این موضوع را نشان می‌دهد:

وقتی یافتن تخمین حالت $x(t)$ در زمان t_2 می‌باشیم:



در اینجا مسئله فیلتر کردن بررسی می‌شود. فرض می‌شود که $\hat{x}(t)$ به وسیله یک فیلتر خطی با استفاده از $u(t)$ و $y(t)$ بدست آورده می‌شود، به گونه‌ای که یک تابع خطای تخمین کمینه گردد. این تابع خطا (تابع هزینه) می‌تواند به صورت زیر باشد:

$$J = E\left[\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i^2(t)\right] \qquad \tilde{x}_i = x_i(t) - \hat{x}_i(t)$$

مجموع واریانس خطا — خطا — حالت — تخمین

هم چنین تمایل داریم تخمین بدست آمده بدون بایاس باشد:

$$E[\underline{x}(t) - \hat{\underline{x}}(t)] = E[\tilde{\underline{x}}(t)] = 0$$

تابع هزینه J را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$J = E[\tilde{\underline{x}}^T(t)\,\tilde{\underline{x}}(t)] = E[\mathrm{trace}(\tilde{\underline{x}}^T(t)\,\tilde{\underline{x}}(t))] = E[\mathrm{trace}(\tilde{\underline{x}}(t)\,\tilde{\underline{x}}^T(t))]$$

تابع اسکالر برابر خود تابع است trace

$\mathrm{trace}(AB) = \mathrm{trace}(BA)$

$$\Rightarrow \quad J = \mathrm{trace}\{\underbrace{E[\tilde{\underline{x}}(t)\,\tilde{\underline{x}}^T(t)]}_{\text{کوواریانس خطای تخمین}}\}$$

با فرض WSS بودن مقدار توقع به t بستگی نداشته و یک مقدار ثابت مثل Σ است یعنی:

$$J = \mathrm{trace}(\Sigma)$$

اگر زوج (A, L) پایدارشدنی و زوج (C, A) تشخیص‌دادنی باشند آنگاه ساختار فیلتر (تخمین‌زن) بهینه خطی (فیلتر کالمن) به صورت زیر خواهد بود:

$$\dot{\hat{\underline{x}}}(t) = A\hat{\underline{x}}(t) + B\underline{u}(t) + H[\underline{y}(t) - C\hat{\underline{x}}(t)]$$

عبارت خطی از آنجایی ناشی می‌شود که $\hat{x}(t)$ نسبت به $y(t)$ خطی است. (ضریب H)

ساختار فیلتر کالمن همان ساختار رایت گر حالت (Observer) است، با این تفاوت که بهره این رایت گر یعنی H دارای خواص خاصی است.

در ادامه درباره چگونگی محاسبه بهره بهینه H بحث خواهد شد.

دینامیک حاکم بر خطای تخمین $\tilde{x}(t)$ را می‌توان به صورت زیر بدست آورد:

$$\tilde{\underline{x}}(t) = \underline{x}(t) - \hat{\underline{x}}(t) \quad \rightarrow \quad \dot{\tilde{\underline{x}}}(t) = \dot{\underline{x}}(t) - \dot{\hat{\underline{x}}}(t)$$

با جایگذاری $\dot{x}(t)$ و $\dot{\hat{x}}(t)$ داریم:

$$\dot{\tilde{\underline{x}}}(t) = A\underline{x} + B\underline{u} + L\underline{\xi}(t) - A\hat{\underline{x}} - B\underline{u} - H(\underline{y} - C\hat{\underline{x}})$$

$$\dot{\tilde{\underline{x}}}(t) = (A - HC)\tilde{\underline{x}}(t) + L\underline{\xi}(t) - H\underline{\theta}(t) \qquad *$$

با فرض استقلال $\theta(t)$ و $\xi(t)$ و سفید بودن آنها می‌توان نتیجه گرفت که نویز جدید:

$$\underline{w}(t) = L\underline{\xi}(t) - H\underline{\theta}(t)$$

سفید بوده و دارای مشخصات زیر است:

$$E[w(t)] = E[L\underline{\xi}(t) - H\underline{\theta}(t)] = 0$$

$$E[w(t)\,w^T(t)] = [LTL^T + H\Theta H^T]\,\delta(t_1 - t_2)$$

چون فرض می‌شود سیستم از $-\infty$ تا زمان حال کار می‌کرده است و با فرض سمت چپ بودن مقادیر ویژه $A-HC$ داریم:

$$E[\tilde{x}(t)] = 0$$

با توجه به مطالب جلسه قبل و رابطهٔ * صفحه قبل، Σ باید در معادله زیر صدق کند:

$$(A-HC)\Sigma + \Sigma(A-HC)^T + LT'L^T + H\Theta H^T = 0$$

مسئله بهینه‌سازی بصورت زیر مطرح می‌گردد:

$$\begin{cases} \min\limits_{H} \ \operatorname{trace}(\Sigma) \\ \text{Subject to} : (A-HC)\Sigma + \Sigma(A-HC)^T + LT'L^T + H\Theta H^T = 0 \end{cases}$$

جواب مسئله بهینه‌سازی فوق به صورت زیر است:

$$H = \Sigma C^T \Theta^{-1}$$

و $\Sigma \geq 0$ است از معادله زیر قابل محاسبه است:

$$A\Sigma + \Sigma A^T + LT'L^T - \Sigma C^T \Theta^{-1} C \Sigma = 0$$

$$\underset{\text{هزینه بهینه}}{J^*} = \operatorname{trace}(\Sigma)$$

توجه کنید دینامیک خطای تخمین توسط معادله زیر بیان می‌شود:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A-HC)\tilde{x}(t) + L\xi(t) - H\theta(t)$$

سرعت همگرایی خطای تخمین به کمک صفر به مقادیر ویژه ماتریس $(A-HC)$ بستگی دارد.

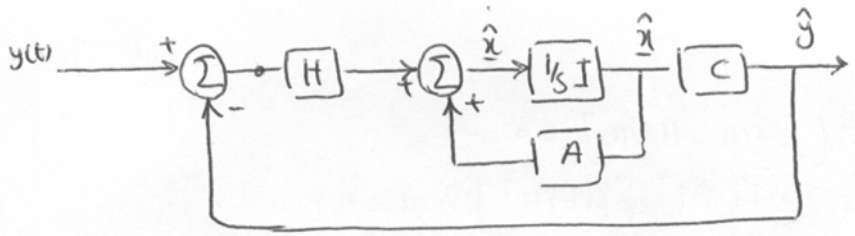
دیدیم که ساختار فیلتر کالمن به صورت زیر است:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + H[y(t) - \underbrace{C\hat{x}(t)}_{\hat{y}(t)}]$$

با فرض صفر بودن ورودی معین داریم:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + H[y(t) - C\hat{x}(t)]$$

بلوک دیاگرام معادله فوق به صورت زیر است:



توجه: فیلتر کالمن هم خود یک سیستم است که ورودی آن خروجی سیستم اندازه‌گیری شده $\underline{y}(t)$ و خروجی آن، تخمین حالت $\hat{x}(t)$ است.

اگر در نقطه A حلقه فیدبک باز شود، بهره حلقه فیلتر کالمن به صورت زیر خواهد بود:

$$G_{KF}(s) = C(SI-A)^{-1}H$$

همانطور که از مباحث بدست آمده دیده می‌شود بهره حلقه فیلتر کالمن مثل بهره حلقه LQR بوده و همان خواص را دارد.

