آشنایی با نامساویهای ماتریسی خطی (Linear Matrix Inequalities) و کاربردهای آن در مسائل کنترل

نامساوی ماتریسی خطی (LMI) چیست؟

در مسائل بهینه سازی معمولاً قیود نامساویهای خطی هستند

$$\begin{aligned} &\min\ bx_1 + cx_2 \\ &a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n > 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

در بعضی موارد این قیود نا مساویهای ماتریسی می باشند

$$\min\ bx_1 + cx_2$$

$$\begin{bmatrix} a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n & \cdots & b_nx_1 + b_nx_2 + \dots + b_nx_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_nx_1 + c_nx_2 + \dots + c_nx_n & \cdots & d_nx_1 + d_nx_2 + \dots + d_nx_n \end{bmatrix} > 0$$

به دستهٔ خاصی از این نامساویهای ماتریسی LMI گفته می شود

تعریف نامساوی ماتریسی خطی (LMI)

یک نامساوی ماتریسی خطی به شکل زیر بیان میشود:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i > 0$$

که در آن

$$x \in R^m,\ F_i \in R^{n\times n},\ F_i = F_i^T$$

با تعریف فوق

$$F(x) = F(x)^T$$

نکته :

هر نامساوی ماتریسی متقارن که بصورت affine به متغیر خود وابسته باشد، قابل بیان بصورت نامساوی ماتریسی خطی است.

مثال:

$$\begin{bmatrix} 4+x_1+2x_2 & x_2+x_3+2 \\ x_2+x_3+2 & 3x_2+x_4 \end{bmatrix} > 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + x_1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} > 0$$

چرا LMI؟

در تئوری کنترل به مسائلی بر می خوریم که دستیابی به جواب منوط به حل یک نامساوی ماتریسی است و یا در بعضی مسائل بهینه سازی، قیود نامساویهای ماتریسی هستند.

مثال ۱ : پایداری سیستمهای خطی

سیستم خطی زیر را در نظر میگیریم:

$$\dot{x} = Ax$$

تابع لیاپانوف :

$$V(x) = x(t)^T P x(t)$$

شرط پایداری :

$$\exists P > 0 \quad st. \quad A^T P + PA < 0$$

مثال ۲ : معادلهٔ ریکاتی

معادلات ریکاتی که بطور وسیعی در کنترل بهینه استفاده می شوند یک نامساوی ماتریسی است. نمایش آن بصورت رابطهٔ زیر است:

$$A^T P + PA + PBR^{-1}B^T P + Q < 0$$

که در آن ماتریسهای A و B معلوم و $P=P^T>0$ ، $R=R^T>0$ و $Q=Q^T>0$ مجهول هستند

مثال ۳ : بیشترین مقدار تکین (Maximum Singular Value)

بیشترین مقدار بهرهٔ یک سیستم چند متغیره با بیشترین مقدار تکین آن نمایش داده میشود.

بطور کلی اگر $A(x)$ یک ماتریس باشد بزرگترین مقدار تکین آن بصورت $\bar{\sigma}(A(x))$ نمایش داده میشود.

مسألهٔ کمینه سازی بیشترین مقدار تکین را در نظر می گیریم:

$$\inf \ \gamma$$
$$\bar{\sigma}(A(x)) < \gamma$$

از آنجا که
$$\bar{\sigma}(A(x))^2 = \lambda_{\max}\left(A^T(x)A(x)\right)$$

قید این مسألهٔ بهینه سازی را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\lambda_{\max}\left(A^T(x)A(x)\right) < \gamma^2 \Rightarrow \boxed{\gamma^2 I - A^T(x)A(x) > 0}$$

در مثال ۱ شرط پایداری لیاپانوف یک LMI می باشد

$$A^T P + PA < 0$$

چون:

۱–متقارن است

۲–نسبت به درایه های P از درجهٔ ۱ است (affine)

ولی مثالهای ۲ و ۳ LMI نیستند

$$A^T P + PA + PBR^{-1}B^T P + Q < 0$$

$$\gamma^2 I - A^T(x)A(x) > 0$$

شرط پایداری لیاپانوف بعنوان اولین LMI در مهندسی کنترل شناخته می شود. در دهۀ ۴۰ قرن گذشته این معیار وارد مسائل واقعی مهندسی کنترل شد و حل آن بصورت دستی و تنها برای مسائل کوچک انجام می گرفت.

در دهۀ ۶۰ تئوریهایی ارائه شد مبنی بر اینکه دستۀ خاصی از نامساویهای غیرخطی نظیر معادلۀ ریکاتی قابل بیان بصورت LMI می باشند.

لم معروف شر(Schur) این دسته از نامساویهای ماتریسی را معرفی می کند.

نامساوی شر (Schur)

مجموعه نامساویهای غیر خطی به شکل

$$Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^{T}(x) > 0$$
$$R(x) > 0$$

که در آن $R(x)=R^T(x)$ و $S(x)=S^T(x)$، به LMI به صورت زیر قابل تبدیل است.

