اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

CHAPTER 1:
Introduction to Model Predictive Control

S.K. Hosseini Sani

Assistant Professor

Electrical Engineering

Ferdowsi University

Mashhad, Iran
1392

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Introduction to Model Predictive Control

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- **سرفصل درس:**

مقدمه ای بر سیستمهای کنترل مدل پیش بین
کنترلگر مدل داخلی(Internal Model Control)
کنترلگرهای مدل پیش بین
کنترلگرهای مدل پیش بین کلی
پیاده سازی ساده کنترلگرهای پیش بین برای سیستمهای صنعتی
تحلیل مقاومت کنترلگرهای مدل پیش بین
کنترلگرهای مدل پیش بین چند متغیره
کنترلگرهای مدل پیش بین مشروط
کنترلگرهای مدل پیش بین مقاوم

- **نحوه ی ارزشیابی دانشجو :**

تکلیف ها و شبیه سازیها : ۸ نمره
آزمون پایانی: ۹ نمره
پروژه نهایی : ۳

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- تاریخچه کنترل پیش بین

First industrial developments: About 1970.

- *Shell Texas: Cutler et al. (Proc. JACC 1980)*
- *Adersa France: Richalet. (Automatica 1978)*

Patents:

- Martin-Sanchez (Spain), 1976.
- Prett, Ramaker, Cutler (Shell), 1982.

Academics:

- Propoi (1963)
- Kleinman (1970)
- Kwon and Pearson (1975)
- Rouhani and Mehra (1982)
- Clarke et al (1987)

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- کنترل پیش بین مدل:

محدوده وسیعی از روشهای کنترل که به صورت صریح از مدل فرایند برای به دست آوردن سیگنال کنترل استفاده می کند. (بر اساس بهینه سازی یک تابع هدف)

- وجه اشتراک کنترل کننده های پیش بین
  - استفاده صریح از مدل فرایند برای پیش بینی خروجی سیستم در زمانهای آینده (افق پیش بین)
  - محاسبه سیگنال کنترل بر اساس مینیمم سازی یک تابع هدف
  - استراتژی برگشتی (Receding)

اولین نمونه از سیگنال کنترل محاسبه شده به سیستم اعمال می شود (بر اساس یک افق در تابع هدف)

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- اختلاف الگوریتم های مختلف MPC
  - مدل فرایند برای پیش بینی
  - لحاظ کردن نویز
  - تابع هزینه

- کاربردهای MPC در پژوهش و صنعت
  - توربین بادی و بخار
  - اتوپایلوت
  - رباتیک
  - نورد فولاد (تاخیر)
  - نفت و پتروشیمی
  - تولید سیمان
  - برجهای تقطیر
  - ....

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- مزایای استفاده از MPC:
  - استفاده از مفاهیم اولیه کنترل در طراحی
  - تنظیم ساده کنترل کننده
  - قابلیت توسعه برای سیستمهای پیچیده، غیرحداقل فاز وتاخیردار
  - قابلیت توسعه آسان برای سیستمهای MIMO
  - برای جبران اثر اغتشاش قابل اندازه گیری به صورت طبیعی یک کنترل کننده فیدفوروارد را شامل می شود.
  - پیاده سازی آسان قانون کنترل
  - لحاظ کردن قیدهای سیگنال کنترل، خروجی و حالت، در فرایند طراحی. (کنترل بهینه)
  - کاربرد بسیار مفید برای شرایطی که تراژکتوری مطلوب در زمان آینده معلوم باشد (رباتیک)

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- معایب MPC
- پیچیده تر بودن محاسبه سیگنال کنترل نسبت به کنترل کننده های کلاسیک
- بار محاسباتی اضافه برای فرایندهایی که دینامیک آنها تغییر نمی کند
- حجم محاسبات بالا برای کنترل کننده های مقید
- هزینه سخت افزاری برای ارتقاء کنترل کننده های کلاسیک به MPC (و سایر کنترل کننده های پیشرفته)
- نیاز به مدل مناسب برای فرایند
- تاثیر پذیری مزایای MPC از در دسترس نبودن مدل دقیق
- مشکل اثبات پایداری و مقاوم بودن در حالت مقید و برخی سیستمهای غیرخطی

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

1.1 MPC Strategy

controlengineers.ir

controlengineers.ir
@controlengineers

- The methodology of all the controllers belonging to the MPC family is characterized by the following strategy, represented in Figure 1.1:

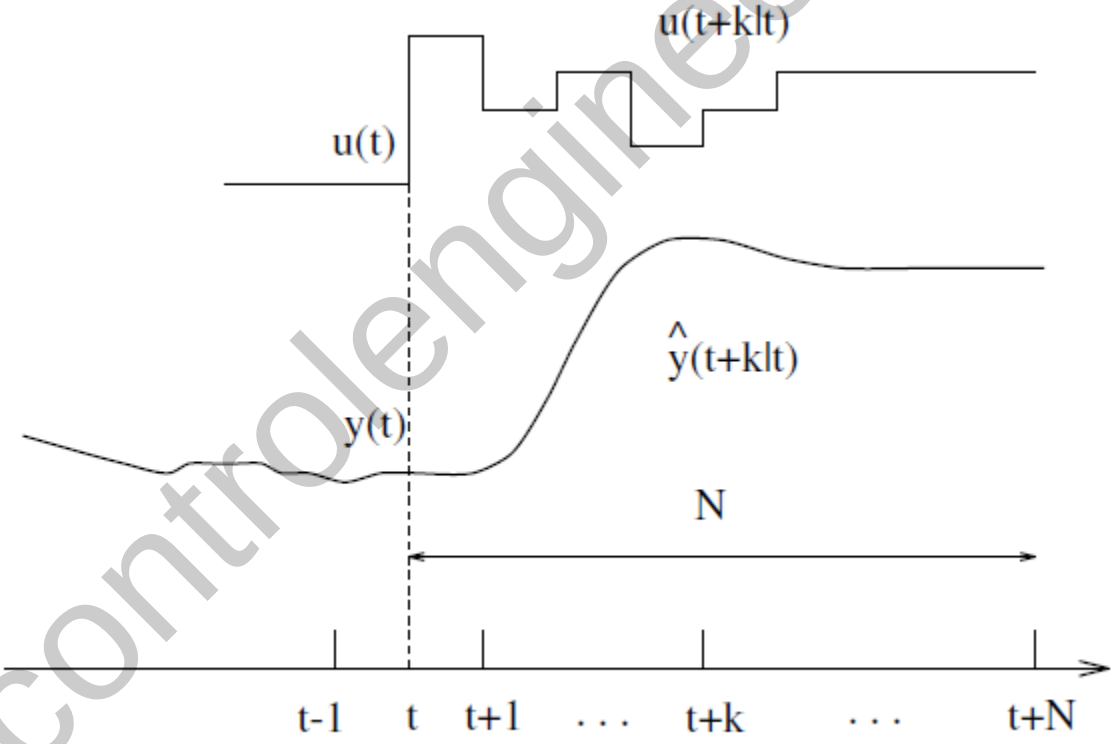


Fig. 1.1. MPC Strategy

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

1.1 MPC Strategy

الف)

- N: افق پیش بینی
- محاسبه خروجی های پیش بینی $y(t+k/t)$ برای $k=1\dots N$ وابسته به دو بخش:
  - بخش وابسته به مقادیر معلوم زمان گذشته ورودی و خروجی
  - بخش وابسته به سیگنال کنترل در زمان آینده $u(t+k/t)$ برای $k=0\dots N-1$

ب)

- محاسبه سیگنال کنترل بر مبنای بهینه سازی یک تابع هدف (کاهش خطای ردیابی تراژکتوری مرجع $w(t+k)$)
- انتخاب فرم مربعی برای معیار بهینه سازی (شامل خطای ردیابی، اندازه سیگنال کنترل)
- فرم بسته برای u : در شرایط سیستم خطی، بدون قید و معیار بهینه سازی مربعی

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

ج)

- فقط $u(t/t)$ به سیستم اعمال میشود
- در لحظه t+1 با وجود اطلاعات جدید $y(t+1)$ سیگنال کنترل مجدد محاسبه می شود (شروع مجدد از الف)
- $u(t+1/t)$ با $u(t+1/t+1)$ متفاوت است. در t+1 سیگنال $u(t+1/t+1)$ اعمال می شود

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- ساختار پایه برای پیاده سازی کنترل کننده MPC

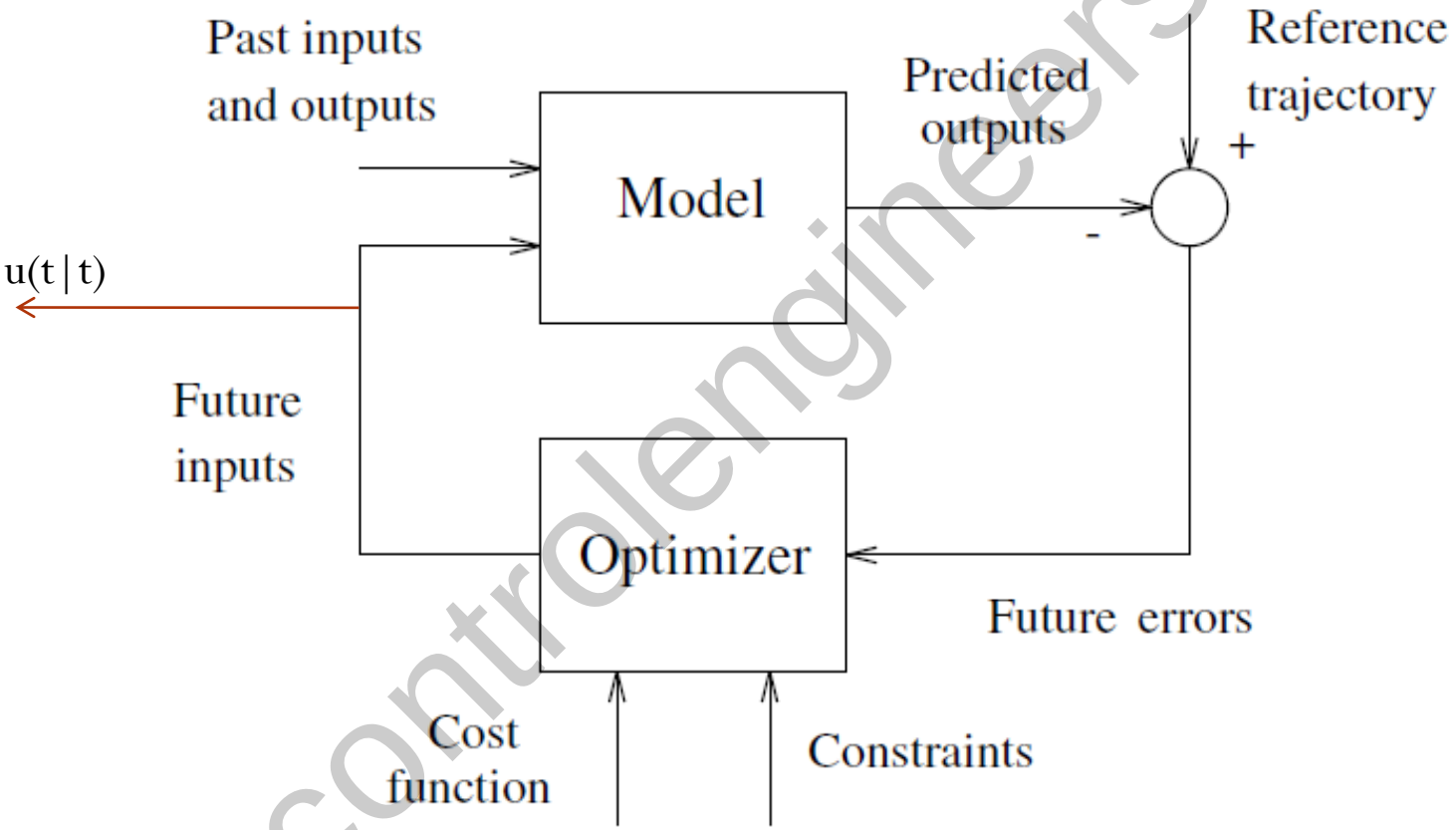


Fig. 1.2. Basic structure of MPC

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- انتخاب مدل:
  - پاسخ ضربه (Truncated Impulse Response Model)
  - پاسخ پله
  - تابع تبدیل (پارامترهای کمتر، پیچیدگی محاسبه کنترل، بیان تاخیر)
  - فضای حالت (MIMO ، بیان ساده پایداری و مقاوم بودن)
- Optimizer:
  - تولید سیگنال کنترل
  - سیگنال کنترل تابع صریح خطی از ورودی و خروجی است اگر تابع معیار مربعی باشد
  - در صورت وجود قید نیاز به الگوریتمهای بهینه سازی عددی
  - وابستگی سایز برنامه بهینه سازی به تعداد متغیرها و افق پیش بینی
  - قابلیت پیاده سازی در کامپیوتر معمولی
  - افزایش زمان محاسباتی برای کنترل کننده مقید و مقاوم نسبت به حالت بدون قید
  - کاهش پهنای باند قابل توجه سیستم حلقه بسته با وجود قید

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

1.1 MPC Strategy

- شباهت زیاد استراتژی MPC به رانندگی
  - معلوم بودن مسیر مرجع برای یک افق پیش بین
  - در نظر گرفتن مشخصه های خودرو (مدل ذهنی از خودرو)
  - محاسبه و اعمال سیگنال های کنترل (گاز، ترمز، فرمان)
  - اعمال فقط اولین نمونه از سیگنال کنترل

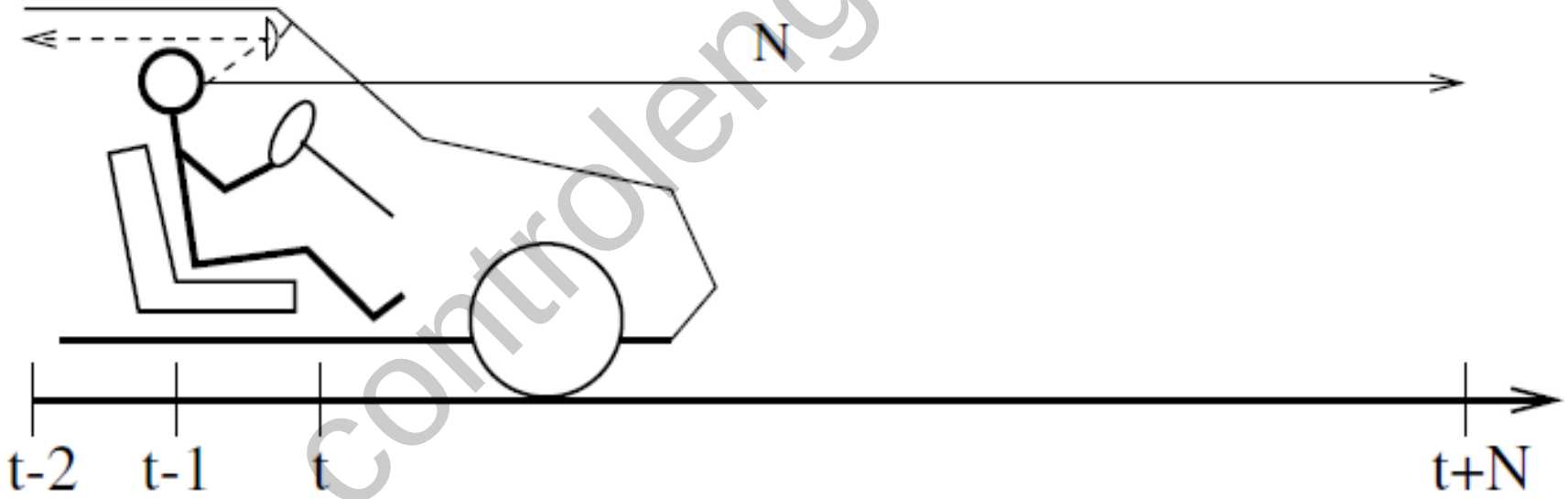


Fig. 1.3. MPC analogy

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

1.1 MPC Strategy

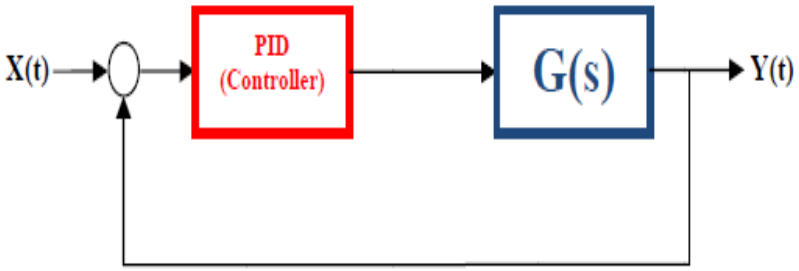
- مقاسیه با PID:
  - عملکرد PID فقط براساس خطاهای گذشته
  - عملکرد رانندگی با منطق PID شبیه رانندگی با بکارگیری آینه است
  - استفاده از MPC بدلیل اهمیت مسیر مرجع در رانندگی
  - ایده استفاده از PID که از setpoint آن یک نقطه از مسیرمطلوب آینده باشد (عدم مغایرت زیاد با MPC)

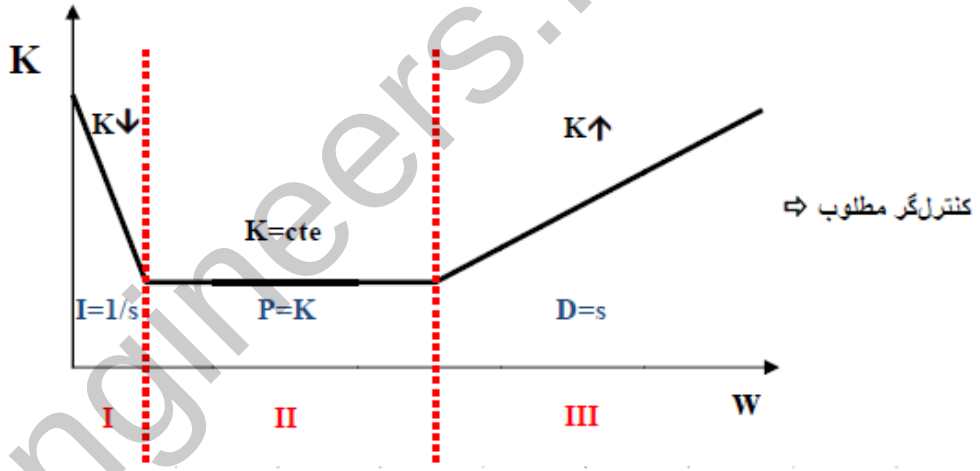
controlengineers.ir

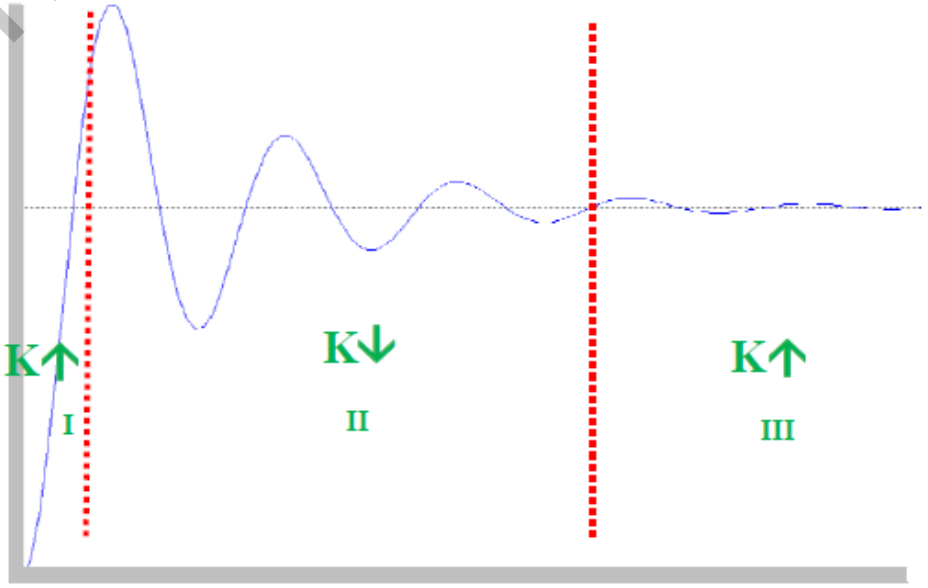
مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

1.1 PID Strategy

- PID: ۸۰٪ کنترل کننده های صنعت







controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Internal model control (IMC)

Jan Swevers

July 2006

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Contents of lecture

- The internal model principle and structure
- One-degree of freedom IMC
- IMC design procedure
- Application of IMC design to PID controller tuning
- Two-degrees of freedom IMC
- Application of IMC: Smith predictor
- Example

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Sources

- Internal model control: a comprehensive view, by Daniel E. Rivera, Dept. of Chemical, Bio and Materials Eng., Arizona State University, Tempe, USA, 1999.
- Internal model control, by Ming T. Tham, Chemical and Process Eng., University of Newcaslte upon Tyne, 2002.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

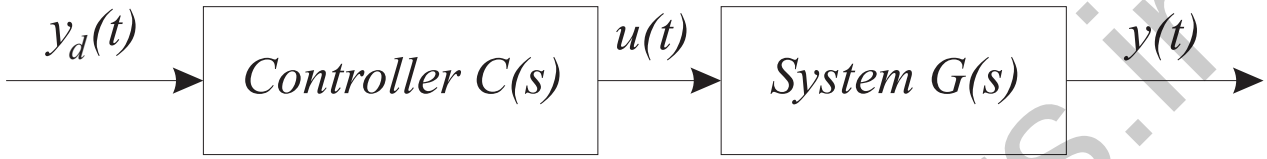
The internal model principle and structure

- The IMC philosophy relies on the internal model principle, which states: Accurate control can be achieved only if the control systems *encapsulates* (either implicitly or explicitly) some representation of the process to be controlled.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Example



- Suppose $\tilde{G}(s)$ is a model of $G(s)$.
- By setting $C(s)$ as the inverse of the model:

$$C(s) = \tilde{G}(s)^{-1}$$

and assuming that

$$\tilde{G}(s) = G(s)$$

then the output $y(t)$ will track the reference input $y_d(t)$ perfectly.

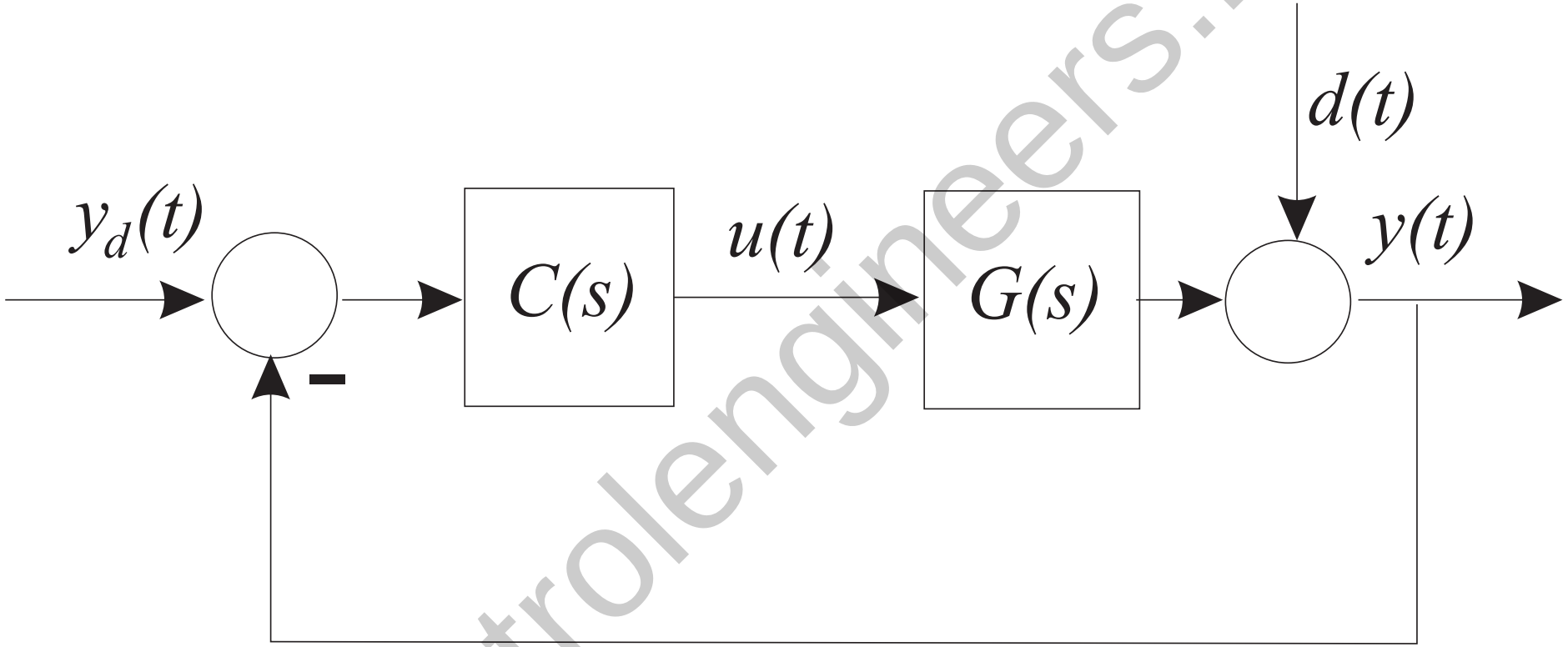
- However in this example no feedback, i.e. not robust w.r.t. model inaccuracies and disturbances.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Internal model control vs. classical control

- Classical control scheme

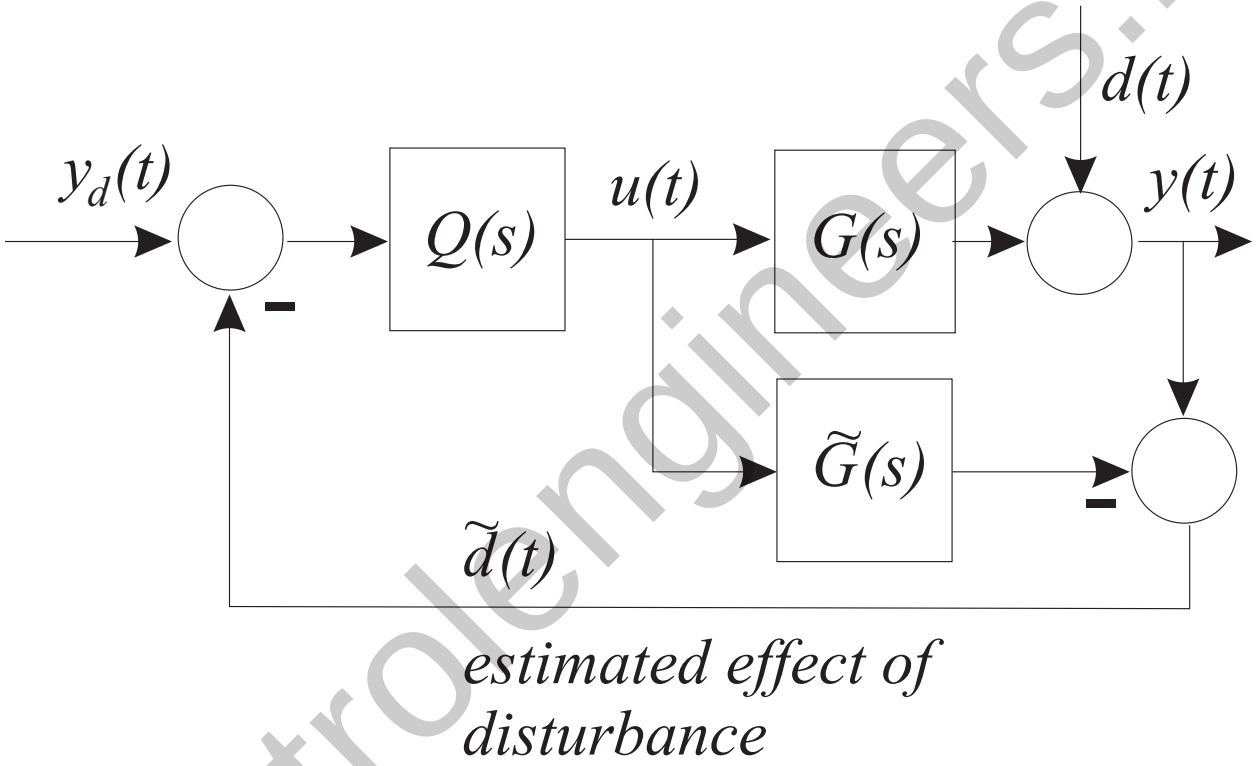


controlengineers.ir

controlengineers.ir
@controlengineers

Internal model control vs. classical control (2)

- IMC control scheme



controlengineers.ir

controlengineers.ir
@controlengineers

Internal model control vs. classical control (3)

- Comparison IMC structure and classical feedback structure: both structures are equivalent.

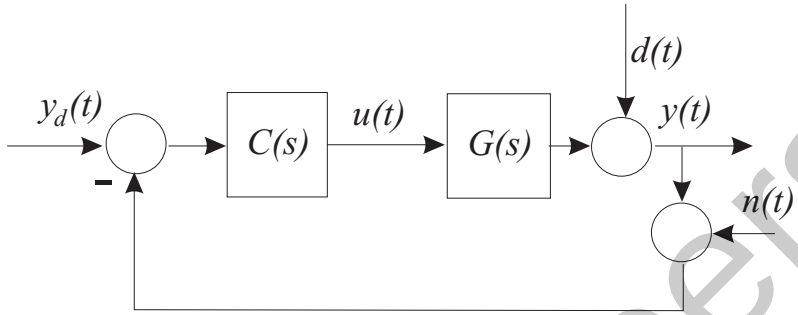
$$C(s) = \frac{Q(s)}{1 - \tilde{G}(s)Q(s)} \tag{1}$$

$$Q(s) = \frac{C(s)}{1 + \tilde{G}(s)C(s)} \tag{2}$$

controlengineers.ir

controlengineers.ir
@controlengineers

Analysis of classical control structure



$$
\begin{aligned}
Y &= \underbrace{\frac{G(s)C(s)}{1+G(s)C(s)}}_{T(s)} Y_d + \underbrace{\frac{1}{1+G(s)C(s)}}_{S(s)} D - \underbrace{\frac{G(s)C(s)}{1+G(s)C(s)}}_{T(s)} N \\
&= T(s)Y_d + S(s)D - T(s)N \\
U &= C(s)S(s)Y_d - C(s)S(s)D - C(s)S(s)N
\end{aligned}
$$

$S(s)$ is called the sensitivity function, and $T(s)$ is called the complementary sensitivity function: $S(s) + T(s) = 1$.

→ Controller enters the stability (robustness) and performance specifications in an inconvenient manner.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

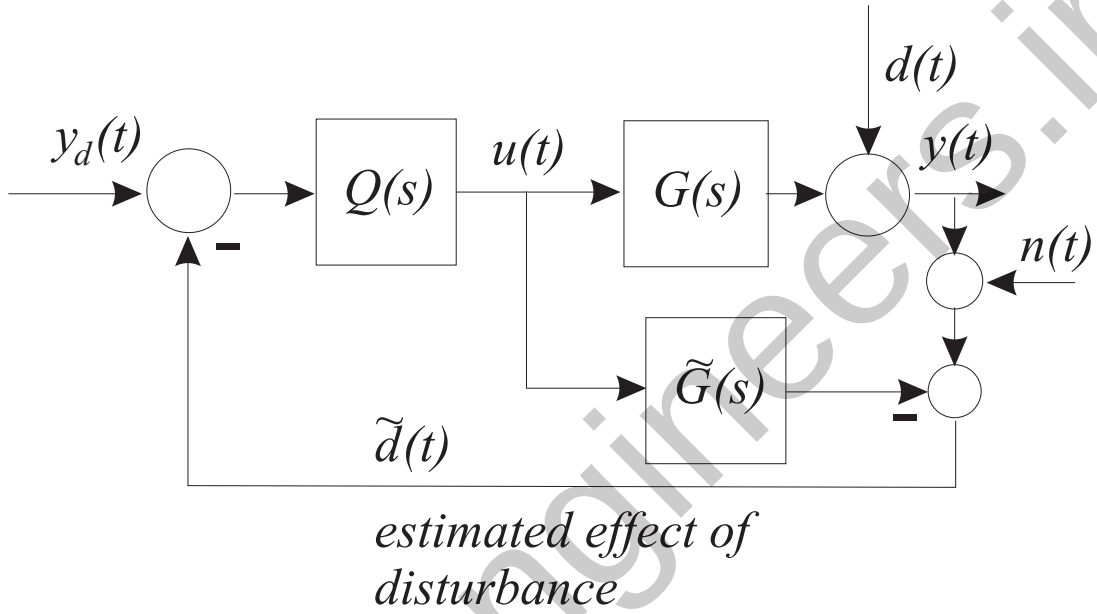
One DOF IMC

- Closed loop transfer function, stability, implementation
- Example
- Asymptotic closed-loop behavior
- Requirements for physical realizability

controlengineers.ir

controlengineers.ir
@controlengineers

Closed loop transfer function, stability, implementation



$$
\begin{aligned}
Y &= \frac{G(s)Q(s)}{1+Q(s)(G(s)-\tilde{G}(s))}(Y_d - N) + \frac{1-\tilde{G}(s)Q(s)}{1+Q(s)(G(s)-\tilde{G}(s))}D \\
&= T(s)Y_d + S(s)D - T(s)N \\
U &= C(s)S(s)Y_d - C(s)S(s)D - C(s)S(s)N
\end{aligned}
$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Closed loop transfer function, stability, implementation (2)

- In the absence of plant/model mismatch, i.e. $\tilde{G}(s) = G(s)$, we have:

$$T(s) = \tilde{G}(s)Q(s), \quad S(s) = 1 - \tilde{G}(s)Q(s)$$

yielding:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \tilde{G}(s)Q(s)Y_d(s) + (1 - \tilde{G}(s)Q(s))D(s) - \tilde{G}(s)Q(s)N(s) \\ U(s) &= Q(s)Y_d(s) - Q(s)D(s) - Q(s)N(s) \\ E(s) &= (1 - \tilde{G}(s)Q(s))Y_d(s) - (1 - \tilde{G}(s)Q(s))D(s) + \tilde{G}(s)Q(s)N(s) \end{aligned}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Closed loop transfer function, stability, implementation (3)

- The IMC system is internally stable if and only if both $G(s)$ and $Q(s)$ are stable (if $\tilde{G}(s) = G(s)$).
- If $G(s)$ is stable, the classical feedback system is stable if and only if $C(s)$, decomposed according to equation (12) yields a stable $Q(s)$:

$$Q(s) = \frac{C(s)}{1 + \tilde{G}(s)C(s)}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Closed loop transfer function, stability, implementation (4)

- We can conclude that the IMC structure offers the following benefits w.r.t. classical feedback:
  - No need to examine the roots of the characteristic polynomial $1 + C(s)G(s)$: simply examine the poles of $Q(s)$: simple stability (robustness) condition and analysis.
  - $S(s)$ and $T(s)$ depend upon $Q(s)$ is a simple matter, not true for $S(s)$ and $T(s)$ and $C(s)$ in classical control.
  - One can design $Q(s)$ instead of $C(s)$ without any loss of generality.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Example

- Consider the following system:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{15(s+2.5)}{(s+1)(s+3)(s+3)(s+5)}$$

- Design a classical regulator according to the following specifications
  1. maximal overshoot for step reference: 15%.
  2. No steady state error for output step disturbances.
- Transform this classical regulator into a 1-DOF IMC controller

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Example (2)

- Maximum overshoot of 15% requires a phase margin of approximately 50°.
- Choose a total margin of 60° to allow −10° phase lag of the PI at the cross-over frequency.
- PI controller:

$$\frac{B_c(s)}{A_c(s)} = \frac{K}{s}\left(s + \frac{1}{T_i}\right)$$

controlengineers.ir

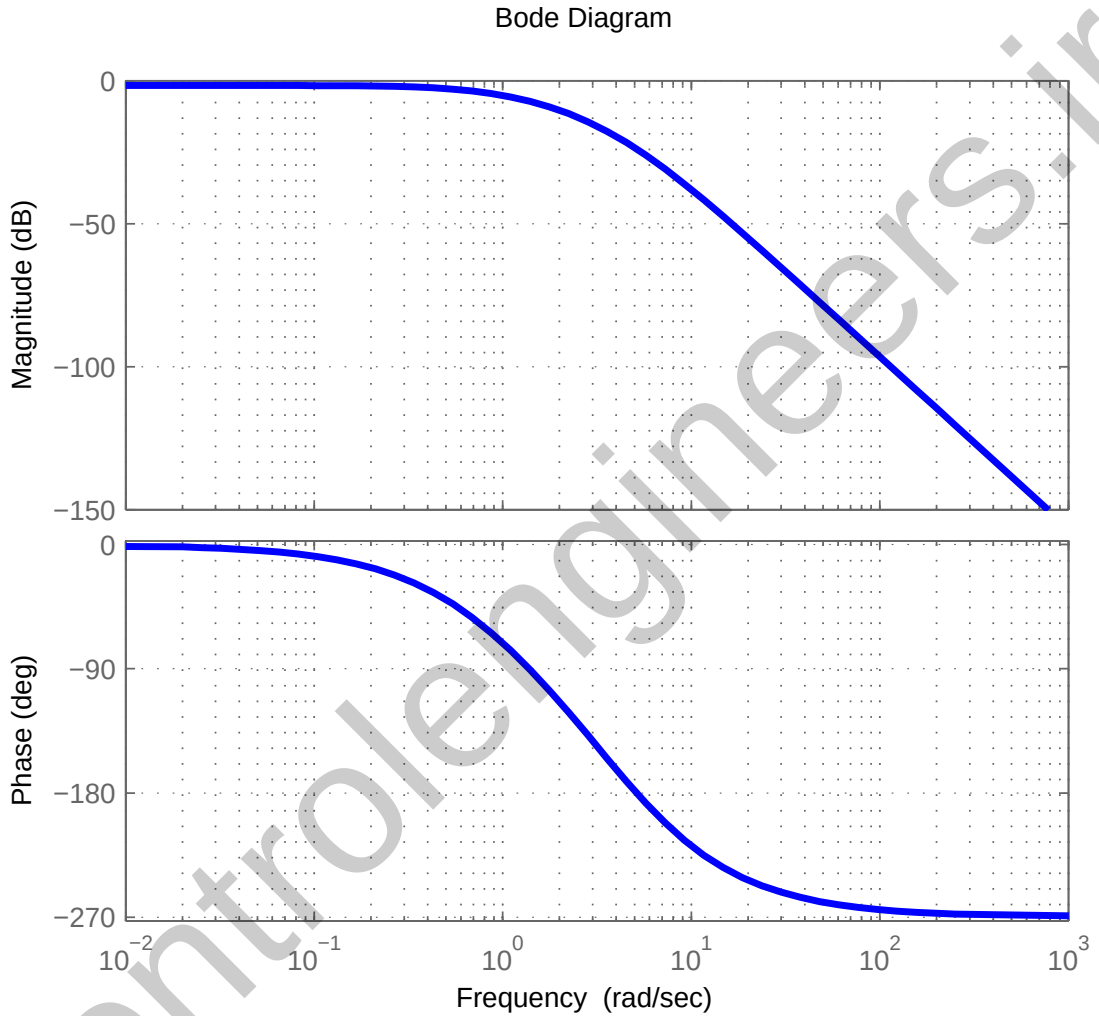
اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Example (3)

- Detect the frequency of the open-loop transfer function where the phase equals $-180 + 50 + 10 = -120°$: $\omega_c = 2.19\ rad/s$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers



controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Example (4)

- In order to have a phase lag of 10° at ω_c, T_i must satisfy:

$$T_i = \frac{\tan(90 - 10)}{\omega_c}$$

- K is selected such that the gain of the loop transfer function equals 1 at $s = j\omega_c$,

$$\left| \frac{B(s)B_c(s)}{A(s)A_c(s)} \right|_{s=j\omega_c} = 1$$

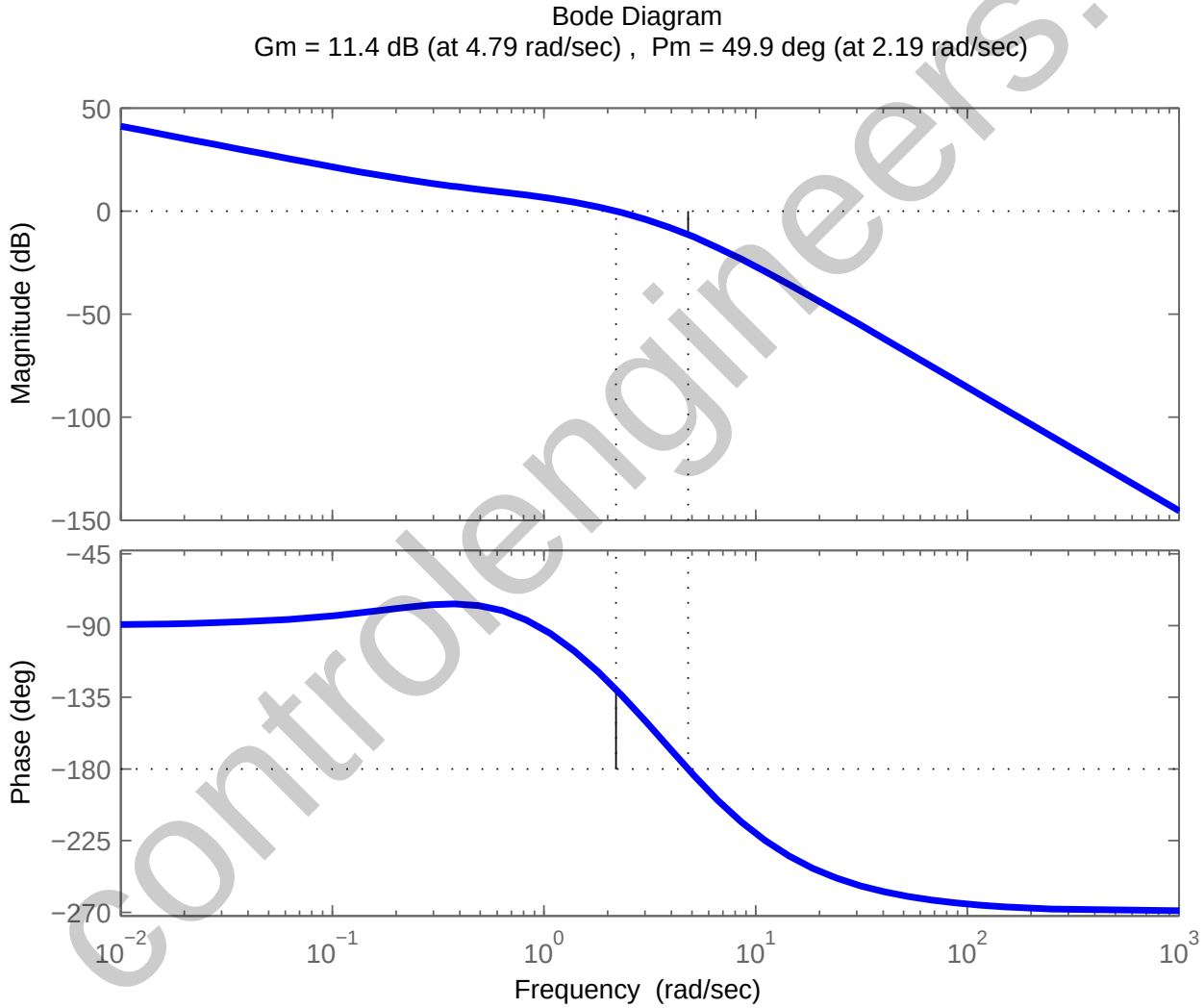
yielding: $K = 3.58$.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Example (5)

- resulting gain margin is 3.7 and phase margin is 50°.



controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Example (6)

- Resulting IMC controller (use (2)):

$$\frac{B_q(s)}{A_q(s)} = \frac{B_c(s)A(s)}{A_c(s)A(s)+B_c(s)B(s)}$$

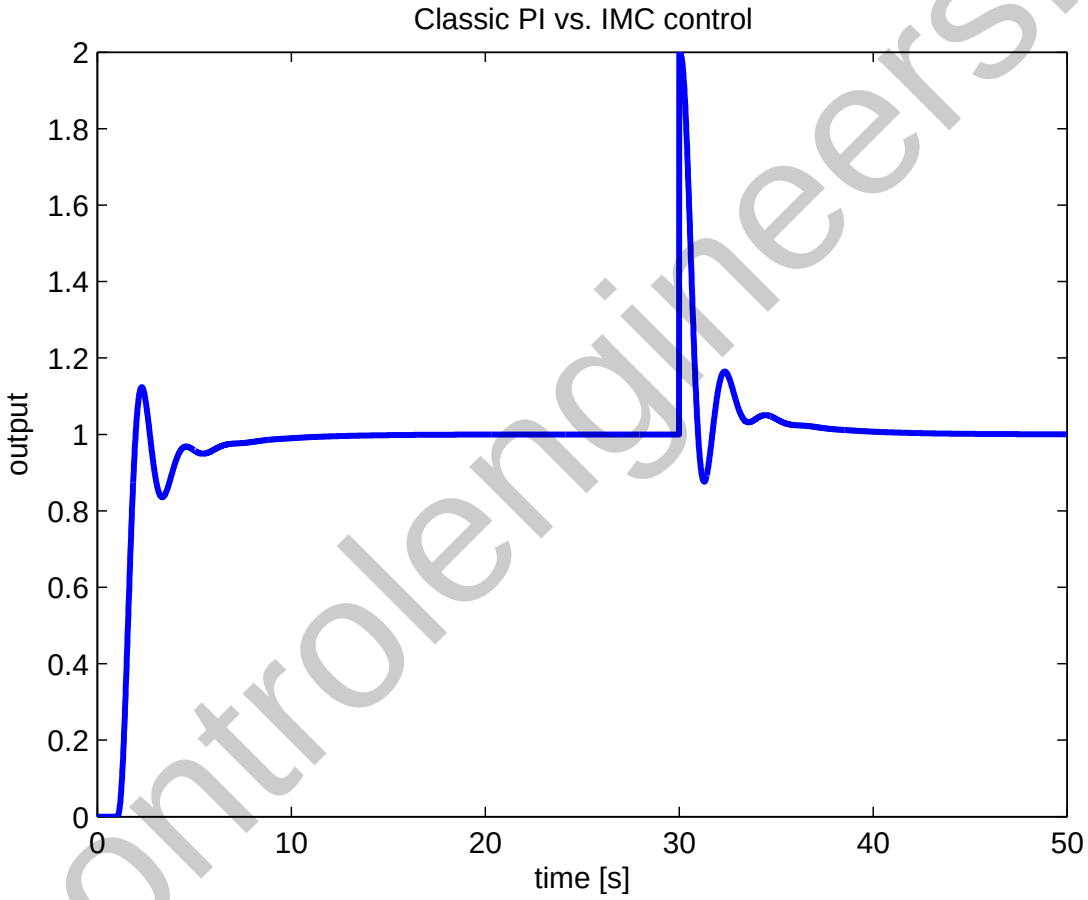
$$= \frac{3.58s^5+44.31s^4+195.43s^3+369.51s^2+276.92s+62.11}{s^5+12s^4+50s^3+137.66s^2+199.85s+51.76}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Example (7)

- Results for reference step at $T = 1s$, output disturbance step at $T = 30s$:



- There is no difference between classical control and IMC.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Asymptotic closed-loop behavior (system type)

Type 1 No steady state error for step reference or disturbance change if:

$$\lim_{s\to 0} \tilde{G}(s)Q(s) = T(0) = 1$$

Type 2 No steady state error for ramp reference or disturbance change if:

$$\begin{aligned} \lim_{s\to 0} \tilde{G}(s)Q(s) = T(0) &= 1 \\ \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds}\tilde{G}(s)Q(s) = \frac{dT(s)}{ds}|_{s=0} &= 0 \end{aligned}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Requirements for physical realizability on $Q(s)$

- *Stability*: The controller $Q(s)$ must generate bounded responses to bounded inputs: all poles of $Q(s)$ must lie in the LHP.
- *Properness*: Pure differentiation cannot be realized in practice: $Q(s)$ has to be **proper**, which means that:

$$\lim_{|s|\to\infty} Q(s)$$

must be finite (order of the numerator $\leq$ order of the denominator), or **strictly proper**:

$$\lim_{|s|\to\infty} Q(s) = 0$$

(order of the numerator $<$ order of the denominator)

controlengineers.ir

controlengineers.ir
@controlengineers

Requirements for physical realizability on $Q(s)$ (2)

- *Causality*: $Q(s)$ must be causal, which means that the controller must not require prediction, i.e. must rely on *current* and *past* plant measurements.