با جایگزینی Θ به جای R و $\Gamma = I$ همان روابط صادقند:

$$[I+G_{KF}(s)]\,\Theta\,[I+G_{KF}(-s)]^T = \Theta + G_{FOL}(s)\,G_{FOL}^T(-s)$$

$G_{FOL}(s)$ تابع تبدیل از نویز ورودی $\underline{\xi}(t)$ به خروجی سیستم $\underline{y}(t)$ می‌باشد.

$$G_{FOL}(s) = C(SI-A)^{-1}L$$

در اینجا نیز می‌توان فرض کرد: $\Theta = \mu I$ که μ به جای ρ در LQR قرار گرفته است.

بازیابی بهره حلقه LTR (Loop Transfer Recovery)

سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y}(t) = C\underline{x} \end{cases} \quad ; \; G(s) = C(sI-A)^{-1}B$$

فرض می‌شود زوج (A,B) پایدار شدنی و زوج (C,A) تشخیص‌دادنی باشند.

توجه:

روش بازیابی حلقه‌ای که در اینجا ذکر می‌شود فقط برای سیستم‌های می‌نیمم فاز می‌باشد. البته با بکارگیری فیلترهای اتکاری می‌توان آن را به سیستم غیرمینیمم فاز اعمال نمود. از جمله در نظر گرفتن صفرهای ناپایدار به صورت خطای مدل‌سازی.

دیدیم که کنترل‌کننده MBC به صورت زیر است:

$$K(s) = C(SI-A+BG+HC)^{-1}H$$

که G بهره فیدبک حالت و H بهره رویت‌گر حالت بوده و آزاد هستند. G و H را می‌توان به گونه‌ای یافت که:

$$Re[\lambda_i(A-BG)] < 0 \quad , \quad Re[\lambda_i(A-HC)] < 0$$

حال فرض کنید H به گونه‌ای انتخاب شده است که $Re[\lambda_i(A-H_c)]<0$ و بهره حلقه رویت‌کننده حالت یعنی $C(sI-A)^{-1}H$ خوش‌رفتار باشد.

H می‌تواند بهره فیلتر کالمن یا هر بهره‌ای باشد. هم‌چنین فرض کنید G_ρ تابعی از پارامتر $0<\rho<+\infty$ به گونه‌ای انتخاب شود که $Re[\lambda_i(A-BG_\rho)]<0$ باشد و

$$\lim_{\rho\to 0}\sqrt{\rho}\,G_\rho \longrightarrow WC$$

که C ماتریس خروجی در معادلات حالت فوق و W یک ماتریس یکه است.

با برقرار بودن فرضیات فوق می‌توان نشان داد که

$$\lim_{\rho\to 0} K_\rho(s) = \left[C(sI-A)^{-1}B\right]^{-1}C(sI-A)^{-1}H \qquad *$$

که

$$K_\rho(s) = K(s)\Big|_{G=G_\rho} \triangleq C(sI-A+BG_\rho+HC)^{-1}H$$

توجه کنید $K_\rho(s)$ از مرتبه $2n$ و $K(s)$ از مرتبه n است. پس همگرایی K_ρ و K به همدیگر در تمامی فرکانس‌ها لزوماً ممکن نیست. در بیشتر موارد این همگرایی در فرکانس‌های پایین اتفاق می‌افتد. البته با ρ کوچک می‌توان این ناحیه همگرایی را افزایش داد.

اگر رابطه $*$ برقرار باشد آنگاه بهره حلقه واقعی سیستم حلقه‌بسته به سمت $C(sI-A)^{-1}H$ میل خواهد کرد. زیرا:

$$G(s)K_\rho(s) = C(sI-A)^{-1}B\left[C(sI-A)^{-1}B\right]^{-1}C(sI-A)^{-1}H$$

$$= C(sI-A)^{-1}H \longrightarrow$$

این همان یک تابع خوش‌رفتار کرده بودیم (در فرکانس‌های پایین بزرگ و در بالا کوچک است).

در ادامه به محاسبه G_ρ از طریق مسئله LQR می‌پردازیم.

مسئله LQR را در نظر بگیرید:

$$J = \int_0^\infty \left(\underline{z}^T\underline{z} + \rho\,\underline{u}^T\underline{u}\right)dt$$

هم‌چنین

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = A\,\underline{x}(t) + B\,\underline{u}(t) \\ \underline{z}(t) = M\,\underline{x}(t) \end{cases}$$

اگر $M = C$ انتخاب شود (همان خروجی سیستم باشد) مسئله رگولاتور بهینه برای هر ρ حل شود ورودی بهینه به صورت:

$$\underline{u}(t) = -G_\rho \underline{x}(t)$$

که G_ρ برابر خواهد بود با:

$$G_\rho = \frac{1}{\rho} B^T K_\rho$$

و $K_\rho > 0$ جواب ریکاتی زیر است:

$$0 = -K_\rho A - A^T K_\rho - C^T C + \frac{1}{\rho} K_\rho B B^T K_\rho$$

یکی از خواص معادله ریکاتی فوق این است که اگر مفروضات تحقق $[A, B, C]$ در سمت چپ محور موهومی، (A, B) پایدارشدنی و (C, A) تشخیص‌دادنی باشند آنگاه

$$\lim_{\rho \to 0} K_\rho = 0$$

به عبارتی:

$$\lim_{\rho \to 0} -C^T C + \frac{1}{\rho} K_\rho B B^T K_\rho = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\rho \to 0} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} K_\rho B\right)}_{G_\rho^T} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} B^T K_\rho\right)}_{G_\rho} = C^T C \Rightarrow \lim_{\rho \to 0} (\sqrt{\rho}\, G_\rho^T)(\sqrt{\rho}\, G_\rho) = C^T C$$

$$\Rightarrow \lim_{\rho \to 0} \sqrt{\rho}\, G_\rho = W_C$$

(توجه کنید ضرب یک ماتریس منحصر بفرد نیست)

توجه 1: هرچند با کوچک شدن ρ بهره فیدبک حالت $G_\rho = \frac{1}{\rho} B^T K_\rho$ بزرگ می‌شود ولی $K_\rho(s)$ که کنترل‌کننده نهایی است به سمت یک تابع تبدیل معین میل می‌کند.

توجه 2: در هر صورت G_ρ از یک مسئله LQR بدست می‌آید پس پایداری به ازای تغییرات ρ همچنان محفوظ می‌ماند و نگرانی نداریم.

توجه 3: فیلتر کالمن گارانتی نمی‌کند که $C(sI-A)^{-1}H$ خوش رفتار باشد ولی L (چون نویز ورودی $\xi(t)$) در اختیار ماست پس می‌توان L را چنان انتخاب کرد که نویز چنان اثر بگذارد که $C(sI-A)^{-1}H$ خوش رفتار باشد.

(تغییر L به مفهوم فیلتر کردن نویز است)

حال عبارت‌های گفته شده را خلاصه می‌کنیم.

به طور خلاصه:

1. با انتخاب L و ρ بهره فیلتر کالمن H را به گونه‌ای بدست می‌آوریم که $C(sI-A)^{-1}H$ خوش رفتار بوده و $A-HC$ پایدار باشد.

2. با انتخاب $M=C$ برای چند مقدار ρ ($\rho \to 0$) بهره کنترلی G_ρ را از حل مسئله LQR بدست آورده و تابع تبدیل کنترل کننده $K_\rho(s)$ را بدست می‌آوریم. سپس بهره حلقه $G(s)K_\rho(s)$ را رسم می‌کنیم.