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0$$

بنابراین معادلهٔ ریکاتی و مسألهٔ بزرگترین مقدار تکین قابل تبدیل به یک LMI می باشند.

$$Q(x)-S(x)R^{-1}(x)S^{T}(x)>0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^{T} & R(x) \end{bmatrix} > 0$$

$$A^{T}P+PA+Q+PBR^{-1}B^{T}P<0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -A^{T}P-PA-Q & PB \\ B^{T}P & R \end{bmatrix} > 0$$

$$\gamma^{2}I-A^{T}(x)A(x)>0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \gamma^{2} & A^{T}(x) \\ A(x) & I \end{bmatrix} > 0$$

تا قبل از دهۀ ۸۰ اگرچه دامنۀ مسائلی که با نامساوی ماتریسی قابل بیان بودند گسترش پیدا کرده بود ولی هنوز حل LMIها به مسائل با ابعاد کوچک محدود بود.

تا اینکه در دهۀ ۸۰ الگوریتم نقطۀ داخلی برای LMI ارائه شد

طراحی کنترل کنندهٔ فیدبک حالت با استفاده از LMI

سیستم خطی زیر را در نظر می گیریم:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

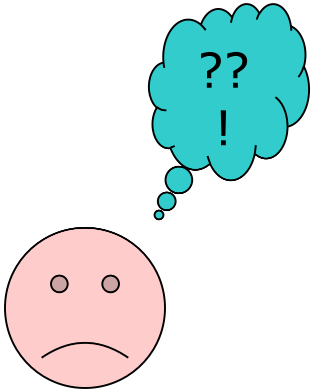
فیدبک حالت: $u = Kx$

$$A_{cl} = A + BK$$

شرط پایداری لیاپانوف:

$$\exists P = P^T > 0 \ st. \quad A_{cl}^T P + P A_{cl} < 0$$

$$(A + BK)^T P + P(A + BK) < 0$$



$$A^T P + K^T B^T P + PA + PBK < 0$$

متغیر جدید:

$$L = KY, \quad Y = P^{-1}$$

ضرب نامساوی ماتریسی بالا در P^{-1} از چپ و راست

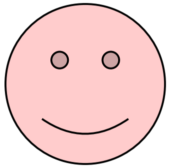
$$P^{-1} A^T + P^{-1} K^T B^T + AP^{-1} + BKP^{-1} < 0$$

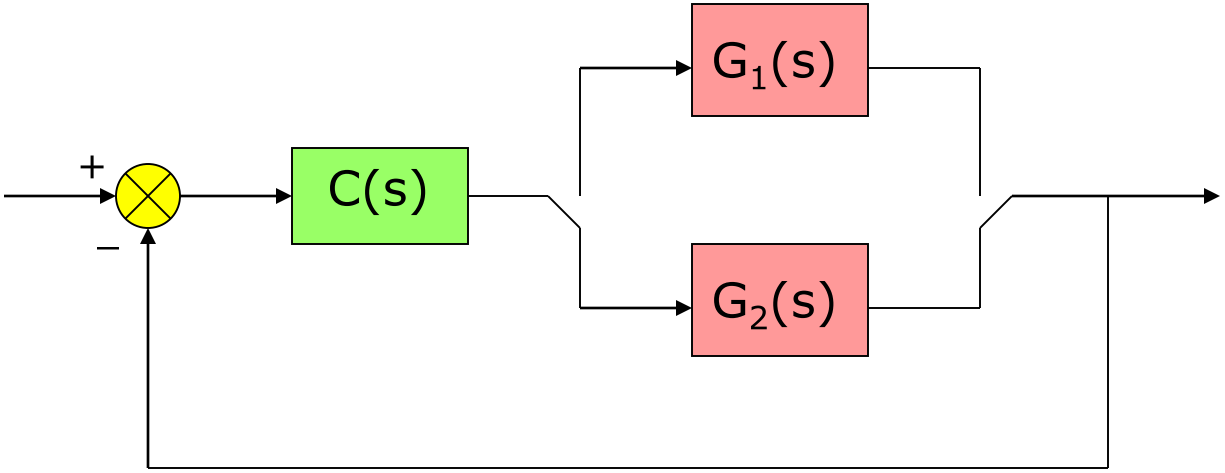
$$P^{-1}A^{T}+P^{-1}K^{T}B^{T}+AP^{-1}+BKP^{-1}<0$$

$$L=KY$$

$$Y=P^{-1}$$

$$\exists Y=Y^{T}>0 \quad st. \quad YA^{T}+L^{T}B^{T}+AY+BL<0$$




+
−
C(s)
$G_1(s)$
$G_2(s)$

$$G_1(s):\quad \dot{x}(t)=A_1x(t)+B_1u(t)$$
$$\vdots$$
$$G_n(s):\quad \dot{x}(t)=A_nx(t)+B_nu(t)$$