  A simple example of a noncausal transfer function is the inverse of a time delay transfer function:

  $$Q(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_c e^{+\theta s}$$

  or

  $$u(t) = K_c e(t + \theta)$$

- We assume that we have a mathematical model of the process (that is perfect).
- The usefulness of IMC lies in the fact that it allows us to concentrate on the controller design without having to be concerned with stability *provided that the process model* $\tilde{G}(s)$ *is a perfect representation of the stable process* $G(s)$.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

IMC design procedure

- IMC design procedure
- Choice of λ in $f(s)$
- Design for processes with zeros near the imaginary axis
- Example
- Why factor $\tilde{G}(s)$?

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

IMC design procedure

The IMC design procedure consists of two steps: The first step will insure that $Q(s)$ is stable and causal, the second step will require Q(s) to be proper.

(1) Factor the model in two parts

$$\tilde{G} = \tilde{G}_+ \tilde{G}_-$$

$\tilde{G}_+$ contains all non-minimal phase elements of the plant model: all RHP zeros and time delays. The factor $\tilde{G}_-$ is minimum phase and invertible, yielding an (intermediate) IMC controller:

$$\tilde{Q}(s) = \tilde{G}_-^{-1}$$

which is stable and causal (not necessarily proper).

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

IMC design procedure (2)

The factorization of $\tilde{G}_+$ from $\tilde{G}$ depends upon the **objective function** chosen. For example:

- *Integral-absolute-error (IAE)*-optimal for step setpoint and output disturbance changes:

$$\tilde{G}_+ = e^{-\theta s} \prod_i (-\beta_i s + 1), \quad \Re(\beta_i) > 0$$

- *Integral-square-error (ISE)*-optimal for step setpoint and output disturbance changes:

$$\tilde{G}_+ = e^{-\theta s} \prod_i \frac{(-\beta_i s + 1)}{(\beta_i s + 1)}, \quad \Re(\beta_i) > 0$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

IMC design procedure (3)

(2) Augment $\tilde{Q}(s)$ with a filter $f(s)$ such that the final IMC controller $Q(s) = \tilde{Q}(s)f(s)$ is also proper, yielding:

$$T(s) = \tilde{G}\tilde{Q}f, \quad S(s) = 1 - \tilde{G}\tilde{Q}f.$$

- The inclusion of the filter transfer function means that we no longer obtain "optimal control" as implied in step 1.
- We need filter forms that allow for no offset to type 1 and 2 inputs. For no offset for steps, we require that $T(0) = 1$, which requires that $Q(0) = \tilde{G}^{-1}(0)$ and forces:

$$f(0) = 1$$

- A common choice:

$$f(s) = \frac{1}{(\lambda s + 1)^n}$$

where the order n is selected large enough to make Q proper, while λ is an *adjustable parameter* which determines the speed-of-response.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

IMC design procedure (4)

– For no offset to a ramp input, in addition, the closed-loop must satisfy the following:

$$\frac{d}{ds}\tilde{G}(s)Q(s)|_{s=0} = \frac{dT(s)}{ds}|_{s=0} = 0$$

yielding:

$$\frac{d}{ds}\tilde{G}_+(s)f(s)|_{s=0} = 0$$

– One such filter that meets this condition is:

$$f(s) = \frac{(2\lambda - \tilde{G}'_+(0))s + 1}{(\lambda s + 1)^2}$$

where $'$ indicates the derivative to s.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

IMC design procedure (5)

– For various simple factorizations of non-minimum phase elements we have:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}(e^{-\theta s})|_{s=0} &= -\theta \\
\frac{d}{ds}(-\beta s+1)|_{s=0} &= -\beta \\
\frac{d}{ds}(\frac{-\beta s+1}{\beta s+1})|_{s=0} &= -2\beta
\end{aligned}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Choice of λ in $f(s)$

- λ is a tuning parameter to avoid excessive output noise amplification and to accommodate for modelling errors.
- Assume following system:

$$G(s) = \frac{Ke^{-Ts}}{\tau s + 1}$$

yielding

$$G(s)^{-1} = \frac{\tau s + 1}{K} e^{Ts}$$

- For

$$Q(s) = \frac{\tau s + 1}{K(\lambda s + 1)}$$

and small modelling errors: $\lambda < \tau$, yielding a lead network :

  - gain will increase from $1/|K|$ at low frequencies to $\tau/\lambda|K|$ at high frequencies
  - phase goes from zero at low frequencies to $\tan^{-1}\tau/\lambda$ at high frequencies (approaches 90 degrees as $\lambda \to 0$).

controlengineers.ir

controlengineers.ir
@controlengineers

Choice of λ in $f(s)$ (2)

- Assuming a perfect model, the closed loop response equals:

$$Y(s) = \frac{e^{-Ts}}{\lambda s + 1} Y_d(s) + \left(1 - \frac{e^{-Ts}}{\lambda s + 1}\right) D(s)$$

- Rule of thumb: to avoid excessive noise amplification, choose λ such that

$$Q(\infty)/Q(0) \leq 20$$

- Notation: Write $Q(s)$ as $Q(s, \lambda)$ to indicate its dependency on λ.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Design for processes with zeros near the imaginary axis

- If $Q(s)$ contains complex conjugated poles with low damping ratios, this term can cause an IMC to amplify noise excessively at these frequencies.
- Two simple options:
  1. Increase the filter time constant sufficiently to reduce the peaks to an acceptable level: often leads to large settling times $\rightarrow$ *not recommended*
  2. Do not exactly invert the low damping zeros, but add damping to the low damped zeros (ζ between 0.1 (faster response but more oscillations) and 0.5 (less oscillations, but slower response)).

controlengineers.ir

controlengineers.ir
@controlengineers

Example

- Consider the following system:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{s^2 + 2\zeta_1\omega_{n1}s + \omega_{n1}^2}{(s^2 + 2\zeta_2\omega_{n2}s + \omega_{n2}^2)(\alpha s + 1)}$$

  with $\zeta_1 = 0.01$, $\omega_{n1} = 6\pi$, $\zeta_2 = 0.1$, $\omega_{n2} = 20\pi$, and $\alpha = 0.015$.

- Design 3 IMC controllers and compare w.r.t. output noise amplification and step disturbance regulation.
  1. Classical IMC design: invert system and add first order filter to make $Q(s)$ proper: design such that the noise amplification factor is close to 1.
  2. Redesign this previous design by increasing the filter time constant in order to reduce oscillatory behavior of the command input due to step disturbance.
  3. Redesign the first design by adding damping to the low damped zeros.

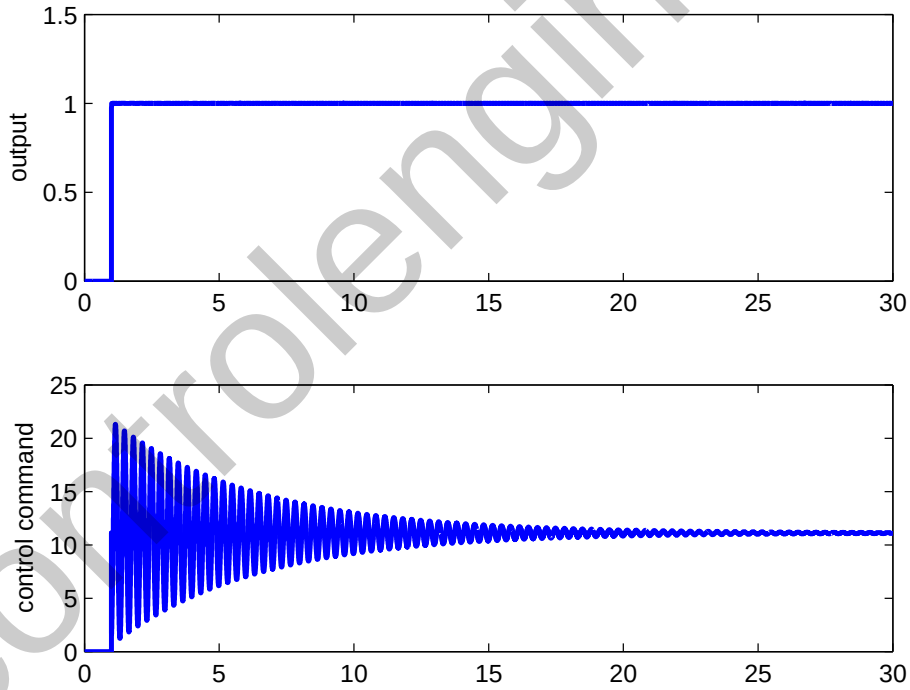
controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Example (2)

- **Design 1:**

$$Q(s) = \frac{A(s)}{B(s)(\lambda s + 1)}, \quad \lambda = 0.00135$$



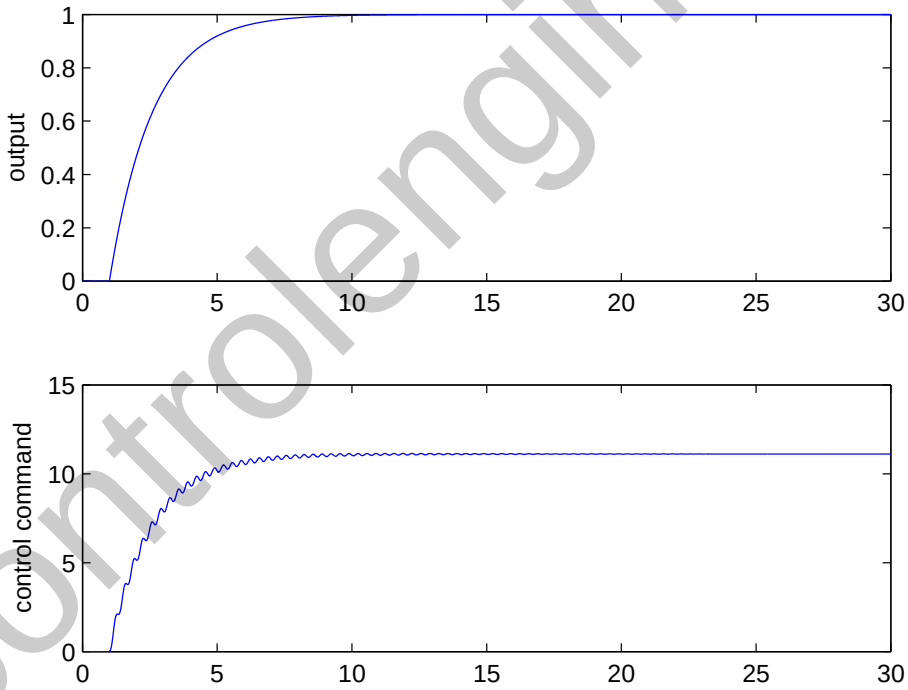
controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Example (3)

- **Design 2:**

$$Q(s) = \frac{A(s)}{B(s)(\lambda s + 1)}, \quad \lambda = 1.6$$



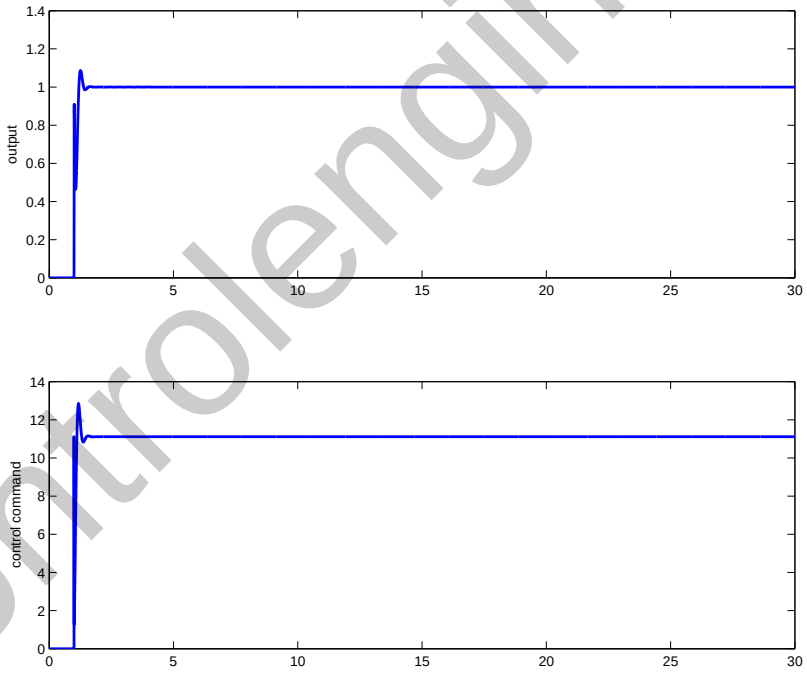
controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Example (4)

- **Design 3:**

$$Q(s) = \frac{A(s)}{(s^2 + 2\zeta_{1\prime}\omega_{n1}s + \omega_{n1}^2)(\lambda s + 1)}, \quad \zeta_{1\prime} = 0.5 \quad \lambda = 0.00135$$



controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Why factor $\tilde{G}(s)$

- Recall that from classical feedback:

$$Y(s) = T(s)Y_d(s) + S(s)D(s)$$

- Using the IMC structure, and for a perfect model $G(s) = \tilde{G}(s)$:

$$T(s) = \tilde{G}(s)Q(s), \quad S(s) = 1 - \tilde{G}(s)Q(s)$$

- "Perfect" control means $T(s) = 1$ and $S(s) = 0$, which implies that:

$$Q(s) = \tilde{G}^{-1}(s)$$

- However, in order for $u = Q(R - D)$ to be physical realizable, $Q(s)$ must be **stable**, **proper**, and **causal**.
  - non-minimum phase behavior (RHP zeros) will cause $Q(s) = \tilde{G}^{-1}(s)$ to be unstable
  - dead-time will cause $Q(s) = \tilde{G}^{-1}(s)$ to be non-causal
  - if $\tilde{G}(s)$ is strictly proper, $Q(s)$ will be improper.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Application of IMC design to PID controller tuning

- Example PI control
- Example PI control for non-minimum phase system
- Example PI control with filter
- Example PID control
- Example PID control with filter
- Example PID for 1st-order system with deadtime

controlengineers.ir

controlengineers.ir
@controlengineers

Example PI control

- System:

$$\tilde{G}(s) = \frac{K}{\tau s + 1}, \quad \tau > 0$$

- Reference input and disturbance: step
- Factor and invert $\tilde{G}(s)$: since $\tilde{G}_+ = 1$, we obtain:

$$\tilde{Q}(s) = \frac{\tau s + 1}{K}$$

- Augment with a first-order filter:

$$f(s) = \frac{1}{\lambda s + 1}$$

- The final form for $Q(s)$:

$$Q(s) = \frac{\tau s + 1}{K(\lambda s + 1)}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Example PI control (2)

- Solve for the classical feedback controller form:

$$C(s) = \frac{Q(s)}{1 - G(s)Q(s)} = \frac{\tau}{K\lambda}(1 + \frac{1}{\tau s}) = K_c(1 + \frac{1}{\tau_I s})$$

  which leads to the following tuning rules

$$K_c = \frac{\tau}{K\lambda}, \quad \tau_i = \tau$$

- The nominal closed-loop transfer functions are:

$$T(s) = \frac{1}{\lambda s + 1}, \quad S(s) = \frac{\lambda s}{\lambda s + 1}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Example PI control for non-minimum phase system

- System:

$$\tilde{G}(s) = \frac{K(-\beta s + 1)}{\tau s + 1}, \quad \tau, \beta > 0$$

- Reference input and disturbance: step
- Use the IAE-optimal factorization for step inputs:

$$\tilde{G}_+ = (-\beta s + 1), \quad \tilde{G}_- = \frac{K}{\tau s + 1}, \quad \tilde{Q} = \frac{\tau s + 1}{K}$$

- Augment with a first-order filter:

$$f(s) = \frac{1}{\lambda s + 1}$$

- The final form for $Q(s)$:

$$Q(s) = \frac{\tau s + 1}{K(\lambda s + 1)}$$

controlengineers.ir

controlengineers.ir
@controlengineers

Example PI control for non-minimum phase system (2)

- Solve for the classical feedback controller form yielding:

$$K_c = \frac{\tau}{K(\beta + \lambda)}, \quad \tau_i = \tau$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Example PI control with filter

- System (first order with LHP zeros):

$$\tilde{G}(s) = \frac{K(\beta s + 1)}{\tau s + 1}, \quad \tau, \beta > 0$$

- Reference input and disturbance: step
- Factor and invert $\tilde{G}(s)$: since $\tilde{G}_+ = 1$, we obtain:

$$\tilde{G}_-(s) = \frac{K(\beta s + 1)}{\tau s + 1}, \quad \tilde{Q}(s) = \frac{\tau s + 1}{K(\beta s + 1)}$$

- Augment with a first-order filter:

$$f(s) = \frac{1}{\lambda s + 1}$$

yielding:

$$Q(s) = \frac{\tau s + 1}{K(\beta s + 1)(\lambda s + 1)}$$

controlengineers.ir

controlengineers.ir
@controlengineers

Example PI control with filter (2)

- Solve for the classical feedback controller form yields PI with filter:

$$C(s) = K_c(1 + \frac{1}{\tau_I s})(\frac{1}{\tau_F s + 1})$$

with

$$K_c = \frac{\tau}{K(\lambda)}, \quad \tau_i = \tau, \quad \tau_F = \beta$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

PID control for second order non-minimum phase system

- System:

$$\tilde{G}(s) = \frac{K(-\beta s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}, \quad \tau_1, \tau_2, \beta > 0$$

- Reference input and disturbance: step
- Use the IAE-optimal factorization for step inputs:

$$\tilde{G}_+ = (-\beta s + 1), \quad \tilde{G}_- = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}, \quad \tilde{Q} = \frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{K}$$

- Augment with a first-order filter:

$$f(s) = \frac{1}{\lambda s + 1}$$

- The final form for $Q(s)$ (still improper):

$$Q(s) = \frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{K(\lambda s + 1)}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

PID control for second order non-minimum phase system (2)

- Solve for the classical feedback controller form yielding for the "ideal" PID controller:

$$C(s) = K_c(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s)$$

$$K_c = \frac{\tau_1 + \tau_2}{K(\beta + \lambda)}, \quad \tau_i = \tau_1 + \tau_2, \quad \tau_D = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Example PID control with filter for second order non-minimum phase system

- System:

$$\tilde{G}(s) = \frac{K(-\beta s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}, \quad \tau_1, \tau_2, \beta > 0$$

- Reference input and disturbance: step
- Use the ISE-optimal factorization for step inputs:

$$\tilde{G}_+ = \frac{-\beta s + 1}{\beta s + 1}, \quad \tilde{G}_- = \frac{K(\beta s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}, \quad \tilde{Q} = \frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{K(\beta s + 1)}$$

- Augment with a first-order filter:

$$f(s) = \frac{1}{\lambda s + 1}$$

- The final form for $Q(s)$:

$$Q(s) = \frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{K(\lambda s + 1)(\beta s + 1)}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Example PID control with filter for second order non-minimum phase system (2)

- Solve for the classical feedback controller form yielding for the PID controller with filter:

$$C(s) = K_c(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s)(\frac{1}{\tau_T s + 1})$$

$$K_c = \frac{\tau_1 + \tau_2}{K(2\beta + \lambda)}, \quad \tau_i = \tau_1 + \tau_2, \quad \tau_D = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2}, \quad \tau_F = \frac{\beta\lambda}{2\beta + \lambda}$$

controlengineers.ir

controlengineers.ir
@controlengineers

Example PID for 1st-order system with deadtime

- System:

$$\tilde{G}(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{\tau s + 1}$$

- Padé approximation of time delay:

$$\tilde{G}(s) \approx \frac{K(-\frac{\theta}{2}s + 1)}{(\frac{\theta}{2}s + 1)(\tau s + 1)}$$

which is a second order system with RHP zero (see earlier), which leads to the following PID tuning rules (IAE-optimal):

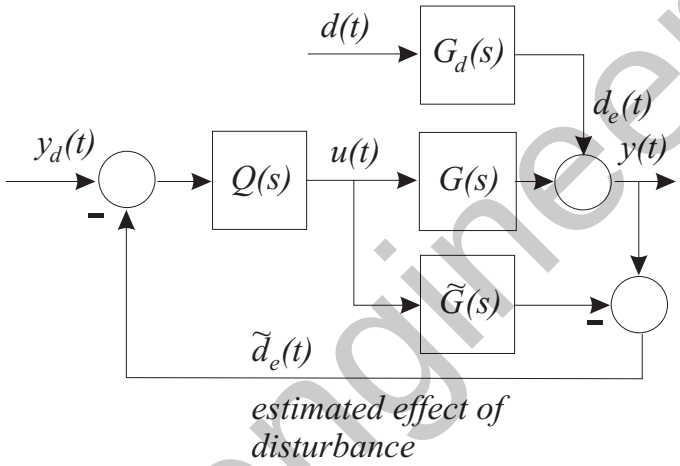
$$K_c = \frac{2\tau + \theta}{K(\theta + 2\lambda)}, \quad \tau_i = \tau + \frac{\theta}{2}, \quad \tau_D = \frac{\tau\theta}{2\tau + \theta}$$

controlengineers.ir

controlengineers.ir
@controlengineers

Two DOF IMC

Consider a more general situation with a one-DOF IMC controller:



- Design was focussed on achieving a good response to a step setpoint change.
- If the disturbance enters directly into the output ($G_d(s) = 1$): controller works equally well for a step disturbance: the signal that enters the controller is the setpoint minus the disturbance estimate.
- If the disturbance enters through the process ($G_d(s) = G(s)$): controller can be inadequate (see example on next slide)

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Section overview

- Example : motivation
- Structure of the 2dof IMC
- Design of $Q_r(s)$
- Design of $QQ_d(s)$
- Examples : comparison with one-DOF

controlengineers.ir

controlengineers.ir
@controlengineers

Example : motivation

- Models:

$$\tilde{G}(s) = \tilde{G}_d(s) = G(s) = G_d(s) = \frac{e^{-s}}{4s+1}$$

- One-DOF IMC:

$$Q(s) = \frac{4s+1}{\lambda s+1}$$

with $\lambda = 0.2$, to yield an output noise amplification of 20, i.e. $Q(\infty)/Q(0) = 20$.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Example : motivation (2)

- Resulting input $U(s)$ and output $Y(s)$ for a step disturbance $D(s) = 1/s$:

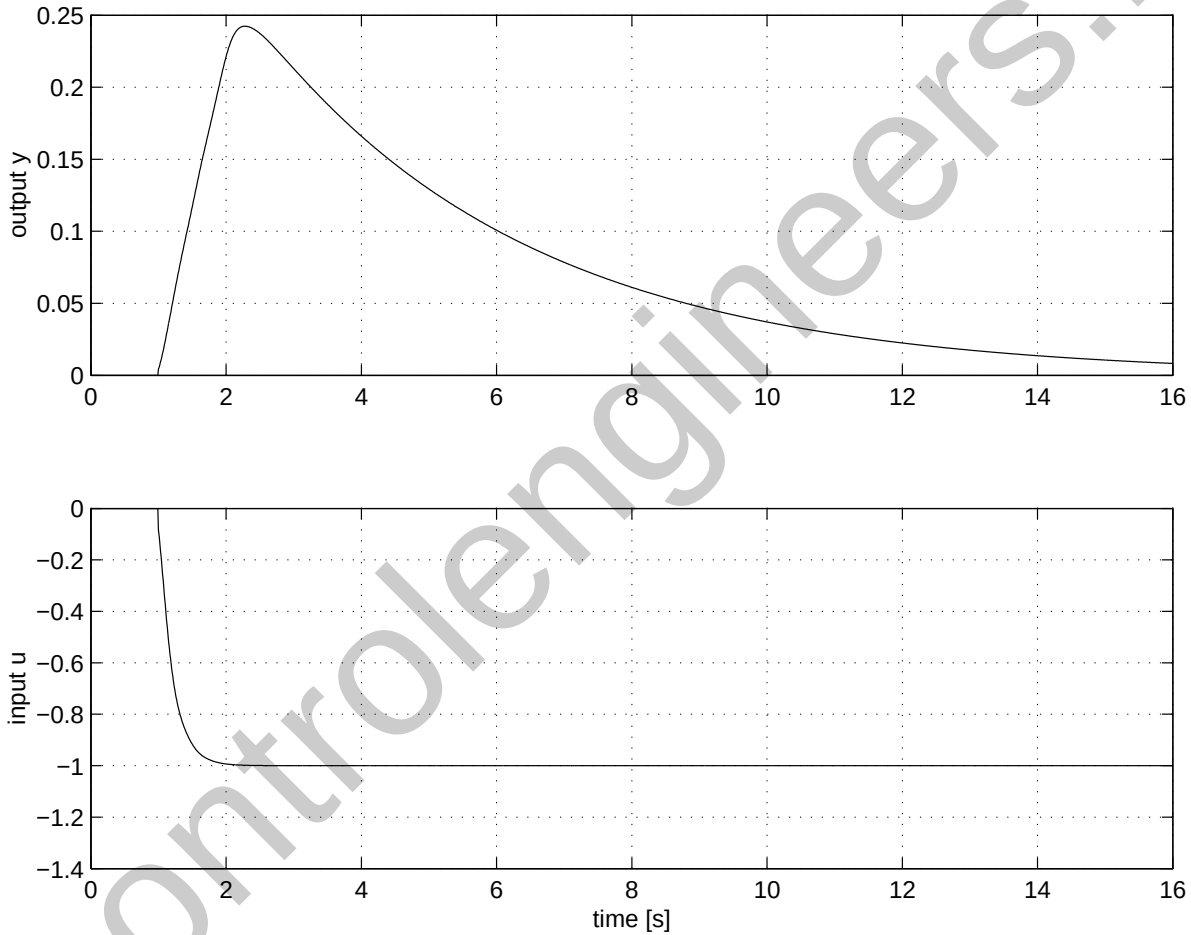
$$
\begin{aligned}
U(s) &= -\frac{G_d(s)Q(s)}{s} = \frac{-e^{-s}}{s(0.2s+1)} \\
Y(s) &= \frac{(1-G(s)Q(s))G_d(s)}{s} = \left(1-\frac{e^{-s}}{(0.2s+1)}\right)\frac{e^{-s}}{(4s+1)s} \\
&= \left(\frac{1}{s}-\frac{4}{4s+1}\right)e^{-s} - \left(\frac{1}{s}+\frac{0.01s}{0.2s+1}-\frac{4.21}{4s+1}\right)e^{-2s} \\
y(t) &= 0.274e^{-0.25(t-2)} - 0.0526e^{-5(t-2)}, \quad \text{for } t \geq 2
\end{aligned}
$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Example : motivation (3)

- Resulting input $U(s)$ and output $Y(s)$ for a step disturbance $D(s) = 1/s$:



- $$y(t) = 0.274e^{-0.25(t-2)} - 0.0526e^{-5(t-2)}, \quad \text{for } t \geq 2$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

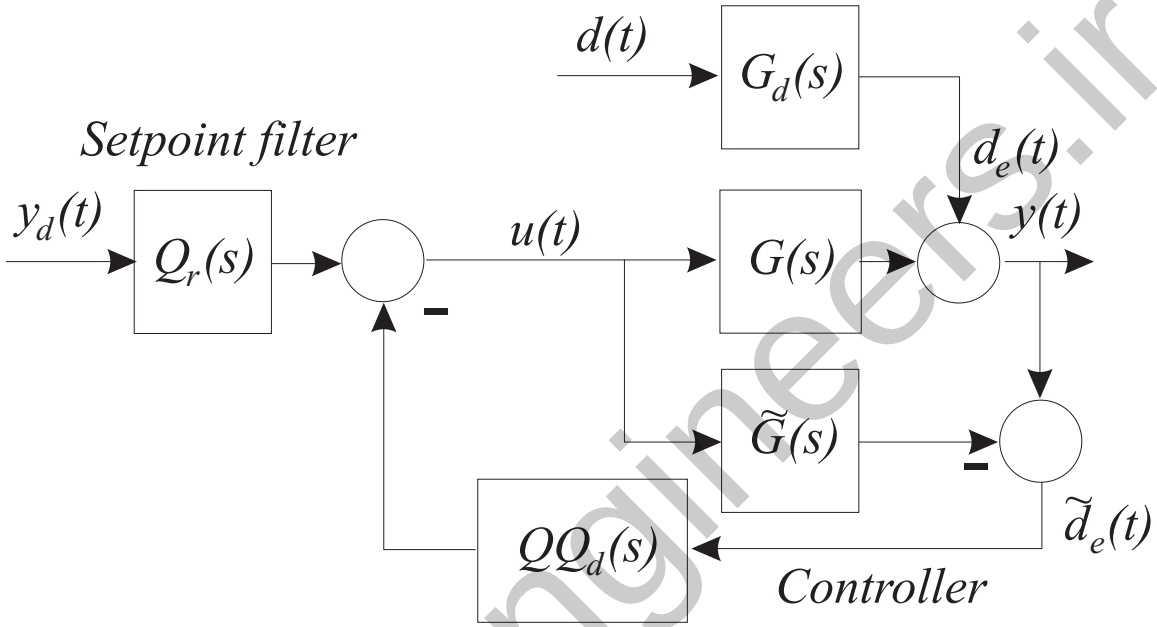
Example : motivation (3)

- The term $0.274e^{-0.25(t-2)}$ gives rise to a long tail in the response.
- To remove this term, we can design a IMC controller so that the $1 - \tilde{G}Q$ has a zero at $s = -0.25$, thereby cancelling the pole in the disturbance lag at $s = -0.25$.
- However, choosing the IMC controller like this, will generally degrade the setpoint response, so we require additional freedom: 2 dof IMC.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Structure of the 2dof IMC



controlengineers.ir

- Design the controller $QQ_d(s)$ to reject disturbances.
- Design the setpoint filter $Q_r(s)$ to shape the response to setpoint changes.
- Responses (for perfect model):

$$\begin{aligned} Y(s) &= \tilde{G}(s)Q_r(s)Y_d(s) + \left(1 - \tilde{G}(s)QQ_d(s)\right) G_d(s)D(s) \\ U(s) &= Q_r(s)Y_d(s) + QQ_d(s)G_d(s)D(s) \end{aligned}$$

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Design of setpoint filter $Q_r(s)$

- Design of $Q_r(s)$ like a 1 DOF IMC.
- No noise amplification limit on λ_r: nevertheless, very small values of λ_r are not recommended to avoid control effort saturation.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Design of controller $QQ_d(s)$

- Closed-loop disturbance transfer function:

$$Y(s) = \left(1 - \tilde{G}(s)QQ_d(s)\right)\tilde{G}_d(s)D(s)$$

- Consider $QQ_d(s)$ to be composed of two terms: $Q(s,\lambda)$ and $Q_d(s,\lambda)$.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Design procedure

1) Select $Q(s,\lambda)$ as for the 1DOF IMC: $Q(s,\lambda)$ inverts a portion of the process model $\tilde{G}(s)$, and add a filter $1/(\lambda s+1)^r$.

2) Select $Q_d(s,\lambda)$ as:

$$Q_d(s,\lambda,\alpha) = \frac{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i s^i}{(\lambda s+1)^n}, \quad \alpha_0 = 1$$

where n is the number of poles in $\tilde{G}_d(s)$ to be cancelled by the zeros of $1-\tilde{G}(s)QQ_d(s)$.

3) Select a trial value for λ.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Design procedure (2)

4) Find the values of α_i by solving following equation for each of the n distinct poles of $\tilde{G}_d(s)$ that are to be removed:

$$\left(1 - \tilde{G}(s)QQ_d(s,\lambda,\alpha)\right)|_{s=-1/\tau_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

where τ_i is the time constant associated to the ith pole of $\tilde{G}_d(s)$

- For complex conjugate pole pairs: both real and imaginary parts of this equation are set to zero.
- Finding α_i requires solving a set of linear equations in α_i.
- If $\tilde{G}_d(s)$ contains repeated poles, then the derivatives are set to zero, up to order one less than the number of repeated poles, e.g. for $\tilde{G}_d(s) = 1/(\tau_j s + 1)^r$:

$$\frac{d^k}{ds^k}\left(1 - \tilde{G}(s)QQ_d(s,\lambda,\alpha)\right)|_{s=-1/\tau_j} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, r-1$$

5) Adjust the value of λ and repeat step 4 until the desired noise amplification is achieved.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Example : comparison with one-DOF IMC

- System transfer functions:

$$\tilde{G}(s) = G(s) = \frac{e^{-s}}{4s+1}$$

- Disturbances enter at the system input.
- Comparison of different designs for unit step disturbance rejection:
  design 1: for 1DOF and noise amplification = 20.
  design 2: for 2DOF and noise amplification = 20.

controlengineers.ir

controlengineers.ir
@controlengineers

Example : comparison with one-DOF IMC (2)

Design 1

- Select $\lambda = 0.2$ to achieve a noise amplification $= 20$.
- $\tilde{G}_+(s) = e^{-s}$
- This yields (IAE optimal):

$$Q(s) = \frac{4s+1}{\lambda s+1}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Example : comparison with one-DOF IMC (3)

Design 2

- $Q_r(s)$ the same as for 1DOF IMC:

$$Q_r(s) = \frac{4s+1}{\lambda s+1}$$

  with $\lambda = 0.2$

- Select for $Q(s)$ of $QQ_d(s)$ the same lambda:

$$Q(s) = \frac{4s+1}{\lambda s+1}$$

- There is one unwanted pole that has to be cancelled $s = -0.25$, so we propose:

$$Q_d(s) = \frac{\alpha_1 s+1}{\lambda s+1}$$

  with the same trial value for $\lambda = 0.2$.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

– α_1 is set such that:

$$\left(1 - \frac{e^{-s}}{4s+1}\frac{1}{\lambda s+1}\frac{\alpha_1 s+1}{\lambda s+1}\right)_{s=-0.25} = 0$$

yielding $\alpha = 1.1885$.

– Check the noise amplification factor:

$$QQ_d(\infty)/QQ_d(0) = \frac{4\alpha}{\lambda^2} = 119$$

which is too large.

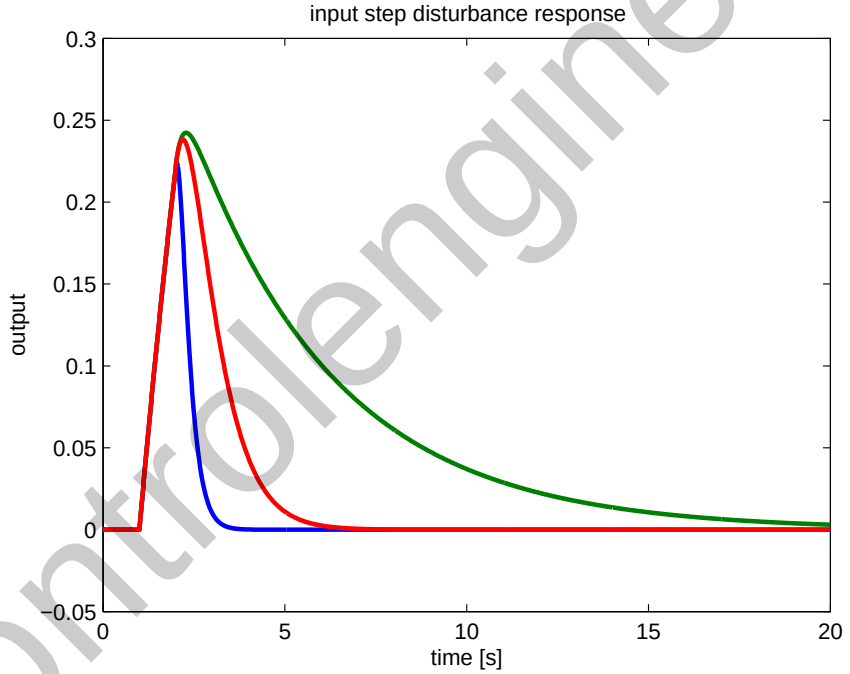
controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Example : comparison with one-DOF IMC (4)

Design 2 continued

– Now select larger value for λ to achieve a noise amplification = 20 (iterative process): we take $\lambda = 0.58$ for $Q(s)$ and for $Q_d(s)$, yielding $\alpha = 1.7227$ and a noise amplification of ≈ 20.



Response on step input disturbance: IMC 1-DOF (green), IMC 2-DOF (red), IMC 2-DOF with high noise amplification (blue).

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Example 2: comparison with one-DOF IMC

- System transfer functions:

$$\tilde{G}(s) = G(s) = \frac{e^{-s}}{s^2 + 0.2s + 1}$$

- Disturbances enter at the system input.
- Comparison of different designs for unit step disturbance rejection:
  design 1: for 1DOF and noise amplification = 20.
  design 2: for 2DOF and noise amplification = 20.

controlengineers.ir

controlengineers.ir
@controlengineers

Example 2: comparison with one-DOF IMC (2)

Design 1

- Select $\lambda = 0.22$ to achieve a noise amplification $= 20$.
- $\tilde{G}_+(s) = e^{-s}$
- This yields (IAE optimal):

$$Q(s) = \frac{s^2 + 0.2s + 1}{(\lambda s + 1)^2}$$

controlengineers.ir

controlengineers.ir
@controlengineers

Example 2: comparison with one-DOF IMC (3)

Design 2

- $Q_r(s)$ the same as for 1DOF IMC:

$$Q_r(s) = \frac{s^2 + 0.2s + 1}{(\lambda s + 1)^2}$$

  with $\lambda = 0.22$

- Select for $Q(s)$ of $QQ_d(s)$ the same $\lambda = 0.6$ (iterative process to achieve the same noise amplification = 20:

$$Q(s) = \frac{s^2 + 0.2s + 1}{(\lambda s + 1)^2}, \quad \lambda = 0.6$$

- Select second order numerator parameters such that complex conjugated system poles are cancelled:

$$Q_d(s) = \frac{\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + 1}{(\lambda s + 1)} = \frac{2.4s^2 + 0.32s + 1}{(\lambda s + 1)}$$

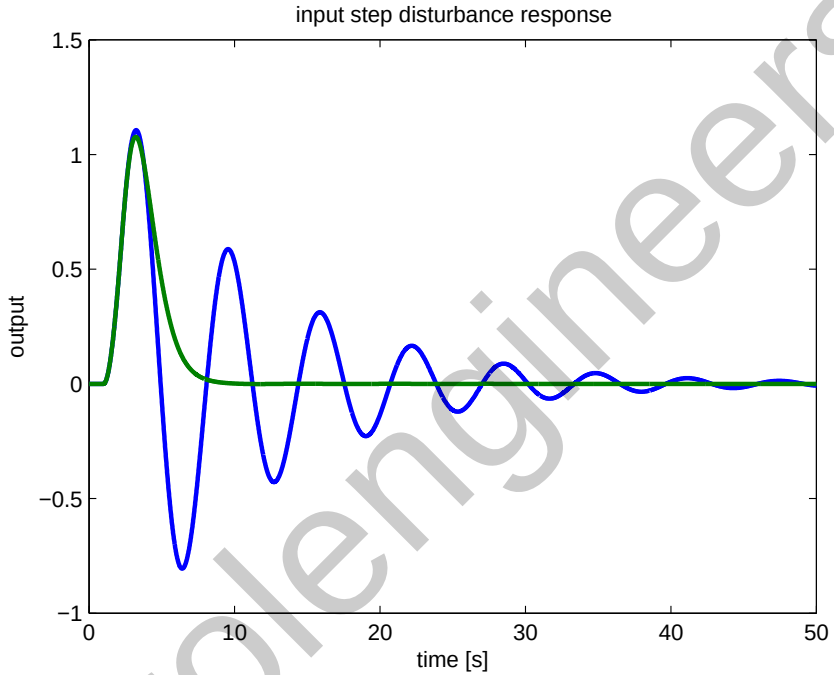
  with $\lambda = 0.6$, yielding $QQ_d(\infty)/QQ_d(0) = 20$.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Example 2 : comparison with one-DOF IMC (3)

Results



Response on step input disturbance: IMC 1-DOF (blue), IMC 2-DOF (green)

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Application of IMC: Smith predictor for time delay compensation

The presence of dead time in the control loops has two major consequences:

- It complicates the analysis and the design of feedback controllers.
- It makes satisfactory control performance more difficult to achieve.