مقادیر تکین

$$K_\rho(s) = G_\rho(sI - A + BG_\rho + HC)^{-1}H$$

3. مقادیر تکین $C(sI-A)^{-1}H$ را نیز رسم می‌کنیم و با مقادیر تکین بند 2 مقایسه می‌کنیم. اگر این دو به اندازه کافی به هم نزدیک بودند در این صورت $K_\rho(s)$ کنترل کننده نهایی خواهد بود. در غیر این صورت ρ را کاهش داده و به بند 2 باز می‌گردیم.

نکته: اگر خطای مدل‌سازی به صورت $\tilde{G}(s) = [I + E(s)]G(s)$ در نظر گرفته شود و آنگاه:

$$\tilde{G}(s)K(s) = [I + E(s)]\,G(s)K(s)$$

و شرط پایداری مقاوم به صورت زیر خواهد بود:

$$\bar{\sigma}\left\{ G(s)K(s)\,[I + G(s)K(s)]^{-1} \right\} < 1$$

چون در LTR داریم:

$$G(s)K(s) \cong C(sI-A)^{-1}H$$

رفتار $C(sI-A)^{-1}H$ گویای مقاومت سیستم در برابر خطای مدل‌سازی هم خواهد بود.

Model Order Reduction

کاهش مرتبه مدل

گرامیان‌ها: Gramians

تحقق فضای حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} = C\underline{x} \end{cases} \qquad \underline{x} \in R^{n\times n} \ , \ \underline{u} \in R^{m} \ , \ \underline{y} \in R^{l}$$

برای این تحقق گرامیان دسترس‌پذیری (کنترل‌پذیری) به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$W_r(0,t_f) = \int_0^{t_f} e^{A\tau} BB^T e^{A^T\tau} d\tau$$

این ماتریس برای هر زمان محدود t_f معکوس‌پذیر است اگر و فقط اگر زوج (A,B) دسترس‌پذیر (کنترل‌پذیر) باشد اگر $t_f \to \infty$ و تمامی مقادیر ویژه ماتریس A در سمت چپ محور موهومی قرار گیرند ($Re[\lambda_i(A)] < 0$) باشد آنگاه ماتریس $W_r \triangleq W_r(0,\infty)$ حل معادله لیاپانوف زیر است:

$$AW_r + W_rA^T + BB^T = 0$$

توجه کنید اگر زوج (A,B) دسترس‌پذیر باشد آنگاه $W_r(0,t_f)$ برای همه t_f ها مثبت معین خواهد بود در غیر اینصورت مثبت نیمه معین است.

برای تحقق فوق گرامیان رویت‌پذیری به صورت زیر است:

$$W_o(0,t_f) = \int_0^{t_f} e^{A^T\tau} C^TC e^{A\tau} d\tau$$

این ماتریس برای هر زمان محدود t_f معکوس‌پذیر است، اگر و فقط اگر زوج (C,A) رویت‌پذیر باشد. اگر $t_f \to \infty$ میل کند و تمامی مقادیر ویژه A سمت چپ محور موهومی باشند آنگاه ماتریس $W_o \triangleq W_o(0,\infty)$ حل یکتای لیاپانوف زیر است:

$$A^TW_o + W_oA + C^TC = 0$$

دستورهای gramm و lyap در متلب:

حال اگر متغیر جدید z برحسب x به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\underline{x} = T\underline{z}$$

تحقق جدید به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} \dot{\underline{z}} = T^{-1}AT\underline{z} + T^{-1}B\underline{u} = \hat{A}\underline{z} + \hat{B}\underline{u} \\ \underline{y} = CT\underline{z} = \hat{C}\underline{z} \end{cases}$$

و داریم:

$$\hat{W}_r = T^{-1}W_r T^{-T} \quad , \quad \hat{W}_o = T^T W_o T$$

که $\hat{W}_o$ و $\hat{W}_r$ گرامیان‌های دسترس‌پذیری و رویت‌پذیری تحقق جدید هستند.

همانطوری که ملاحظه می‌شود لزوماً مقادیر ویژه $\hat{W}_r$ با W_r و $\hat{W}_o$ با W_o یکسان نمی‌باشند. (چون متشابه نیستند) ولی مقادیر ویژه $\hat{W}_r\hat{W}_o$ همانند مقادیر ویژه W_rW_o می‌باشند زیرا

$$\hat{W}_r\hat{W}_o = (T^{-1}W_rT^{-T})(T^TW_oT) = T^{-1}\underbrace{W_rW_o}T$$

پس تبدیل متشابه T مقادیر ویژه W_rW_o را تغییر نمی‌دهد.

تعریف: به جذر مقادیر ویژه W_rW_o مقادیر تکین هنکل گویند (Hankel Singular Value) یا مودهای درجه دوم هم می‌گویند.

توجه: مقادیر ویژه غیرصفر ماتریس‌های W_rW_o و W_oW_r با هم برابرند.

$$\text{مقادیر تکین هنکل } \sigma_i \triangleq \lambda_i^{1/2}(W_rW_o) \quad ; \quad i = 1, \dots, n$$

(با مقادیر تکین معمولی اشتباه نگردد)

اغلب بطور نزولی مرتب می‌شوند:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$$

ماتریس Σ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\Sigma \triangleq \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$$

می‌توان ماتریس تبدیل T را به گونه‌ای یافت که:

$$\hat{W}_r = \hat{W}_o = \Sigma$$

به تحقق $\hat{A}$ و $\hat{B}$ و $\hat{C}$ که گرامیان‌های دسترس‌پذیری و رویت‌پذیری هر دو قطری و برابر یکدیگر باشند تحقق بالانس شده گویند.

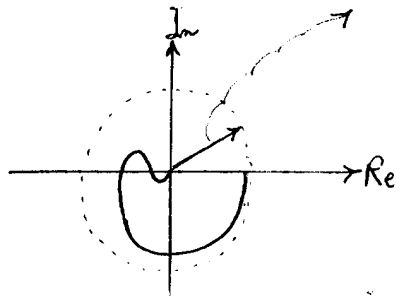
برای یک تابع تبدیل گویا و پایدار و اکیداً سره $G(s)$ نرم هنکل به صورت زیر است:

$$\|G(s)\|_H \triangleq \sigma_1$$

بزرگترین مقدار تکین هنکل

هم چنین برای یک تابع تبدیل گویا و سره $G(s)$ بدون قطب روی محور موهومی، نرم بی‌نهایت آن به صورت زیر است:

$$\|G(s)\|_\infty \triangleq \sup_{\omega(-\infty,\infty)} |G(j\omega)|$$



در حقیقت شعاع کوچکترین دایره ممکن است که دیاگرام نایکوئیست $G(s)$ را در بر می‌گیرد:
در روی منحنی بود هم بیک منحنی اندازه است؛

و برای سیستم‌های MIMO به صورت زیر است:

$$\|G(s)\|_\infty \triangleq \sup_{\omega(-\infty,+\infty)} \bar{\sigma}[G(j\omega)]$$

بزرگترین مقدار تکین مخصوص

ما قادریم به تعریف نرم می‌توان فاصله دو سیستم را از یکدیگر تعریف کرد: اگر $G_1(s)$ و $G_2(s)$ دو پایدار و با تعداد ورودی‌ها و خروجی‌های برابر باشند آنگاه $(G_2(s)-G_1(s))$ هم پایدار خواهد بود و فاصله دو سیستم $G_1(s)$ و $G_2(s)$ را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$d[G_2(s), G_1(s)] = \|G_2(s) - G_1(s)\|_\infty$$

فرض کنید تحقق بالانس شده سیستم $G(s)$ به صورت زیر نمایش داده شود.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{c:c} A_{11} & A_{12} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}}_{B} u \qquad (1)$$

$$y = \underbrace{\left[\begin{array}{c:c} C_1 & C_2 \end{array}\right]}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