شرط پایداری:

$$\exists P>0 \quad st. \quad A_1^TP+PA_1<0$$
$$\vdots$$
$$A_n^TP+PA_n<0$$

- ماکزیمم پاسخ ضربه
- محدودیت روی گین ماکزیمم خروجی به ماکزیمم ورودی
- عملکرد H_∞
- عملکرد H_2

پایداری + عملکرد H_∞

$$\left\|T_{ed}\right\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow \sup \frac{\left\|e(t)\right\|_2}{\left\|d(t)\right\|_2} < \gamma$$

$$\left\|T_{ed}\right\|_\infty < \gamma$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T P + P A_{cl} & P B_{cl} & C_{cl}^T \\ B_{cl}^T P & -\gamma I & D_{cl}^T \\ C_{cl} & D_{cl} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \qquad P > 0$$

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T P + P A_{cl} & P B_{cl} & C_{cl}^T \\ B_{cl}^T P & -\gamma I & D_{cl}^T \\ C_{cl} & D_{cl} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

u=Kx

$$\begin{bmatrix} (A+BK)^T P + P(A+BK) & PB & C^T \\ B^T P & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} (A+BK)^T P + P(A+BK) & PB & C^T \\ B^T P & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

L=KY

Y=P^-1^

$$\begin{bmatrix} AY + YA^T + BL + L^T B^T & B & YC^T \\ B^T & -\gamma I & D^T \\ CY & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad Y > 0$$

پایداری + پیک پاسخ ضربه کوچکتر از ٤

سیستم زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} \dot{x}_{cl}(t) = A_{cl}x_{cl} \\ z(t) = Cx_{cl} \end{cases} \qquad x_{cl}(0) = B_{cl}$$

$$A_{cl}^T P + PA_{cl} < 0, \quad P > 0,$$

$$\begin{bmatrix} P & PB_{cl} \\ B_{cl}^T P & \xi I \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} P & C_{cl}^T \\ C_{cl} & \xi I \end{bmatrix} > 0$$

پایداری + عملکرد H_2

$$P > 0,$$

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T P + P A_{cl} & P B_{cl} \\ B_{cl}^T P & -I \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} P & C_{cl}^T \\ C_{cl} & \alpha I \end{bmatrix} > 0$$

$$\Longrightarrow$$

$$\|z(t)\|^2 < \alpha$$

$$st. \quad \int_0^T \|d(t)\|^2 dt < 1$$

خواص LMIها

۱– LMIها یکتا نیستند یعنی LMIهای مختلفی می توانند منجر به یک مجموعه جواب شوند. به عنوان مثال مجموعه جواب LMIها تحت همانی ثابت است.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} D & C \\ B & A \end{bmatrix} > 0$$

خواص LMIها

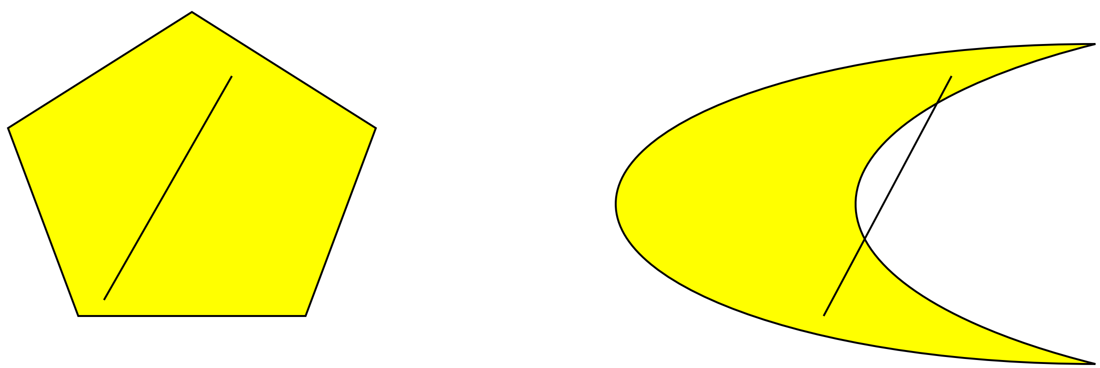
۲- چند LMI می توانند بصورت یک LMI نمایش داده شوند.

$$F_1(x) > 0;\;\; F_1(x) > 0; \ldots; F_1(x) > 0$$

$$\begin{bmatrix} F_1(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_2(x) & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & F_q(x) \end{bmatrix} > 0$$

خواص LMIها

۳- LMIها قیود محدب می باشند.



مجموعهٔ محدب

مجموعهٔ غیر محدب

بزرگترین کانال اختصاصی مهندسی کنترل در تلگرام

@controlengineers

مراجع

- *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, S. Boyd, E. Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan, Siam, 1994.
- *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*, L. El Ghaoui, S. Niculescu, Siam 2000.
- *A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities*, J. G. VanAntwerp, R. D. Braatz, *Journal of Process Control*, 2000.