This part of the course is based on: The Control Handbook, editor William S. Levine, 1996, CRC Press in cooperation with IEEE Press, ISBN 0-8493-8570-9, 224-237.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Section overview

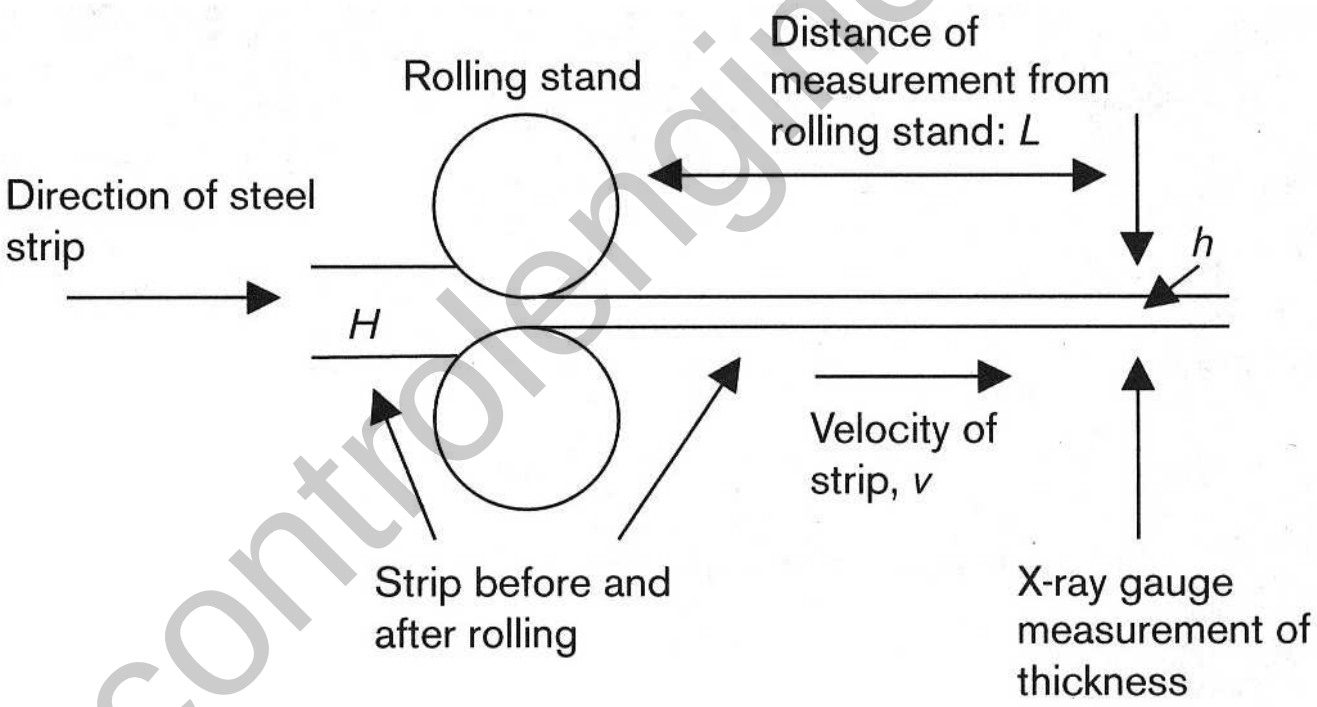
- Origin of time delay (or dead time) in systems
- Control difficulties due to time delay
- The Smith predictor
- Relation with IMC
- Practical, robust and relative stability: example
- Practical stability condition
- Robustness in case of dead-time mismatch only

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Origin of time delay (or dead time) in systems

- Time delay in systems: generally as a result of material being transported from the site of the actuator to another location where the sensor takes its reading.
- Example: steel rolling mill



controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Origin of time delay (or dead time) in systems (2)

- Position controlled hydraulic pistons change the thickness.
- Position controller is a high bandwidth PID controller that controls the servo valves based on piston position feedback.
- Dynamic behavior of the position controlled hydraulic pistons:

$$h_r(t) = \frac{b}{\tau s + 1} u(t)$$

  where $u(t)$ is the position reference signal, and $h_r(t)$ is the thickness of the steel as it comes out of the rollers.
- The thickness $h(t)$ is measured by an X-ray gaugemeter at a distance L away from the rollers. Assuming that the strip travels at a constant velocity v, the time delay is: $T_d = v/L$:

$$h(t) = e^{-T_d s} h_r(t)$$

- The total model is:

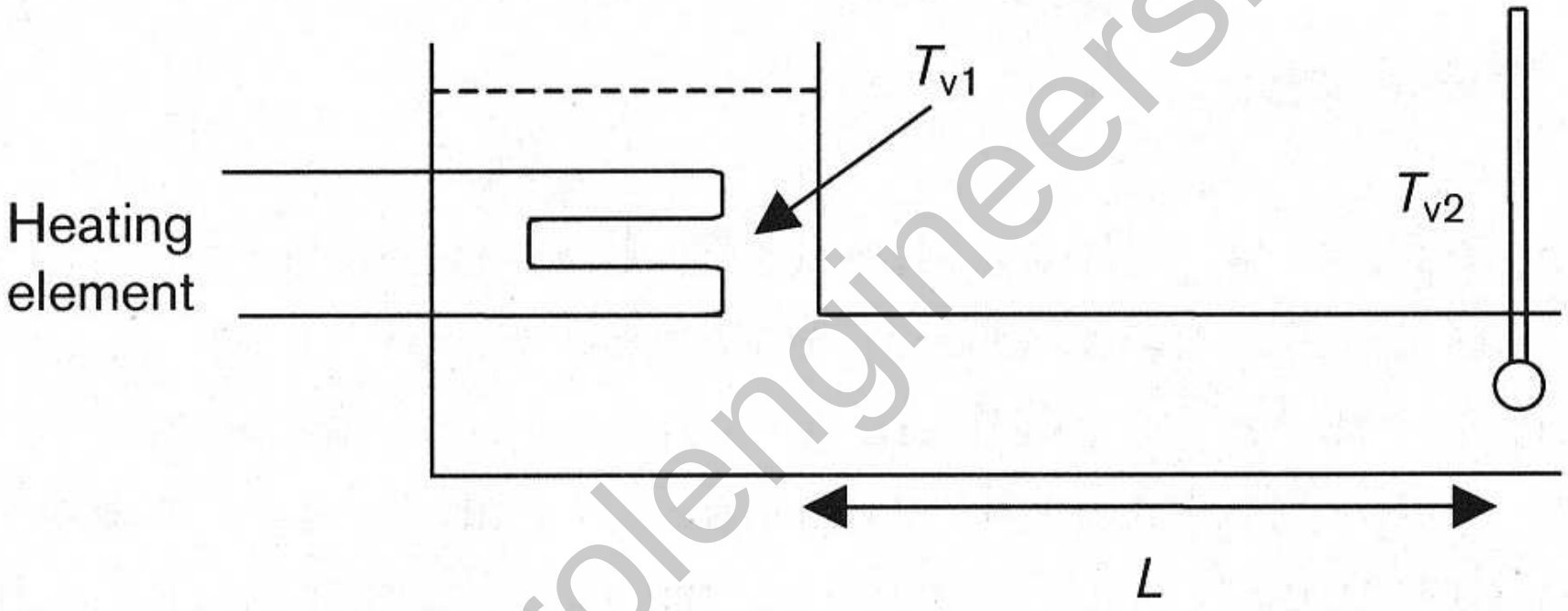
$$h(t) = e^{-T_d s} \frac{b}{\tau s + 1} u(t)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Origin of time delay (or dead time) in systems (3)

- Example: heating process



controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Origin of time delay (or dead time) in systems (4)

- Consider a small vessel which contains a liquid which is being heated. The transfer function for the heating system is approximated by the following first order model:

$$T_{v1}(t) = \frac{b}{\tau s + 1} i(t)$$

  where T_{v1} is the temperature close to the heating element and $i(t)$ the current that is send to the heating element (system input).

- The measurement of the temperature of the liquid flowing out of the vessel T_{v2} is taken downstream of the vessel, causing a delay of T_d.

$$T_{v2} = e^{-T_d s} T_{v1}$$

- The total model is:

$$T_{v2} = e^{-T_d s} \frac{b}{\tau s + 1} i(t)$$

controlengineers.ir

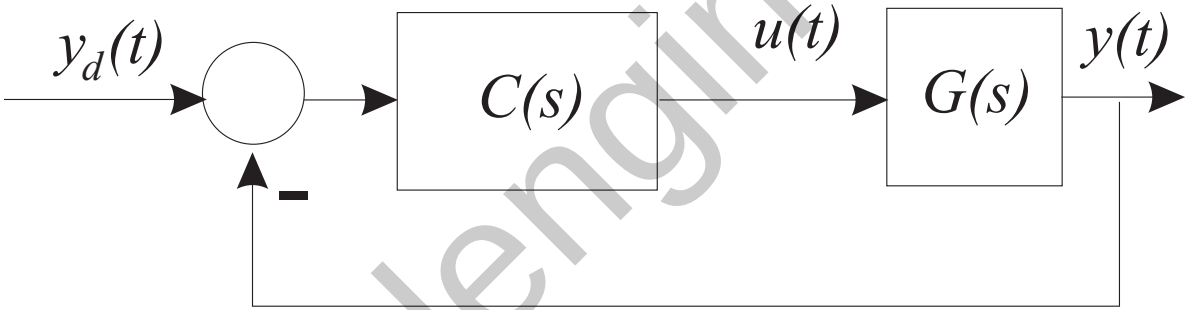
اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Control difficulties due to time delays

- Consider a process with time delay θ:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = G_0(s)e^{-\theta s}$$

- Consider the following feedback configuration:



- Assume e.g. $C(s) = K$, and $G_0(s) = 1/(\tau s + 1)$, yielding the following closed-loop transfer function:

$$\frac{Y(s)}{Y_d(s)} = \frac{Ke^{-\theta s}}{\tau s + 1 + Ke^{-\theta s}}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

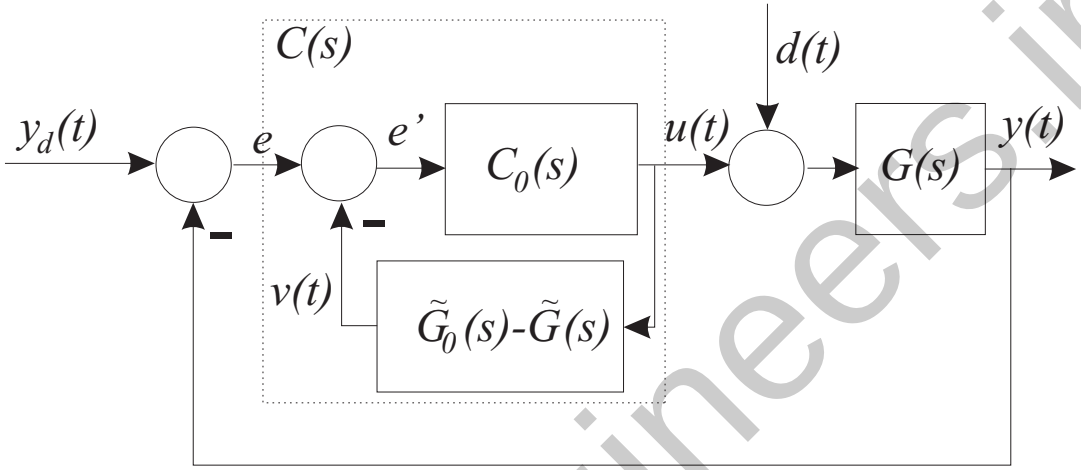
Control difficulties due to time delays (2)

- The larger the ratio θ/τ, the smaller the maximum gain K_{max} for which stability holds:
  - when $\theta/\tau \to 0$, $K_{max} \to \infty$.
  - when $\theta/\tau \to 1$, $K_{max} = 2.26$.
  - when $\theta/\tau \to \infty$, $K_{max} \to 0$.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

The Smith predictor



- $C_0(s)$ is the primary controller (e.g. an industrial controller)
- $C(s)$ consists of this primary controller and a minor feedback loop which contains the model of the process with and without the dead time:

$$C(s) = \frac{C_0(s)}{1 + C_0(s)(\tilde{G}_0(s) - \tilde{G}(s))}$$

- Underlying idea: $v(t)$ contains a prediction of the output $y(t)$ θ units of time into the future: the minor feedback loop is called the predictor.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

The Smith predictor (2)

- Define the following variables (for $d = 0$ and perfect models):

$$e' = y_d - G_0 u, \quad e = y_d - Gu$$

- e' is fed into the primary controller.
- This eliminates the overcorrections that requires significant reduction in gains: the Smith predictor permits higher gains to be used.
- Closed-loop transfer function:

$$G_{cl}(s) = \frac{Y(s)}{Y_d(s)} = \frac{C_0(s)G(s)}{1 + C_0(s)G_0(s)} = \frac{C_0(s)G_0(s)}{1 + C_0(s)G_0(s)} e^{-\theta s}$$

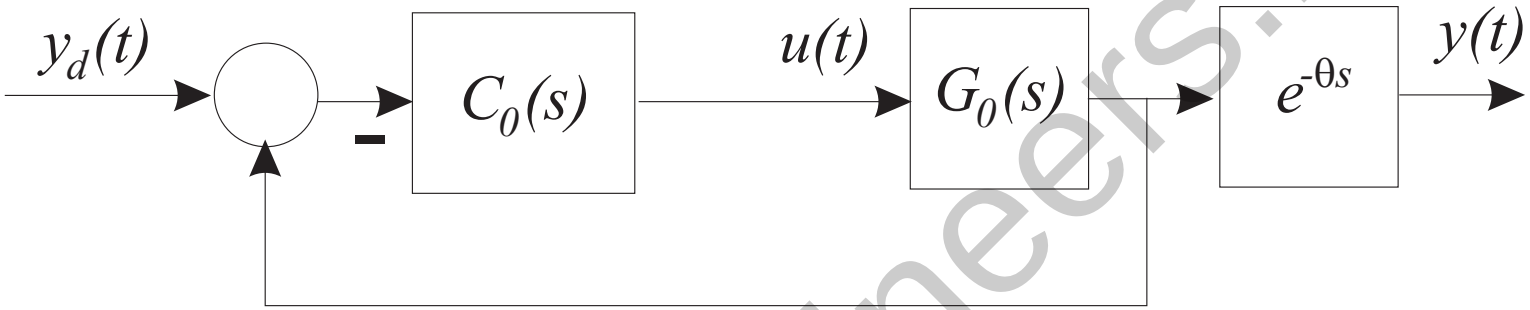
- The dead-time has been removed from the denominator, not from the numerator: better stability but no elimination of the dead-time between y_d and y.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

The Smith predictor (3)

- Equivalent scheme:



- Design of the Smith predictor and $C_0(s)$ cannot be based on $G_0(s)$: under certain circumstances, an infinitesimal model mismatching can cause instability:

- Considering model mismatch $G(s) \neq \tilde{G}(s)$, yields:

$$G_{cl} = \frac{Y(s)}{Y_d(s)} = \frac{C_0(s)G(s)}{1 + C_0(s)\tilde{G}_0(s) - C_0(s)\tilde{G}(s) + C_0(s)G(s)}$$

$\rightarrow$ the Smith predictor minimizes (i.e. not eliminating) the effect of the dead-time on stability, therefore allowing tighter control to be used.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

The Smith predictor (4)

Disturbance rejection (for ideal case)

- Disturbance rejection transfer function:

$$G_{cl_d}(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = G(s)\left(1 - \frac{C_0(s)G(s)}{1 + C_0(s)G_0(s)}\right)$$

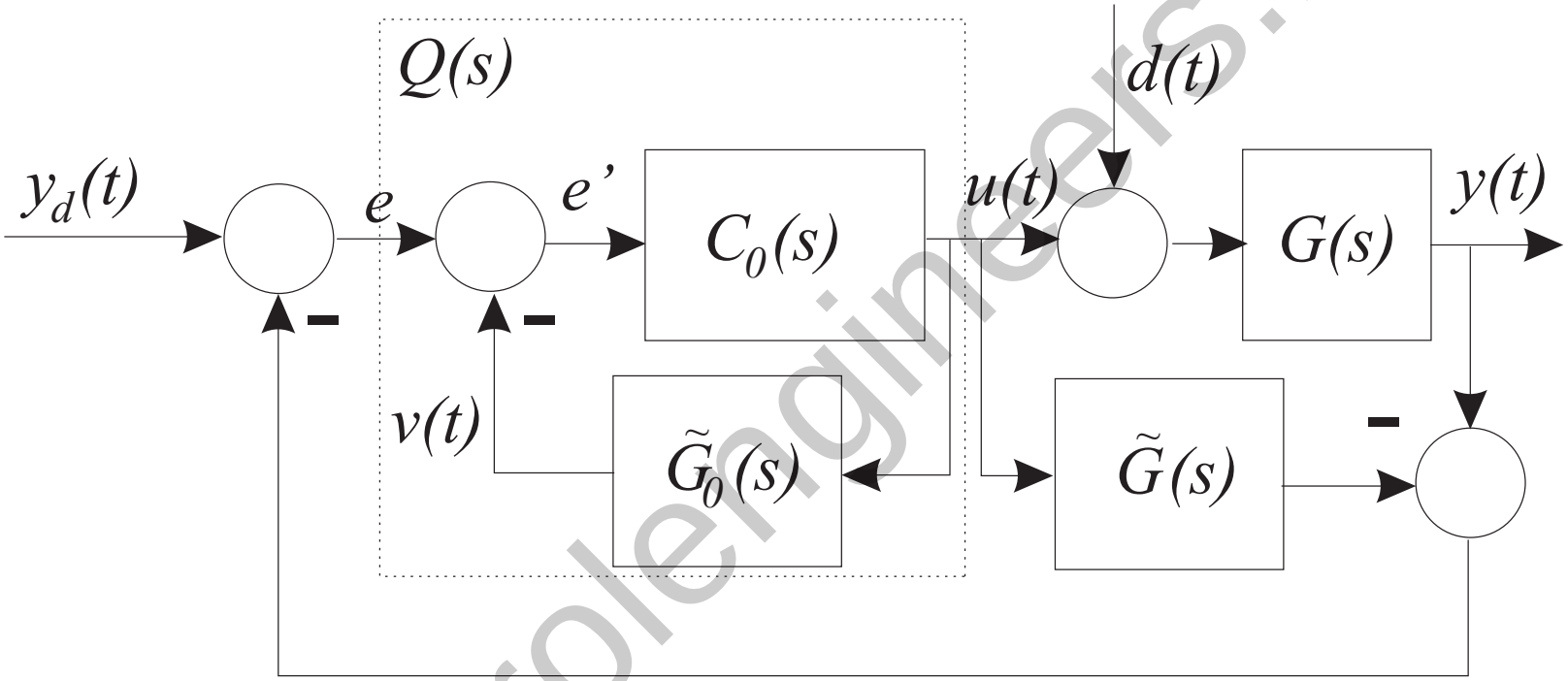
- Closed-loop poles consist of the zeros of $1 + C_0(s)G_0(s)$ and poles of $G(s)$: this scheme cannot be applied for unstable processes.
- Modified Smith predictor schemes for unstable plants exist.
- The presence of the open-loop poles in $G_{cl_d}(s)$ strongly influences the regulator capabilities.

controlengineers.ir

controlengineers.ir
@controlengineers

Relation with IMC

- Rearrangement of the Smith predictor scheme yields:



- with

$$Q(s) = \frac{C_0(s)}{1 + C_0(s)\tilde{G}_0(s)}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Practical, robust and relative stability

- We look at stability and robustness.
- Show that the design cannot be based on the ideal case.
- First an example to illustrate this.

controlengineers.ir

controlengineers.ir
@controlengineers

Example

- Process:

$$G(s) = \frac{e^{-s}}{s+1}, \quad C_0(s) = 4(0.5s+1)$$

- Ideal case of perfect model matching:

$$G_{cl}(s) = \frac{4(0.5s+1)e^{-s}}{3s+5}$$

- System is stable and has gain margin of ≈ 2 and a phase margin of $\approx 80\,\text{deg}$: see Nyquist plot of the loop transfer function

$$C(s)G(s) = \frac{C_0(s)G(s)}{1 + C_0(s)(\tilde{G}_0(s) - \tilde{G}(s))}$$

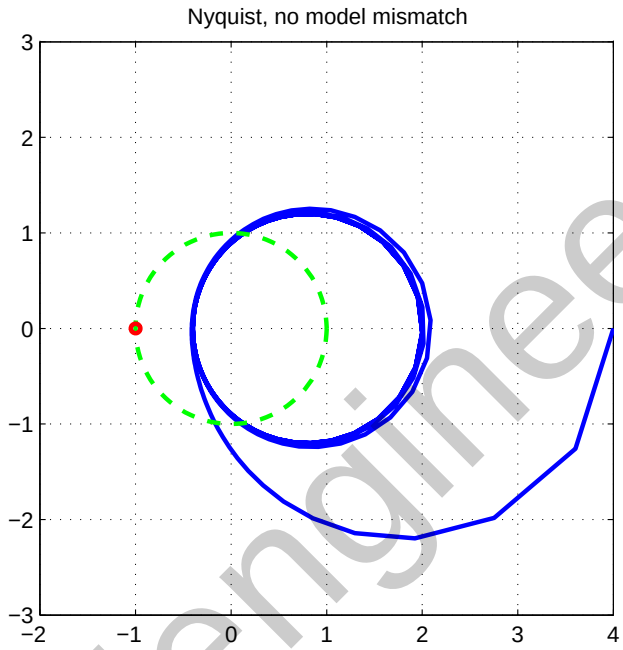
because

$$C(s) = \frac{Q(s)}{1 - \tilde{G}(s)Q(s)}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Example (2)



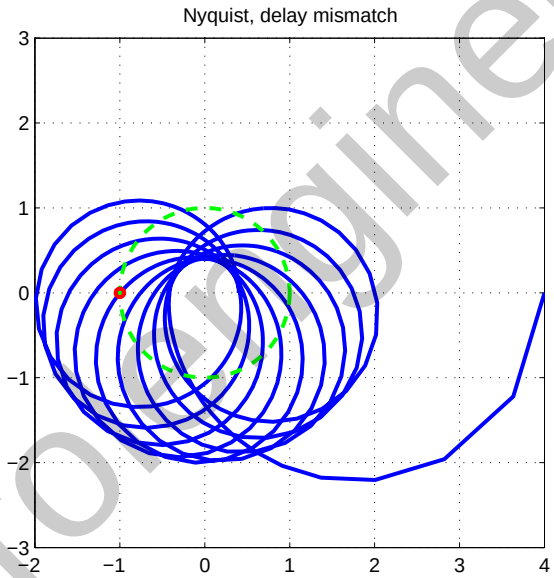
controlengineers.ir

controlengineers.ir
@controlengineers

Example (3)

- A mismatch of 5% on the estimated dead time yields unstable behavior:

$$\tilde{G}(s) = \frac{e^{-0.95}s}{s+1}$$



- So this system is *practically unstable*, i.e. the system is asymptotically stable in the ideal case but becomes unstable for infinitesimal modelling mismatches.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Practical stability condition

- Define

$$P(s) = \frac{C_0(s)\tilde{G}_0(s)}{1 + C_0(s)\tilde{G}_0(s)}$$

- $P(s) = G_{cl}(s)/e^{-\theta s}$, and assumed to be stable since $G_{cl}(s)$ is the closed loop transfer function in the ideal case.
- For the system with a Smith predictor to be closed-loop practically stable, it is necessary that:

$$\lim_{\omega \to \infty} |P(j\omega)| < \frac{1}{2}$$

- If only mismatches in dead-time are considered, this condition is also sufficient.
- For the above mentioned example:

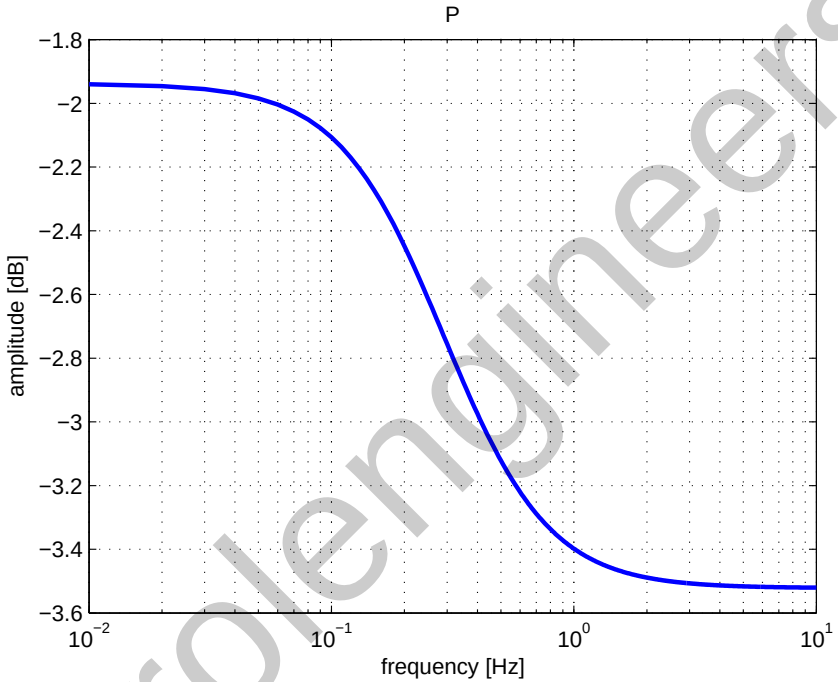
$$P(s) = \frac{2s+4}{3s+5}, \quad \lim_{\omega \to \infty} |P(j\omega)| = \frac{2}{3} \approx -3.5dB$$

controlengineers.ir

controlengineers.ir
@controlengineers

Practical stability condition (2)

- Bode diagram of $P(s)$:



controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Robustness in case of dead-time mismatch only

- Consider dead-time mismatch only:

$$\Delta\theta = \theta - \tilde{\theta}, \quad G_0(s) = \tilde{G}_0(s)$$

- The closed-loop system is asymptotically stable for any $\Delta\theta$ if

$$|P(j\omega)| < \frac{1}{2}, \forall\omega \geq 0$$

- If

$$|P(j\omega)| < 1, \ \forall\omega \geq 0, \text{ and } \lim_{\omega\to\infty} |P(j\omega)| < \frac{1}{2}$$

  then there exist a finite positive $(\Delta\theta)_m$ such that the closed loop is asymptotically stable for all $|\Delta\theta| < (\Delta\theta)_m$.

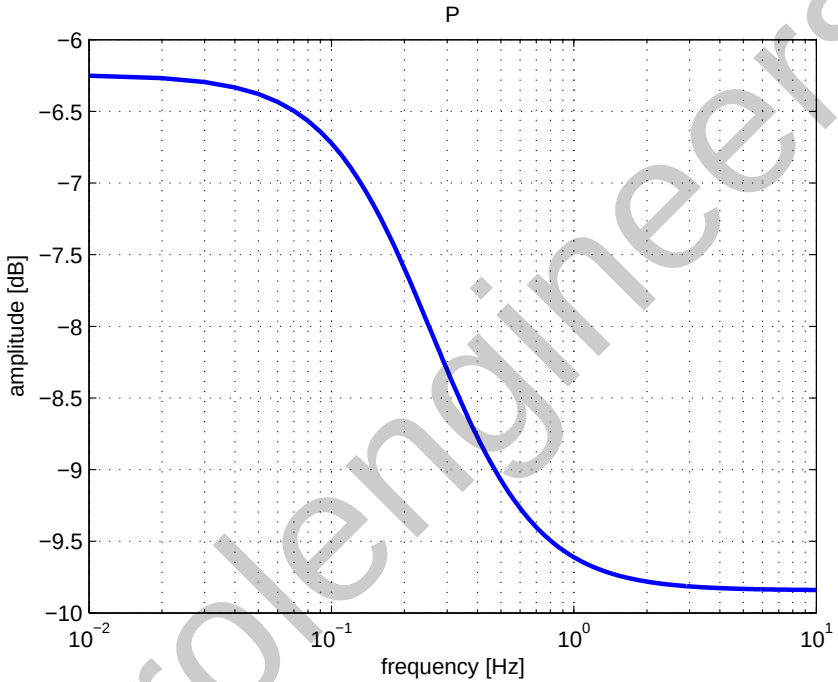
- Consider the example again, and take $C_0(s) = 0.9(0.5s + 1)$, then the system is stable for all $\Delta\theta$.

controlengineers.ir

controlengineers.ir
@controlengineers

Robustness in case of dead-time mismatch only (2)

- Bode diagram of $P(s)$ for this less performant controller



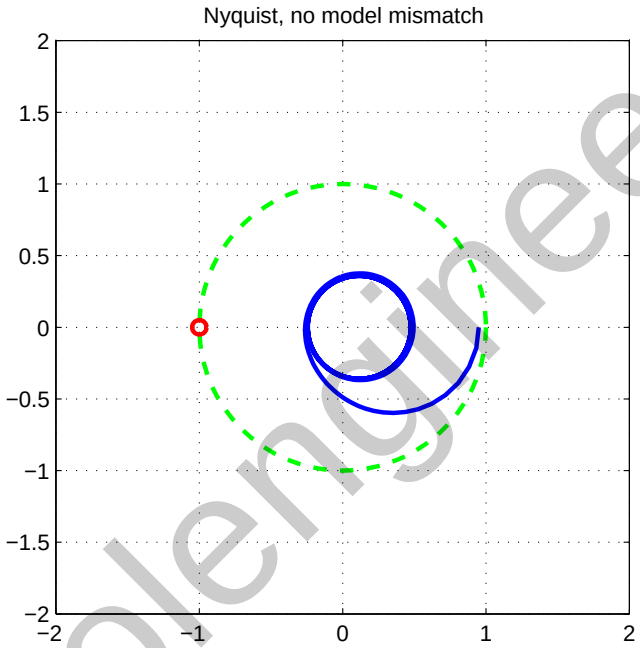
- Smaller than $1/2 = -6dB$ for all frequencies

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Robustness in case of dead-time mismatch only (3)

- Nyquist diagram for this less performant controller: no model mismatch



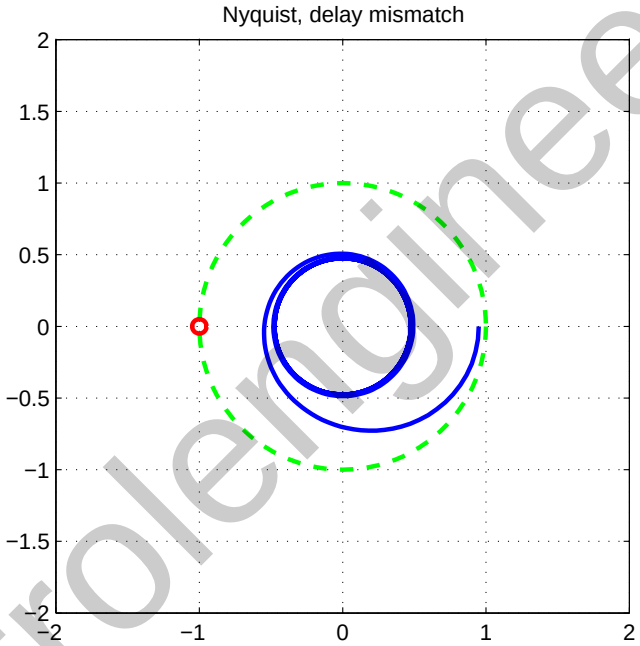
- Remark that this controller is not very performant!

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Robustness in case of dead-time mismatch only (4)

- Nyquist diagram for this less performant controller: large delay mismatch ($100s$ instead of $1s$).



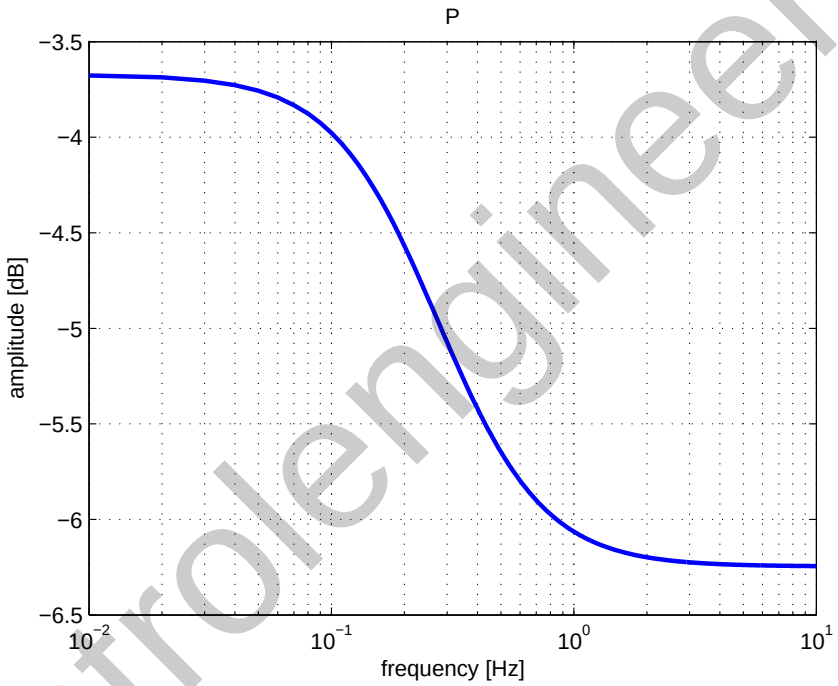
- Similar Nyquist plots are obtained with large delay underestimation.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Robustness in case of dead-time mismatch only (5)

- Consider a controller in between $C_0(s) = 1.9(0.5s + 1)$, yielding the following Bode plot.



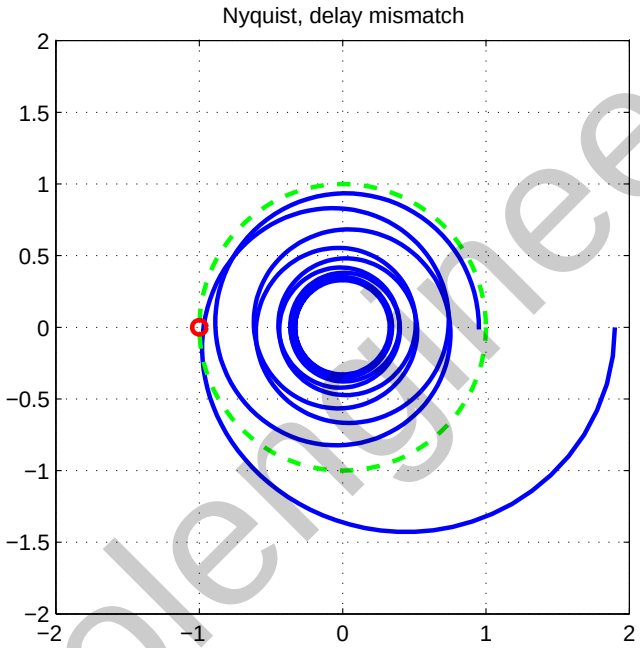
- There exist a $\Delta\theta$ interval for which the system is stable.

controlengineers.ir

controlengineers.ir
@controlengineers

Robustness in case of dead-time mismatch only (6)

- Nyquist diagram for a model delay of $0.1s$ instead of $1s$:



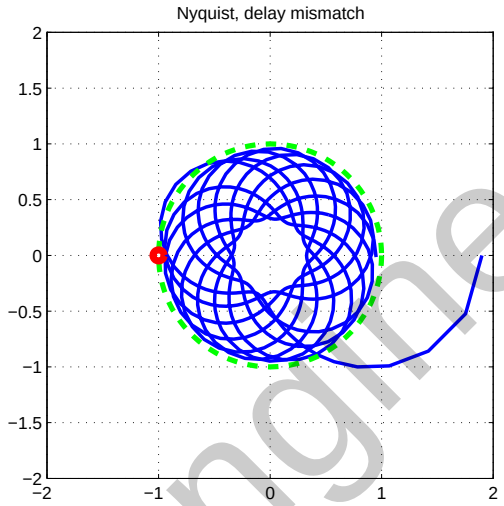
- This is very closes to instability (and oscillatory closed loop behavior), and therefore an indication for the bound for the underestimation of the time delay.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Robustness in case of dead-time mismatch only (7)

- Nyquist diagram for a model delay of $1.7s$ instead of $1s$:



- The bound for an overestimation of the delay is approximately $1.7s$. The resulting Nyquist however shows that the system is very close to unstability for this delay mismatch, also yielding very oscillatory behavior.
- Similar Nyquist plots (stable but close to -1) are obtained for a lot of values of the delay between $1.1s$, $1.7s$, indicating that an overestimation of the delay is much worse than an underestimation ... for this example.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

CHAPTER 2:
Model Predictive Controllers

S.K. Hosseini Sani

Assistant Professor

Electrical Engineering

Ferdowsi University

Mashhad, Iran
1392

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

2.1 MPC Elements

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

2.1 MPC Elements

- **عناصر مشترک در انواع روش های کنترل کننده پیش بین**
  - مدل پیش بینی
  - تابع هزینه
  - حل مسئله بهینه سازی برای تعیین قانون کنترل

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- **مدل پیش بینی**

- اهمیت مدل در MPC
  - نیاز به جامع بودن مدل برای بیان دینامیک سیستم و امکان پیش بینی رفتار سیستم حلقه بسته $\hat{y}(t+k \mid t)$
  - مدل:
    - از ورودی به خروجی
    - از اغتشاش به خروجی

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

اغتشاش

- عملکرد فیدفوروارد برای جبران اغتشاش قابل اندازه گیری
- قابلیت لحاظ کردن موارد زیر به صورت مدل اغتشاش:
  - اغتشاش های غیرقابل اندازه گیری
  - نویز
  - خطای مدل سازی
- لحاظ کردن مدل پلنت و مدل اغتشاش برای پیش بینی خروجی

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

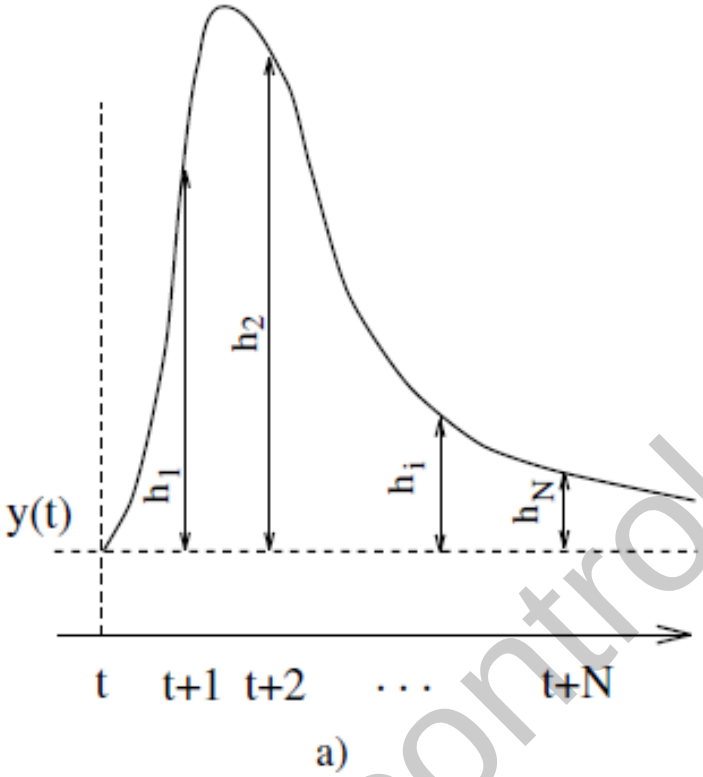
- **برخی از انواع مدل:**

- پاسخ ضربه
- پاسخ پله
- تابع تبدیل
- فضای حالت
- سایر
  - غیرخطی (مشکل غیرمحدب شدن بهینه سازی)
  - فازی، عصبی
  - .....

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- **پاسخ ضربه**



- کاربرد در MAC و حالت خاص GPC
- رابطه ورودی خروجی مدل:

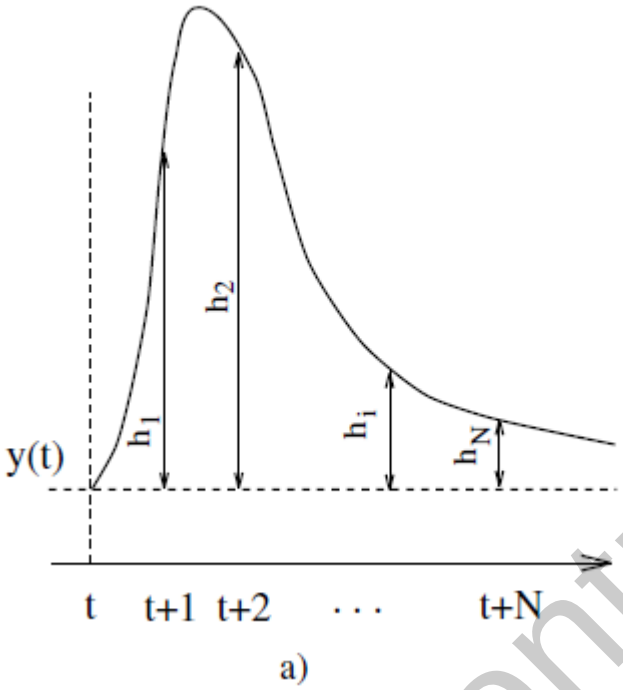
$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i u(t - i)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

2.1 MPC Elements

- برش دادن پاسخ ضربه تا N نمونه برای سیستم های پایدار و بدون انتگرال گیر
- تعداد زیاد پارامترهای مدل (N بین ۴۰ تا ۵۰)
- کاربردی



a)

$$y(t) = \sum_{i=1}^{N} h_i u(t-i) = H(z^{-1})u(t)$$

$$H(z^{-1}) = h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \cdots + h_N z^{-N},$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

2.1 MPC Elements

- پیش بینی خروجی:
- SISO:

$$\hat{y}(t+k\mid t)=\sum_{i=1}^{N} h_i u(t+k-i\mid t)=H(z^{-1})u(t+k\mid t)$$

- MIMO:

$$\hat{y}_j(t)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{N} h_{kj}(i)\,u_k(t-i)$$

- مزیت مدل پاسخ ضربه:
  - عدم نیاز به اطلاعات اولیه فرایند
  - شناسایی ساده
  - توصیف ساده NMP و تاخیر

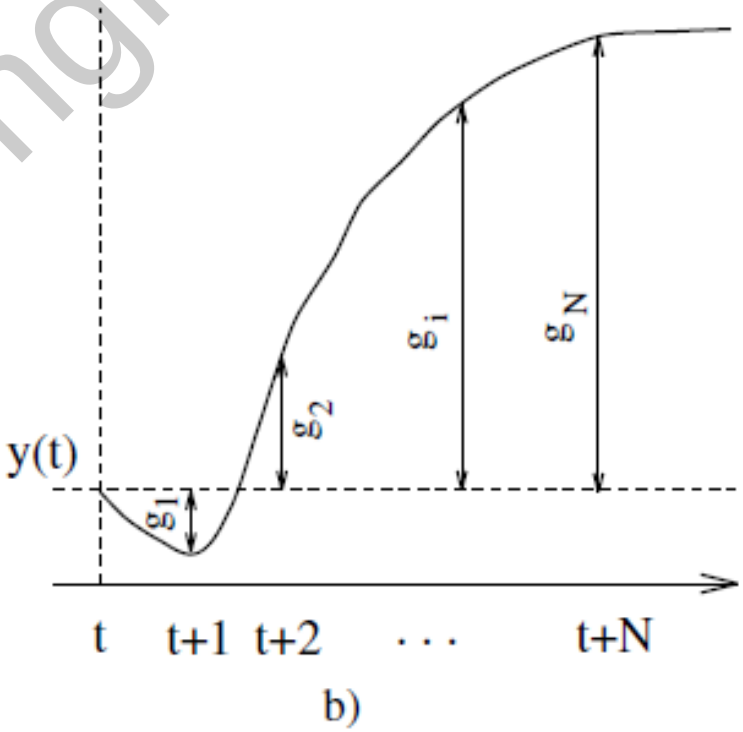
controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- **مدل پاسخ پله:**
- کاربرد در DMC و مشتقاتش
- برش دادن پاسخ پله تا N نمونه برای سیستم های پایدار و بدون انتگرال گیر

$$y(t) = y_0 + \sum_{i=1}^{N} g_i \, \Delta u(t - i) = y_0 + G(z^{-1})(1 - z^{-1})u(t)$$

$$\Delta u(t) = u(t) - u(t-1)$$



controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- فرض : $y_0 = 0$

$$\hat{y}(t + k \mid t) = \sum_{i=1}^{N} g_i \Delta u(t + k - i \mid t)$$

- ارتباط بین پاسخ ضربه و پله:

$$h_i = g_i - g_{i-1}$$

$$g_i = \sum_{j=1}^{i} H_j$$

- مزایا و معایب مشابه

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- **تابع تبدیل:**
- کاربرد در GPC

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t)$$

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_{na} z^{-na}$$

$$B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_{nb} z^{-nb}$$

- پیش بینی خروجی:

$$\hat{y}(t + k \mid t) = \left(\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}\right) \quad u(t + k \mid t)$$

- معتبر برای فرایند ناپایدار
- تعداد پارامترهای کم مدل
- مشکل شناسایی

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- **مدل فضای حالت**
- کاربرد در PFC

$$x(t) = Ax(t-1) + Bu(t-1)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

- پیش بینی خروجی:

$$\hat{y}(t+k \mid t) = C\hat{x}(t+k \mid t) = C[A^k x(t) + \sum_{i=1}^{k} A^{i-1} Bu(t+k-i \mid t)]$$

- مزیت MIMO
- مزایای فیدبک حالت
- احتمال نیاز به رویتگر

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- **مدل اغتشاش**

- اهمیت مدل فرایند و مدل اغتشاش
- یکی از مدل های پرکاربرد:(کاربرد در GPC)

Controlled Auto-Regressive and Integrated Moving Average (CARIMA).