توجه کنید گرامیان‌های کنترل‌پذیری و رویت‌پذیری این تحقق با هم برابر بوده و آنرا با Σ نمایش می‌دهیم. Σ را نیز می‌توان به صورت زیر تفکیک کرد:

$$\Sigma = \left[\begin{array}{c:c} \Sigma_1 & 0 \\ \hdashline 0 & \Sigma_2 \end{array}\right] \quad \therefore \Sigma_1 = \mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$$

$$\Sigma_2 = \mathrm{diag}(\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_n)$$

مقادیر تکین هنکل

اگر حالتهای X_2 بطور کامل از تحقق بالانس شده حذف شوند آنگاه تحقق باقی مانده به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = A_{11} X_1 + B_1 u \\ y = C_1 X_1 \end{cases} \qquad Re[\lambda_i(A_{11})] < 0 \qquad (۲)$$

فاصله تحقق (۱) (۲) برابر است با:

$$\| C(sI-A)^{-1}B - C_1(sI-A_{11})^{-1}B_1 \|_\infty \leq 2(\sigma_{r+1} + \cdots + \sigma_n) = 2\,\mathrm{trace}(\Sigma_2)$$

اگر مقدار $2\,\mathrm{trace}(\Sigma_2)$ کوچک باشد آنگاه سیستم (۲) تقریب خوبی برای سیستم (۱) خواهد بود. توجه کنید مرتبه تحقق (۲) برابر r و مرتبه تحقق (۱) برابر n است. $(r<n)$

پس تحقق (۱) با تقریب خوب کاهش مرتبه داده شده است. هم چنین برای تمامی تقریبهای مرتبه r برای سیستم (۱) داریم:

$$\sigma_{r+1} \leq \| C(sI-A)^{-1}B - H(s) \|_\infty$$

$H(s)$ هر تابع تبدیل پایدار و سره از مرتبه r است.

در نامساوی فوق اغلب تساوی برقرار نمی باشد و مقدار خطا به مراتب از σ_{r+1} بزرگتر است. با مقایسه σ_{r+1} و $2\,\mathrm{trace}(\Sigma_2)$ می توان به خوب بودن تقریب پی برد.

بسمه تعالی

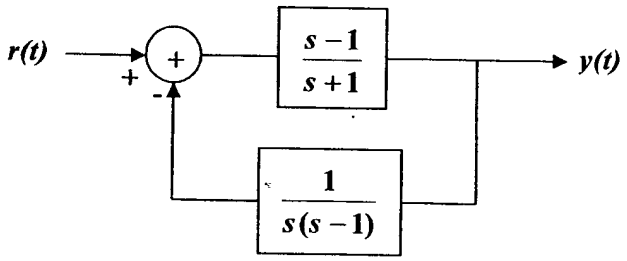
کنترل چند متغیره

تکلیف اول (یادآوری SISO) موعد تحویل: ۸۶/۸/۶

۱- تابع تبدیل گویای یک سیستم تک ورودی- تک خروجی خطی تغییر ناپذیر با زمان را در نظر بگیرید. تحت چه شرایطی پاسخ ضربه سیستم در $t = 0$ پیوسته خواهد بود؟ چرا؟

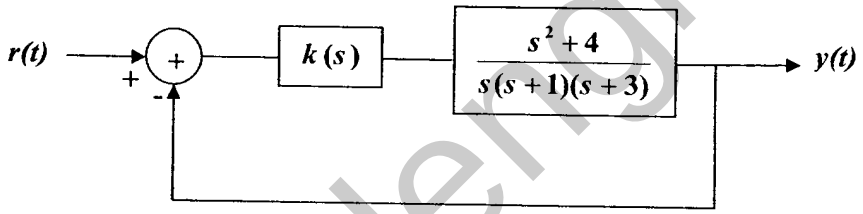
****

۲- آیا سیستم حلقه بسته زیر پایدار است؟ چرا؟



****

۳- بلوک دیاگرام زیر را در نظر بگیرید:



آیا می‌توان کنترل‌کننده $k(s)$ را به گونه‌ای یافت که خطای ماندگار سیستم به ورودی مرجع $r(t) = A\sin(2t)$ صفر باشد؟ چرا؟

****

۴- فرض کنید $g(s) = \frac{1}{s+1}$ و $k(s) = \frac{1}{s}$ باشند. دیاگرام بود اندازه بهره حلقه $k(j\omega)g(j\omega)$، حساسیت $S(j\omega)$ و مکمل حساسیت $T(j\omega)$ را رسم کرده و رابطه میان آنها را در محدوده‌های فرکانسی مختلف بررسی کنید.

****

۵- سیستم $g(s) = \frac{10}{s+10}$ را در نظر بگیرید. کنترل‌کننده $k(s)$ را به گونه‌ای طراحی کنید که پهنای باند سیستم حلقه بسته تقریبا 150 rad/sec و خطای ماندگار به ورودی پله واحد صفر باشد.

بسمه تعالی

کنترل چند متغیره

تکلیف دوم — موعد تحویل: ۸۶/۸/۲۰

۱- نشان دهید مقادیر ویژه یک ماتریس هرمیشین همواره حقیقی می‌باشند.

****

۲- فرض کنید:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1000\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

الف- مقادیر ویژه، دترمینان و رتبه ماتریس A را محاسبه کنید.

ب- با توجه به مقادیر ویژه و دترمینان ماتریس A، آیا می‌توان با تغییرات کوچکی در عناصر آن باعث کاهش رتبه شد؟چرا؟

پ-مقادیر تکین ماتریس A را بدست آورید.

ت- با توجه به مقادیر تکین ماتریس A ، آیا می‌توان با تغییرات کوچکی در عناصر آن باعث کاهش رتبه شد؟ چرا؟

ث-ماتریس E را به گونه‌ای بیابید که رتبه ماتریس $A+E$ برابر یک باشد.

ج-نرم ۲ ، ماتریس E را بیابید.

چ-آیا ماتریس E کوچک است؟

****

۳- مسئله حداقل مربعات (Least Square) به صورت زیر مطرح می‌شود:

بردار $\underline{x}_{n\times 1}$ با کوچکترین طول ممکن را به گونه‌ای بیابید که $\left\|A_{m\times n}\ \underline{x}_{n\times 1}-\underline{b}_{m\times 1}\right\|_2$ کمینه شود.

$$\underset{\underline{x}}{Min}\left\|A_{m\times n}\ \underline{x}_{n\times 1}-\underline{b}_{m\times 1}\right\|_2$$

این مسئله را با استفاده از SVD و بدون در نظر گرفتن هیچ فرض خاصی روی ماتریس $A_{m\times n}$، حل کنید.

****

۴- مقادیر تکین پاسخ فرکانسی سیستم زیر را با استفاده از برنامه MATLAB رسم کنید.

$$\begin{cases}\dot{\underline{X}}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -2\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}\underline{X}+\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 2 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}\underline{U}\\ \underline{Y}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\underline{X}\end{cases}$$

بسمه تعالی

کنترل چند متغیره

تکلیف سوم — موعد تحویل: ۸۶/۸/۲۷

۱-اگر $\bar{\sigma}(A) \le 1$ نشان دهید:

$$1-\bar{\sigma}(A) \le \underline{\sigma}(I+A) \le 1+\bar{\sigma}(A)$$

****

۲- تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید:

$$G(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{2(s+3)}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{1}{s+2} & \dfrac{(s+2)}{(s+3)(s+4)} \end{bmatrix}$$

الف)قطب‌های آن را بدست آورید.

ب)صفرهای انتقال آن را بدست آورید.

پ)درجه مک میلان آن چند است؟

****

۳- تحقق فضای حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{\underline{X}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underline{X} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{U} \\ \underline{Y} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \underline{X} \end{cases}$$

الف) صفرهای انتقال آن را بدست آورید.

ب)صفرهای نامتغیر آن را بدست آورید.

پ)با استفاده از دستور tzero در MATLAB صفرها را بدست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ت)آیا با نگاه کردن به تحقق، می‌توان پی به تعداد قطب‌های سیستم برد؟چرا؟

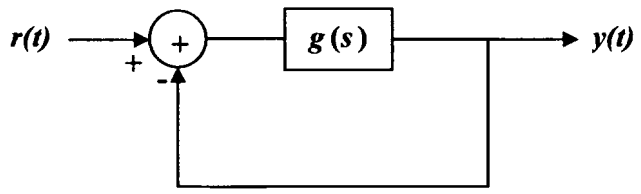
ث)آیا با نگاه کردن به تحقق، می‌توان پی به تعداد صفرهای سیستم برد؟چرا؟

بسمه تعالی

کنترل چند متغیره

تکلیف چهارم — موعد تحویل: ۸۶/۹/۴

۱-تابع تبدیل تک ورودی-تک خروجی $g(s)$ به صورت زیر در حلقه فیدبک قرار می‌گیرد:



قانون معکوس نایکوئیست برای سیستم‌های تک ورودی-تک خروجی به صورت زیر بیان می‌شود:

سیستم حلقه بسته پایدار است اگر و فقط اگر:

$$N(-1, g^{-1}(s), D_R) - N(0, g^{-1}(s), D_R) = -p$$

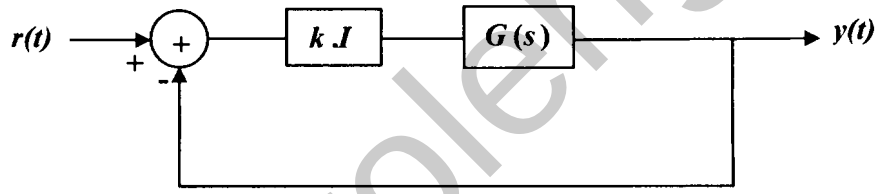
که p تعداد قطب‌های ناپایدار $g(s)$ می‌باشد.

الف-قانون فوق را اثبات کنید.

ب-قانون معکوس نایکوئیست را برای سیستم‌های چند ورودی-چند خروجی بیان کرده و اثبات کنید.

****

۲- تابع تبدیل مربعی و رتبه کامل $G_{m\times m}(s)$ به صورت زیر در حلقه فیدبک قرار می‌گیرد:



در متن درس، نشان داده شد که:

$$\phi_{CL}(s) = \phi_{OL}(s)\det[I + kG(s)] \qquad \text{(A)}$$

الف-فرض کنید s_0 یک قطب سیستم حلقه بسته باشد ولی قطب سیستم حلقه باز نباشد($\phi_{OL}(s_0) \neq 0$, $\phi_{CL}(s_0) = 0$).

نشان دهید:

$$\prod_{i=1}^{m} [1 + k.\lambda_i[G(s_0)]] = 0 \qquad \text{(B)}$$

ب-مقادیر ویژه:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 1 \\ 1 & \frac{1}{(s+1)} \end{bmatrix}$$

را به صورت تابعی از s بدست آورید. آیا $\lambda_i[G(s)]$ تابعی گویا از s است؟ آیا قوانین رسم مکان هندسی ریشه‌ها برای سیستم‌های SISO به آسانی قابل بکارگیری در سیستم‌های MIMO می‌باشند؟

پ-با توجه به رابطه (A) نشان دهید که برای $k = 0$ قطب‌های سیستم حلقه بسته همان قطب‌های سیستم حلقه باز می‌باشند.

ت- با توجه به رابطه (B) نشان دهید که برای $k \to \infty$ قطب‌های سیستم حلقه بسته به سمت صفرهای انتقال $G(s)$ حرکت خواهند کرد.

ث-فرض کنید $G(s)$ دارای تحقق فضای حالت زیر باشد:

$$\begin{cases} \dot{\underline{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 0.1 & 1 \\ 0.1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \underline{X} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{U} \\ \underline{Y} = \begin{bmatrix} 16 & 4 & -4 & 2 \\ -16 & 0 & -8 & 0 \end{bmatrix} \underline{X} \end{cases}$$

مکان هندسی قطب‌های سیستم حلقه بسته را نسبت به تغییرات k از $k = 0$ تا $k \to \infty$ رسم کنید.

بسمه تعالی

کنترل چند متغیره

تکلیف پنجم — موعد تحویل: ۸۶/۹/۱۸

۱-سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$G(s):\begin{cases}\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u}\\ \underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u}\end{cases}$$

بردارهای $\underline{x}$ ، $\underline{u}$ و $\underline{y}$ به صورت زیر تغییر مقیاس (Scaling) داده می‌شوند:

$$\underline{x} = S_x\underline{x}' \quad , \quad \underline{u} = S_u\underline{u}' \quad , \quad \underline{y} = S_y\underline{y}'$$

S_x , S_u , S_y ماتریس‌های قطری و مثبت می‌باشند.

الف-اگر ماتریس‌های فضای حالت سیستم مقیاس شده A' , B' , C' , D' باشند، آنها را بر حسب A , B , C , D و S_x , S_u , S_y بدست آورید.

ب- اگر ماتریس تابع تبدیل سیستم مقیاس شده $G'(s)$ باشد، آن را بر حسب $G(s)$ و S_y , S_u بدست آورید.

پ-اگر خطای مدل‌سازی ضربی در ورودی $E_I(s)$ و خروجی $E_O(s)$ برای $G(s)$ به صورت زیر تعریف شوند:

$$E_I(s) = [\tilde{G}(s) - G(s)]G^{-1}(s) \quad , \quad E_O(s) = G^{-1}(s)[\tilde{G}(s) - G(s)]$$

خطای مدل‌سازی ضربی در ورودی $E_I'(s)$ و خروجی $E_O'(s)$ را برای $G'(s)$ بر حسب $E_I(s)$ و $E_O(s)$ و S_y , S_u بدست آورید.

ت-مدل خطی شده یک موتور جت GE-21 در یک نقطه کار، دارای متغیرها و ماتریس‌های فضای حالت زیر می‌باشد:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix}\text{Rotor Speed \# 1}\\ \text{Rotor Speed \# 2}\end{bmatrix}, \quad \underline{u} = \begin{bmatrix}\text{Fuel}\\ \text{Turbine Stator Angle}\\ \text{Nozzle Area}\end{bmatrix}, \quad \underline{y} = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \text{Compensator Pressure}\end{bmatrix}$$

$$G(s):\begin{cases} A = \begin{bmatrix}-2.915 & 1.076\\ -0.54 & -1.366\end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix}0.0638 & -59.219 & 4.1363\\ 0.0759 & 54.742 & 0.3999\end{bmatrix},\\ C = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0.0359 & 0.0197\end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0.0015957 & -0.057544 & -0.0087514\end{bmatrix}\end{cases}$$

مقادیر تکین $G(s)$ را رسم کنید.