- اغتشاش: اختلاف خروجی اندازه گیری و خروجی محاسبه شده از مدل
- سیگنال اغتشاش در CARIMA: (به خروجی مدل اضافه می شود)

$$n(t) = \frac{C(z^{-1})e(t)}{D(z^{-1})}$$

- $D(z^{-1})$ explicitly includes the integrator $\Delta = 1 - z^{-1}$
- $e(t)$ is a white noise of zero mean
- $C(z^{-1})$is normally considered to equal one.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Free and Forced Response

- تفکیک سیگنال کنترل به دو بخش free و forced:

$$u(t) = u_f(t) + u_c(t)$$

$$u_f(t-j) = u(t-j)\ for\ j = 1, 2, \cdots$$
$$u_f(t+j) = u(t-1)\ for\ j = 0, 1, 2, \cdots$$

$$u_c(t-j) = 0\ for\ j = 1, 2, \cdots$$
$$u_c(t+j) = u(t+j) - u(t-1)\ for\ j = 0, 1, 2, \cdots$$

- تفکیک سیگنال خروجی به دو بخش free و forced

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

2.1 MPC Elements

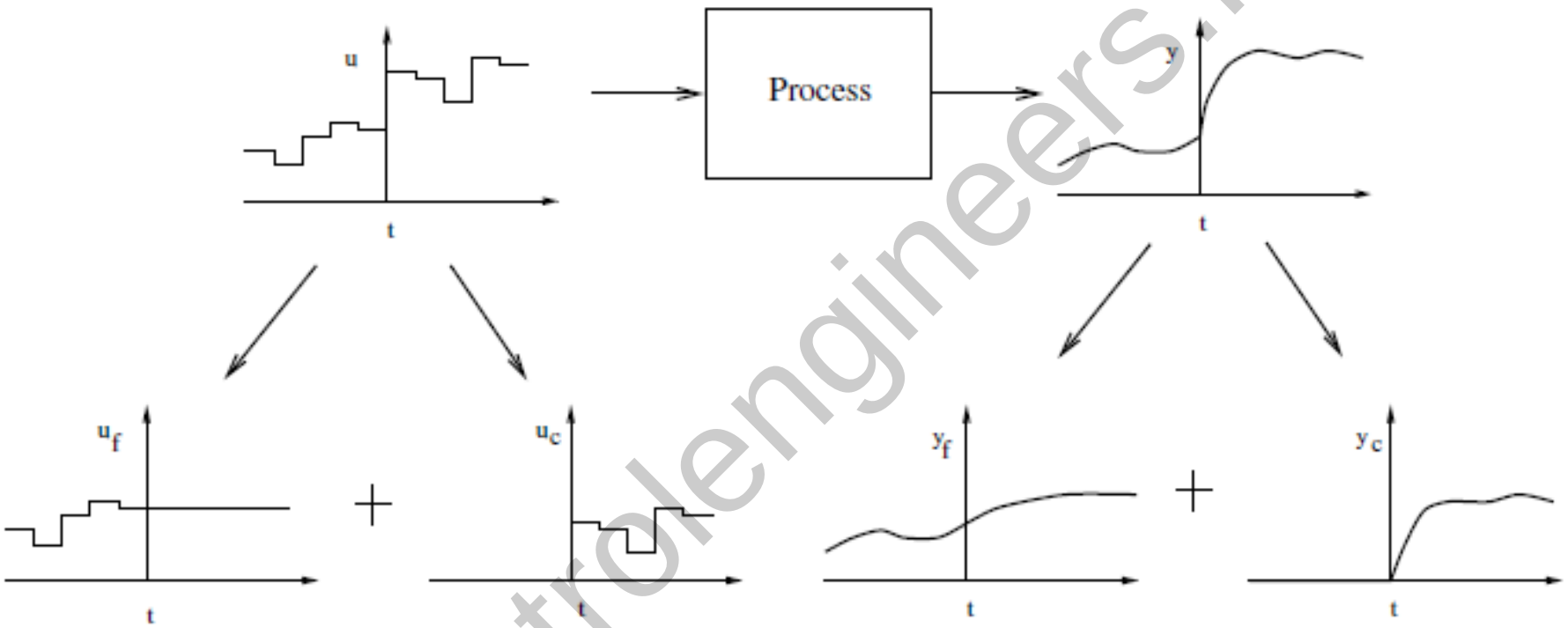
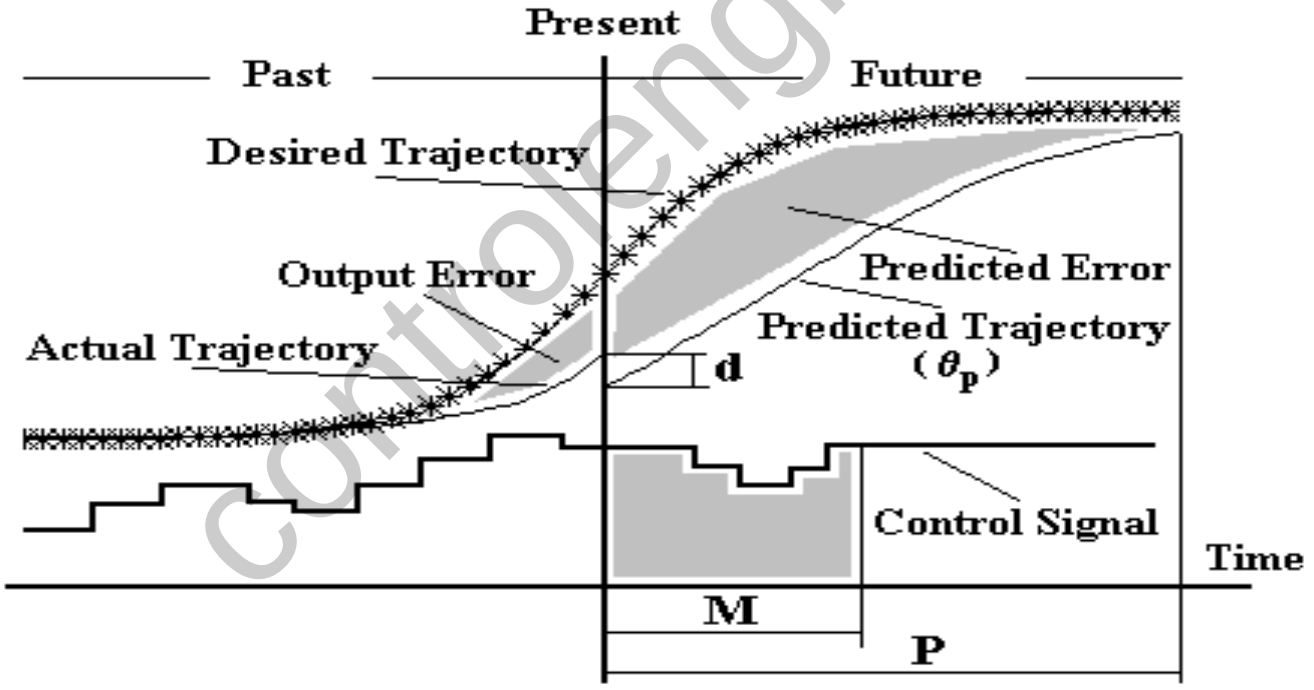


Fig. 2.2. Free and forced responses

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

2.1.2 Objective Function



controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

2.1.2 Objective Function

- **انتخاب مختلف تابع هزینه در انواع MPC**

- **اهداف کلی:**

  - ردیابی سیگنال مرجع توسط خروجی های آینده در افق پیش بینی

  - کمینه کردن تلاش کنترلی (Δu)

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

2.1.2 Objective Function

- **بیان تابع هزینه در حالت کلی:**

$$J(N_1, N_2, N_u) = \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j)[\hat{y}(t+j|t) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j)[\Delta u(t+j-1)]^2$$

- امکان در نظر گرفتن اندازه سیگنال کنترل در تابع هزینه
- ممکن است تلاش کنترلی در تابع هزینه لحاظ نشود
- N1,N2: حداقل و حداکثر افق پیش بینی
- Nu : افق کنترل

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

2.1.2 Objective Function

- انتخاب مقدار بزرگ N1 در شرایط بی اهمیت بودن خطا در لحظات اولیه
  - سیستم های تاخیردار : $N1 \geq d$
  - سیستم های NMP (حذف قسمت پاسخ معکوس از تابع هزینه)

- $\delta(j)$,$\lambda(j)$: ضرایب تنظیم رفتار آینده(معمولا ثابت یا نمایی)

- مثال:

$$\boldsymbol{\delta(j) = \alpha^{N_2 - j}}$$

اگر $\alpha < 1$: پاسخ هموار

اگر $\alpha > 1$: پاسخ Tight

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- **مسیر مرجع:**

- مزیت MPC:
  - عکس العمل مناسب سیستم حلقه بسته با معلوم بودن مسیر مرجع در آینده (بهبود اثر تاخیر در پاسخ فرایند، جلوگیری از اثر نامطلوب در سیستم NMP)

  - معلوم بودن مسیر مرجع در آینده : $r(t+k)$
    سیستم های رباتیک، سروها، اتوماسیون خط تولید

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

2.1.2 Objective Function

- عدم امکان ردیابی مسیر مرجع ایده آل r(t+k)
- لحاظ کردن مسیر مرجع مناسب نزدیک به ایده آلw(t+k)
- تغییر مناسب مسیر مرجع نسبت به مسیرمرجع ایده آل در کمینه سازی تابع هزینه

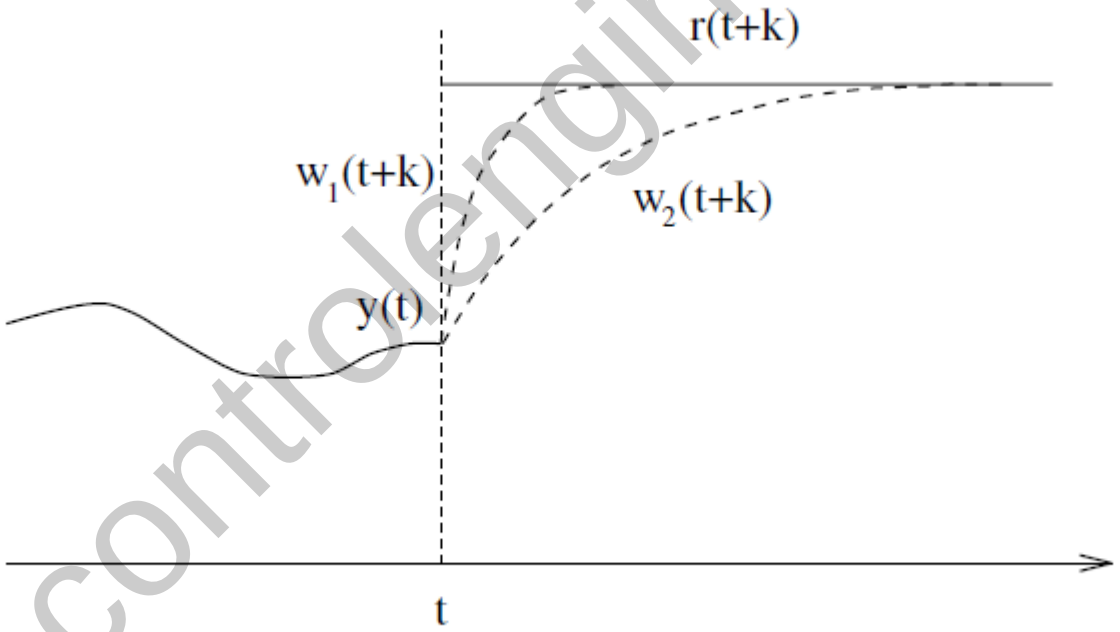


Fig. 2.3. Reference trajectory

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

2.1.2 Objective Function

- یک پیشنهاد برای w(t): نرم کردن مسیر ایده آل با فیلتر مرتبه اول:

$$w(t) = y(t)$$
$$w(t+1) = \alpha w(t) + (1-\alpha) r(t) \quad t = 0 \ldots N-1$$
$$0 < \alpha < 1$$

$$\alpha_{w2} > \alpha_{w1}$$

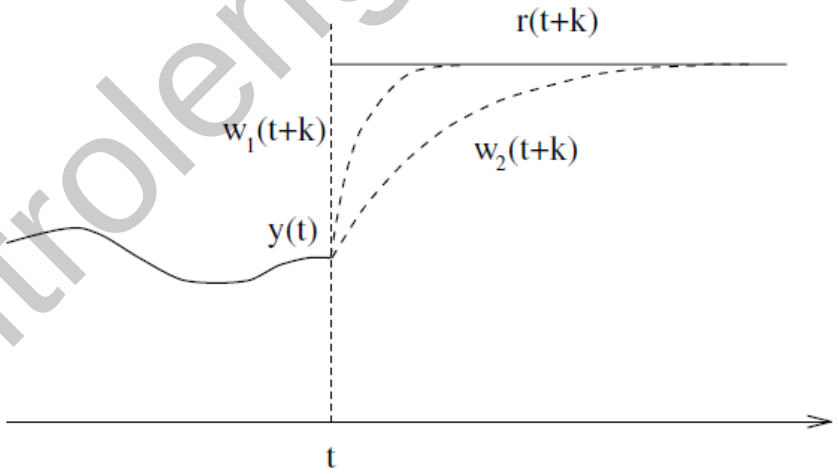


Fig. 2.3. Reference trajectory

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

2.1.2 Objective Function

- پیشنهاد دیگرw(t): (کاربرد در PFC)

$$w(t + k) = r(t + k) - \alpha^k (y(t) - r(t))$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

2.1.2 Objective Function

- **قیود:**
- وجود قیود درهمه فرایندهای عملی

- قید محدوده عملکرد عملگر (موقعیت باز و بسته بودن شیر، موقعیت بال کنترلی موشک، موقعیت زاویه پیچ توربین بادی)

- قید سرعت پاسخ عملگر

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

2.1.2 Objective Function

- عوامل ساختاری (سطح مایع، جریان فلو در لوله)
- عوامل محیطی (حداکثر حرارت در ژنراتور توربین بادی)
- عوامل ایمنی (محدوده کاری ربات در خط تولید، افزایش سرعت باد بیش از 25m/sec در توربین بادی، فشارخروجی پمپ هیدرولیک)
- عوامل اقتصادی (نزدیک شدن به محدوده های مرزهای: ارتباط مصرف سوخت با دور موتور)

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

2.1.2 Objective Function

- انواع قیود(دامنه ورودی، تغییرات ورودی، خروجی):

$$u_{min} \leq u(t) \leq u_{max} \; \forall t$$

$$du_{min} \leq u(t) - u(t-1) \leq du_{max} \; \forall t$$

$$y_{min} \leq y(t) \leq y_{max} \; \forall t$$

- مشکلات لحاظ کردن قیود:
  - محاسبات پیچیده تر
  - عدم وجود پاسخ صریح
- لزوم لحاظ کردن قیود در تابع هزینه

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

2.1.3 Obtaining the Control Law

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

2.1.3 Obtaining the Control Law

- تعیین $u(t+k \mid t)$ با کمینه سازی تابع هزینه:

$$J(N_1, N_2, N_u) = \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j)[\hat{y}(t+j|t) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j)[\Delta u(t+j-1)]^2$$

- محاسبه خروجی آینده بر اساس مقادیر گذشته ورودی و خروجی، سیگنال ورودی آینده(با استفاده از مدل)
- جایگذاری آن در تابع هزینه و کمینه سازی آن بر حسب u(t+k)
- تعیین u(t+k)
  - حل تحلیلی برای تابع هزینه مربعی و سیستم LTI
  - حل تکراری برای سایر

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

2.1.3 Obtaining the Control Law

- مشکل بودن تعیین پاسخ بهینه سازی به خاطر N2-N1-1 متغیر مستقل (حدود ۱۰ تا ۳۰)
- کاهش متغیرها با تحمیل ساختار خاص سیگنال کنترل (Nu)

$$\Delta u(t + j - 1) = 0 \qquad j > N_u$$

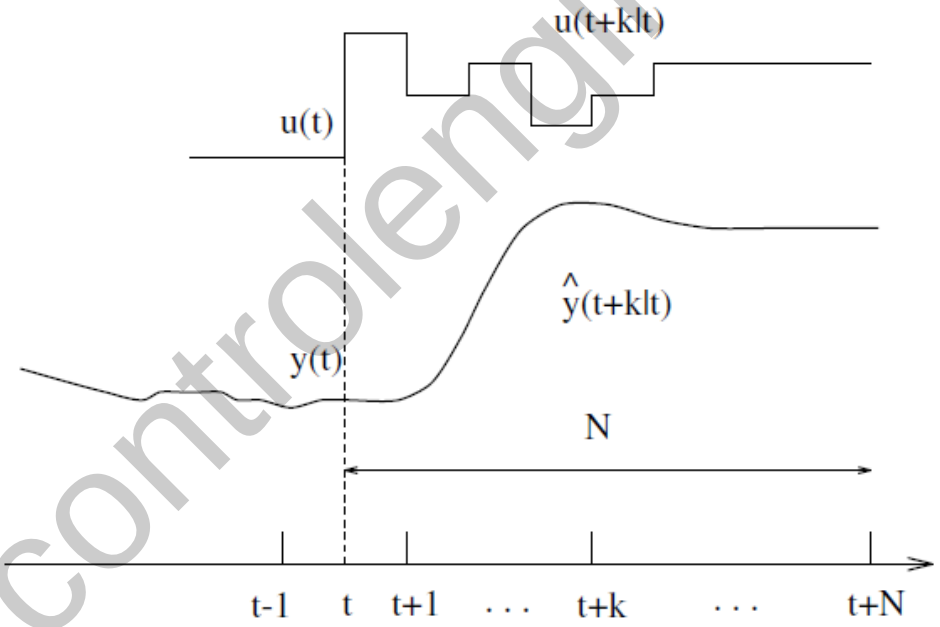


Fig. 1.1. MPC Strategy

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

2.1.3 Obtaining the Control Law

- حالت حدی: Nu=1

$$u(t+k|t)=u(t)$$

اعمال u(t) محاسبه شده به سیستم

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

CHAPTER 3:
Model Predictive Controllers

S.K. Hosseini Sani

Assistant Professor

Electrical Engineering

Ferdowsi University

Mashhad, Iran
1392

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Commercial Model Predictive Control Schemes

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- برخی روش های متداول MPC

- DMC: Dynamic Matrix Control,
- MAC: Model Algorithmic Control,
- GPC: Generalized Predictive Control,
- PFC: Predictive Functional Control,
- EPSAC: Extended Prediction Self Adaptive Control
- EHAC: Extended Horizon Adaptive Control.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

3.1 Dynamic Matrix Control

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- **Dynamic Matrix Control**
  - مدل پاسخ پله محدودشده
  - الزام فرایند پایدار و بدون انتگرال گیر

$$y(t) = y_0 + \sum_{i=1}^{N} g_i \, \Delta u(t - i) = y_0 + G(z^{-1})(1 - z^{-1})u(t)$$

  - درنظر گرفتن اغتشاش ثابت در افق پیش بینی برابر با: $y_m(t) - \hat{y}(t \mid t)$

$$\hat{n}(t + k|t) = \hat{n}(t|t) = y_m(t) - \hat{y}(t|t)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- **محاسبه خروجی:**

$$\hat{y}(t+k|t) = \sum_{i=1}^{k} g_i \Delta u(t+k-i) + \sum_{i=k+1}^{N} g_i \Delta u(t+k-i) + \hat{n}(t+k|t)$$

ورودی های آینده — ورودی های گذشته — اغتشاش

- **تابع هدف:**
- لحاظ کردن خطاهای آینده در تابع هدف (بعلاوه سیگنال کنترل آینده)
-

$$J(N_1, N_2, N_u) = \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j)[\hat{y}(t+j|t) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j)[\Delta u(t+j-1)]^2$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

3.1 Dynamic Matrix Control

- مدل پاسخ پله:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t-i)$$

- خروجی پیشبینی:

$$\hat{y}(t+k|t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t+k-i) + \hat{n}(t+k|t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} g_i \Delta u(t+k-i) + \sum_{i=k+1}^{\infty} g_i \Delta u(t+k-i) + \hat{n}(t+k|t)$$

- فرض : اغتشاش ثابت

$$\hat{n}(t+k \mid t) = \hat{n}(t \mid t) = y_m(t) - \hat{y}(t \mid t).$$

- محاسبه خروجی:

$$\hat{y}(t+k|t) = \sum_{i=1}^{k} g_i \Delta u(t+k-i) + \sum_{i=k+1}^{\infty} g_i \Delta u(t+k-i) + y_m(t) - \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t-i)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} g_i \Delta u(t+k-i) + f(t+k)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- $f(t+k)$: پاسخ آزاد(مربوط به سیگنال های زمان گذشته)

$$f(t+k) = y_m(t) + \sum_{i=1}^{\infty} (g_{k+i} - g_i)\Delta u(t-i)$$

- فرض فرایند پایدار عدم وجود انتگرال گیر:

$$g_{k+i} - g_i \approx 0, \qquad i > N$$

- پاسخ آزاد:

$$f(t+k) = y_m(t) + \sum_{i=1}^{N} (g_{k+i} - g_i)\Delta u(t-i)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

$$\hat{y}(t+k|t) = \sum_{i=1}^{k} g_i \Delta u(t+k-i) + f(t+k)$$

- پیش بینی خروجی در افق پیش بینی $(k = 1,\dots,p)$با فرض افق کنترل m :

$$\hat{y}(t+1|t) = g_1 \Delta u(t) + f(t+1)$$

$$\hat{y}(t+2|t) = g_2 \Delta u(t) + g_1 \Delta u(t+1) + f(t+2)$$

$$\vdots$$

$$\hat{y}(t+p|t) = \sum_{i=p-m+1}^{p} g_i \Delta u(t+p-i) + f(t+p)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- تعریف ماتریس دینامیکی G (Dynamics Matrix) :

$$G = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & \cdots & 0 \\ g_2 & g_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_m & g_{m-1} & \cdots & g_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_p & g_{p-1} & \cdots & g_{p-m+1} \end{bmatrix}_{p*m}$$

- پس:

$$\hat{\mathbf{y}}_{p*1} = \mathbf{G}_{\mathbf{p*m}}\mathbf{u}_{\mathbf{m*1}} + \mathbf{f}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- یادآوری پاسخ آزاد:

$$f(t+k) = y_m(t) + \sum_{i=1}^{N} (g_{k+i} - g_i)\Delta u(t-i)$$

- تعریف بردار $x(t)$:

$$x^T(t) = [y_m(t)\ u(t-1)\ u(t-2) \ldots u(t-N-1)]$$

- پاسخ آزاد:

$$\mathbf{f} = \mathbf{F}x(t)$$

- پیش بینی خروجی:

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{Gu} + \mathbf{F}x(t)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- **اغتشاش های قابل اندازه گیری:**

- تاثیر ورودی اغتشاش در پیش بینی خروجی مشابه با ورودی کنترل

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{Gu} + \mathbf{f}$$
$$\hat{\mathbf{y}}_d = \mathbf{Dd} + \mathbf{f}_d$$

D: شبیه ماتریس G است

که مولفه های آن از پاسخ پله اغتشاش به دست می آید

- d : بردار تغییرات اغتشاش

- $\mathbf{f}_d$: بخشی از پاسخ که وابسته به اغتشاش نیست.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- *در حالت کلی : وجود اغتشاش قابل اندازه گیری و غیر قابل اندازه گیری*

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{Gu} + \mathbf{f}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_u + \mathbf{Dd} + \mathbf{f}_d + \mathbf{f}_n$$

f : پاسخ آزاد کامل

$\mathbf{f}_u$:پاسخ به ورودی u(t)

Dd :پاسخ به *اغتشاش قابل اندازه گیری*

$\mathbf{f}_d$:پاسخ به *اغتشاش غیر قابل اندازه گیری*

$\mathbf{f}_n$:پاسخ به فرایند واقعی

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- **قانون کنترل:**
- تابع هزینه برای حداقل کردن خطاهای آینده:

$$j = \sum_{j=1}^{p} [\hat{y}(t+j|t) - w(t+j)]^2$$

- در نظر گرفتن تغییرات کنترل :

$$j = \sum_{j=1}^{p} [\hat{y}(t+j|t) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{m} \lambda [\Delta u(t+j-1)]^2$$

در حالت SISO :

$$\mathbf{J} = \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{e} + \boldsymbol{\lambda}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{u}: \Delta u(t), \ldots, \Delta u(t+m-1),$$

حل بهینه تابع هزینه:

$$\mathbf{u} = \left(\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G} + \lambda\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}(\mathbf{w} - \mathbf{f})$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

3.1 Dynamic Matrix Control

- اعمال فقط اولین نمونه سیگنال کنترل محاسبه شده به سیستم
- ضرورت محاسبه سیگنال کنترل در لحظه بعد:
  - تفاوت خروجی واقعی و خروجی پیش بینی
    - عدم امکان تخمین دقیق اغتشاش و در نتیجه عدم امکان مشارکت دقیق بخاطر اغتشاشات موجود
  - تغییر ورودی مرجع در m مرحله بعدی

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

3.2 Model Algorithmic Control

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- شبیه DMC اما با مدل پاسخ ضربه محدود شده

$$y(t) = \sum_{j=1}^{N} h_j u(t-j) = H(z^{-1})u(t)$$

پیش بینی خروجی

$$\hat{y}(t+k|t) = \sum_{j=1}^{N} h_j u(t+k-j) + \hat{n}(t+k|t)$$

$$\hat{y}(t+k|t) = f_r(t+k) + f_o(t+k)$$

$$f_r(t+k) = \sum_{j=k+1}^{N} h_j u(t+k-j)$$

$$f_o(t+k) = \sum_{j=1}^{k} h_j u(t+k-j)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- فرض اغتشاش ثابت:

$$\hat{n}(t+k \mid t) = \hat{n}(t \mid t)$$

$$\hat{n}(t+k|t) = \hat{n}(t|t) = y_m(t) - \sum_{j=1}^{N} h_j u(t-j)$$

پیش بینی خروجی با درنظر گرفتن اغتشاش:

$$\hat{y}(t+k|t) = f_o + f_r + \hat{n}(t|t)$$

$$\hat{y}(t+k|t) = \sum_{j=1}^{k} h_j u(t+k-j) + \sum_{j=k+1}^{N} h_j u(t+k-j) + y_m(t) - \sum_{j=1}^{N} h_j u(t-j)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- تعریف:
  - M: افق پیش بینی
  - u_+:ورودی های آینده u_-: ورودی های گذشته
  - y: خروجی پیش بینی شده

$$u_+ = \begin{bmatrix} u(t) \\ u(t+1) \\ \vdots \\ u(t+M-1) \end{bmatrix}, u_- = \begin{bmatrix} u(t-N+1) \\ u(t-N+2) \\ \vdots \\ u(t-1) \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} \hat{y}(t+1) \\ \hat{y}(t+2) \\ \vdots \\ \hat{y}(t+M) \end{bmatrix}$$

$$n = \begin{bmatrix} \hat{n}(t+1) \\ \hat{n}(t+2) \\ \vdots \\ \hat{n}(t+M) \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w(t+1) \\ w(t+2) \\ \vdots \\ w(t+M) \end{bmatrix}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- تعریف:

$$H_1 = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ h_2 & h_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_M & h_{M-1} & \cdots & h_1 \end{bmatrix},$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} h_N & \cdots & h_i & \cdots & h_2 \\ 0 & \cdots & h_j & \cdots & h_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & h_N & \cdots & h_{M+1} \end{bmatrix}$$

- محاسبه خروجی:

$$\mathbf{y = H_1 u_+ + H_2 u_- + n}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- خطای خروجی:

$$e = w - y = w - H_2 u_- - n - H_1 u_+ = w - f - H_1 u_+$$

- تابع هزینه:

$$j = e^T e + \lambda {u_+}^T u_+$$

- حل بهینه تابع هزینه

$$\mathbf{u_+ = \left({H_1}^T H_1 + \lambda I\right)^{-1} {H_1}^T (w - f)}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

3.3 Predictive Functional Control

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- کنترل PFC : برای فرآیندهای سریع با دو مزیت متمایز
  - در نظر گرفتن سیگنال کنترل به فرم ترکیب خطی از توابع پایه معلوم
  - مفهوم نقاط تطابق برای محاسبه تابع هزینه در طول افق پیش بین

- مدل فضای حالت

$$x(t) = Mx(t-1) + Nu(t-1)$$

$$y(t) = Qx(t)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- خروجی پیش بین

$$\hat{y}(t+k|t) = y_m(t+k) + \hat{e}(t+k)$$

- فرض : خطای فرآیند مدل شده پیش بین

$$e(t+k\,|t) = y_m(t) - \hat{y}(t\,|\,t-1) + \sum_{j=1}^{r} e_j k^j$$

- $y_m(t)$ خروجی اندازه گیری
- e_j ضرایب قابل محاسبه از انطباق حداقل مربعات به خطاهای گذشته

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- فرض ساختار سیگنال کنترل آینده با ترکیب خطی توابع پایه B_i

$$u(t+k) = \sum_{i=1}^{n_B} \mu_i(t) B_i(k)$$

انتخاب B_i بر اساس رفتار فرآیند و سیگنال مرجع

در حالت چند جمله ای :

- steps ($B_1(k) = 1$),
- ramps ($B_2(k) = k$),
- parabolas ($B_3(k) = k^2$)

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

$$u(t) = \alpha_0 \varphi_0(t) + \alpha_1 \varphi_1(t) + \dots + \alpha_n \varphi_n(t)$$

t زمان پیوسته است

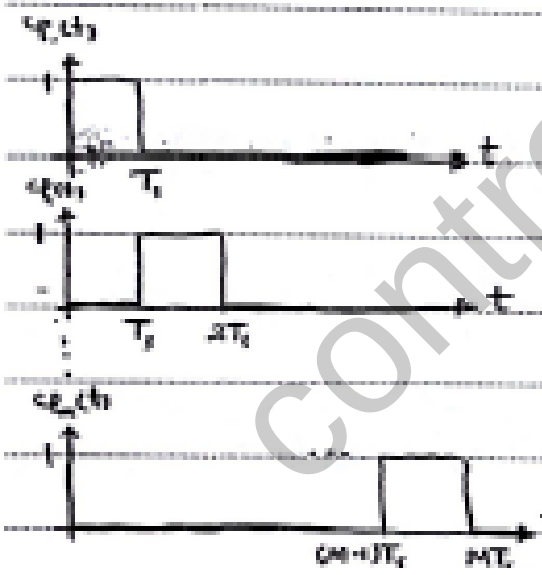
$\varphi_0(t)$ توابع مبنای هستند مثلاً $\varphi_0(t)=1$, $\varphi_1(t)=t$, $\varphi_2(t)=\frac{1}{2}t^2$, ...

$$\Delta u(t) = \beta_0 \varphi_0(t) + \beta_1 \varphi_1(t) + \dots + \beta_n \varphi_n(t)$$

- بهینه‌سازی یکبار برای تمام t و برای α_i یا β_i ها حل می‌شود

- بهینه‌سازی در زمان‌های معین t_1 ، t_2 ، ... برای تعیین α_i ، β_i ها حل می‌شود

* فاصله بین t_i ها لزوماً sample time نیست.



* اگر φ_i ها به صورت قابل انتخاب شوند (به صورت پاس) ساختار تبدیل به MPC معمولی تبدیل می‌شود.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- تابع هزینه

$$j = \sum_{j=1}^{n_H} [\hat{y}(t+j) - w(t+j)]^2$$

- $w(t+j)$ معمولا تابع مرتبه اول برای سیگنال مرجع معلوم

$$w(t+k) = r(t+k) - \alpha^k \big(r(t) - y(t)\big)$$

- اضافه کردن ترم $\lambda[\Delta u(k)]^2$ برای داشتن سیگنال کنترل هموار

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- در نظر گرفتن خطای پیش بین در نقاط معین $h_j, j = 1,...,n_H$ و نه در طول همه افق پیش بین
- حداقل تعداد نقاط مساوی تعداد توابع پایه

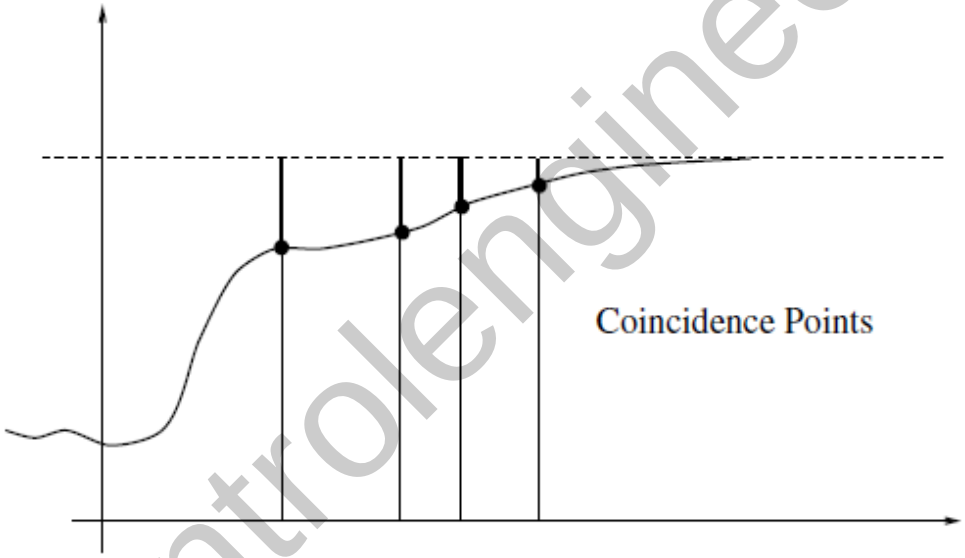


Fig. 3.3. Coincidence points

- اهمیت نقاط انطباق به عنوان پارامترهای تنظیم، موثر در پایداری و مقاومت سیستم کنترل

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- محاسبه قانون کنترل
- لزوم محاسبه $\mu_i(t)$

$$u(t+k) = \sum_{i=1}^{n_B} \mu_i(t) B_i(k)$$

- انتخاب بهینه ضرایب در هر لحظه t و متفاوت بودن آنها در هر مرحله

- در حالت فرآیند SISO و بدون شرط
  - تجزیه خروجی به free و force output و ساختار ورودی جهت حصول خروجی

$$y(t+k) = QM^k x(t) + \sum_{i=1}^{n_B} \mu_i(t) y_{B_i}(k)$$

  - y_{B_i} پاسخ خروجی به توابع پایه B_i

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

$$j = \sum_{j=1}^{n_H} [\hat{y}(t+h_j) - w(t+h_j)]^2 = \sum_{j=1}^{n_H} [\mu y_B - d(t+h_j)]^2$$

- Where:

$$\mu = [\mu_1(t) \dots \mu_{n_B}(t)]^T$$

$$y_B = [y_{B_1}(j) \dots y_{B_{n_B}}(j)]^T$$

$$d(t+h_j) = r(t+h_j) - \alpha^j [r(t) - y(t)] - QM^j x(t) - e(t+h_j)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

$$j = \sum_{j=1}^{n_H} [\hat{y}(t+h_j) - w(t+h_j)]^2 = \sum_{j=1}^{n_H} [\mu y_B - d(t+h_j)]^2$$

$$J = (Y_B\mu - d)^T (Y_B\mu - d)$$

- که در آن $\mathbf{d} = [d(t+h_1)...d(t+h_{n_H})]^T$ و معلوم در لحظه t
- و Y_B ماتریسی که ردیف ها برابر y_B در نقاط انطباق $h_j, j = 1,...n_h$
- کمینه کردن J نسبت μ

$$\frac{\partial j}{\partial \mu} = 2\left((Y_B Y_B^T)\mu\right) - Y_B d = 0$$

سیگنال کنترل

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n_B} \mu_i(t) B_i(0)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- کاربرد PFC تنها برای سیستمهای پایدار (pole cancellations)
- کاربرد PFC برای سیستمهای غیر خطی با استفاده از مدل فضاب حالت غیرخطی

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

3.4 Case Study: A Water Heater

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- مثال : کاربرد DMC برای گرم کردن آب

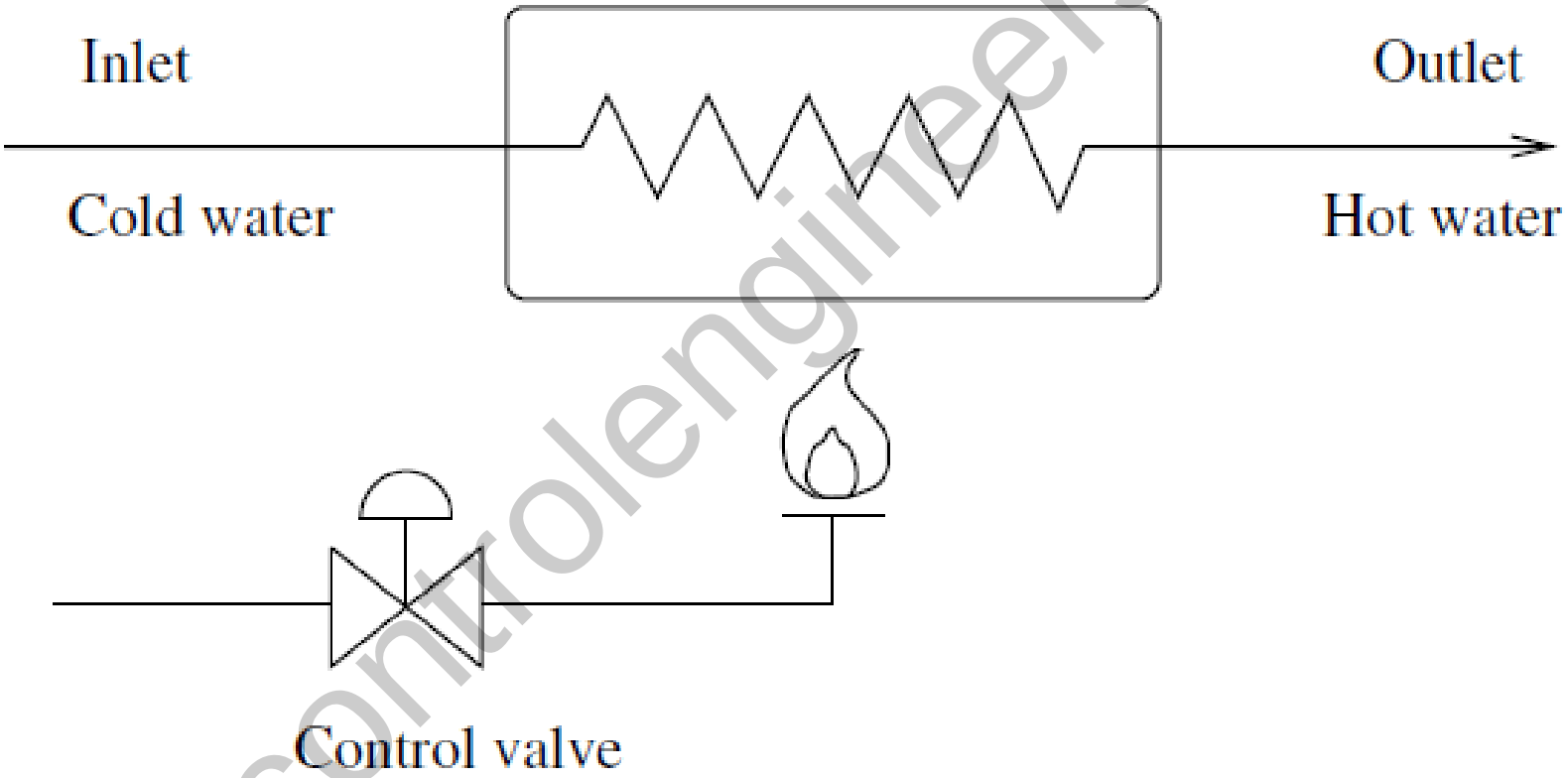


Fig. 3.4. Water heater

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- ورودی پله به شیر کنترل
- ضرایب g_i بر اساس پاسخ پله

$$y(t) = \sum_{i=1}^{30} g_i \Delta u(t-i)$$

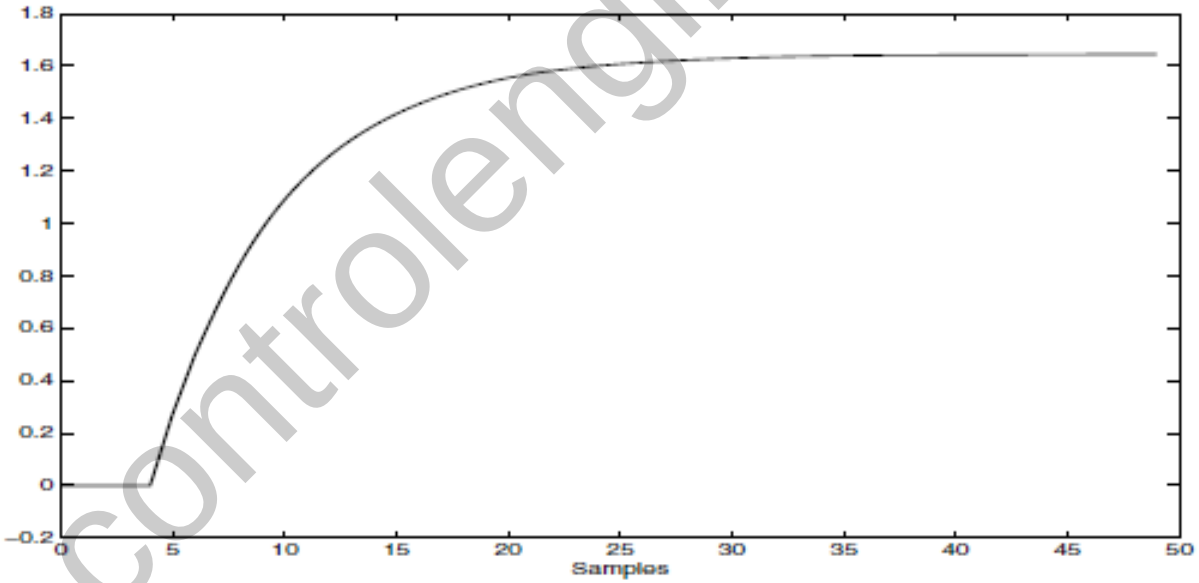


Fig. 3.5. Step response

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

3.4 Case Study: A Water Heater

- جدول ضرایب

g_1 0	g_2 0	g_3 0.271	g_4 0.498	g_5 0.687	g_6 0.845	g_7 0.977	g_8 1.087	g_9 1.179	g_{10} 1.256
g_{11} 1.320	g_{12} 1.374	g_{13} 1.419	g_{14} 1.456	g_{15} 1.487	g_{16} 1.513	g_{17} 1.535	g_{18} 1.553	g_{19} 1.565	g_{20} 1.581
g_{21} 1.592	g_{22} 1.600	g_{23} 1.608	g_{24} 1.614	g_{25} 1.619	g_{26} 1.623	g_{27} 1.627	g_{28} 1.630	g_{29} 1.633	g_{30} 1.635