ث- عمل مقیاس بندی را چنان انجام دهید که $\underline{\sigma}[G'(s)]$ تا حد امکان به $\bar{\sigma}[G'(s)]$ نزدیک شود. این کار چه فایده‌ای دارد؟

ج- با ۵٪ تغییرات حول نقطه کار، مدل به صورت زیر در می‌آید:

$$\tilde{G}(s):\begin{cases} A=\begin{bmatrix}-4.192 & 2.317\\ -1.164 & -0.783\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0.071883 & -59.388 & 4.4179\\ 0.0774 & 55.175 & 0.61458\end{bmatrix}, \\ C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0.0369 & 0.01873\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0.001584 & -0.030386 & -0.010434\end{bmatrix}\end{cases}$$

$$\text{Max } \underline{x}=\begin{bmatrix}6000\text{ rpm}\\ 9000\text{ rpm}\end{bmatrix},\quad \text{Max } \underline{u}=\begin{bmatrix}50000\text{ lb/hr}\\ 137.25\text{ deg}\\ 1600\text{ ft}^2\end{bmatrix},\quad \text{Max } \underline{y}=\begin{bmatrix}6000\text{ rpm}\\ 9000\text{ rpm}\\ 300\text{ psi}\end{bmatrix}$$

مقادیر تکین $E_I(s)$ و $E_O(s)$ را رسم کنید.

چ- عمل مقیاس بندی را چنان انجام دهید که تا حد امکان $E_I'(s)$ و $E_O'(s)$ در فرکانس‌های پایین، کوچک باشند.

ح- عمل مقیاس بندی با یک ماتریس <u>غیرقطری</u> S_u یا S_y را چنان انجام دهید که در فرکانس‌های پایین، $\underline{\sigma}[G'(s)]$ برابر $\bar{\sigma}[G'(s)]$ باشد.

بسمه تعالی

کنترل چند متغیره

تکلیف هشتم — موعد تحویل: ۸۶/۱۰/۱۸

۱-معادلات دینامیکی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{\underline{X}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1.01 & -0.2\end{bmatrix}\underline{X}(t)+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u(t)+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\xi(t) \\ y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\underline{X}(t)+\theta(t)\end{cases}$$

$$E[\xi(t)]=0,\quad E[\xi(t_1)\xi(t_2)]=\delta(t_1-t_2)$$
$$E[\theta(t)]=0,\quad E[\theta(t_1)\theta(t_2)]=\mu\delta(t_1-t_2)$$

الف- بهره فیلتر کالمن H را برای $\mu=0.5$ بدست آورید.

ب- محل قطب‌های دینامیک خطا یعنی مقادیر ویژه ماتریس $A-HC$ را مشخص کنید.

پ-فرض کنید:

$$\hat{\underline{X}}(0)=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\qquad \underline{X}(0)=\begin{bmatrix}7\\10\\5\end{bmatrix},\qquad u(t)=\sin(0.7t)$$

حالت واقعی $\underline{X}_i(t)$ و تخمین حالت فیلتر کالمن $\hat{\underline{X}}_i(t)$ را بر روی یک دستگاه مختصات رسم کنید و نشان دهید که $\hat{\underline{X}}_i(t)$ به سمت $\underline{X}_i(t)$ میل می‌کند.

ت-آیا می‌توان زمان از بین رفتن خطای تخمین را از روی مقادیر ویژه ماتریس $A-HC$ حدس زد؟ جواب خود را از روی شکل‌های رسم شده در بند (پ) تایید کنید.

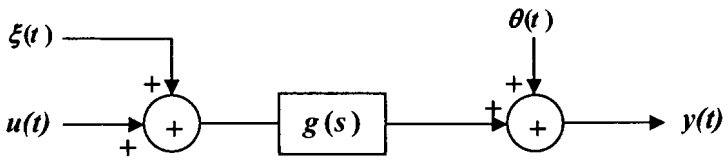
****

۲- تابع تبدیل سیستمی به صورت زیر است:

$$g(s)=\frac{(s+1)(s+2)}{s^6}$$

الف-یک تحقق مینیمال از $g(s)$ را بدست آورید و با فرض:

$$E[\xi(t)]=0,\quad E[\xi(t_1)\xi(t_2)]=\delta(t_1-t_2),\qquad L=B$$
$$E[\theta(t)]=0,\quad E[\theta(t_1)\theta(t_2)]=\mu\delta(t_1-t_2)$$



مکان هندسی قطب‌های حلقه بسته فیلتر کالمن را برای مقادیر مختلف μ رسم کنید.

ب- بهره فیلتر کالمن H را به گونه‌ای بیابید تا:

$$\begin{cases} |g_{kf}(j\omega)| < 0.1 \quad ; \quad \omega > 100\ rad/\sec \\ |g_{kf}(j\omega)| = 1 \quad ; \quad \omega = 10\ rad/\sec \end{cases} \quad , g_{kf}(s) = C(sI - A)^{-1}H$$

پ-با استفاده از روش LTR کنترل‌کننده $k(s)$ را به گونه‌ای بیابید که:

$$\begin{cases} |g(j\omega)k(j\omega)| < 0.1 \quad ; \quad \omega > 100\ rad/\sec \\ |g(j\omega)k(j\omega)| = 1 \quad ; \quad \omega = 10\ rad/\sec \end{cases}$$

ت-صفر وقطب‌های $k(s)$ را بدست آورده و توضیح دهید چه اتفاقی افتاده است؟

ث-دیاگرام بود (Bode) کنترل‌کننده $k(s)$ را برای $10^{-1} < \omega < 10^{3}$ رسم کنید.

ج-تابع تبدیل سیستم حلقه بسته و صفر و قطب‌های آن را بدست آورید.

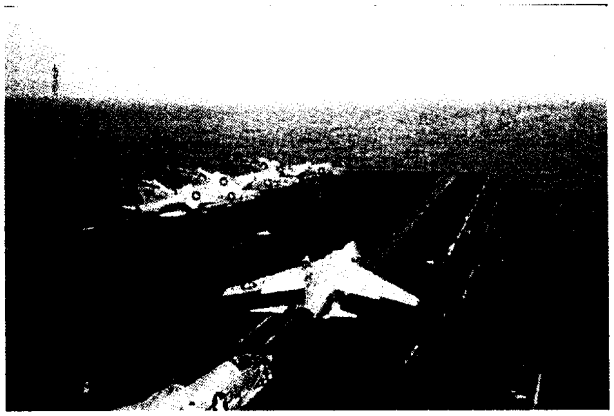
چ-منحنی اندازه دیاگرام بود تابع تبدیل سیستم حلقه بسته رسم کرده و توضیح دهید کنترل‌کننده $k(s)$ چه می‌کند؟