- تاخیر برابر دو نمونه
- پاسخ پله سیستم:

$$G(z) = \frac{0.2713z^{-3}}{1 - 0.8351z^{-1}}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- فرض : افق پیش بین ۱۰ و افق کنترل ۵

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.271 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.498 & 0.271 & 0 & 0 & 0 \\ 0.687 & 0.498 & 0.271 & 0 & 0 \\ 0.845 & 0.687 & 0.498 & 0.271 & 0 \\ 0.977 & 0.845 & 0.687 & 0.498 & 0.271 \\ 1.087 & 0.977 & 0.845 & 0.687 & 0.498 \\ 1.179 & 1.087 & 0.977 & 0.845 & 0.687 \\ 1.256 & 1.179 & 1.087 & 0.977 & 0.845 \end{bmatrix}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- با فرض $\lambda = 1$ و محاسبه ماتریس $\left(\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G} + \lambda\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}$ و k اولین ردیف این ماتریس

$$\Delta u(t) = \mathbf{K}(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{f})$$

- with

$$K = [0\ 0\ 0.1465\ 0.1836\ 0.1640\ 0.1224\ 0.0780\ 0.0410\ 0.0101\ -0.0157]$$

و

$$f(t+k) = y_m(t) + \sum_{i=1}^{30}(g_{k+i} - g_i)\Delta u(t-i)$$

controlengineers.ir

controlengineers.ir
@controlengineers

- where the free response is easily calculated using equation (3.1):

$$f(t+k) = y_m(t) + \sum_{i=1}^{30} (g_{k+i} - g_i)\Delta u(t-i)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

3.4 Case Study: A Water Heater

- مقدار α کوچک :
- پاسخ سریعتر با نوسانات کمتر
- مقدار λ کوچک :
- سیگنال کنترل بزرگتر

$$j = \sum_{j=1}^{p} [\hat{y}(t+j|t) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{m} \lambda [\Delta u(t+j-1)]^2$$

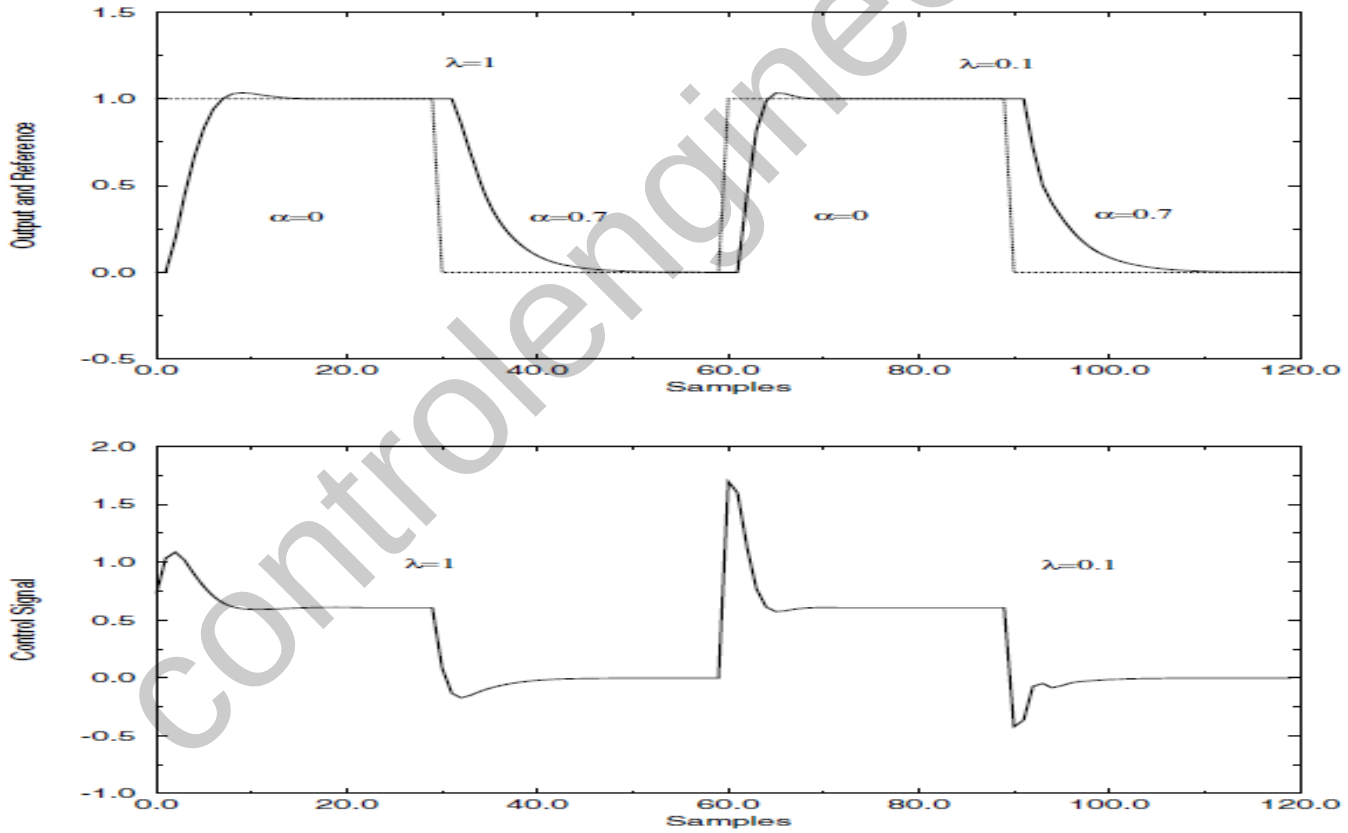


Fig. 3.6. Controller behaviour

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

3.4 Case Study: A Water Heater

- فرض ورودی اغتشاش با تغییرات درجه حرارت محیط
- فرض مدل اغتشاش

$$j = \sum_{j=1}^{p} [\hat{y}(t+j|t) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{m} \lambda [\Delta u(t+j-1)]^2$$

d_1 0	d_2 0	d_3 0.050	d_4 0.095	d_5 0.135	d_6 0.172	d_7 0.205	d_8 0.234	d_9 0.261	d_{10} 0.285
d_{11} 0.306	d_{12} 0.326	d_{13} 0.343	d_{14} 0.359	d_{15} 0.373	d_{16} 0.386	d_{17} 0.397	d_{18} 0.407	d_{19} 0.417	d_{20} 0.425
d_{21} 0.433	d_{22} 0.439	d_{23} 0.445	d_{24} 0.451	d_{25} 0.456	d_{26} 0.460	d_{27} 0.464	d_{28} 0.468	d_{29} 0.471	d_{30} 0.474

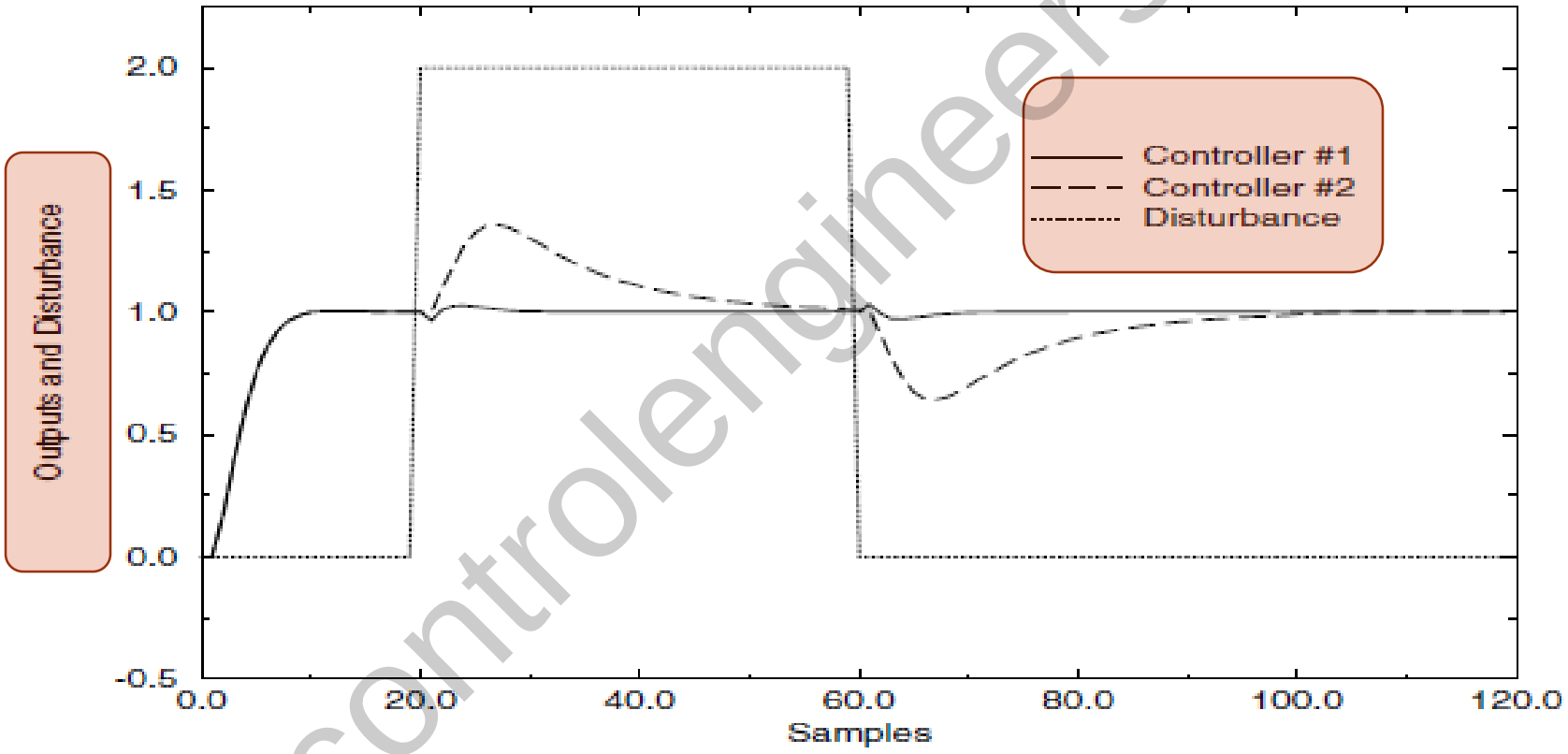
$$G(z) = \frac{0.05z^{-3}}{1 - 0.9z^{-1}}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

3.4 Case Study: A Water Heater

- Figure 3.7 shows a simulation where a disturbance occurs from $t = 20$ *to* $t = 60$.



controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

3.4 Case Study: A Water Heater

- Figure 3.7 shows a simulation where a disturbance occurs from $t = 20$ *to* $t = 60$.

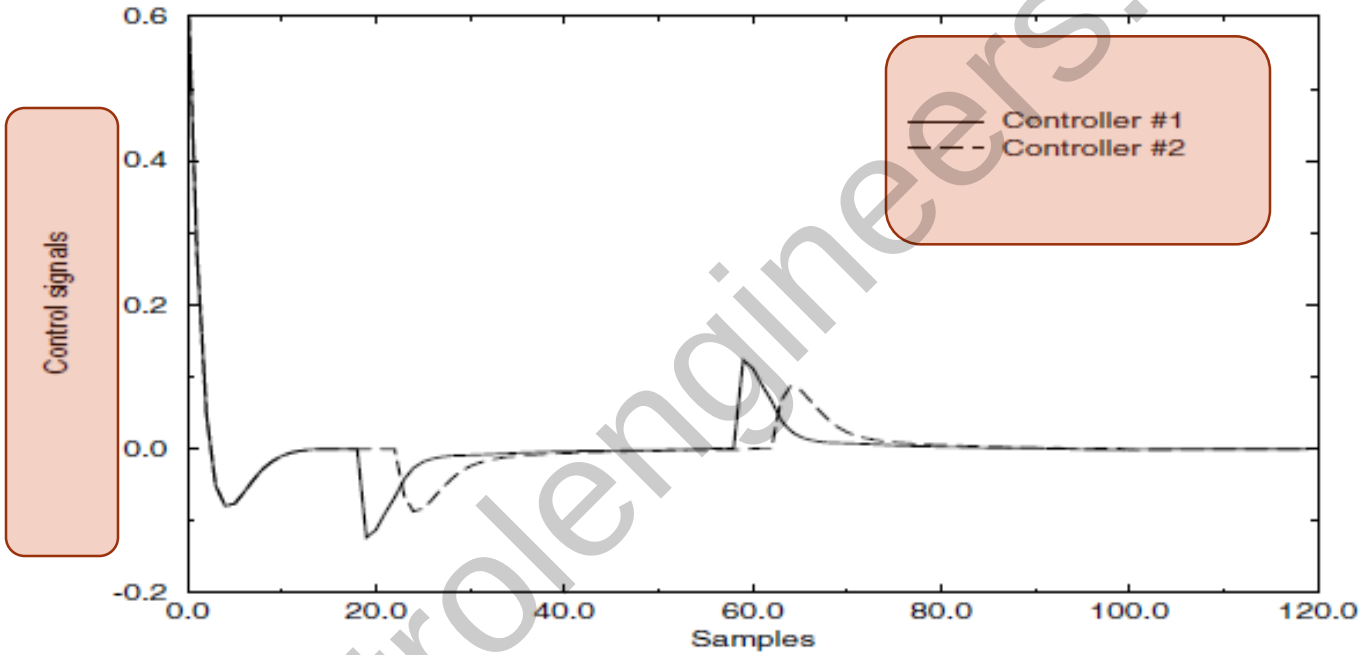


Fig. 3.7. Disturbance rejection with (Controller #1) and without (Controller #2) considering measurable disturbances

controlengineers.ir

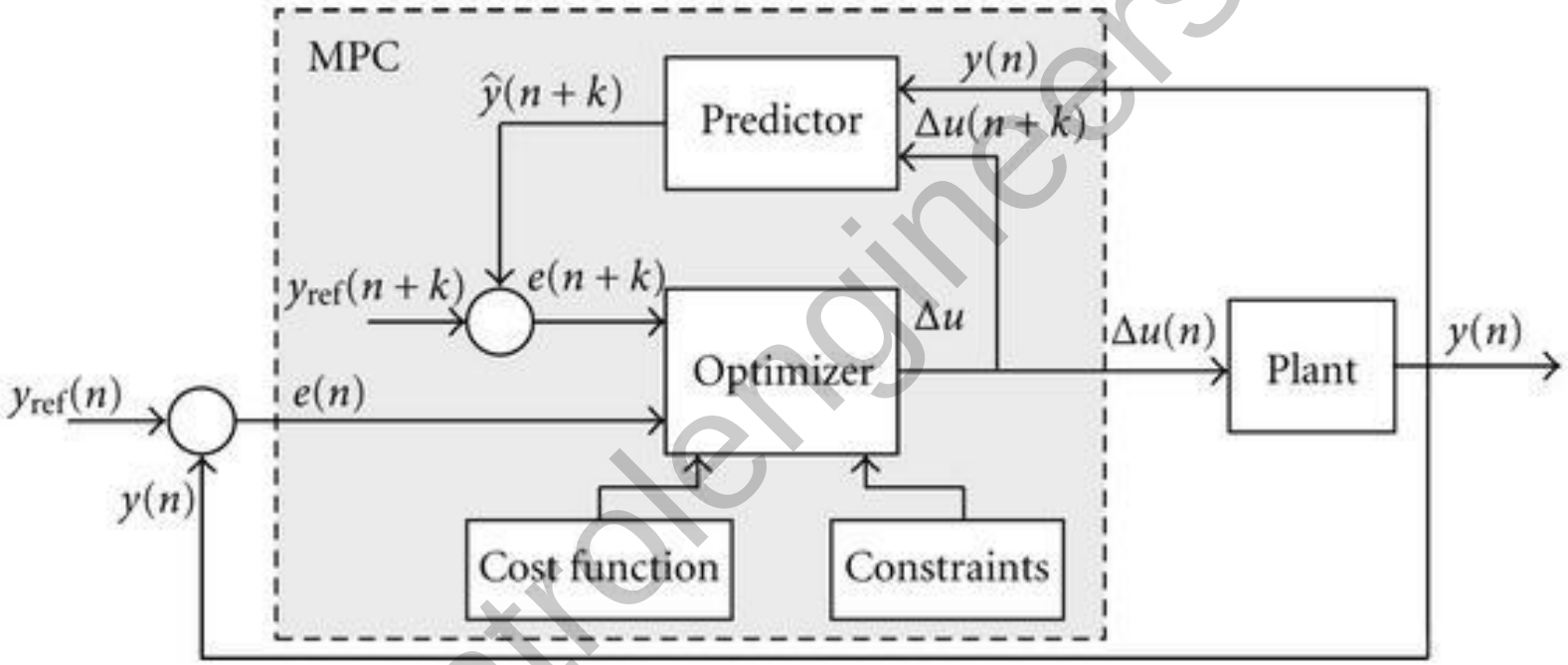
اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Notes on Simulation

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

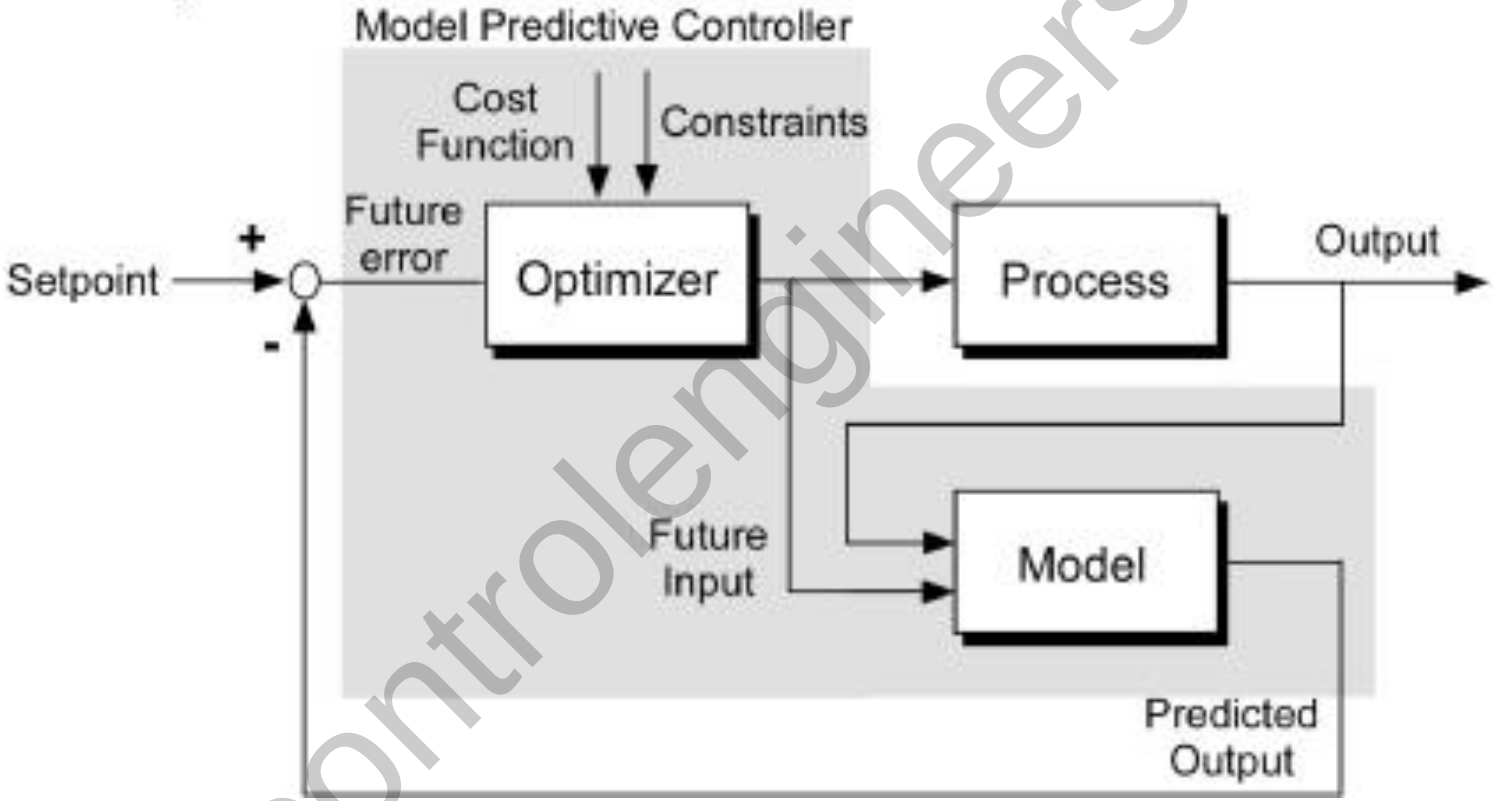
Notes on Simulation



controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Notes on Simulation



controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

CHAPTER 4:
Generalized Predictive Control

S.K. Hosseini Sani

Assistant Professor

Electrical Engineering

Ferdowsi University

Mashhad, Iran
1392

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Generalized Predictive Control

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.1 Introduction

- طرح کنترل GPC توسط clarke در سال ۱۹۸۷
- روش محبوب در صنعت و در پژوهش و تحقیق
- متکی بر مدل تابع تبدیل فرآیند
- قابلیت اعمال به سیستمهای غیر مینیمم فاز و ناپایدار

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- خطی سازی اکثر سیستم های غیر خطی حول نقطه کار

$$A(z^{-1})y(t) = z^{-d}B(z^{-1})u(t-1) + C(z^{-1})e(t)$$

Controller Auto-Regressive Moving-Average (CARMA) model.

- $e(t)$ نویز سفید با میانگین صفر
- Dتاخیر سیستم

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

$$A(z^{-1})y(t) = z^{-d}B(z^{-1})u(t-1) + C(z^{-1})e(t)$$

- A, B, C چند جمله ایهایی از درجه

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_{na} z^{-na}$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_{nb} z^{-nb}$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \ldots + c_{nc} z^{-nc}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- CARMA:

$$A(z^{-1})y(t) = z^{-d}B(z^{-1})u(t-1) + C(z^{-1})e(t)$$

- استفاده از مدل (CARIMA) با توجه به غیر ایستا (non-stationary) بودن نویز در اکثر فرآیندهای صنعتی

- CARIMA:

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})z^{-d}u(t-1) + C(z^{-1})\frac{e(t)}{\Delta} \qquad (4.1)$$

$$with \quad \Delta = 1 - z^{-1}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})z^{-d}\,u(t-1) + C(z^{-1})\frac{e(t)}{\Delta} \qquad (4.1)$$

$$with \quad \Delta = 1 - z^{-1}$$

- برای سادگی محاسبات C را یک میگیریم.
- در نظر گرفتن C^{-1} در A و B در صورتی که برش داده شود.
- حالت کلی تر : در نظر گرفتن نویز رنگی

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- هدف کنترل GPC اعمال سیگنال کنترل ناشی از مینیمایز کردن تابع هزینه چند مرحله ای (multistage) و در نتیجه محاسبه $u(t),u(t+1),\ldots$

$$J(N_1,N_2,N_u)=\sum_{j=N_1}^{N_2}\delta(j)[\hat{y}(t+j\mid t)-w(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u}\lambda(j)[\Delta u(t+j-1)]^2 \qquad (4.2)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- با در نظر گرفتن معادله دیوفانتین

$$1 = E_j(z^{-1})\tilde{A}(z^{-1}) + z^{-j}F_j(z^{-1})$$

$$with$$

$$\tilde{A}(z^{-1}) = \Delta A(z^{-1}) \qquad (4.3)$$

تعیین یکتای چند جمله ایهای E_j و F_j از درجات $j-1$ و n_a

بکارگیری روش تقسیم ۱ بر $\tilde{A}(z^{-1})$ تا رسیدن به باقیمانده $z^{-j}F_j(z^{-1})$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- با ضرب معادله زیر در $\Delta E_j(z^{-1})z^j$

- $$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})z^{-d}u(t-1) + C(z^{-1})\frac{e(t)}{\Delta}$$

- داریم

$$\tilde{A}(z^{-1})E_j(z^{-1})y(t+j)$$
$$= E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(t+j-d-1) + E_j(z^{-1})e(t+j) \qquad (4.4)$$

- با اعمال $\tilde{A}(z^{-1}) = \Delta A(z^{-1})$

$$\left(1 - z^{-j}F_j(z^{-1})\right)y(t+j)$$

$$= E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(t+j-d-1) + E_j(z^{-1})e(t+j)$$

در نتیجه

$$y(t+j) = F_j(z^{-1})y(t) + E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(t+j-d-1)$$

controlengineers.ir

controlengineers.ir
@controlengineers

- The best prediction of $y(t + j)$ is therefore

$$\hat{y}(t + j \mid t) = G_j(z^{-1})\,\Delta u(t + j - d - 1) + F_j(z^{-1})y(t)$$

$$where$$

$$G_j(z^{-1}) = E_j(z^{-1})B(z^{-1}).$$

- It is very simple to show that the polynomials E_j and F_j can be obtained recursively (study at book).

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- To solve the GPC problem the set of control signals $u(t), u(t+1), \ldots, u(t+N)$ has to be obtained in order to optimize Expression (4.2).

$$J(N_1, N_2, N_u) = \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j)[\hat{y}(t+j \mid t) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j)[\Delta u(t+j-1)]^2 \qquad (4.2)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- As the system considered has a dead time of d sampling periods, the output of the system will be influenced by signal $u(t)$ after sampling period $d + 1$.

- The values N_1, N_2 and N_u defining the horizon can be defined by:

$$N_1 = d + 1, N_2 = d + N \; and \; N_u = N$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- Now consider the following set of j ahead optimal predictions:

$$\hat{y}(t+d+1 \mid t) = G_{d+1}\Delta u(t) + F_{d+1}y(t)$$
$$\hat{y}(t+d+2 \mid t) = G_{d+2}\Delta u(t) + F_{d+2}y(t)$$
$$\dots$$
$$\hat{y}(t+d+N \mid t) = G_{d+N}\Delta u(t) + F_{d+N}y(t)$$

- which can be written as:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Gu} + \mathbf{F}(z^{-1})\mathbf{y}(t) + \mathbf{G}'(z^{-1})\Delta u(t-1) \quad (4.6)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- Where:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \hat{y}(t+d+1/t) \\ \hat{y}(t+d+2/t) \\ \vdots \\ \hat{y}(t+d+N/t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta u\,(t) \\ \Delta u\,(t+1) \\ \vdots \\ \Delta u\,(t+N-1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_1 & g_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{N-1} & g_{N-2} & \cdots & g_0 \end{bmatrix}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

$$G'(z^{-1}) = \begin{bmatrix} (G_{d+1}(z^{-1}) - g_0)z \\ (G_{d+2}(z^{-1}) - g_0 - g_1 z^{-1})z^2 \\ \vdots \\ \left(G_{d+1}(z^{-1}) - g_0 - g_1 z^{-1} - \cdots - g_{N-1} z^{-(N-1)}\right)z^N \end{bmatrix}$$

$$F(z^{-1}) = \begin{bmatrix} F_{d+1}(z^{-1}) \\ F_{d+2}(z^{-1}) \\ \vdots \\ F_{d+N}(z^{-1}) \end{bmatrix}$$

controlengineers.ir

controlengineers.ir
@controlengineers

- Notice that the last two terms in Equation (4.6)

- $$\mathbf{y} = \mathbf{Gu} + \mathbf{F}(z^{-1})\mathbf{y}(t) + \mathbf{G}'(z^{-1})\Delta u(t-1) \quad (4.6)$$

- only depend on the past and can be grouped into $\mathbf{f}$ leading to:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Gu} + \mathbf{f}$$

- Notice that if all initial conditions are zero, the free response $\mathbf{f}$ is also zero.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- If a unit step is applied to the input at time t; that is,

$$\Delta u(t) = 1, \Delta u(t+1) = 0, \ldots, \Delta u(t+N-1) = 0$$

- the expected output sequence:

$$[\hat{y}(t+1), \hat{y}(t+2), \ldots, \hat{y}(t+N)]^T$$

- is equal to the first column of matrix G.

- That is, the first column of matrix G can be calculated as the step response of the plant when a unit step is applied to the manipulated variable.

controlengineers.ir

controlengineers.ir
@controlengineers

- The free response term can be calculated recursively by:

$$f_{j+1} = z\left(1 - \tilde{A}(z^{-1})\right)\mathbf{f}_j + B(z^{-1})\Delta u(t - d + j)$$

- with $\mathbf{f}_0 = y(t)$ and $\Delta u(t + j) = 0 \; for \; j \geq 0$.

controlengineers.ir

controlengineers.ir
@controlengineers

- Expression (4.2) can be written as:

$$\mathbf{J} = (\mathbf{Gu} + \mathbf{f} - \mathbf{w})^{\mathrm{T}} (\mathbf{Gu} + \mathbf{f} - \mathbf{w}) + \lambda \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \mathbf{u} \qquad (4.7)$$

- Where:

$$\mathbf{w} = [w(t + d + 1)\, w(t + d + 2) \cdots w(t + d + N)]^{T}$$

controlengineers.ir

controlengineers.ir
@controlengineers

- Equation (4.7) can be written as:

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\mathbf{u} + \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{u} + f0 \quad (4.8)$$

- Where:

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{2}(\boldsymbol{G}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{G} + \lambda \boldsymbol{I})$$

$$\mathbf{b}^{\mathrm{T}} = 2(\mathbf{f} - \mathbf{w})^{\mathrm{T}}\mathbf{G}$$

$$f_0 = (\mathbf{f} - \mathbf{w})^{\mathrm{T}}(\mathbf{f} - \mathbf{w})$$

controlengineers.ir

controlengineers.ir
@controlengineers

- The minimum of $\boldsymbol{J}$, assuming there are no constraints on the control signals, can be found by making the gradient of $\boldsymbol{J}$ equal to zero, which leads to:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{H}^{-1}\mathbf{b} = \left(\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G} + \lambda\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}(\mathbf{w} - \mathbf{f}) \qquad (4.9)$$

- Notice that the control signal that is actually sent to the process is the first element of vector $\mathbf{u}$, given by:

$$\Delta u(t) = \mathbf{K}(\mathbf{w} - \mathbf{f}) \qquad (4.10)$$

- Where K is the first row of matrix $\left(\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G} + \lambda\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}$.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- This has a clear meaning that can easily be derived from Figure 4.1:

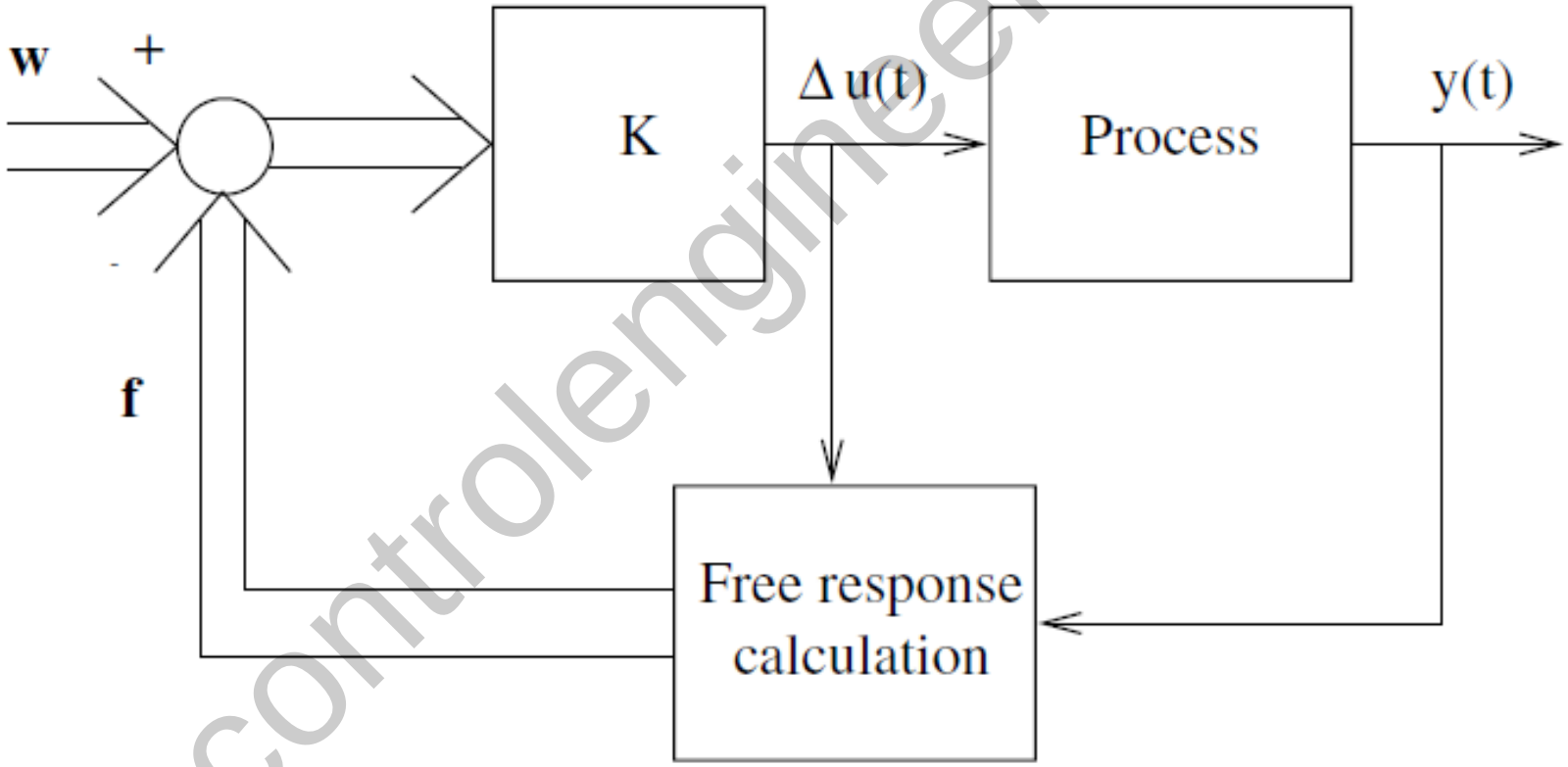


Fig. 4.1. GPC control law

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- if there are no future predicted errors, that is, if $\mathbf{w} - \mathbf{f} = \mathbf{0}$, then there is no control move, since the objective will be fulfilled with the free evolution of the process.

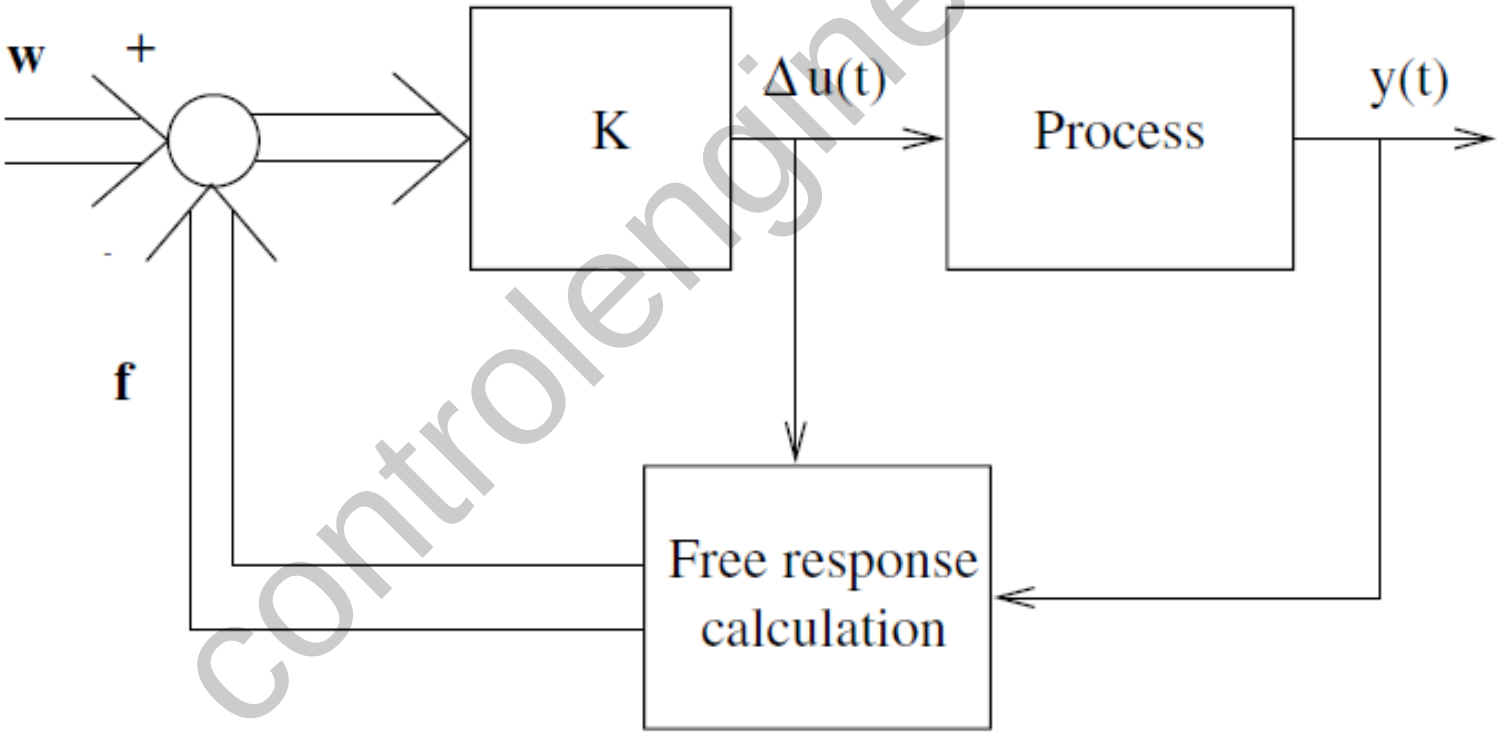


Fig. 4.1. GPC control law

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- However, in the other case, there will be an increment in the control action proportional (with a factor K) to that future error.

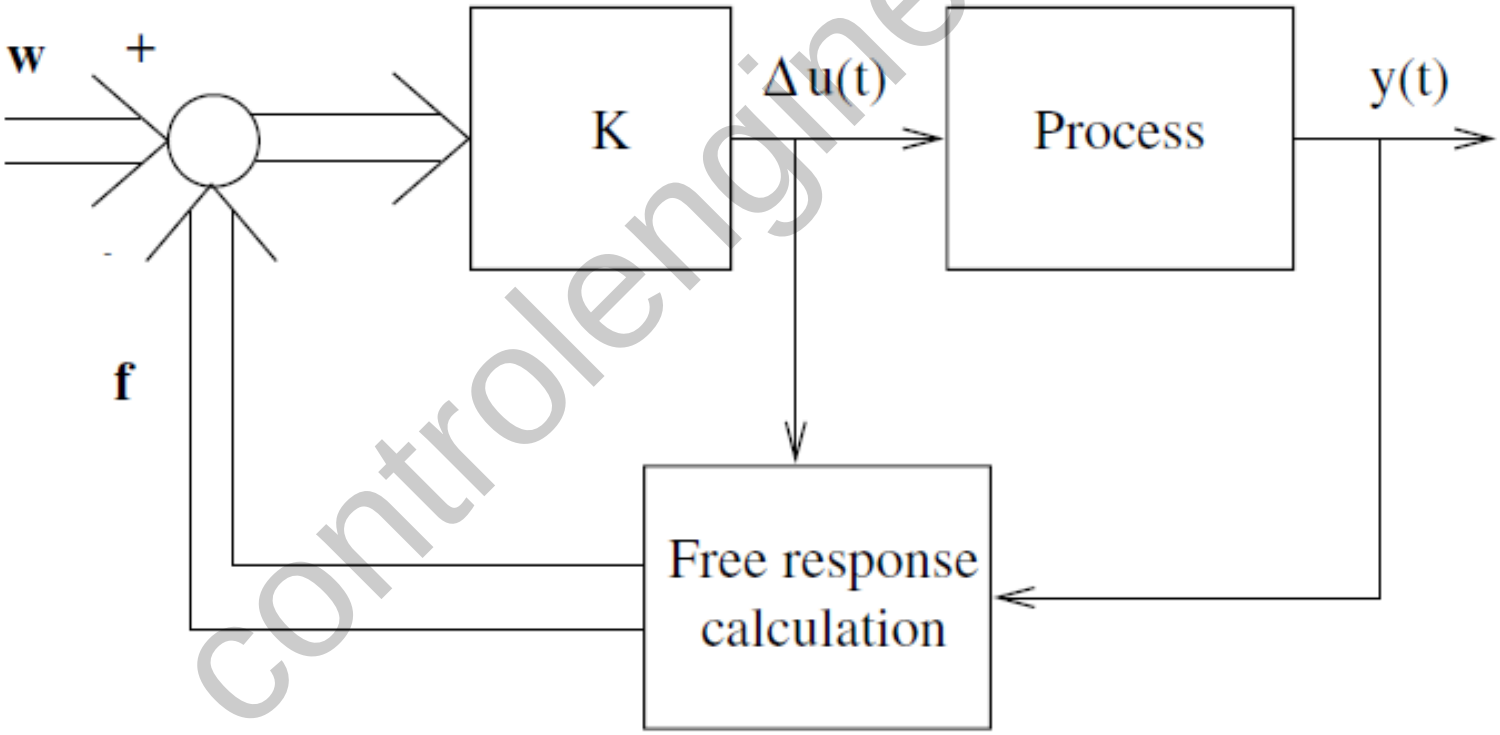


Fig. 4.1. GPC control law

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- Notice that the action is taken with respect to future errors, not past errors, as is the case in conventional feedback controllers.

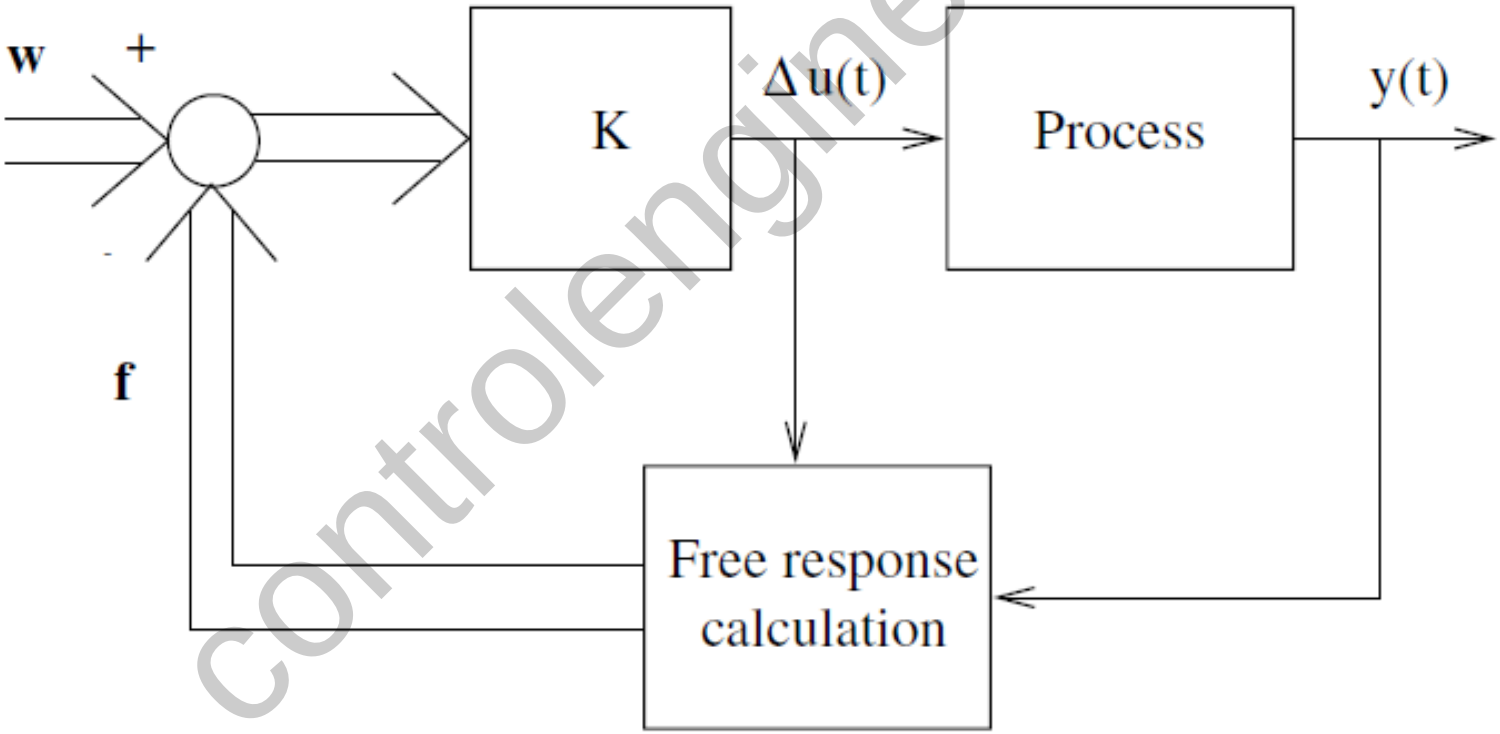


Fig. 4.1. GPC control law

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- Notice that only the first element of **u** is applied and the procedure is repeated at the next sampling time.

- The solution to the GPC given involves the inversion (or triangularization) of an $N \times N$ matrix which requires a substantial amount of computation.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- In [58] the concept of control horizon is used to reduce the amount of computation needed, assuming that the projected control signals are going to be constant after $N_u < N$.

- This leads to the inversion of an $N_u \times N_u$ matrix which reduces the amount of computation (in particular, if $N_u = 1$ it is reduced to a scalar computation, as in EPSAC), but restricts the optimality of the GPC.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.4 An Example

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.4 An Example

- In order to show how a Generalized Predictive Controller can be implemented, a simple example is presented.
- The controller will be designed for a first-order system for the sake of clarity.
- The following discrete equivalence can be obtained when a first-order continuous plant is discretized:

$$(1 + az^{-1})y(t) = (b_0 + b_1 z^{-1})u(t - 1) + \frac{e(t)}{\Delta}$$

- In this example the delay d is equal to 0 and the noise polynomial $C(z^{-1})$is considered to be equal to 1.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.4 An Example

- The algorithm to obtain the control law described in the previous section will be used on the preceding system, obtaining numerical results for the parameter values $a = -0.8, b_0 = 0.4$ and $b_1 = 0.6$, the horizons being $N_1 = 1$and $N_2 = N_u = 3$.

- As has been shown, predicted values of the process output over the horizon are first calculated and rewritten in the form of Equation (4.6), and then the control law is computed using Expression (4.9).

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.4 An Example

- Predictor polynomials $E_j(z^{-1}), F_j(z^{-1})$ from $j = 1\ to\ j = 3$ will be calculated solving the Diophantine Equation (4.3), with:

$$\tilde{A}(z^{-1}) = A(z^{-1})(1 - z^{-1}) = 1 - 1.8z^{-1} + 0.8z^{-2}$$

- In this simple case where the horizon is not too long, the polynomials can be directly obtained by dividing 1 by $\tilde{A}(z^{-1})$ with simple calculations.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

$$E_1(z^{-1}) = 1 \qquad F_1(z^{-1}) = 1.8 - 0.8z^{-1}$$

Whatever the procedure employed, the values obtained are:

$$E_2 = 1 + 1.8z^{-1} \qquad F_2 = 2.44 - 1.44z^{-1}$$
$$E_3 = 1 + 1.8z^{-1} + 2.44z^{-2} \quad F_3 = 2.952 - 1.952z^{-1}$$

With these values and the polynomial $B(z^{-1}) = 0.4 + 0.6z^{-1}$, the values of $G_i(z^{-1})$ are

$$G_1 = 0.4 + 0.6z^{-1}$$
$$G_2 = 0.4 + 1.32z^{-1} + 1.08z^{-2}$$
$$G_3 = 0.4 + 1.32z^{-1} + 2.056z^{-2} + 1.464z^{-3}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.4 An Example

- With these values and the polynomial:

$$B(z^{-1}) = 0.4 + 0.6z^{-1},$$

- the values of $G_i(z^{-1})$ are:

$$G_1 = 0.4 + 0.6z^{-1}$$

$$G_2 = 0.4 + 1.32z^{-1} + 1.08z^{-2}$$

$$G_3 = 0.4 + 1.32z^{-1} + 2.056z^{-2} + 1.464z^{-3}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- and so the predicted outputs can be written as:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(t+1|t) \\ \hat{y}(t+2|t) \\ \hat{y}(t+3|t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 1.32 & 0.4 & 0 \\ 2.056 & 1.32 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(t) \\ \Delta u(t+1) \\ \Delta u(t+2) \end{bmatrix}$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0.6\Delta u(t-1) + 1.8y(t) - 0.8y(t-1) \\ 1.08\Delta u(t-1) + 2.44y(t) - 1.44y(t-1) \\ 1.464\Delta u(t-1) + 2.952y(t) - 1.952y(t-1) \end{bmatrix}}_{\text{f}}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.4 An Example

- The following step is to calculate $H^{-1}b$.

- If λ is taken as equal to 0.8

$$(G^T G + \lambda I) - 1GT = \begin{bmatrix} 0.133 & 0.286 & 0.147 \\ -0.154 & -0.165 & 0.286 \\ -0.029 & -0.154 & 0.1334 \end{bmatrix}$$

- As only $\Delta u(t)$ is needed for the calculations, only the first row of the matrix is used, obtaining the following expression for the control law:

$$\Delta u(t) = -0.604\,\Delta u(t-1) - 1.371y(t) + 0.805y(t-1) + 0.133w(t+1) + 0.286w(t+2) + 0.147w(t+3)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- where $w(t + i)$ is the reference trajectory which can be considered constant and equal to the current setpoint or a first-order approach to the desired value.

- Then the control signal is a function of this desired reference and of past inputs and outputs and is given by:

$$u(t) = 0.396u(t-1) + 0.604u(t-2) - 1.371y(t) + 0.805y(t-1) + 0.133w(t+1) + 0.286w(t+2) + 0.147w(t+3) \quad (4.14)$$

- Simulation results show the behaviour of the closed-loop system.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- In the first graph of Figure 4.2 the reference is constant and equal to 1, and in the second one there is a smooth approach to the same value, obtaining a slightly different response, slower but without overshoot.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.4 An Example

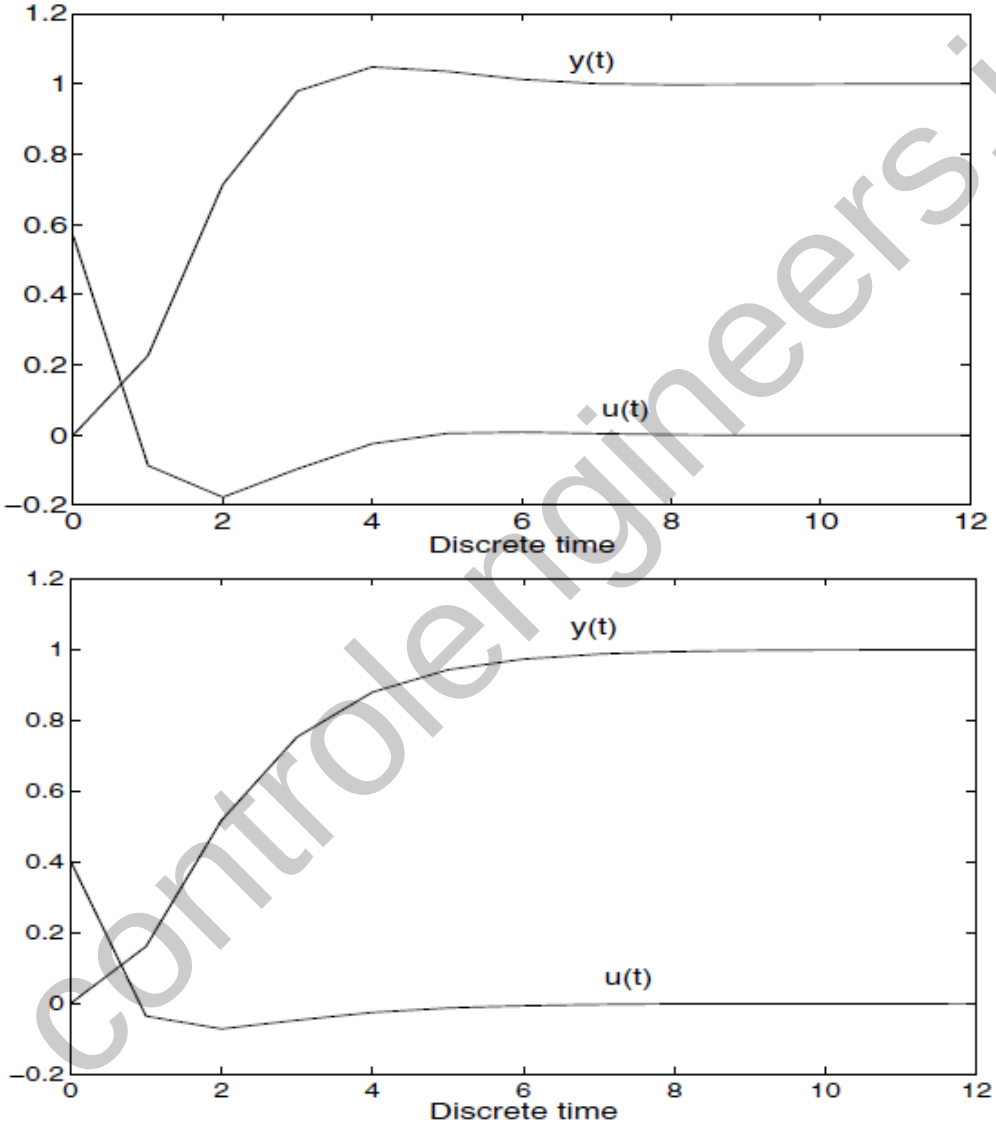


Fig. 4.2. System response

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.4 An Example

- The GPC control law can also be calculated without the use of the Diophantine equation.

- To obtain the control law it is necessary to know matrix $\mathbf{G}$ and the free response $\mathbf{f}$, to compute $\mathbf{u} = \left(\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\right.$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.4 An Example

- Matrix G is composed of the plant step response coefficients, so that the elements of the first column of this matrix are the first N coefficients, that can be computed as:

$$g_j = -\sum_{i=1}^{j} a_i g_{j-i} + \sum_{i=0}^{j-1} b_i \; with \; g_k = 0 \quad \forall k < 0$$

- where b_i and a_i are the parameters of the numerator and denominator of the transfer function.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- Therefore, as the prediction horizon is 3, $A = 1 - 0.8z^{-1}$ and $B = 0.4 + 0.6z^{-1}$

$$g_0 = b_0 = 0.4$$

$$g_1 = -a_1 g_0 + b_0 + b_1 = 1.32$$

$$g_2 = -a_1 g_1 - a_2 g_0 - a_3 g_0 + b_0 + b_1 = 2.056$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- and the matrix is given by:

$$G = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 1.32 & 0.4 & 0 \\ 2.056 & 1.32 & 0.4 \end{bmatrix}$$

- which logically coincides with the one obtained by the previous method.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.4 An Example

- The free response can also be calculated without the use of the Diophantine equation, just noting that it is the response of the plant assuming that future controls equal the previous control $u(t-1)$ and that the disturbance is constant.

- Thus, using the transfer function:

$$y(t) = 0.8y(t-1) + 0.4u(t-1) + 0.6u(t-2)$$

$$y(t+1) = 0.8y(t) + 0.4u(t) + 0.6u(t-1)$$

- If both equations are added and $y(t+1)$ is extracted:

$$y(t+1) = 1.8y(t) - 0.8y(t-1) + 0.4\,\Delta u(t) + 0.6\,\Delta u(t-1)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- Now, considering that in the free response only the control increments before instant t appear:

$$f(t+1) = 1.8y(t) - 0.8y(t-1) + 0.6\,\Delta u(t-1)$$

$$f(t+2) = 1.8f(t+1) - 0.8y(t)$$
$$= 2.44y(t) - 1.44y(t-1) + 1.08\,\Delta u(t-1)$$

$$f(t+3) = 1.8f(t+2) - 0.8f(t+1)$$
$$= 2.952y(t) - 1.952y(t-1) + 1.464\,\Delta u(t-1)$$

- Vector f obtained this way is the same as the one previously obtained, so the control law is the one given by Equation (4.14).

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.3 The Coloured Noise Case

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.3 The Coloured Noise Case

- پیش بینی خروجی در صورت $C(z^{-1})$ ۱ نبودن

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})z^{-d}\,u(t-1) + \frac{C(z^{-1})e(t)}{\Delta(z^{-1})}$$

- معادله دیوفانتین جدید:

$$C(z^{-1}) = E_j(z^{-1})\tilde{A}(z^{-1}) + z^{-j}F_j(z^{-1})$$

رتبه چندجمله ای خارج قسمت و باقیمانده:

$$\delta(E_j(z^{-1})) = j - 1$$

$$\delta(F_j(z^{-1})) = \delta(\tilde{A}(z^{-1})) - 1.$$

- ضرب معادله خروجی در $\Delta E_j(z^{-1})z^j$ و استفاده از معادله دیوفانتین:

$$C(z^{-1})(y(t+j) - E_j(z^{-1})e(t+j))$$
$$= E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(t+j-1) + F_j(z^{-1})y(t)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

نویز آینده غیرقابل تخمین ← امید ریاضی صفر

امید ریاضی قسمت چپ معادله پیش بینی:

$$E[C(z^{-1})(y(t+j) - E_j(z^{-1})e(t+j))] = C(z^{-1})\hat{y}(t+j|t)$$

- پیش بینی خروجی:

$$C(z^{-1})\hat{y}(t+j|t) = E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(t+j-1) + F_j(z^{-1})y(t)$$

- معادله دیوفانتین برای $C(z^{-1})$ و خارج قسمت M_j

$$1 = C(z^{-1})M_j(z^{-1}) + z^{-k}N_j(z^{-1})$$

رتبه چندجمله ای خارج قسمت و باقیمانده:

$$\delta(M_j(z^{-1})) = j - 1$$

$$\delta(N_j(z^{-1})) = \delta(C(z^{-1})) - 1.$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- ضرب معادله پیش بینی در $M_j(z^{-1})$ و استفاده از معادله دیوفانتین:

$$\hat{y}(t+j|t) = M_j E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(t+j-1) + M_j(z^{-1})F_j(z^{-1})y(t) + N_j(z^{-1})y(t)$$

- بازنویسی:

$$y(t+j|t) = G(z^{-1})\Delta u(t+j-1) + G_p(z^{-1})\Delta u(t+j-1) + (M_j(z^{-1})F_j(z^{-1}) + N_j(z^{-1}))y(t)$$

رتبه $G(z^{-1})$:

- $\delta(G(z^{-1})) < j \rightarrow$

اثر ورودیهای آینده در خروجی آینده: $G(z^{-1})\Delta u(t+j-1)$

اثر ورودیهای گذشته در خروجی آینده: $G_p(z^{-1})\Delta u(t+j-1)$

- محاسبه ورودی بهینه آینده بر اساس پیش بینی خروجی و تابع هزینه

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- روش دیگر محاسبه پیش بینی: درنظرگرفتن سیگنال های ورودی و خروجی فیلترشده:

$$y^f(t) = \frac{1}{C(z^{-1})} y(t),$$

$$u^f(t) = \frac{1}{C(z^{-1})} u(t)$$

- مدل نهایی مانند نویز سفید:

$$A(z^{-1}) y^f(t) = B(z^{-1}) u^f(t) + \frac{e(t)}{\Delta}$$

- استفاده از روش نویز سفید:

سیگنال پیش بینی: $\hat{y}^f(t+j|t)$

سیگنال خروجی اصلی $\hat{y}^f(t+j|t)$ فیلترشده $C(z^{-1})$ است

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

CHAPTER 4:
Generalized Predictive Control

S.K. Hosseini Sani

Assistant Professor

Electrical Engineering

Ferdowsi University

Mashhad, Iran
1392

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.5 Closed-Loop Relationships

controlengineers.ir

controlengineers.ir
@controlengineers

Closed-loop relations

can be obtained for the

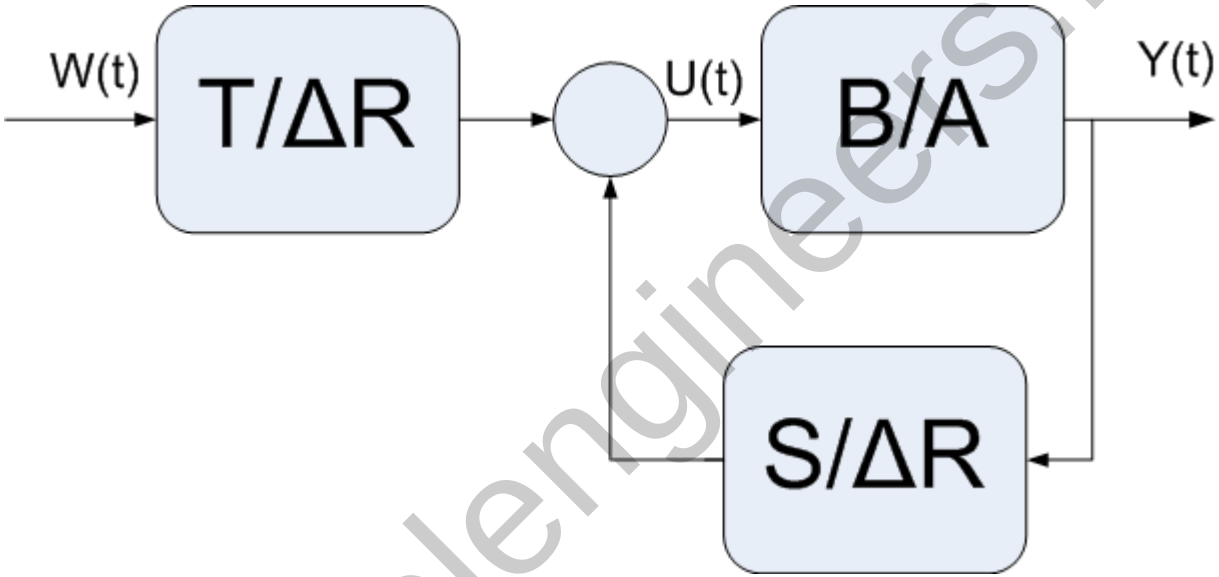
unconstrained GPC.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.5 Closed-Loop Relationships

- ساختار سیستم حلقه بسته



- قانون کنترل:

$$R(z^{-1})\Delta u(t) = T(z^{-1})w(t) - S(z^{-1})y(t) \quad (4.15)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.5 Closed-Loop Relationships

- همانطور که قبلا مطرح شد تنها اولین المان ماتریس یعنی $\Delta u(t \mid t)$ به فرآیند اعمال می شود.

$$\Delta u(t) = \mathbf{K}(\mathbf{w} - \mathbf{f}) = \sum_{i=N_1}^{N_2} k_i[w(t+i) - f(t+i)] \quad (4.16)$$

که در آن Kاولین ردیف ماتریس $(G^T G + \lambda I)^{-1} G^T$ است.

- مشکلات مربوط به چندجمله ای غیر صفر $C(z^{-1})$

نیاز به $C(z^{-1})$ برای شناسایی پاسخ آزاد

عدم معلوم بودن $C(z^{-1})$ بدلیل مشکلات شناسایی متغیر با زمان بودن آن

راه حل : جایگزینی $C(z^{-1})$ با چندجمله ای T به عنوان رویتگر یا پیش فیلتر

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t-1) + T(z^{-1})\frac{e(t)}{\Delta}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- معادله دیوفانتین :

$$T(z^{-1}) = E_j(z^{-1})\Delta A(z^{-1}) + z^{-j}F_j(z^{-1}) \quad (4.17)$$

- با کمک معادله دیوفانتین معادله فرآیند :

$$y(t+j) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(t+j-1) + E_j(z^{-1})e(t+j) + \frac{F_j(z^{-1})}{A(z^{-1})\Delta}e(t)$$

با جایگزینی e(t) از فرایند داریم :

$$y(t+j) = \frac{F_j}{T}y(t) + \frac{E_jB}{T}\Delta u(t+j-1) + E_je(t+j)$$

بنابراین پیش بینی فرآیند :

$$\hat{y}(t+j\,|\,t) = \frac{F_j}{T}y(t) + \frac{E_jB}{T}\Delta u(t+j-1)$$

معادله شامل مقادیر معلوم و اطلاعات آینده.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.5 Closed-Loop Relationships

- تفکیک سیگنال کنترلی به دو بخش گذشته و آینده

$$E_j(z^{-1})B(z^{-1}) = H_j(z^{-1})T(z^{-1}) + z^{-j}I_j(z^{-1}) \qquad (4.18)$$

- معادله پیش بینی

$$\hat{y}(t+j \mid t) = H_j\Delta u(t+j) + \frac{I_j}{T}\Delta u(t-1) + \frac{F_j}{T}y(t)$$
$$= H_j\Delta u(t+j) + I_j\,\Delta u^f(t-1) + F_j y^f(t) \qquad (4.19)$$

- با استفاده از سیگنالهای فیلتر شده

$$y^f(t) = \frac{y(t)}{T}$$
$$\Delta u^f(t-1) = \frac{\Delta u(t-1)}{T}$$

- this equation provides the same prediction along the horizon as given by (4.6) when $T(z^{-1}) = 1$, where the coefficients of H_j are the elements of matrix G and I_j are the rows of vector G'.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.5 Closed-Loop Relationships

- پاسخ آزاد سیستم :

$$\mathbf{f} = \mathbf{I}(z^{-1})\Delta u^f(t-1) + \mathbf{F}(z^{-1})y^f(t)$$

$$= \mathbf{I}(z^{-1})\frac{\Delta u(t-1)}{T(z^{-1})} + \mathbf{F}(z^{-1})\frac{y(t)}{T(z^{-1})}$$

در نتیجه :

$$\Delta u(t) = \mathbf{K}(\mathbf{w} - \mathbf{f}) = \sum_{i=N_1}^{N_2} k_i[w(t+i) - f(t+i)]$$

$$= \sum_{i=N_1}^{N_2} k_i w(t+i) - \sum_{i=N_1}^{N_2} k_i \frac{I_i(z^{-1})}{T(z^{-1})}\Delta u(t-1) - \sum_{i=N_1}^{N_2} k_i\, F_i(z^{-1})/T(z^{-1})\, y(t)$$

با مرتب کردن معادله :

$$\left[T + z^{-1}\sum_{i=N_1}^{N_2} k_i I_i\right]\Delta u(t) = \sum_{i=N_1}^{N_2} k_i w(t) - \sum_{i=N_1}^{N_2} k_i\, F_i\, y(t)$$

که در آن مسیر مرجع در بازه افق پیش بین ثابت فرض شده است. $w(t+i) = w(t)$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- محاسبه مقادیر چند جمله ایهای R و S از مقایسه با معادله (4.15)

$$R(z^{-1}) = \frac{T(z^{-1}) + z^{-1}\sum_{i=N_1}^{N_2} k_i I_i}{\sum_{i=N_1}^{N_2} k_i}$$

$$S(z^{-1}) = \frac{\sum_{i=N_1}^{N_2} k_i F_i}{\sum_{i=N_1}^{N_2} k_i}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- معادله سیستم حلقه بسته با استفاده از مدل فرآیند و کنترل

$$A\,\Delta y(t) = B\,\Delta u(t-1) + Te(t)$$

$$\Delta u(t) = \frac{T}{R}w(t) - \frac{S}{R}y(t)$$

- داریم:

$$A\Delta y(t) = Bz^{-1}\left(\frac{T}{R}w(t) - \frac{S}{R}y(t)\right) + Te(t)$$

محاسبه خروجی:

$$y(t) = \frac{BTz^{-1}}{RA\Delta + BSz^{-1}}w(t) + \frac{TR}{RA\Delta + BSz^{-1}}e(t) \quad (4.20)$$

- معادله مشخصه :

$$RA\Delta + BSz^{-1} = 0$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- با دوباره نویسی ومعادله (۴.۱۸) :

$$RA\,\Delta + BSz^{-1} = \frac{1}{\sum_{i=N_1}^{N_2} k_i}\left(T\tilde{A} + T\sum_{i=N_1}^{N_2} k_i z^{i-1}(B - \tilde{A}H_i)\right) = TP_c$$

- در نتیجه معادله خروجی :

$$y(t) = \frac{Bz^{-1}}{P_c}w(t) + \frac{R}{P_c}e(t)$$

- مشاهده می شود که :
- حذف چندجمله ای T بین خروجی و سیگنا ل مرجع
  - بستگی پایداری و عملکرد بر اساس ریشه های P_c
- عدم تشخیص راحت وابستگی ریشه ها به N_1, N_2, N_u و λ

با توجه $P_c(1) = B(1)$, پاسخ : offset free)

گین استاتیک بین خروجی و مدل مرجع =۱)

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.6 The Role of the T Polynomial

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.6 The Role of the T Polynomial

- فیلتر کردن ورودی و خروجی با $\frac{1}{T}$ در پیش بینی
- تضعیف خطای ناشی از عدم تطابق مدل در فرکانس های بالا
- تضعیف اغتشاشت فرکانس پایین به کمک جمله Δ

- اغتشاشات فرکانس بالا ناشی از : دینامیک مدل نشده و اغتشاش بار غیر قابل اندازه گیری

- تضعیف خطای ناشی از اغتشاشات بار غیر قابل اندازه گیری
- بهبود پایداری مقاوم سیستم

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- **انتخاب چندجمله ای T**
- فیلتر قویتر (پهنای باند کمتر یا شیب بزرگتر) دارای مقاومت بهتر در مقابل نامعینی های فرکانس بالاتر
- برای بهبود مقاومت در فرکانس های بالا برای فرآیندهای پایدار

$$T(z^{-1}) = A(z^{-1})(1-\beta z^{-1})^{N_1-\delta(P)}$$

که در آن

β نزدیک به قطبهای قالب A

N_1 کمینه افق پیش بین

$\delta(P)$ درجه چند جمله ای P (فیلتر مورد استفاده برای تولید مسیر مرجع)

$$w(t+k) = r(t+k) - \alpha k(y(t) - r(t))$$

$$\psi(t) = P(z^{-1})y(t)$$

$$\psi(t+k) - w(t+k)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.7 The P Polynomial

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- $P(z^{-1})$ جهت خروجی کمکی مثلا در EPSAC

$$\psi(t) = P(z^{-1})y(t)$$

- امکان توسعه تابع هدف
- در فرم استاندارد GPC :

$$A\Delta P(z^{-1})y(t) = BA\Delta P(z^{-1})u(t-1)$$

- در حالت $P(1) = 1$ و در حالت پایدار : $\psi(t) = y(t)$ به عبارت دیگر

$$v(t) = P(z^{-1})u(t)$$
$$\psi(t) = P(z^{-1})y(t)$$

- فرآیند :

$$A\Delta\psi(t) = BA\Delta v(t-1)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- خطا در تابع هزینه :

$$w(t+j) - \psi(t+j)$$

- معادل با فیلتر کردن مسیر مرجع با $\frac{1}{P(z^{-1})}$
- $\psi(t)$ در کنترل Deadbeat بر روی $v(t)$ عمل می کند.

$$v(t) = P(z^{-1})u(t)$$

$$\psi(t) = \frac{B(z^{-1})}{B(1)}w(t)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- محاسبه $\Delta v(t)$ از الگوریتم GPC:

$$u(t) = u(t-1) + \frac{\Delta v(t)}{P(z^{-1})}$$

$$y(t) = \frac{B(z^{-1})}{B(1)P(z^{-1})} w(t) \quad (4.21)$$

- جایابی قطبها بر صفرهای $P(z^{-1})$
- دنبال کردن خروجی بر اساس دینامیک $P(z^{-1})$ بر روی سیگنال مرجع

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

CHAPTER 4:
Generalized Predictive Control

S.K. Hosseini Sani

Assistant Professor

Electrical Engineering

Ferdowsi University

Mashhad, Iran

1392

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.8 Consideration of Measurable Disturbances

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.8 Consideration of Measurable Disturbances

- بسیاری از فرآیندها متاثر از اغتشاشات خارجی ایجاد شده به دلیل تغییرات متغیرها هستند که قابل اندازه گیری است.
- این وضعیت در فرآیندهایی که تغییرات بار منجر به تغییرات خروجیهای آنها می گردد مرسوم است.
- بعنوان مثال : در راکتور پوشش سرد شده، درجه حرارت با دستکاری میزان جریان آب ورودی به محفظه کنترل می شود.
- هر تغییری در جریان راکتیو، درجه حرارت راکتور را متاثر خواهد کرد.
- این انواع اغتشاش که بعنوان اغتشاش بار شناخته می شود براحتی می تواند با کمک کنترل فیدفوروارد کنترل شود.
- اغتشاشات معلوم می تواند در کنترل MPC بصورت صریح بشکل زیر در نظر گرفته شود.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- مدل CARIMA فرآیند با در نظر گرفتن اغتشاش:

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t-1) + D(z^{-1})v(t) + \frac{1}{\Delta}C(z^{-1})e(t) \quad (4.22)$$

- $v(t)$ اغتشاش قابل اندازه گیری در لحظه t و :

$$D(z^{-1}) = d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \cdots + d_n z^{-n_d}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- با ضرب معادله (4.22) در $\Delta E_j(z^{-1})z^j$:

$$E_j(z^{-1})\tilde{A}(z^{-1})y(t+j) = E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(t+j-1) + E_j(z^{-1})D(z^{-1})\Delta v(t+j) + E_j(z^{-1})e(t+j)$$

- با استفاده از رابطه :

$$1 = E_j(z^{-1})\tilde{A}(z^{-1}) + z^{-j}F_j(z^{-1})$$

- که در آن $deg(E_j(z^{-1})) = j\text{-}1$ داریم:

$$y(t+j) = F_j(z6-1)y(t) + E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(t+j-1) + E_j(z^{-1})D(z^{-1})\Delta v(t+j) + E_j(z^{-1})e(t+j)$$

- تخمین خروجی :

$$\hat{y}(t+j|t) = F_j(z^{-1})y(t) + E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(t+j-1) + E_j(z^{-1})D(z^{-1})\Delta v(t+j) \quad (4.23)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- از معادله دیوفانتین زیر با فرض $\deg\left(H_j(z^{-1})\right) = j - 1$:

$$E_j(z^{-1})D(z^{-1}) = H_j(z^{-1}) + z^{-j}H_j'(z^{-1})$$

- بنابراین :

$$\begin{aligned}&\hat{y}(t+j|t)\\&= G_j(z^{-1})\Delta u(t+j-1) + H_j(z^{-1})\Delta v(t+j)\\&+ G_j'(z^{-1})\Delta u(t-1) + H_j'(z^{-1})\Delta v(t)\\&+ F_j(z^{-1})y(t) \quad (4.23)\end{aligned}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

$$\hat{y}(t+j|t)$$
$$= G_j(z^{-1})\Delta u(t+j-1) + H_j(z^{-1})\Delta v(t+j) + G_j'(z^{-1})\Delta u(t-1) + H_j'(z^{-1})\Delta v(t) + F_j(z^{-1})y(t)$$

- Free Response : سه ترم آخر مربوط به مقادیر گذشته خروجی، اغتشاش قابل اندازه گیری و متغیرهای ورودی است اگر اغتشاش و سیگنال کنترل ثابت باشد.

- Force response : اولین ترم و وابسته به مقادیر سیگنال ورودی

- ترم دوم وابسته به مقادیر آینده اغتشاش
- اگر اغتشاش بار ثابت باشد، $(v(t+j) = v(t))$ آنگاه $\Delta v(t+j) = 0$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- با دوباره نویسی رابطه :

$$\hat{y}(t+j|t) = G_j \Delta u(t+j-1) + H_j(z^{-1})\Delta v(t+j) + f_j$$

$$f_j = G_j'(z^{-1})\Delta u(t-1) + H_j'(z^{-1})\Delta v(t) + F_j(z^{-1})y(t)$$

- برای N پیش بین :

$$\hat{y}(t+1|t) = G_1(z^{-1})\Delta u(t) + H_1(z^{-1})\Delta v(t+1) + f_1$$
$$\hat{y}(t+2|t) = G_2(z^{-1})\Delta u(t+1) + H_2(z^{-1})\Delta v(t+2) + f_2$$
$$\vdots$$
$$\hat{y}(t+N|t) = G_N(z^{-1})\Delta u(t+N-1) + H_N(z^{-1})\Delta v(t+N) + f_N$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- با استفاده از خاصیت بازگشتی چند جمله ای E_j :

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(t+1|t) \\ \hat{y}(t+2|t) \\ \vdots \\ \hat{y}(t+j|t) \\ \vdots \\ \hat{y}(t+N|t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ g_1 & g_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_{j-1} & g_{j-2} & \cdots & g_0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ g_{N-1} & g_{N-2} & \cdots & \cdots & g_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(t) \\ \Delta u(t+1) \\ \vdots \\ \Delta u(t+j-1) \\ \vdots \\ \Delta u(t+N-1) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} h_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_1 & h_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{j-1} & h_{j-2} & \cdots & h_0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ h_{N-1} & h_{N-2} & \cdots & h_1 & h_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta v(t) \\ \Delta v(t+1) \\ \vdots \\ \Delta v(t+j-1) \\ \vdots \\ \Delta v(t+N-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_j \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}$$

- که در آن $H_j(z^{-1}) = \sum_{i=1}^{j} h_i z^{-i}$ و h_i ضرایب پاسخ پله
- با در نظر گرفتن $\mathbf{f}'$، معادله پیش بین مشابه پاسخ با اغتشاش صفر است :

$$\mathbf{y} = \mathbf{Gu} + \mathbf{f}' \quad \text{و} \quad \mathbf{f}' = \mathbf{Hv} + \mathbf{f}$$

- سیگنال کنترل آینده با کمک پاسخ آزاد و اغتشاشات معلوم آینده بدست می آید.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.8 Consideration of Measurable Disturbances

- where $H_j(z^{-1}) = \sum_{i=1}^{j} h_i z^{-i}$ and h_i are the coefficients of the system step response to the disturbance.

- By making $\mathbf{f}' = \mathbf{Hv} + \mathbf{f}$, the prediction equation is now:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Gu} + \mathbf{f}'$$

- which has the same shape as the general prediction equation used in the case of zero measured disturbances.

- The future control signal can be found in the same way, simply using as free response the process response due to initial conditions (including external disturbances) and future ”known” disturbances.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.9 Use of a Different Predictor in GPC

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.9 Use of a Different Predictor in GPC

- مقایسه ساختار GPC با ساختار تشکیل شده از پیش بین بهینه بعلاوه کنترل کننده کلاسیک
- فرض مدل CARIMA برای سیستم و نویز سفید

تاخیر فرایند: d

$$T(z^{-1}) = 1, N_1 = d + 1, N_2 = d + N, N_u = N$$
$$\delta(j) = 1, \lambda(j) = \lambda$$

- معادله پیش بینی:

$$\hat{y}(t+d+j|t)$$
$$= (1-a_1)\hat{y}(t+d+j-1|t)$$
$$+ (a_1 - a_2)\hat{y}(t+d+j-2|t) + \cdots$$
$$+ a_{n_0}\hat{y}(t+d+j-n_a-1|1) + b_0\Delta u(t+j-1) + \cdots$$
$$+ b_{n_b}\Delta u(t+j-1-n_b)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.9 Use of a Different Predictor in GPC

- محاسبه پیش بینی خروجی به صورت بازگشتی:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(t+d+1|t) \\ \hat{y}(t+d+2|t) \\ \vdots \\ \hat{y}(t+d+N|t) \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} \Delta u(t) \\ \Delta u(t+1) \\ \vdots \\ \Delta u(t+N-1) \end{bmatrix} + H \begin{bmatrix} \Delta u(t-1) \\ \Delta u(t-2) \\ \vdots \\ \Delta u(t-n_b) \end{bmatrix} + S \begin{bmatrix} \hat{y}(t+d|t) \\ \hat{y}(t+d-1|t) \\ \vdots \\ \hat{y}(t+d-n_a|t) \end{bmatrix}$$

- $G_{N\times N}, H_{N\times n_b}, S_{N\times n_a}$: ماتریس های ثابت
- فرم برداری معادله فوق:

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{Gu} + \mathbf{Hu}' + \mathbf{Sy}' = \mathbf{Gu} + \mathbf{f}$$

پاسخ آزاد: $\mathbf{f} = \mathbf{Hu}' + \mathbf{Sy}'$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.9 Use of a Different Predictor in GPC

اگر تابع هزینه شامل $\hat{\mathbf{y}}$ شود تابع هزینه تایعی از $\mathbf{y}', \mathbf{u}, \mathbf{u}'$ و سیگنال مرجع خواهد شد.

مینیمم سازی آن نسبت به $\mathbf{u}$ به صورت زیر به دست می آید:

$$\mathbf{M}\begin{bmatrix} \Delta u(t) \\ \Delta u(t+1) \\ \vdots \\ \Delta u(t+N-1) \end{bmatrix} = \mathbf{P_0}\begin{bmatrix} \hat{y}(t+d|t) \\ \hat{y}(t+d-1|t) \\ \vdots \\ \hat{y}(t+d-n_a|t) \end{bmatrix} + \mathbf{P_1}\begin{bmatrix} \Delta u(t-1) \\ \Delta u(t-2) \\ \vdots \\ \Delta u(t-n_b) \end{bmatrix} + \mathbf{P_2}\begin{bmatrix} w(t+d+1) \\ w(t+d+2) \\ \vdots \\ w(t+d+N) \end{bmatrix}$$

$$M = G^T G + \lambda I$$
$$R = G^T$$
$$P_0 = -G^T S \text{ (dimension } N \times n_a + 1\text{)}$$
$$P_1 = -G^T H \text{ (dimension } N \times n_b\text{)}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.9 Use of a Different Predictor in GPC

$$M = G^T G + \lambda I$$
$$R = G^T$$
$$P_0 = -G^T S \text{ (dimension } N \times n_a + 1\text{)}$$
$$P_1 = -G^T H \text{ (dimension } N \times n_b\text{)}$$

- تعریف : q اولین سطر ماتریس M^{-1}

$$\Delta u(t) = q\mathbf{P_0}\begin{bmatrix} \hat{y}(t+d|t) \\ \hat{y}(t+d-1|t) \\ \vdots \\ \hat{y}(t+d-n_a|t) \end{bmatrix} + q\mathbf{P_1}\begin{bmatrix} \Delta u(t-1) \\ \Delta u(t-2) \\ \vdots \\ \Delta u(t-n_b) \end{bmatrix} + q\mathbf{P_2}\begin{bmatrix} w(t+d+1) \\ w(t+d+2) \\ \vdots \\ w(t+d+N) \end{bmatrix}$$

نمایش برداری:

$$\Delta u(t) = \mathbf{qP_0y'} + \mathbf{qP_1u'} + \mathbf{qP_2w}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.9 Use of a Different Predictor in GPC

- ساختار کنترل: فیدبک از پیش بینی خروجی توسط پیش بین بهینه

$$\Delta u(t) = \mathbf{qP_0 y'} + \mathbf{qP_1 u'} + \mathbf{qP_2 w}$$

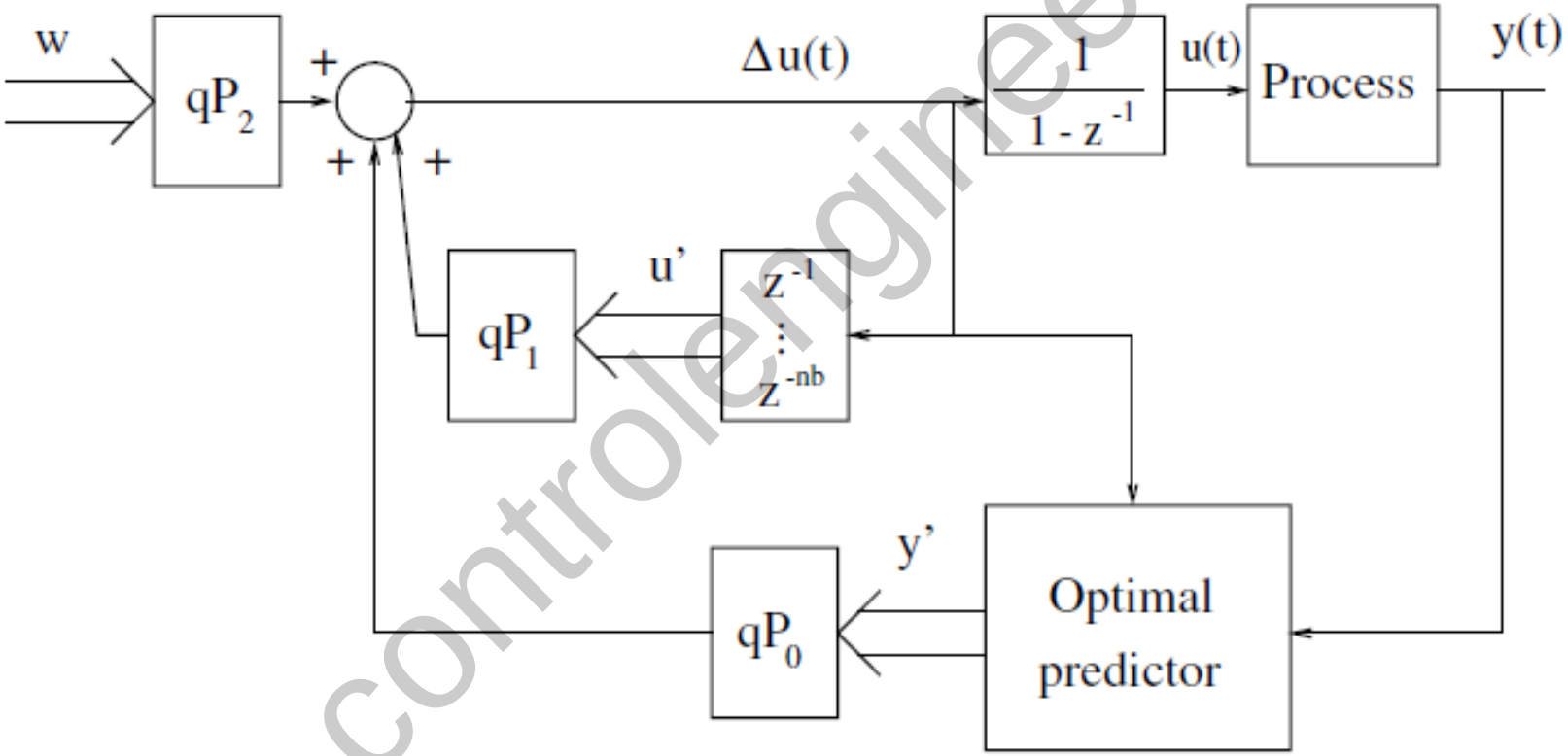


Fig. 4.4. Control scheme

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.9 Use of a Different Predictor in GPC

- قابل تبدیل بودن بلوک دیاگرام GPC به ساختار معادل با کنترل کننده کلاسیک بعلاوه پیش بین بهینه
- کنترل کننده کلاسیک شامل فیلتر مرجع و بلوک Cascade
- با فرض مدل فرایند مرتبه یک و تاخیر : نتیجه کنترل کننده کلاسیک PI خواهد بود.