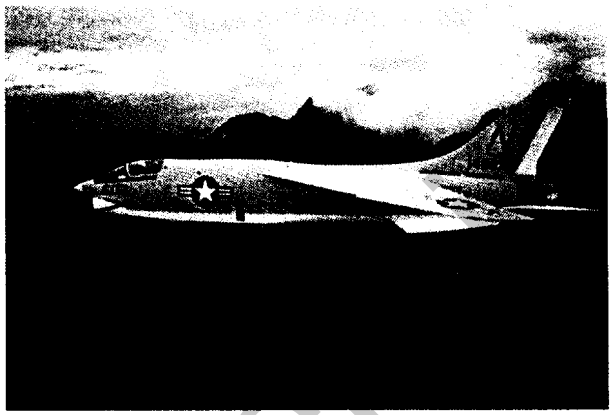
In the Name of Allah

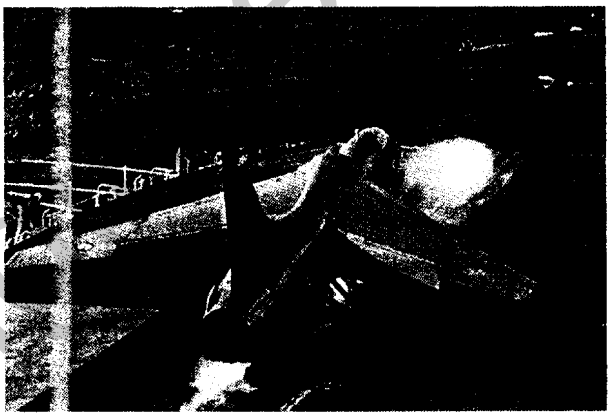
Multivariable Control Systems

Homework # 6 Due: 86/9/27

NASA F-8 Aircraft/Navy







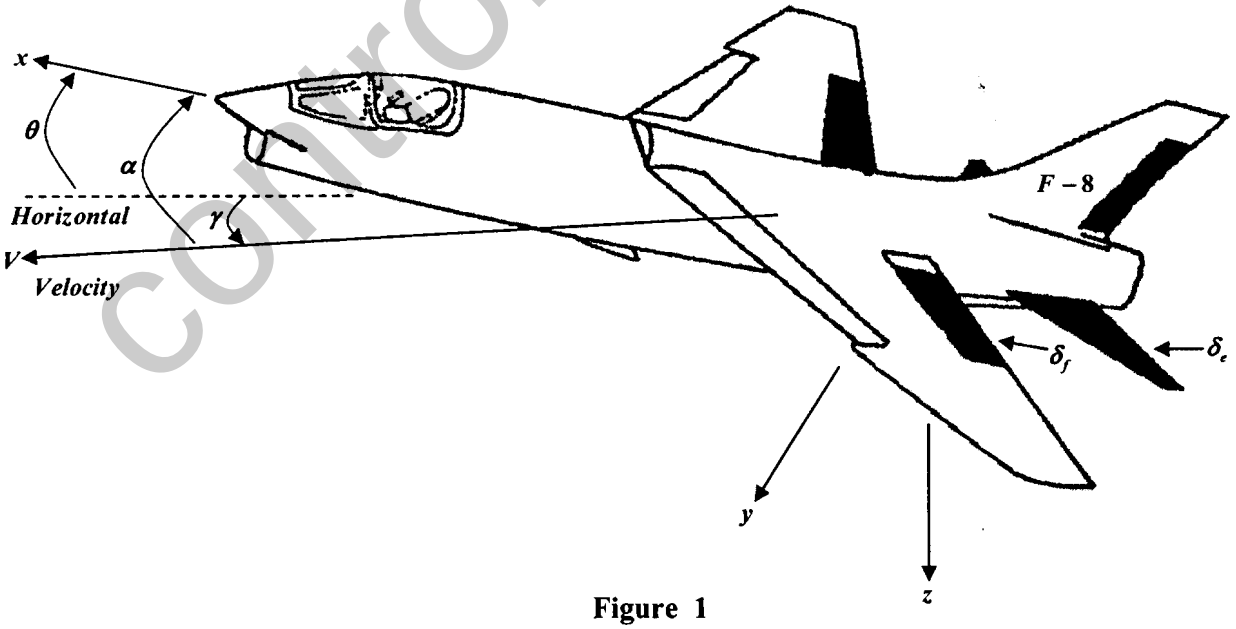


Figure 1

F-8 Longitudinal Dynamics

1-Introduction

In this problem, we present a very simple model of the longitudinal dynamics of an F-8 aircraft, modified so as to include a flaperon control surface in addition to the elevator. The introduction of an extra control surface gives the control system designer a second degree of freedom which can be exploited to independently control two distinct outputs. We shall formulate several control problems in the future using these questions, so keep the problem statement in a safe place.

2-Modeling Overview

Figure 1 shows a representative view of an aircraft with a Cartesian coordinate frame fixed to its center of gravity (cg). This coordinate system, which is the so-called " stability axes" coordinate frame, has its x-axis pointed toward the nose of the aircraft, its y-axis out the left side and its z-axis downward through the aircraft underbelly. The aircraft is flying in a vertical plane with its wings level, i.e., without banking for tuning. The pitch angle θ is the angle of the nose with respect to horizontal. The pitch rate q is its rate of change, $q = \dot{\theta}$. The angle of attack α is the angle of the nose with respect to the velocity vector of the aircraft. Holding the wings at this angle α with respect to oncoming wind, which necessitates a tail, is what provides the lift needed to fly, i.e., to just balance gravity, but it also produces drag. Both lift and drag are approximately proportional to α for small α. The normal acceleration n_z is just the acceleration of the cg along the z-axis, hence normal to the x-axis. The flight path angle, γ, defined by:

$$\gamma = \theta - \alpha$$

is the angle between the aircraft velocity vector and the horizontal. As its name implies, it describes the motion of the aircraft in the vertical plane.

This aircraft is controlled in pitch by two hinged aerodynamic control surfaces: the elevator on the horizontal tail and the flaperon(from combining "flap" and " aileron") on the wings with deflection angles δ_e and δ_f, respectively, as shown in Figure 1. Deflecting either of these surfaces downward causes the air flow to be deflected downward and hence produces a force that leads to a nose-down moment about the cg. The equations of motion for the aircraft can be linearized at a particular flight condition including airspeed, altitude, cg location and trimmed α. The perturbations in vertical and horizontal velocity tend to occur slowly over 10 or more seconds and they can be neglected to yield the "short period" model of the typical longitudinal or pitch dynamics of a swept-wing fighter aircraft.

The numerical coefficients in the equations to follow are drived from the so-called stability derivatives of the aircraft. For example, the second term in the $\dot{q}(t)$ equation represents the effect of angle of attack on pitch moment normalized by inertia and shows that the aircraft tends to nose into the oncoming wind and hence is "statically stable" not all present-day aircraft are, thereby providing jobs for control engineers.

3.Linearized Longitudinal Dynamics

The following equations model the "fast" longitudinal motion of the F-8 in the vertical plane. These were obtained by linearizing the aircraft nonlinear dynamic equations for straight and level equilibrium flight at the following conditions:

Altitude: 20,000 ft (6095 meters)

Speed: Mach 0.9 (281.58 m/sec = 916.6 ft/sec)

Dynamic Pressure: 550 lbs/ft^2 (26,429 N/M^2)

The trim (equilibrium) pitch angle is 2.250 degrees as is the trim angle of attack. To balance the aerodynamic moments, the trim elevator setting is at -2.650 degrees. The elevator deflection angle $\delta_e(t)$ represents its deviation from the trim value of -2.650 degrees.

$q(t)$: pitch rate (rad/sec)

α(t): perturbation from trim of angle of attack (rad)

θ(t): perturbation from trim of pitch attitude (rad)

The two control variables are:

$\delta_e(t)$: elevator deflection from trim (rad)

$\delta_f(t)$: flaperon deflection (rad) (trim value is zero)

We neglect for the time being any actuator dynamics, and we assume no limits on actuator motion. The linearized state dynamics for this flight condition are:

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = -0.8q(t) - 12\alpha(t) - 19\delta_e(t) - 2\delta_f(t) \\ \dot{\alpha}(t) = q(t) - 1.5\alpha(t) - 0.16\delta_e(t) - 0.25\delta_f(t) \\ \dot{\theta}(t) = q(t) \end{cases} \qquad (1)$$

Outputs of interest are the state variables themselves. Also the flight path angle, $\gamma(t)$:

$$\gamma(t) = \theta(t) - \alpha(t) \qquad (2)$$

and the normal acceleration, n_z, measured at the cg in units of g (32.2 ft/sec^2):

$$n_z(t) = 42\alpha(t) + 4.4\delta_e(t) + 6.5\delta_f(t) \qquad (3)$$

Note: If $\alpha(t)$, $\delta_e(t)$, and $\delta_f(t)$ are expressed in degrees, the coefficients in (3) must be modified.