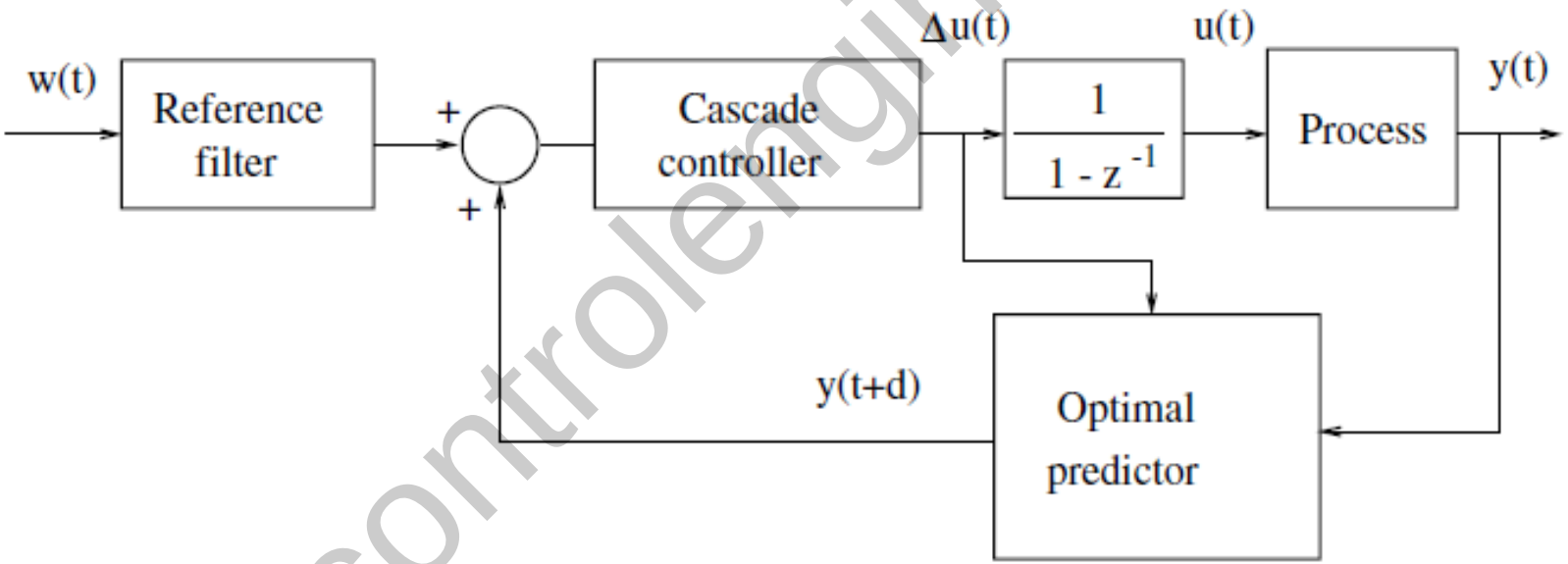


Fig. 4.5. Equivalent control structure of the GPC

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.9 Use of a Different Predictor in GPC

- استفاده از معادل بودن ساختارها برای بهبود مقاوم بودن GPC با استفاده از ساختارهای مختلف پیش بینی
- محاسبه کنترل کننده کلاسیک مستقل از ساختار پیش بین است
- بنابراین پیش بین های مختلف با یک کنترل کننده کلاسیک واحد برای GPC قابل ارزیابی هستند

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.9 Use of a Different Predictor in GPC

- پیش بینی خروجی برای j=1 با استفاده از A و B و تاخیر d :

$$\hat{y}(t+1|t) = \left(1 - \tilde{A}(z^{-1})\right) zy(t) + \tilde{B}(z^{-1})u(t-d)$$

که:

$$\tilde{B}(z^{-1}) = (1 - z^{-1})B(z^{-1})$$

- ادامه برای j=2 ,…, :

$$\hat{y}(t+j|t)$$
$$= \left(\left(1 - \tilde{A}(z^{-1})\right) z\right)^{j} y(t)$$
$$+ \sum_{i=1}^{j} \left(1 - \tilde{A}(z^{-1})\right)^{i-1} \tilde{B}(z^{-1})u(t-d+j-1)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.9 Use of a Different Predictor in GPC

- خروجی پیش بینی در لحظه t+d :

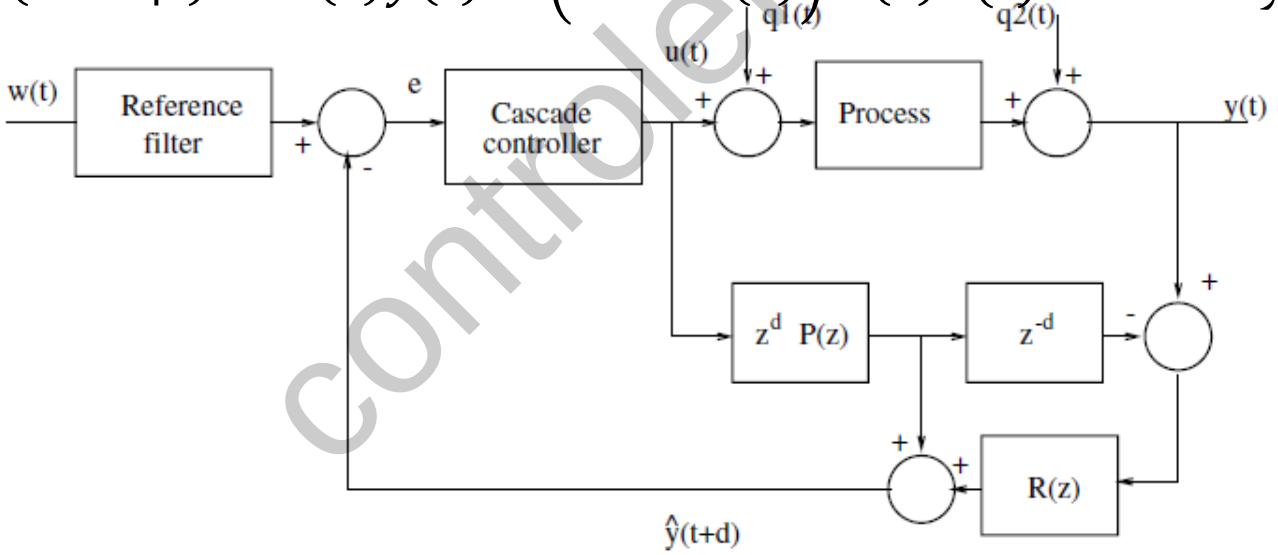
$$\hat{y}(t+d|t) = \left(\left(1-\tilde{A}(z^{-1})\right)z\right)^{d} y(t) + \left(1-\left(1-\tilde{A}(z^{-1})\right)^{d}\right) z^{d} P u(t)$$

که در آن plant به صورت زیر است:

$$P(z) = \frac{B(z^{-1})z^{-1}}{A(z^{-1})} z^{-d}$$

- تعریف : $R(z) = \left(1-\tilde{A}(z^{-1})\right)^{d} z^{d}$

- بازنویسی پیش بینی در لحظه t+d : $\hat{y}(t+d|t) = R(z)y(t) + \left(z^{d} - R(z)\right) P(z)u(t)$



بلوک دیاگرام حلقه بسته برای سیستم کنترل:

Fig. 4.6. Equivalent structure for the OP in the GPC

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.9 Use of a Different Predictor in GPC

- ساختار GPC شبیه جبران کننده تاخیر مانند پیش بین اسمیت است (با $R(z)=1$)
- در عدم حضور تاخیر قانون کنترل نهایی یک کنترل کننده کلاسیک دو درجه آزادی است.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- **مثال مقایسه ای:**
- مدل اغتشاش ARIMA در نظرگرفته شده
- در یک تبادل گر دما که خروجی آن دما و ورودی آن فلوی آب است تابع تبدیل به صورت زیر است:

$$P(s) = \frac{0.12e^{-3s}}{1+6s}$$

زمان نمونه برداری: Ts=0.6

تابع تبدیل گسسته:

$$P(z) = \frac{bz^{-1}}{1-az^{-1}} z^{-d}$$

- مقادیر نامی پارامترها:

$$d_n = 5, a_n = 0.905 \; and \; b_n = 0.0114$$

درنظر گرفتن عدم قطعیت فقط برای مقدار تاخیر به صورت: $\delta d = 2$

هدف : پاسخ حلقه بسته سریعتر از حلقه باز

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.9 Use of a Different Predictor in GPC

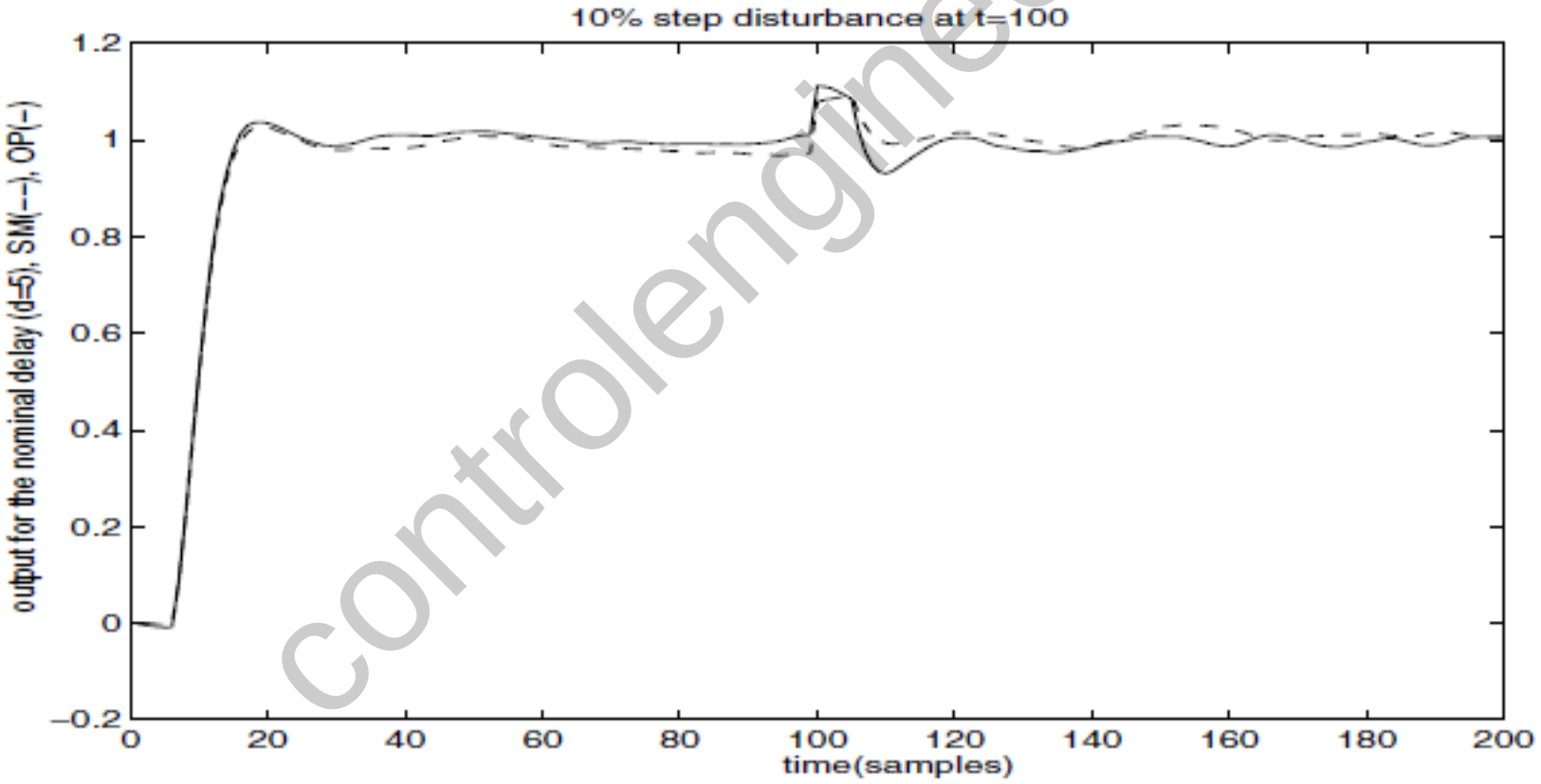
- انتخاب پارامترهای GPC و SPGPC: $N = 15, \lambda = 0.8$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.9 Use of a Different Predictor in GPC

- پله سیگنال مرجع در t=0 و اغتشاش بار ۱۰% در t=100
- نویز سفید با توزیع یکنواخت ± 0.005
- عملکرد GPC و SPGPC در حالت نامی :



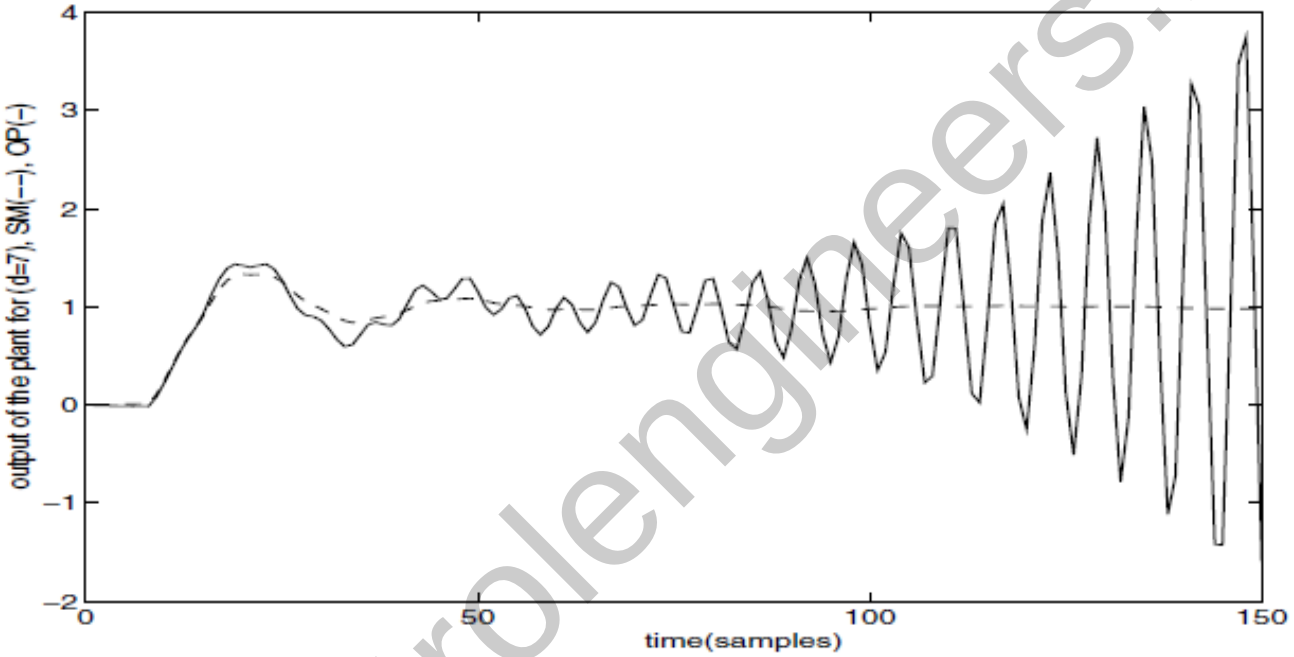
(a)

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.9 Use of a Different Predictor in GPC

- عملکرد GPC و SPGPC برای d=7
- GPC: عملکرد ناپایدار SPGPC: عملکرد پایدار



(b)

Fig. 4.7. Behaviour of the GPC(solid) and SPGPC (dashed) based control systems: (a) nominal case, (b) dead time uncertainty case

- توجه: در طراحی GPC از طراحی T صرف نظر شده است حال آنکه می توان با طراحی مناسب آن مقاوم بودن سیستم حلقه بسته را به تغییرات d افزایش داد البته کارایی حذف اغتشاش بدتر خواهد شد

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.10 Constrained Receding Horizon Predictive Control

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- نقص MPC با وجود محبوبیت زیاد در صنعت:
  - پایداری و مقاومت

- محدودیت پایداری به افق نامحدود و بنابراین نقصی بر افق محدود داریم (ساختار MPC)

- رفع مشکل، فرموله سازی استاندارد GPC توسط Clarke and Scattolini برای افق کوچک بنام روش :
- Constrained Receding-Horizon Predictive Control (CRHPC)

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.10 Constrained Receding Horizon Predictive Control

- استفاده چند درجه آزادی از سیگنال کنترل آینده برای اینکه پیش بینی خروجی پس از زمانی در آینده، دقیقا برابر مقدار مرجع باشد.
- بقیه درجه آزادی برای کمینه کردن تابع هدف استفاده می شود.

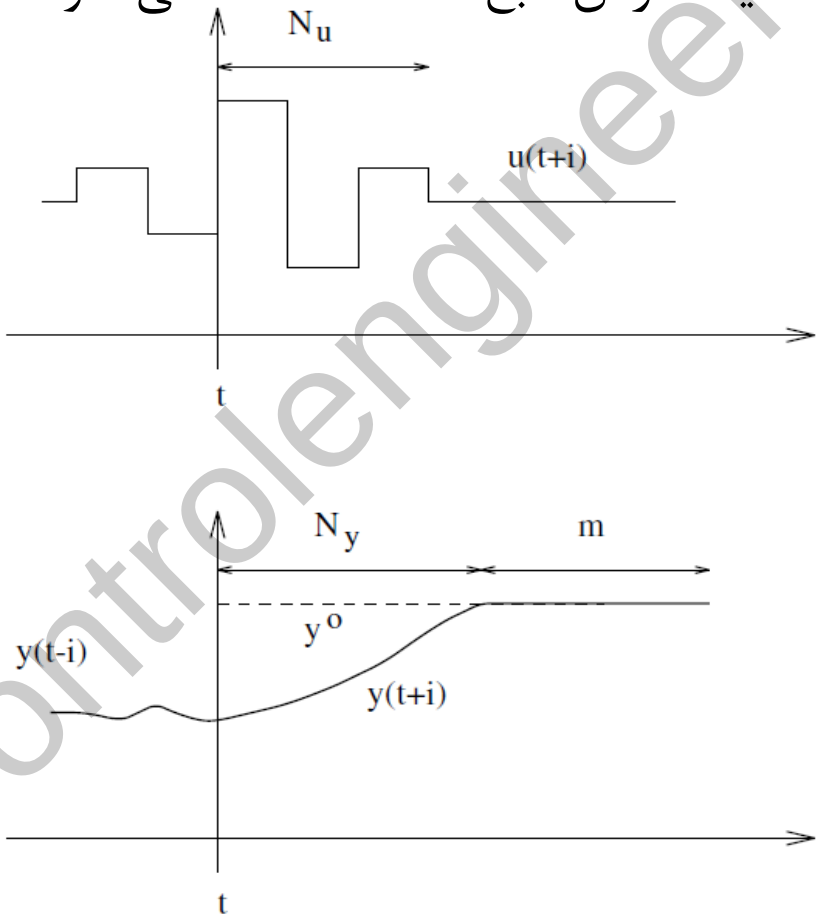


Fig. 4.8. Constrained Receding Horizon Predictive Control

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- **محاسبه قانون کنترل:**

- هدف : کمینه سازی تابع هدف با رعایت قیدهای زیر:

$$J(N_y, N_u) = \sum_{i=1}^{N_y} \mu(i)[\hat{y}(t+i|t) - y^o(t+i)]^2 + \sum_{i=0}^{N_u} \lambda(i)[\Delta u(t+j)]^2$$

با رعایت قیدهای زیر:

$$y(t+N_y+i) = y^o(t+N_y+1) \quad i = 1, \dots, m$$

$$\Delta u(t+N_u+j) = 0 \qquad j > 0$$

پارامترهای طراحی: افق های طراحی، m ، $\mu(i)$ و $\lambda(i)$

سیگنال مرجع: $y^o(t+i)$

m: لحظه تطابق خروجی با مرجع

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- مدل سیستم:

$$\Delta A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})\Delta u(t-d)$$

- محاسبه پیش بینی خروجی:

$$1 = E_i(z^{-1})\Delta A(z^{-1}) + z^{-i}F_i(z^{-1})$$

$$z^{-d}E_i(z^{-1})B(z^{-1}) = \sum_{h=1}^{i} s_h z^{-h} + z^{-i+1}G_i(z^{-1})$$

s_h : ضرایب پاسخ پله فرایند

با ضرب مدل سیستم در $E_i(z^{-1})$:

$$y(t+i) = \sum_{h=1}^{i} s_h \Delta u(t+i-h) + f(t+i)$$

$$f(t+i) = F_i(z^{-1})y(t) + G_i(z^{-1})\Delta u(t-1)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- تعریف متغیرهایی از آینده:

$$Y(t) = \left[y(t+1)\ \ y(t+2)\ \ \dots\ \ y(t+N_y)\right]^T$$
$$Y^o(t) = \left[y^o(t+1)\ \ y^o(t+2)\ \ \dots\ \ y^o(t+N_y)\right]^T$$
$$\Delta U(t) = \left[\Delta u(t+1)\ \ \Delta u(t+2)\ \ \dots\ \ \Delta u(t+N_u)\right]^T$$
$$F(t) = \left[f(t+1)\ \ f(t+2)\ \ \dots\ \ f(t+N_y)\right]^T$$
$$\bar{Y}(t) = \left[y(t+N_y+1)\ \ y(t+N_y+2)\ \dots\ \ y(t+N_y+m)\right]^T$$
$$\bar{Y}^o(t) = \left[y^o(t+N_y+1)\ \ y^o(t+N_y+2)\ \dots\ \ y^o(t+N_y+m)\right]^T$$
$$\bar{F}^o(t) = \left[f^o(t+N_y+1)\ \ f^o(t+N_y+2)\ \dots\ \ f^o(t+N_y+m)\right]^T$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- تعریف : ماتریس G با بعد $N_y \times (N_u + 1)$

ماتریس $\bar{G}$ با بعد $m \times (N_u + 1)$

$$G = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ s_2 & s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{N_y} & s_{N_y-1} & s_{N_y-2} & \cdots & s_{N_y-N_u} \end{bmatrix}$$

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} s_{N_y+1} & s_{N_y} & \cdots & s_{N_y-N_u+1} \\ s_{N_y+2} & s_{N_y+1} & \cdots & s_{N_y-N_u+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{N_y+m} & s_{N_y+m-1} & \cdots & s_{N_y-N_u+m} \end{bmatrix}$$

تعریف ماتریس های وزنی:

$$M(t) = diag\{\mu(1), \mu(2), \ldots, \mu(N_y)\}$$
$$\Lambda(t) = diag\{\lambda(1), \lambda(2), \ldots, \lambda(N_u)\}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- معادله پیش بینی خروجی:

$$Y(t) = G\Delta U(t) + F(t)$$
$$\bar{Y}(t) = \bar{G}\Delta U(t) + \bar{F}(t)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- معادله تابع هدف و قید بهینه سازی:

$$J = [Y(t) - Y^o(t)]^T M(t)[Y(t) - Y^o(t)] + \Delta U^T(t)\Lambda(t)\Delta U(t)$$

$$\bar{G}\Delta U(t) + \bar{F}(t) = \bar{Y}^o(t)$$

- حل با استفاده از ضرب کننده های لاگرانژ:

فرض: $M(t) = \mu I, \Lambda(t) = \lambda I$

$$\Delta U(t)$$
$$= (\mu G^T G + \lambda I)^{-1}\left[\mu G^T\left(Y^o(*\,t) - F(t)\right) + \bar{G}^T(\bar{G}(\mu G^T G + \lambda I)^{-1}\bar{G}^T)^{-1}\right.$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- حل تحلیلی پیچیده تر از GPC استاندارد
- بار محاسباتی بیشتر
- محاسبه سیگنال کنترل نیاز به معکوس ماتریس

$$(\bar{G}(\mu G^T G + \lambda I)^{-1}\bar{G}^T)$$

- با توجه به تعریف ماتریس G می توان ثابت کرد باید : $m \leq N_u + 1$ یعنی تعداد m محدودیت روی خروجی نباید از تعداد کنترل ها یعنی N_u + 1 بیشتر باشد
- شرط دیگر برای معکوس پذیری: $m \leq n + 1$ زیرا ضرایب پاسخ پله s_i، ترکیب خطی از n+1 مقدار قبلی است (این شرط سبب کوچک شدن انتخاب m می شود حدود ۲ یا ۳)

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- **خواص:**
- مزیت این روش: پایداری تضمین شده برای افق محدود
- **خاصیت ۱:**
- اگر $N_y = N_u > n + d + 1$ و $m = n + 1$ ، سیستم حلقه بسته پایدار مجانبی است
- **خاصیت ۲:**
- اگر $N_u = n + d$ و $m = n + 1$ ،سیستم حلقه بسته پایدار به صورت مرده نوش است
- بنابراین این روش قادر است هر نوع فرایند ازجمله ناپایدار یا NMP را پایدار کند

controlengineers.ir

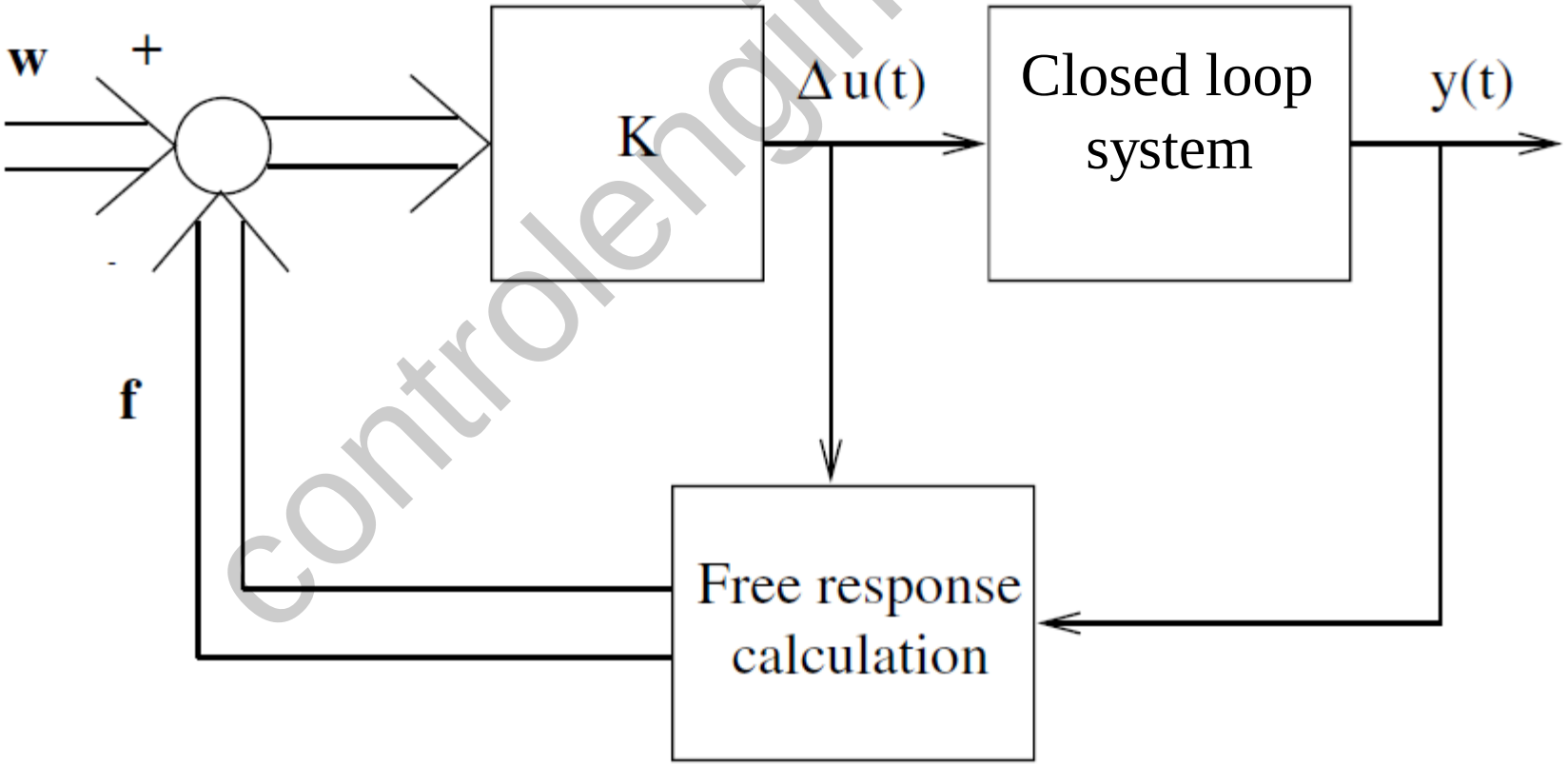
اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.11 Stable GPC

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- ایده کاهشی بودن تابع هزینه برای پایداری حلقه بسته کنترل کننده GPC
- Stable Generalized Predictive Control : SGPC
- پایداری سازی سیستم حلقه بسته و سپس طراحی کنترل پیش بین برای این سیستم پایدار شده.



controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

4.11 Stable GPC

- طراحی کنترل پیش بین برای تعیین ورودی مرجع سیستم حلقه بسته پایدار شده
- مزایای پایدار سازی حلقه داخلی با رسیدن به سیستم بفرم FIR
  - ساده سازی الگوریتم پیاده سازی
  - تضمین بکنواختی تابع هزینه

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- **محاسبه قانون کنترل**
- مدل فرایند:

$$G(z) = \frac{z^{-1}b(z)}{a(z)} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

فرض: مرتبه مساوی صورت و مخرج

- پایدارسازی حلقه قبل از بهینه سازی تابع هدف : تعیین $X(z), Y(z)$

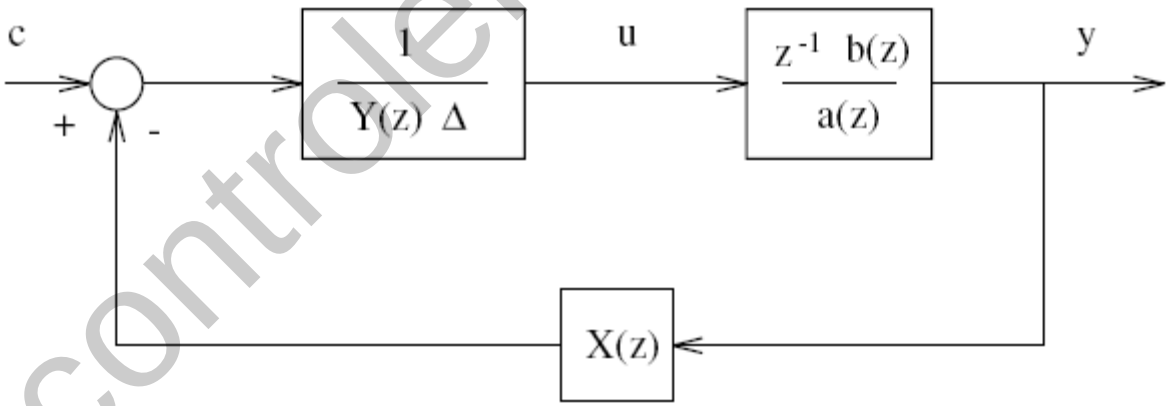


Fig. 4.9. Stable loop

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

چندجمله ای های X و Y در رابطه زیر صادقند:

$$a(z)Y(z)\Delta(z) + z^{-1}b(z)X(z) = 0$$

$$K(z) = \frac{X(z)}{Y(z)\Delta(z)}$$

که $\Delta(z) = 1 - z^{-1}$ و K(z) کنترل کننده فیدبک کلی است

- با فرض فوق سیستم حلقه بسته یک فیلتر FIR می شود.

$$y(z) = z^{-1}b(z)c(z)$$
$$\Delta u(z) = A(z)c(z)$$

که در آن: $A(z) = a(z)\Delta$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- تعریف:

$$y^+ = [y(t+1)\ \ y(t+2)\ \ \dots y(t+n_y)]^T$$
$$c^+ = [c(t+1)\ \ c(t+2)\ \ \dots\ \ c(t+n_c)]^T$$
$$\Delta u^+ = [\Delta u(t)\ \ \Delta u(t+1)\ \ \dots\ \ \Delta u(t+n_y-1)\ ]^T$$
$$c^- = [c(t)\ \ c(t-1)\ \dots\ \ c(t-n)]^T$$

- که n_y و n_c به ترتیب افق خروجی و افق مرجع هستند

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- شبیه سازی مدل برای زمان های آینده:

$$y^+ = \Gamma_b c^+ + H_b c^- + M_b c^\infty$$
$$\Delta u^+ = \Gamma_A c^+ + H_A c^- + M_A c^\infty$$

- ترم آخر هر معادله: پاسخ آزاد $(\Delta u_f \text{ و } y_f)$
- c^∞ : بردار $n_y - n_c$ ردیفی شامل مقادیر مطلوب آینده ورودی c

انتخاب بر اساس پاسخ حالت دائم offset-free

- اگر $r(t+i), i = 1, \dots, n_y$ سیگنال مرجعی باشد که باید ردیابی شود :

$$c^\infty = [1, 1, \dots, 1]^T \times r(t+n_y)/b(1).$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- تابع هدف را می توان به صورت زیر نوشت:

$$J = \|r^+ - y^+\|_2 + \lambda\|\Delta u^+\|_2 = [c^+ - c_o]^T S^2 [c^+ - c_o] + \gamma$$

- که در آن:

$$S^2 = \Gamma_b^T \Gamma_b + \lambda \Gamma_A^T \Gamma_A$$

$$c_o = S^{-2}[\Gamma_b^T (r^+ - y_f) - \lambda \Gamma_A^T \Delta u_f]$$

$$\gamma = \|r^+ - y_f\|_2 + \lambda\|\Delta u_f\|_2 - \|c_o\|_2$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- γ :مقدار ثابت ومعلوم
- قانون SPGC از کمینه سازی تابع هدف $J = \|S(c^+ - c_o)\|$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Delta u(t) = A(z)c(t)$$

$$c(t) = \frac{p_r(z)}{p_c(z)} r(t + n_y)$$

- که:

$$p_r = e^T T[\Gamma_b^T (I - M_b E) - \Gamma_b^T \Gamma_A E]$$

$$p_c = e^T T[\Gamma_b^T H_b + \lambda \Gamma_b H_A]$$

$$T = \left(\Gamma_b^T \Gamma_b + \lambda \Gamma_A \Gamma_A\right)^{-1}$$

e:بردار پایه چندجمله ای ها

* چندجمله ای ها به صورت توان کاهشی z

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- ثابت می شود با انتخاب رابطه Δu و y با ورودی c به صورت :

$$y(z) = z^{-1}b(z)c(z)$$
$$\Delta u(z) = A(z)c(z)$$

تابع هدف به صورت یکنواخت کاهشی است

با انتخاب این تابع هدف به عنوان تابع لیاپانوف پایداری حلقه بسته تضمین شده است

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

CHAPTER 5:
Simple Implementation of GPC for process control

S.K. Hosseini Sani

Assistant Professor

Electrical Engineering

Ferdowsi University

Mashhad, Iran
1392

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- دلیل کاربرد PID در صنعت
  - پیاده سازی آسان
  - قواعد تنظیم پارامترها با استفاده از روشهای ابتکاری (مانند Ziegler-Nichols)
- پیاده سازی آسان کنترل GPC در صورت معلوم بودن پارامترهای کنترلگر
- پیچیدگی روشهای محاسبه پارامترهای GPC نظیر حل تکراری معادله دیوفانتین، تشکیل ماتریسهای G, G', f وحل معادلات
- نتیجه
  - بکارگیری روش ساده جهت محاسبه و تنظیم پارامترهای کنترل

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- اعمال روش GPC به فرآیندهای با پارامترهای ثابت (برای فرآیندهای با تغییرات پارامتر، پارامترهای GPC دوباره در هر زمان نمونه برداری محاسبه می گردد.)

- مشکل عمده : زمان زیاد محاسبات

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Simple Implementation of GPC for process control

- هدف این فصل : ارایه روش ساده به منظور امکان اعمال کنترل GPC به اکثر فرآیندهای صنعتی

- اساس روش : توصیف رنج وسیعی از فرآیندهای صنعتی با تعداد محدودی پارامتر و مجموعه ای از انواع توابع Ziegler-Nichols بمنظور ارتباط پارامترهای GPC به پارامترهای فرآیند

- شباهت : سادگی روش اعمال GPC فوق به روش PID

- آنالیز اثر خطای مدل سازی در مقاومت سیستم

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

5.1 Plant Model

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

5.1 Plant Model

- خطی سازی فرآیند حول نقطه کار
- مدل سازی اکثر سیستمهای صنعتی با ترکیبی از سیستمهای درجه یک
- بعنوان مثال : مدل سازی خط لوله با مجموعه ای از سیستمهای درجه یک
- مشکلات مربوط به مدل درجه بالا و در نتیجه بکارگیری مدل درجه اول با تاخیر زمانی
- ترکیب سری N تابع تبدیل درجه اول با ثابت زمانی τ/N

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{\tau}{N}s\right)^N}$$

- برای سیستمهای با چند تابع زمانی، ثابت زمانی های کوچکتر با هم تولید یک Lag با تاخیر زمانی خالص می کند.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

5.1 Plant Model

- ارتباط تاثیر دینامیک از ثابت زمانی بزرگتر

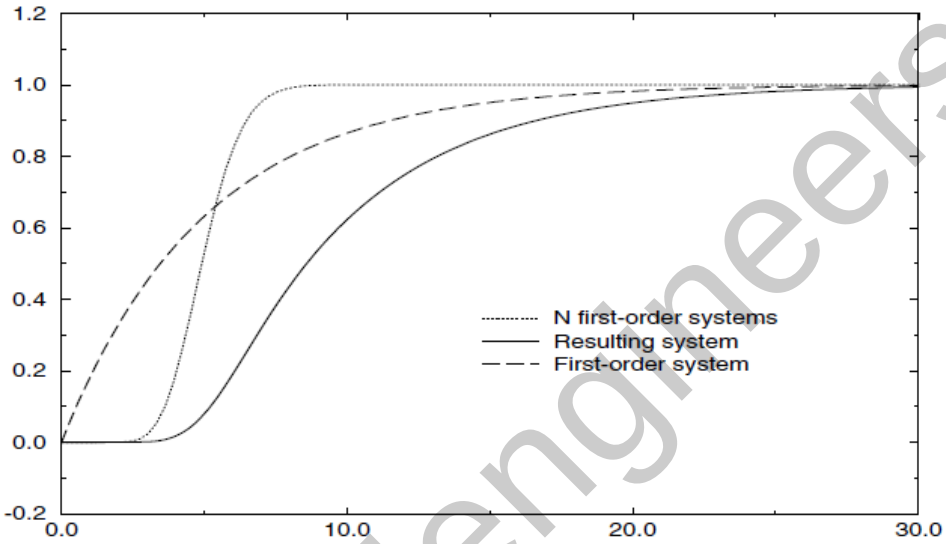


Fig. 5.1. System response

- تخمین مدل مرتبه بالا با قطبهای حقیقی و غیر حقیقی با سیستم مرتبه اول بهمراه تاخیر زمانی

$$G(s) = \frac{K}{1+\tau s} e^{-s^{\tau} d}$$

- K بهره استاتیک، τ ثابت زمانی Lag و τ_d تاخیر زمانی

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

5.1 Plant Model

- اندازه گیری t_1 و t_2 و Δy :

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u}$$

$$\tau = 1.5(t_2 - t_1)$$

$$\tau_d = 1.5\left(t_1 - \frac{1}{3}t_2\right)$$

$$G(s) = \frac{K}{1+\tau s}e^{-s\tau d}$$

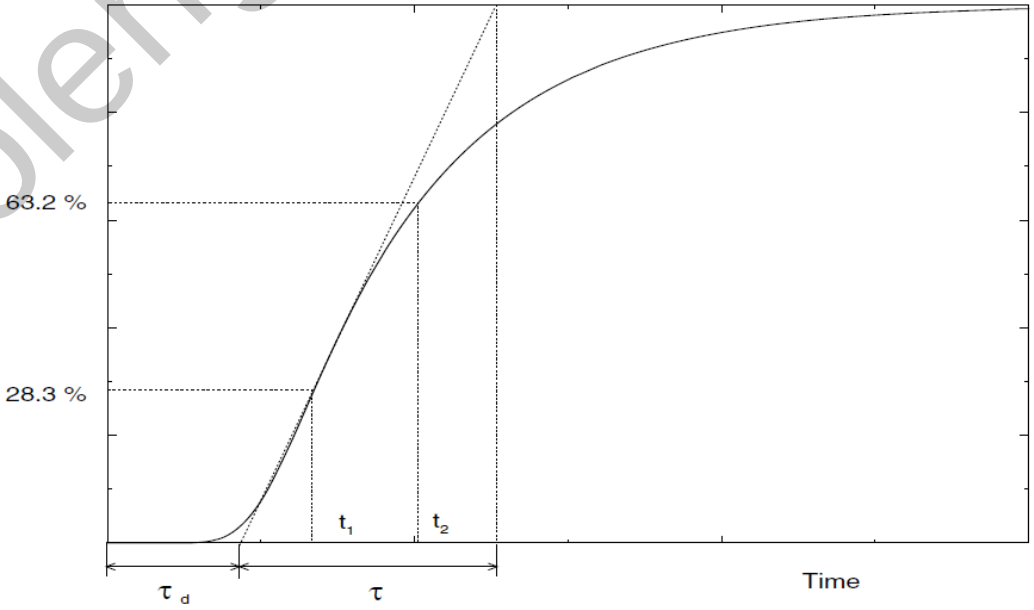


Fig. 5.2. Reaction curve

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

5.2 The Dead Time Multiple of the Sampling Time Case

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

5.2.1 Discrete Plant Model

- تاخیر زمانی مضربی از زمان نمونه برداری, $(\tau_d = dT)$

$$G(z^{-1}) = \frac{bz^{-1}}{1 - az^{-1}} z^{-d} \qquad (5.2)$$

پارامترهای a,b و c از گسسته سازی فرآیند :

$$a = e^{-\frac{T}{\tau}} \qquad b = K(1-a) \qquad d = \frac{\tau_d}{T}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- برای مدل کاریما (با چند جمله ای نویز برابر یک) :

$$(1 - az^{-1})y(t) = bz^{-d}u(t-1) + \frac{\varepsilon(t)}{\Delta}$$

- که در آن $\varepsilon(t)$ نویز سفید با متوسط صفر و $\Delta = 1 - z^{-1}$
- از معادله فوق :

$$y(t+1) = (1+a)y(t) - ay(t-1) + b\Delta u(t-d) + \varepsilon(t+1) \qquad (5.3)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

5.2.2 Problem Formulation

- قبلا در GPC داشتیم :

$$J(N_1, N_2) = \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j)\left[\hat{y}\left((t+j|t)\right) - w(t+j)\right]^2 + \sum_{j=1}^{N_2-d} \lambda(j)\left[\Delta u(t+j-1)\right]^2$$

فرض : $N_1 = d + 1$، $N_2 = d + N$ و N افق کنترل

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- با توجه به معلوم بودن $\hat{y}\big((t+d+j-1|t)\big)$ و $\hat{y}\big((t+d+j-2|t)\big)$ تخمین $\hat{y}\big((t+d+j|t)\big)$:

$$\hat{y}(t+d+j|t) = (1+a)\hat{y}\big((t+d+j-1|t)\big) - a\hat{y}\big((t+d+j-2|t)\big) + b\Delta u(t+j-1) \quad (5.5)$$

- در حالت تکرار برای $j = 1,2,\dots,i,$:

$$\hat{y}(t+d+i|t) = G_i(z^{-1})\hat{y}(t+d|t) + D_i(z^{-1})\Delta u(t+i-1) \quad (5.6)$$