4-Modeling Wind Disturbance

Now we shall describe how to incorporate, in a simple way, the impact of random wind disturbances in the F-8 longitudinal dynamics. A very simple mathematical model is to define a fictitious wind disturbance state, $w(t)$, with units of radians, which is the output of a simple first order system driven by zero mean white noise of unit intensity, $\zeta(t)$. Thus, the model is:

$$\dot{w}(t) = -aw(t) + b\zeta(t) \tag{4}$$

The wind state enters the longitudinal equations in the same manner as the angle of attack, $\alpha(t)$, because they represent changes in the direction of the oncoming wind.

The constant a and b in Eq. (4), depend on the altitude, Mach number, and weather conditions. For this flight condition reasonable values are:

$$\begin{aligned} a &= 0.73 \\ b &= 0.0224 \end{aligned} \tag{5}$$

corresponding to severe turbulence typical of flying through thunderstorm. Thus, the disturbance dynamics are:

$$\dot{w}(t) = -0.73w(t) + 0.0224\zeta(t) \tag{6}$$

The following state equations capture the impact of the wind disturbances upon the F-8 dynamics:

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = -0.8q(t) - 12\alpha(t) - 12w(t) - 19\delta_e(t) - 2\delta_f(t) \\ \dot{\alpha}(t) = q(t) - 1.5\alpha(t) - 1.5w(t) - 0.16\delta_e(t) - 0.25\delta_f(t) \\ \dot{\theta}(t) = q(t) \\ \dot{w}(t) = -0.73w(t) + 0.0224\zeta(t) \end{cases} \tag{7}$$

Problems

Problem # 1: **The purpose of this problem is to let you get a "feel" for the F-8 open loop dynamics and familiarize yourself with the software.**

a)*Unforced Transient Response without Disturbances*

In Eq. (1) set:

$$\delta_e(t) = \delta_f(t) = 0$$

at $t = 0$, let:

$$q(0) = 1 \text{ deg/sec}$$
$$\alpha(0) = 0$$
$$\theta(0) = 0$$

Plot the natural transient response, $0 \le t \le 5$ sec, of the aircraft, i.e., plot $q(t)$, $\alpha(t)$, $\theta(t)$, $\gamma(t)$, and $n_z(t)$. Your plots should be in degrees, degrees/sec, and g's.

****

b)Repeat (a) for:

$$q(0) = 0$$
$$\alpha(0) = 1 \text{ deg}$$
$$\theta(0) = 0$$

****

c)Qualitatively summarize your conclusions.

****

d) *Forced Transient Response without Disturbances*

In Eq. (1) set:

$$q(0) = \alpha(0) = \theta(0) = 0$$

Set $\delta_f(t) = 0$, and let $\delta_e(t)$ be a unit step in degrees.

For $0 \le t \le 5$ sec plot in the units of (a) $q(t)$, $\alpha(t)$, $\theta(t)$, $\gamma(t)$, and $n_z(t)$. Now you should have a feel of what the elevator alone can do.

****

e)Repeat (d) by setting $\delta_e(t) = 0$ and $\delta_f(t)$ be a unit step in degrees. Now you should have a feel of what the flaperons alone can do.

****

f)Briefly, summarize your conclusions.

****

Problem # 2: **In this problem we present more realistic longitudinal dynamics for the F-8 aircraft. We have added another state variable $u_{dv}(t)$ which represents the deviation of the forward velocity (ft/sec) from its equilibrium value. We have also increased the flaperon effectiveness. All other variables are as defined in problem#1. The new state dynamics are as follows:**

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = -0.8q(t) - 0.0006u_{dv}(t) - 12\alpha(t) - 19\delta_e(t) - 4\delta_f(t) \\ \dot{u}_{dv}(t) = -0.014u_{dv}(t) - 16.64\alpha(t) - 32.2\theta(t) - 0.66\delta_e(t) - 0.5\delta_f(t) \\ \dot{\alpha}(t) = q(t) - 0.0001u_{dv}(t) - 1.5\alpha(t) - 0.16\delta_e(t) - 0.5\delta_f(t) \\ \dot{\theta}(t) = q(t) \end{cases}$$

Thus the control vector is:

$$\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} \delta_e(t) \\ \delta_f(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Elevator Angle (rad)} \\ \text{Flaperon Angle (rad)} \end{bmatrix}$$

Define the output vector:

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \alpha(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Pitch Angle (rad)} \\ \text{Attak Angle (rad)} \end{bmatrix}$$

Change all angles into degrees and $q(t)$ into deg/sec. Leave $u_{dv}(t)$ in ft/sec.

a)Compute the multivariable poles and zeros of the open loop aircraft dynamics.

****

b)Plot the singular values of $G(s)$ for $-10^3 \le \omega \le 10^3$, $\underline{Y}(s) = G(s)\underline{U}(s)$.

****

c)Do a SVD of $G(j\omega)$ at $\omega = 0$. Discuss all pertinent directional information. Apply constant controls along the max and min right singular vector directions, run transient responses, and verify the theoretical predictions of output magnitudes and directions as predicted by the SVD. Discuss physically what the airplane is doing.

****

d) Do a SVD of $G(j\omega)$ at $\omega = 0.03$ rad/sec. Apply sinusoidal controls at that frequency(including correct phase shift and amplitude) corresponding to the max and min right singular vector directions, run output transient responses until you reach steady state, and verify the predictions of the output sinusoids amplitude and phase shifts predicted by the SVD. Plot each control and output separately and adjust scales so that even small signals show up. Discuss physically what the airplane is doing.

****

e)Now let us use the modified F8 aircraft in a simple feedback configuration as shown in Figure 2. Note that we use the same constant gain k in both error channels. Use the MIMO Nyquist criterion (trial and error) to find the value of $k > 0$ which will just make the closed loop system unstable.

****

f)Set the gain k to 0.75 of the value that destabilizes the closed loop system found in part (e). Compute the closed loop poles and zeros. Also, plot the singular values of the resulting sensitivity and closed loop transfer function matrices. Comment upon the performance that you would expect from this closed loop system from the shapes of the singular values of the sensitivity and closed loop transfer function matrix. Would you say that this is a good design? Explain.

Note: **To be sure that you made the unit conversion correctly in part (a). You should get the eigenvalues to be approximately:**

$$-5.77\times10^{-3} \pm j\,2.64\times10^{-2}$$

$$-1.15 \pm j\,3.45$$

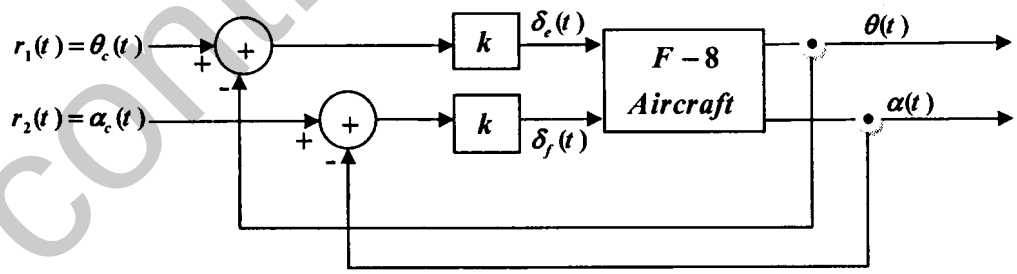


Figure 2

R. Amirifar
Dec. 1, 2007