- که در آن $G_i(z^{-1})$ مرتبه یک و $D_i(z^{-1})$ مرتبه $i-1$

- اثبات می شود [58] که برای $\delta(i) = 1$ و $\lambda(i) = \lambda$ و $d = 0$ چندجمله ای $D_i(z^{-1})$ برابر $G_i(z^{-1})$ است.و $f(t+i)$ برابر $G_i(z^{-1})y(t)$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- تابع هزینه $J(N)$ تابعی است از $\hat{y}(t+d|t)$، $\hat{y}(t+d-1|t)$، $\Delta u(t$ تا $\Delta u(t)+N_2-d-1$ و سیگنال مرجع

- با کمینه کردن $J(N)$ نسبت به $\Delta u(t+N-1),\dots,\Delta u(t+1),u(t)$ داریم :

$$Mu = Py + Rw \quad (5.7)$$

- که در آن :

$$u = [\Delta u(t) \;\; \Delta u(t+1) \;\; \dots \;\; \Delta u(t+N-1)]^T$$
$$y = [\hat{y}(t+d|t) \;\; \hat{y}(t+d-1|t)]^T$$
$$w = [w(t+d+1) \;\; w(t+d+2) \;\; \dots \;\; w(t+d+N)]^T$$

- M و R ماتریسهای $N \times N$ و P ماتریس $N \times 2$ است.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

5.2 The Dead Time Multiple of the Sampling Time Case

- با فرض اینکه q اولین سطر ماتریس M^{-1} باشد.

$$\Delta u(t) = \mathrm{qPy} + \mathrm{qRw} \qquad (5.8)$$

- اگر سیگنال مرجع آینده نامعلوم باشد فرض می شود $w(t+d+i)$ برابر با سیگنال مرجع $r(t)$ است بنابراین :

$$\mathrm{w} = [1 \quad \cdots \quad 1]r(t)$$

- می توان نوشت :

$$\Delta u(t) = l_{y1}\hat{y}(t+d|t) + l_{y2}\hat{y}(t+d-1|t) + l_{r1}r(t) \qquad (5.9)$$

- که در آن $\mathrm{qP} = [l_{y1}\ l_{y2}]$ و $l_{r1} = \sum_{i=1}^{N} q_i \sum_{j=1}^{N} r_{ij}$ و تابعی از $a,b,\delta(i)$ و $\lambda(i)$

- برای GPC با بهره استاتیک واحد، ضرایب وابسته به $\delta(i)$ و $\lambda(i)$ و قطب فرآیند است.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

5.2 The Dead Time Multiple of the Sampling Time Case

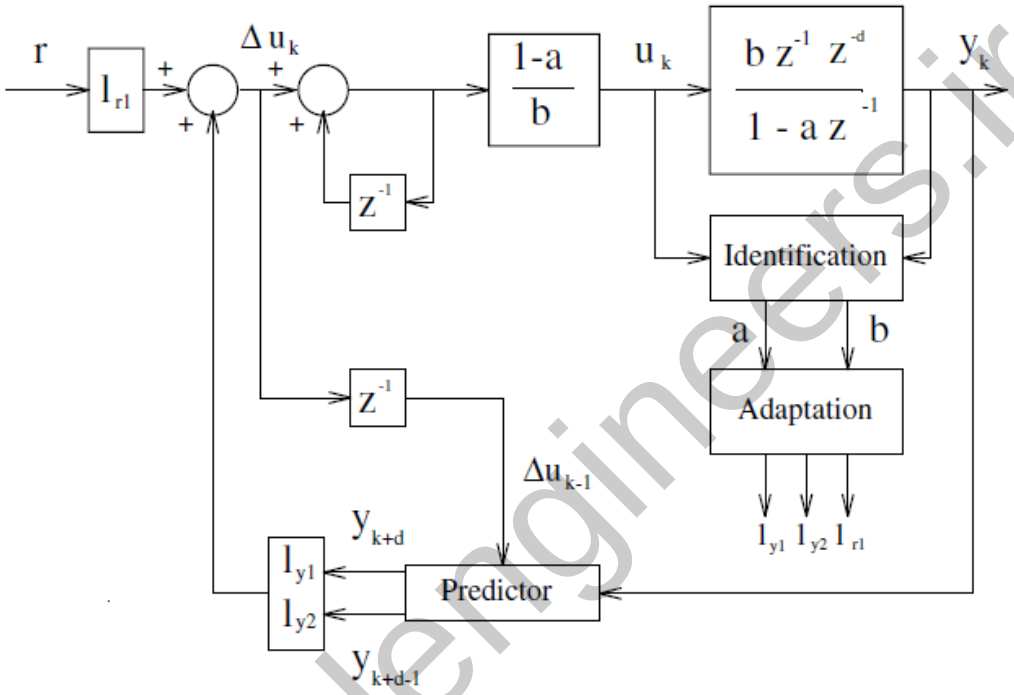


Fig. 5.3. Control Scheme

- بکارگیری تخمین پارامترهای فرآیند برای محاسبه پارامترهای کنترلگر (l_{y1}, l_{y2}, l_{r1})
- محاسبه مقادیر $\hat{y}(t+d|t), \hat{y}(t+d-1|t)$ با کمک پیش بینی

$$\hat{y}(t+d+j|t) = (1+a)\hat{y}\big((t+d+j-1|t)\big) - a\hat{y}\big((t+d+j-2|t)\big) + b\Delta u(t+j-1)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

5.2 The Dead Time Multiple of the Sampling Time Case

- عدم وابستگی ضرایب کنترلگر به تاخیر زمانی d (وابستگی به قطب تخمینی a برای $\delta(i)$ و $\lambda(i)$ ثابت)

- در روش استاندارد محاسبه ضرایب کنترلگر:
  - محاسبه ماتریسهای **M,P** و **R**
  - $\mathrm{Mu} = \mathrm{Py} + \mathrm{Rw}$
  - $\Delta u(t) = l_{y1}\hat{y}(t+d|t) + l_{y2}\hat{y}(t+d-1|t) + l_{r1}r(t)$

- نتیجه : حجم محاسبات بالا برای کاربردهای زمان حقیقی (real-time applications)

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

روش ساده برای سیستم درجه یک

- استفاده از مدل ساده برای فرآیند (مثلا مرتبه اول با تاخیر ثابت)
- حل offline برای مدل فوق و افق معین (مثلا $N=15$)
- تکرار حل GPC به ازای تغییرات قطب
- برازش کردن پارامترهای کنترلگر بر حسب تغییرات پارامتر (قطب)
- شناسایی لحظه ای فرآیند و اقتباس پارامترها
- تکمیل حل GPC در صورت در نظر گرفتن پارامتر λ و برازش دقیقتر

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

5.2 The Dead Time Multiple of the Sampling Time Case

- روش جدید :
- درون یابی ضرایب کنترلگر با استفاده از مقادیر محاسبه شده قبلی

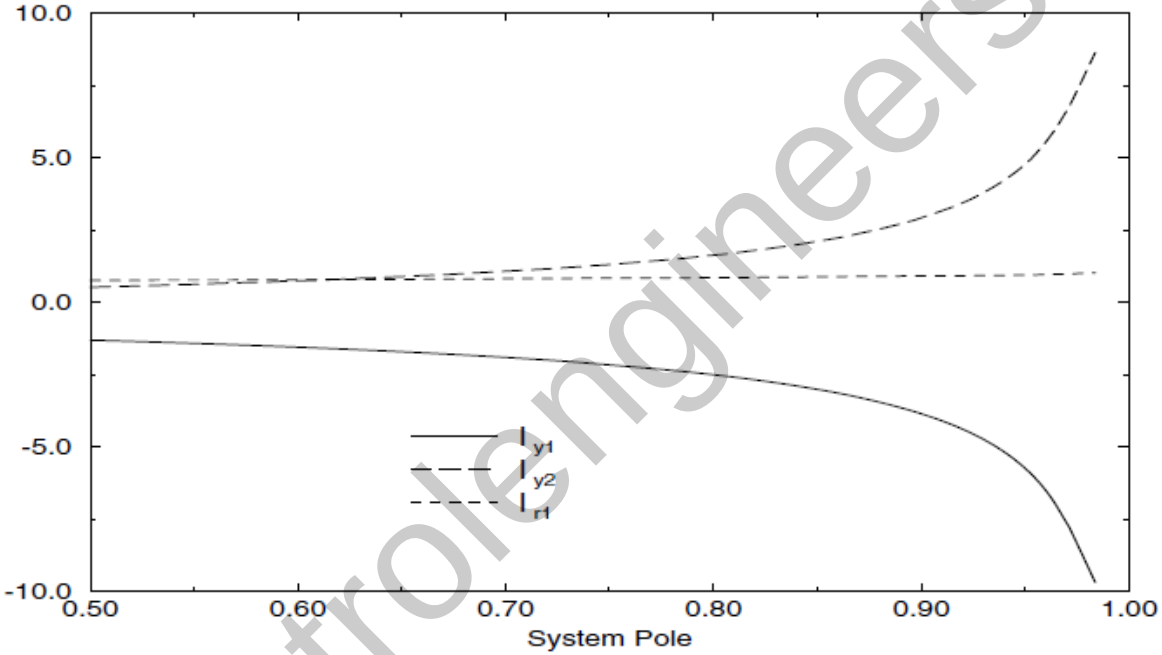


Fig. 5.4. Controller parameters

- $\lambda = 0.8$
- $N = 15$
- $\delta = 1$

- توجه به تعداد نقاط مورد استفاده جهت برازش:
  - وابسته به تغییرپذیری پارامترهای فرآیند و دقت مورد نیاز
  - عدم توزیع یکنواخت داده ها به منظور تخمین بهتر و کاهش حجم مورد نیاز حافظه کامپیوتر

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

5.2.3 Computation of the Controller Parameters

- کاربرد الگوریتم برای فرآیندهای به فرم $G(z^{-1}) = \frac{bz^{-1}}{1-az^{-1}} z^{-d}$
- انتخاب زمان نمونه برداری بر اساس ۱/۱۵ الی ۱/۴ زمان صعود T_{95}
- تغییرات قطب سیستم بین ۰.۵ و ۰.۹۵ برای اکثر سیسمهای صنعتی در صورت انتخاب زمان نمونه برداری مناسب
- بدلیل بهره استاتیکی واحد، جمع پارامترهای کنترلگر صفر هستند.

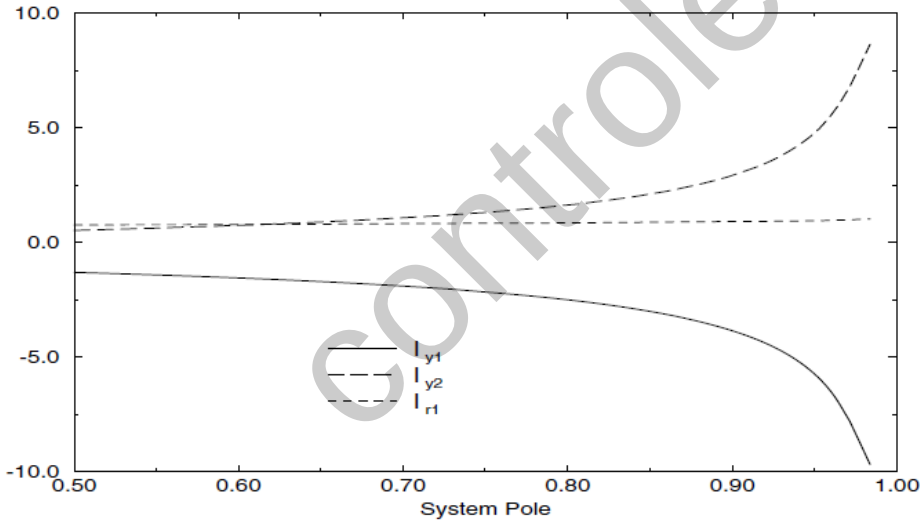


Fig. 5.4. Controller parameters

$$l_{yi} = k_{1i} + k_{2i}\frac{a}{k_{3i} - a} \qquad i = 1,2$$

- محاسبه ضرایب از روش حداقل مربعات

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- روش حداقل مربعات : تکرار معادله برای N_p نقطه

$$\begin{bmatrix} a^1 l_{yi}^1 \\ a^2 l_{yi}^2 \\ \vdots \\ a^{N_p} l_{yi}^{N_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{yi}^1 & 1 & a^1 \\ l_{yi}^2 & 1 & a^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{yi}^{N_p} & 1 & a^{N_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^1 \\ e^2 \\ \vdots \\ e^{N_p} \end{bmatrix} \qquad (5.11)$$

- که در آن $x_1 = k_{3i}$,$x_2 = -k_{1i}k_{3i}$ and $x_3 = k_{1i} - k_{2i}$

$$\mathrm{Y} = \mathrm{MX} + \mathrm{E}$$

$$\mathrm{X} = \left(\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{M}\right)^{-1}\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- برای $\lambda = 0.8$ و N=15 :
- $l_{y1} = -0.845 - 0.564 \frac{a}{1.05-a}$
- $l_{y2} = -0.128 - 0.459 \frac{a}{1.045-a}$
- $l_{r1} = -l_{y1} - l_{y2}$
- خطای تخمین کمتر از 1 %
- نقش ضریب وزنی λ
- λ کوچکتر پاسخ سریعتر

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- نمایش قدرمطلق بزرگترین قطب حلقه بسته برای تغییرات λ از صفر تا ۰.۸ با افزایش ۰.۲ (شکل ۵.۵)
- کاهش قطب با λ نتیجه سیستم سریعتر
- برای λ برابر صفر، قطبها در صفر و بنابراین رفتار deadbeat

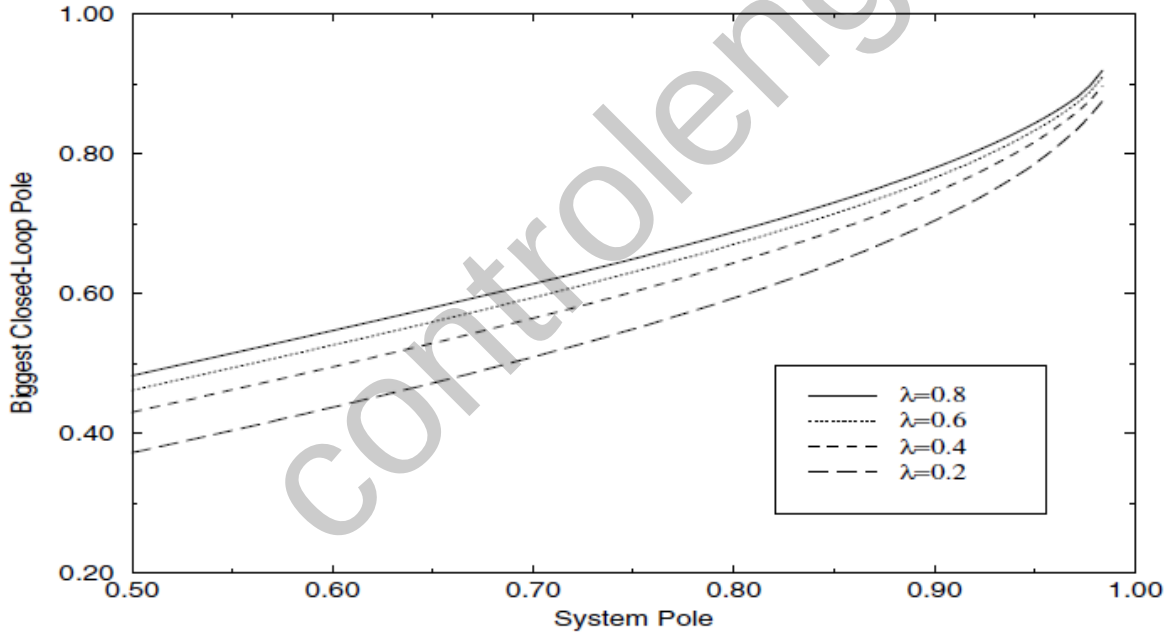


Fig. 5.5. Influence of the control-weighting factor

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- مقادیر پارامترهای $k_{ij}(\lambda)$ بفرم زیر انتخاب شده است.

$$\operatorname{sgn}(k_{ij})e^{-c_0+c_1\lambda+c_2\lambda^2}$$

- با استفاده برازش چندجمله ای :

$$k_{11} = e^{-0.3598-0.9127\lambda+0.3165\lambda^2}$$

$$k_{21} = e^{-0.0875-1.2309\lambda+0.5086\lambda^2}$$

$$k_{31} = 1.05 \qquad (5.12)$$

$$k_{12} = e^{-1.7383-0.40403\lambda}$$

$$k_{22} = e^{-0.32157-0.8192\lambda+0.3109\lambda^2}$$

$$k_{32} = 1.045$$

- بیشینه خطای نسبی برای $0.55 < a < 0.95$ و $0.3 \leq \lambda \leq 1.1$ کمتر از 3 %

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- مراحل پیاده سازی
  - انتخاب پارامتر λ
  - محاسبه k_{ij} از معادلات
  - محاسبه مقادیر پارامترهای کنترلگر از معادلات

سادگی الگوریتم برای فرآیندهای با پارامتر ثابت با حذف مراحل ۳ و ۴

0. Compute k_{ij} with Expressions (5.12).
1. Perform an identification step.
2. Make $l_i = k_{1i} + k_{2i}\frac{\hat{a}}{k_{3i}-\hat{a}}$ for $i = 1, 2$ and $l_{r1} = -l_{y1} - l_{y2}$.
3. Compute $\hat{y}(t+d \mid t)$ and $\hat{y}(t+d-1 \mid t)$ using equation (5.5) recursively.
4. Compute control signal $u(t)$ with
   $\triangle u(t) = l_{y1}\hat{y}(t+d \mid t) + l_{y2}\hat{y}(t+d-1 \mid t) + l_{r1}r(t)$
5. Divide the control signal by the static gain.
6. Go to step 1.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

5.2.6 An Implementation Example

- اعمال الگوریتم به مثال کوره (گرم کردن آب)
- مقادیر ایستا : دمای ورودی 20 °C و دمای خروجی 50 °C و مقدار زاویه شیر سوخت 18.21 %
- با تغییر سوخت به 30 %
  دمای خروجی به $y = 69.41$ °C

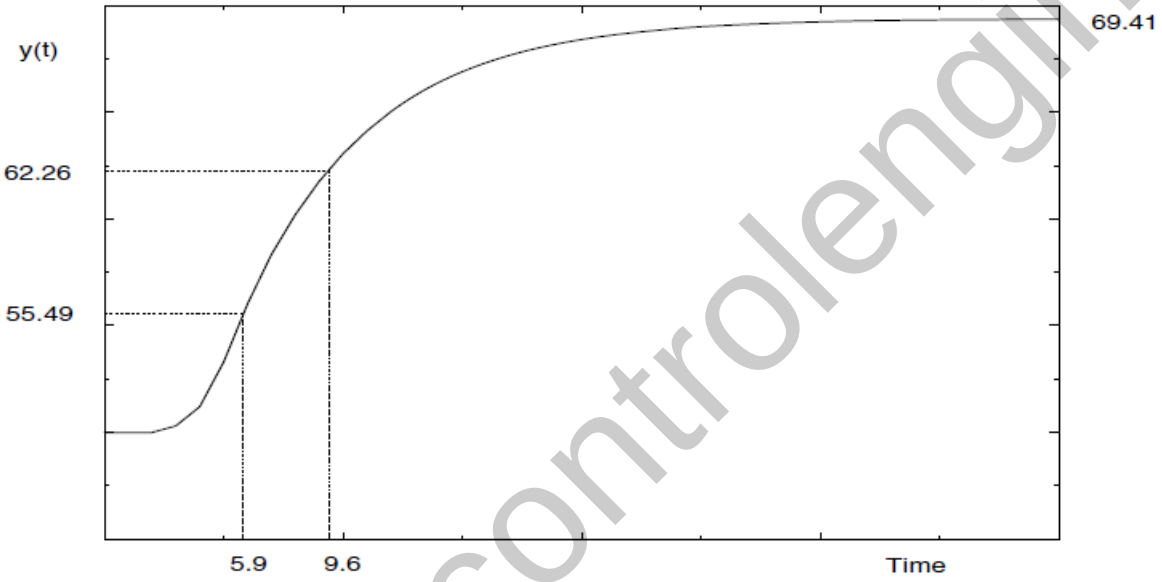


Fig. 5.6. Outlet temperature response

- از شکل :
- $t_1(28.3\ \%)=5.9$
- $t_2(63.2\%)=9.6$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

5.2 The Dead Time Multiple of the Sampling Time Case

- بنابر این پارامترهای فرآیند :

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{69.411 - 50}{30 - 18.21} = 1.646$$

$$\tau = 1.5(t_2 - t_1) = 1.5(9.6 - 5.9) = 5.55$$

$$\tau_d = 1.5\left(t_1 - \frac{1}{3}t_2\right) = 1.5\left(5.9 - \frac{9.6}{3}\right) = 4.05$$

- با انتخاب زمان نمونه برداری یک ثانیه :

$$G(z^{-1}) = \frac{0.2713z^{-1}}{1 - 0.8351z^{-1}}z^{-4}$$

- با نتخاب $\lambda = 0.8$:

$$k_{11} = -0.845, k_{21} = -0.564, k_{31} = 1.05, k_{12} = 0.128, k_{22} = 0.459, k_{32} = 1.045$$

$$l_{y1} = -3.0367 \qquad l_{y2} = 1.9541 \qquad l_{r1} = 1.0826$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

5.2 The Dead Time Multiple of the Sampling Time Case

- ساختار کنترل
- محاسبه خروجیهای پیش بینی و قانون کنترل در هر زمان نمونه برداری
- خروجی های پیش بینی : $\hat{y}(t+4|t)$ و $\hat{y}(t+3|t)$

$$\hat{y}(t+i|t)$$
$$= (1+a)\hat{y}(t+i-1|t) - a\hat{y}(t+i-2|t) + b\Delta u(t+i-5)$$

برای $i = 1 \cdots 4$:

- قانون کنترل (G بهره استاتیک)

$$u(t) = u(t-1) + \left(l_{y1}\hat{y}(t+4|t) + l_{y2}\hat{y}(t+3|t) + l_{r1}r\right)/G$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- برای فرآیند با تاخیر ۴ مقادیر زیر ذخیره می شوند.

$$y = [y(t-1), y(t), \hat{y}(t+1), \hat{y}(t+2), \hat{y}(t+3), \hat{y}(t+4)]$$

$$u = [u(t), u(t-1), u(t-2), u(t-3), u(t-4), u(t-5)]$$

```
/* Predictor */ for (i=2; i<=5; i++)
y[i]=1.8351*y[i-1]-0.8351*y[i-2]+0.2713*(u[5-i]-u[6-i]);

/* Control Law */
u[0]=u[1]+(-3.0367*y[5]+1.9541*y[4]+1.08254*r)/1.646;

/* Updating */ for (i=5; i>0; i--)   u[i] = u[i-1];
y[0] = y[1];
```

Fig. 5.7. C code of implementation algorithm

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

5.2 The Dead Time Multiple of the Sampling Time Case

- در t=60 مقدار λ از 0.8 به 0.3
- در t=100 مقدار λ از 0.3 به 1.3 : پاسخ کندتر

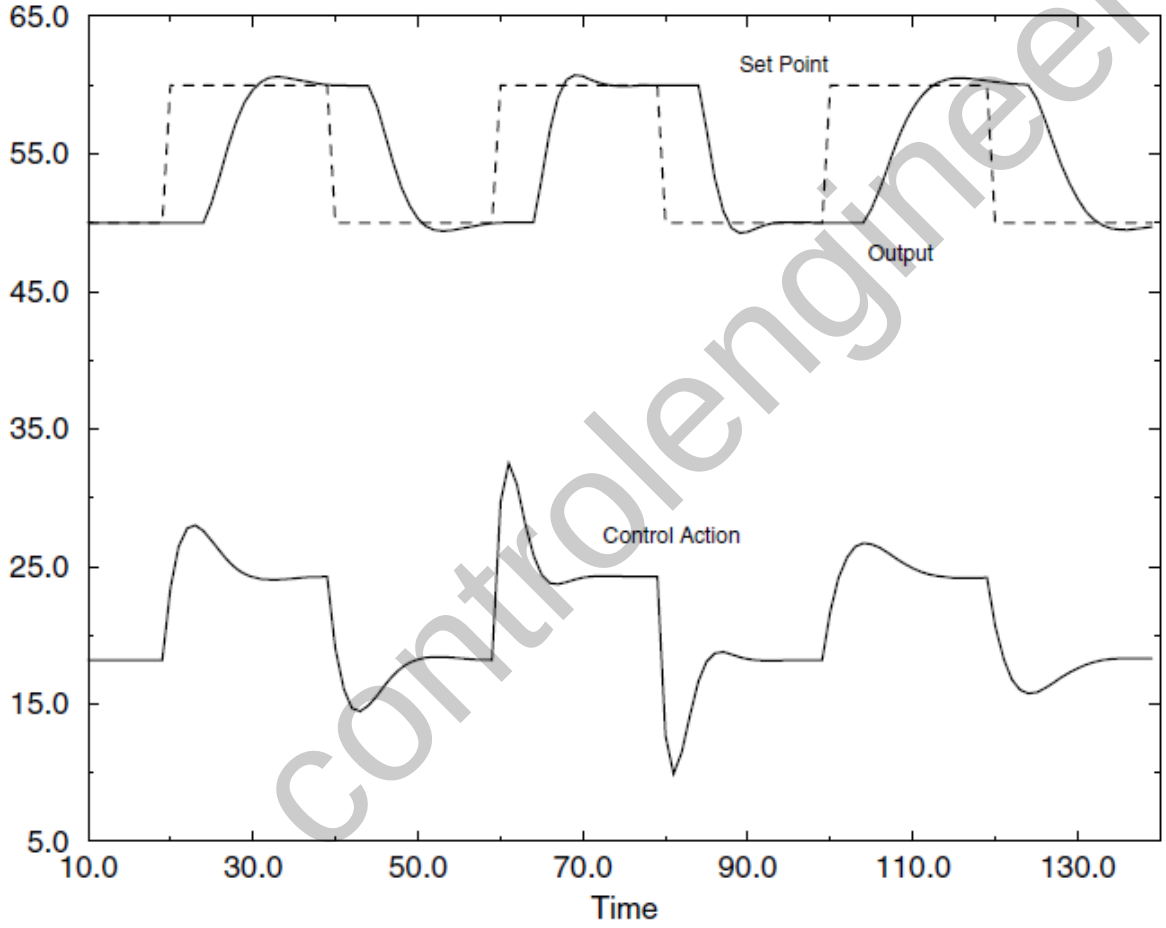


Fig. 5.8. System response

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

CHAPTER 7:
Constrained Model Predictive Control

S.K. Hosseini Sani

Assistant Professor

Electrical Engineering

Ferdowsi University

Mashhad, Iran

1392

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Constrained Model Predictive Control

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- کنترلگرهایی که تا کنون بررسی شدند برای سیستم بدون محدودیت طراحی شده اند.
- در دنیای واقعی سیستمها دارای محدودیتهای متعددی هستند.
- مثلا عملگرها محدودیت حداکثر دامنه و حداقل سرعت را دارند.
- شیرهای کنترلی محدودیت حداکثر رنج باز و بسته و نیز حداکثر نرخ تغییر را دارند.
- محدودیتهایی فرآیند مانند ژنراتور که حداکثر توان نامی و سرعت نامی ان محدود است.
- عملکرد فرآیند در نقطه کاری مشخص بمنظور کاهش هزینه ها و مسایل ایمنی
- تفاوت مفهومی در قیود ورودی خروجی با وجود رفتار مشابه
  - قیود خروجی بخاطر مسایل ایمنی است و باید کنترل شود چون متغیرهای خروجی متاثر از دینامیک فرآیند هستند.
  - متغیرهای ورودی باید کنترل شوند که در محدوده مجاز قرار گیرند که مشکل دامنه و حداقل سرعت را نداشته باشند.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- تمرکز این فصل بر اعمال کنترل پیش بین با وجود قیود ورودی (دامنه و سرعت) و خروجی است.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

7.1 Constraints and MPC

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- محاسبه سیگنال کنترلی $\mathbf{u}$ برای زمانهای آینده با مینیمایز کردن تابع هزینه :

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{H}\mathbf{u} + \mathbf{b}\mathbf{u} + \mathbf{f_0} \quad (7.1)$$

- در صورت تجاوز $\mathbf{u(t)}$ از حد مجاز، مقدار اشباع آن از طریق برنامه کنترل و یا عملگر اعمال می شود.
- تجاوز سیگنالهای $u(t+1), \cdots, u(t+N)$ از مقدار مجاز بررسی نمی شود. (در خیلی از مواقع محاسبه هم نمی شوند.)

با این روش رسیدن به پاسخ بهینه در صورت تجاوز از قیود گارانتی نمی شود. (هدف اصلی روش GPC)

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

7.1.Constraints and MPC

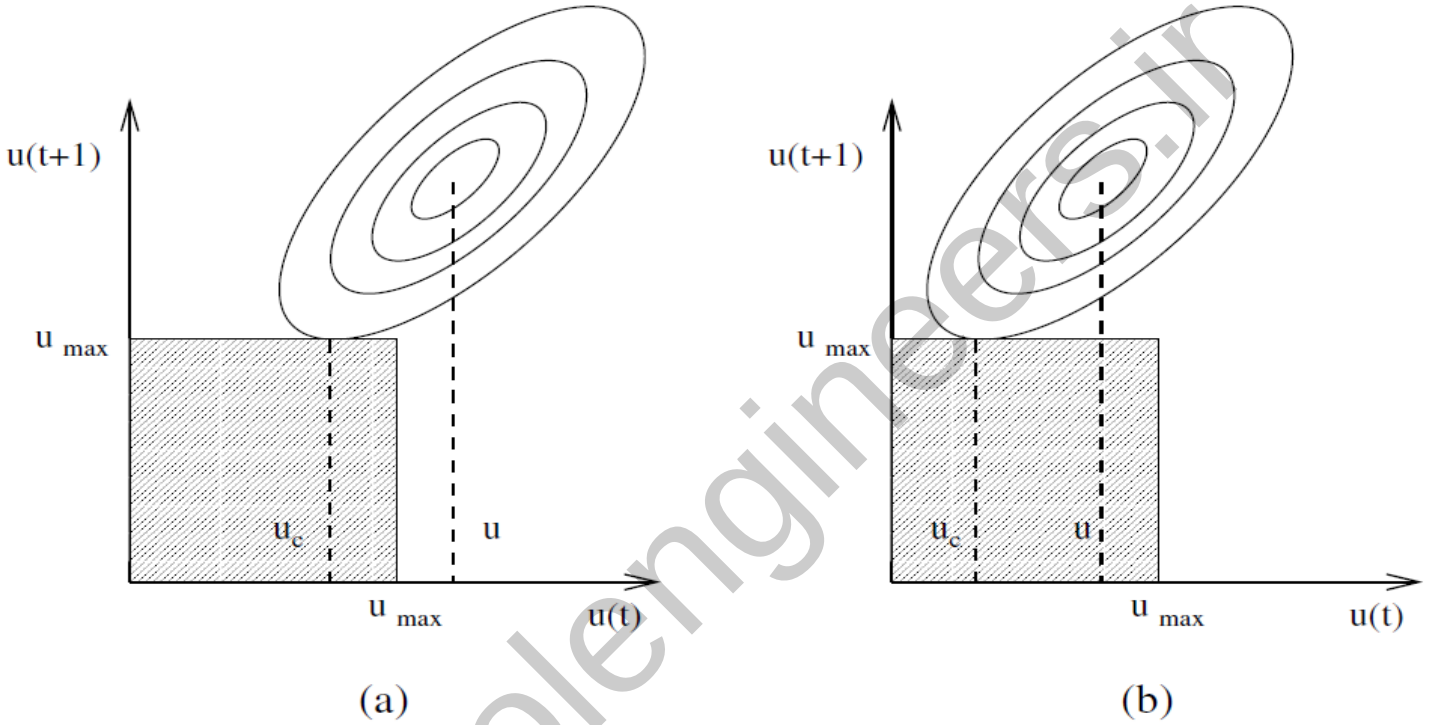


Fig. 7.1. Constraints on the control signal

- شکل الف) u از umax تجاوز می کند بنابراین umax اعمال می شود (بجای uc که مینیمم را با توجه به قیود بدست می دهد.)
- شکل ب) u از umax تجاوز نکرده و قابل اعمال است.

(بجای uc که مینیمم را با توجه به قیود بدست می دهد.)

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

7.1.Constraints and MPC

- نقض محدوده متغیرهای کنترل شده ممکن است پرهزینه تر و خطرناکتر باشد (خطر برای تجهیزات و افت محصول)
- بعنوان مثال : کیفیت محصول در یک راکتور نیازمند در محدوده قرار گرفتن متغیرهاست.
- تجاوز از محدوده های احراز شده بدلیل مسایل ایمنی ممکن است منجر به emergency فرآیند شود.
- مثال : در توربین بادی افزایش دما، سرعت باد و استرسهای مکانیکی منجر به emergency می شود.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

7.1.Constraints and MPC

- Constraint violations on the output variables are not contemplated when the only way of handling constraints is by clipping the manipulated variables.

- One of the main advantages of MPC, its prediction capabilities, is not used to its full potential by this way of operating.

- Control systems, especially long-range predictive control, should anticipate constraint violations and correct them in an appropriate way.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

7.1.Constraints and MPC

- قیود فرآیند

محدوده دامنه سیگنال کنترل

محدوده سرعت پایین عملگر

محدوده سرعت پایین عملگر

$$\mathbf{l}\,\underline{U} \le T\mathbf{u} + u(t-1)\,\mathbf{l} \le \mathbf{l}\,\overline{U}$$
$$\mathbf{l}\,\underline{u} \le \mathbf{u} \le \mathbf{l}\,\overline{u}$$
$$\mathbf{l}\,\underline{y} \le \mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{f} \le \mathbf{l}\,\overline{y}$$

- $\mathbf{1}$ ماتریس $(N \times n) \times m$

$$\begin{bmatrix} u(k_i) \\ u(k_i+1) \\ u(k_i+2) \\ \vdots \\ u(k_i+N_c-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ I \\ I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix} u(k_i-1) + \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ I & I & 0 & \dots & 0 \\ I & I & I & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ I & I & \dots & I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k_i) \\ \Delta u(k_i+1) \\ \Delta u(k_i+2) \\ \vdots \\ \Delta u(k_i+N_c-1) \end{bmatrix}.$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- قیود در فرم متمرکز بفرم زیر قابل بیان است.

$$\mathbf{Ru} \leq \mathbf{c}$$

$$R = \begin{bmatrix} I_{N\times N} \\ -I_{N\times N} \\ T \\ -T \\ \mathbf{G} \\ -\mathbf{G} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}\,\underline{u} \\ -\mathbf{l}\,\underline{u} \\ \mathbf{l}\,\overline{U} - \mathbf{l}\,u(t-1) \\ -\mathbf{l}\,\underline{U} + \mathbf{l}\,u(t-1) \\ \mathbf{l}\,\overline{y} - \mathbf{f} \\ -\mathbf{l}\,\underline{y} + \mathbf{f} \end{bmatrix}$$

- قیود روی متغیرهای خروجی بدلایل ایمنی بفرم زیر قابل بیان است. $\underline{y} \leq y(t) \leq \overline{y}$
- انواع دیگر قیود شامل قیدهای روی متغیرهای کنترل شده است بنحوی که پاسخ فرآیند دارای مشخصه معینی باشد که بنحو مشابه قابل بیان است.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- **محدودیتهای باند**
- قیدهای مربوط متغیرهای کنترل شده که مسیر معینی را داخل باند دنبال کند.

$$\underline{y} \leq y(t) \leq \overline{y}$$

- مثال : در صنایع غذایی لازم است محصول تحت پخت با پروفایل حرارتی مشخص با خطای معین دنبال کند.
- این نوع قیود بفرم زیر قابل بیان است.

$$\mathbf{Gu} \leq \overline{y} - \mathbf{f}$$
$$\mathbf{Gu} \geq \underline{y} - \mathbf{f}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- **قیود فراجهش**
- فراجهش ممکن است باعث برخورد با محیط کار workplace شود. [114]

- هر لحظه که تغییری در setpoint ایجاد شود و برای مدت زیادی ثابت بماند قید زیر می تواند اضافه شود.

$$y(t+j) \leq w(t) \quad \text{for } j = N_{o1} \cdots N_{o2}$$

- که در آن No1 و No2 افقی است که در آن فراجهش پیش می آید. (اگر نامعلوم باشد مقدار ۱ و N انتخاب میشود)

- بفرم زیر دوباره نویسی می شود.

$$\mathbf{Gu} \leq 1w(t) - \mathbf{f}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- **رفتار یکنواخت**
- برخی سیستمها رفتار اسیلاتوری دارند.
- راه حل : اضافه کردن قیود بمنظور ایجاد رفتار یکنواخت روی متغیرهای خروجی

$$y(t+j) \leq y(t+j+1)\ if y(t) < w(t)$$

$$y(t+j) \geq y(t+j+1)\ if y(t) > w(t)$$

- می توان قید را بفرم زیر نوشت.

$$\begin{bmatrix} G_0 & 0 & \cdots & 0 \\ G_1 - G_0 & G_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{N-1} - G_{N-2} & G_{N-2} - G_{N-3} & \cdots & G_0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \leq \begin{bmatrix} y(t) - \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{N-1} - \mathbf{f}_N \end{bmatrix}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- **رفتار غیرحداقل فاز (NMP)**

- رفتار اولیه پاسخ پله در جهت عکس مقدار نهایی (نا مناسب برای بسیاری از فرایندها)
- امکان اعمال قیدهای مربوطه در سیستم کنترل برای جلوگیری از رفتار NMP

$$y(t+j) \geq y(t) \text{ if } y(t) < w(t)$$
$$y(t+j) \leq y(t) \text{ if } y(t) > w(t)$$

- بیان قید NMP بر حسب تغییرات سیگنال کنترل:

$$Gu \geq 1y(t) - f$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- **رفتار غیرخطی عملگر**

- امکان اعمال قیدهای مربوطه در سیستم کنترل برای درنظر گرفتن اثرات غیرخطی عملگر
- معمولا اثرات غیرخطی عملگر در طراحی کنترل کننده لحاظ نمی شود (مانند Dead Zone)

- مقابله با Dead Zone با تولید سیگنال کنترل در خارج از محدوده Dead Zone

تعریف:

محدوده Dead Zone موقعیت: $(\underline{U}_d, \overline{U}_d)$

محدوده Dead Zone سرعت: $(\underline{u}_d, \overline{u}_d)$

- امکان اعمال قیدهای مربوطه در سیستم کنترل برای درنظر گرفتن Dead Zone عملگر :

$$1\underline{U}_d \geq Tu + u(t-1)1 \geq 1\overline{U}_d$$
$$1\underline{u}_d \geq u \geq 1\overline{u}_d$$

غیرمحدب بودن ناحیه Feasible این نوع قید ← مشکل در حل مسئله بهینه سازی

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

7.1.Constraints and MPC

- **قید مقدار نهایی حالت ها:**
- پیش بینی خروجی پس از زمانی در آینده، دقیقا برابر مقدار مرجع باشد.
- به عبارت دیگر: m نمونه پس از افق هزینه مقدار خروجی دقیقا برابر مقدار هزینه (Ny) باشد. (بحث آن در 4.10 بیان شد)
- **بیان مسئله به صورت مجموعه ای از قیدهای تساوی**
- پیش بینی خروجی:

$$\mathbf{y}_m = \mathbf{G}_m\mathbf{u} + \mathbf{f}_m$$

$$y_m = \left[y(t+N_y+1)^T \dots y(t+N_y+m)^T\right]^T$$

- قید مقدار نهایی حالت ها:

$$\mathbf{G}_m\mathbf{u} = \mathbf{w}_m - \mathbf{f}_m$$

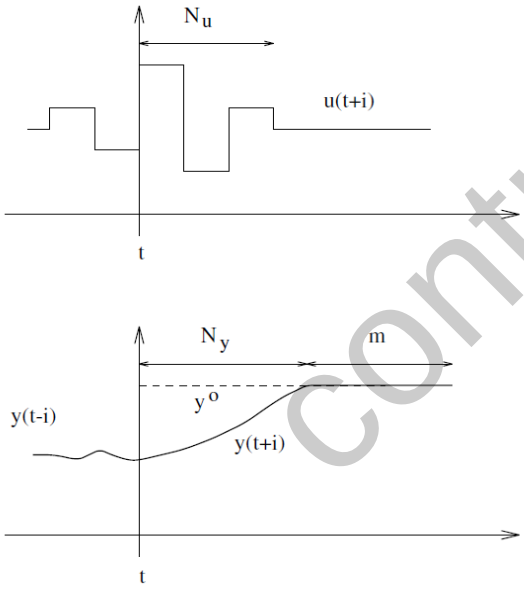


Fig. 4.8. Constrained Receding Horizon Predictive Control

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- شکل کلی انواع قیود:

- $\mathbf{Ru} \leq \mathbf{c}$
- $\mathbf{Au} = \mathbf{a}.$

- شکل کلی مسئله بهینه سازی(مسئله QP):

$$\min_{\Delta u} J$$
$$subject\ to: Linear\ Constraints$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

قیدهای ناحیه نهایی (Terminal Set)

- قید قرار گرفتن حالت نهایی (در انتهای افق پیش بینی) در ناحیه مشخص شده
- استفاده برای قرار گرفتن حالتها در نقاط کاری مورد نظر
- استفاده برای تضمین پایداری

- تعبیر ناحیه نهایی به صورت چندوجهی:

$$\mathbf{R}_T x(t+N) \leq \mathbf{r}_T \qquad (7.2)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- پیش بینی حالت با استفاده از بیان معادلات حالت:

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}_u\mathbf{u} + \mathbf{F}_x x(t) \quad (7.3)$$

- بیان n ردیف آخر معادله فوق: $n = \dim x(t)$

$$x(t+N) = \mathbf{g}_{uN}\mathbf{u} + \mathbf{f}_{xN}x(t)$$

$\mathbf{g}_{uN}$: n ردیف آخر G_u

$\mathbf{f}_{xN}$: n ردیف آخر F_x

- بیان قید ناحیه نهایی به صورت قیود چند وجهی:

$$\mathbf{R}_T\mathbf{R}_T\left(\mathbf{g}_{uN}\mathbf{u} + \mathbf{f}_{xN}x(t)\right) \leq \mathbf{r}_T \quad (7.4)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- **فرم کلی قیود:**

- بیان کلی قیود (بجز Dead Zone عملگر):

$$\mathbf{Ru} \leq \mathbf{r} + \mathbf{Vz}$$

- z : بردار سیگنالهای گذشته و آینده
  - فرم فضای حالت : z=x(t)
  - مدل CARMA یا CARIMA: z شامل خروجی حال، ورودی و خروجی گذشته
  - مدل پاسخ ضربه یا پاسخ پله: z شامل خروجی حال و ورودی گذشته

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- **چند مثال از اعمال قیود:**
- بهبود کارایی سیستم با اعمال قید در طراحی کنترل کننده

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- **قید ورودی**
- اعمال قید دامنه ورودی و سرعت تغییرات ورودی در طراحی کنترل کننده یک رآکتور که MFD آن به صورت زیر است: Matrix Fraction Description

$$A(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 - 1.8629z^{-1} + 0.8669z^{-2} & 0 \\ 0 & 1 - 1.8695z^{-1} + 0.8737z^{-2} \end{bmatrix}$$

$$B(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 0.0420 - 0.0380z^{-1} & 0.4758 - 0.4559z^{-1} \\ 0.0582 - 0.0540z^{-1} & 0.01445 - 0.1362z^{-1} \end{bmatrix}$$

LFD: $G(s) = A^{-1}B$

RFD: $G(s) = BA^{-1}$

- قیود:

- Input slew rate: 0.2 per sampling time
- Maximum value of Input: -0.3 and 0.3

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

7.1.Constraints and MPC

- نتیجه اعمال قید نسبت به طراحی بدون قید:

  کاهش سرعت حلقه بسته

- نتیجه اعمال قید نسبت به طراحی بدون قید و درنظرگرفتن اشباع در عمل:

  بهبود کارایی سیستم حلقه بسته

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

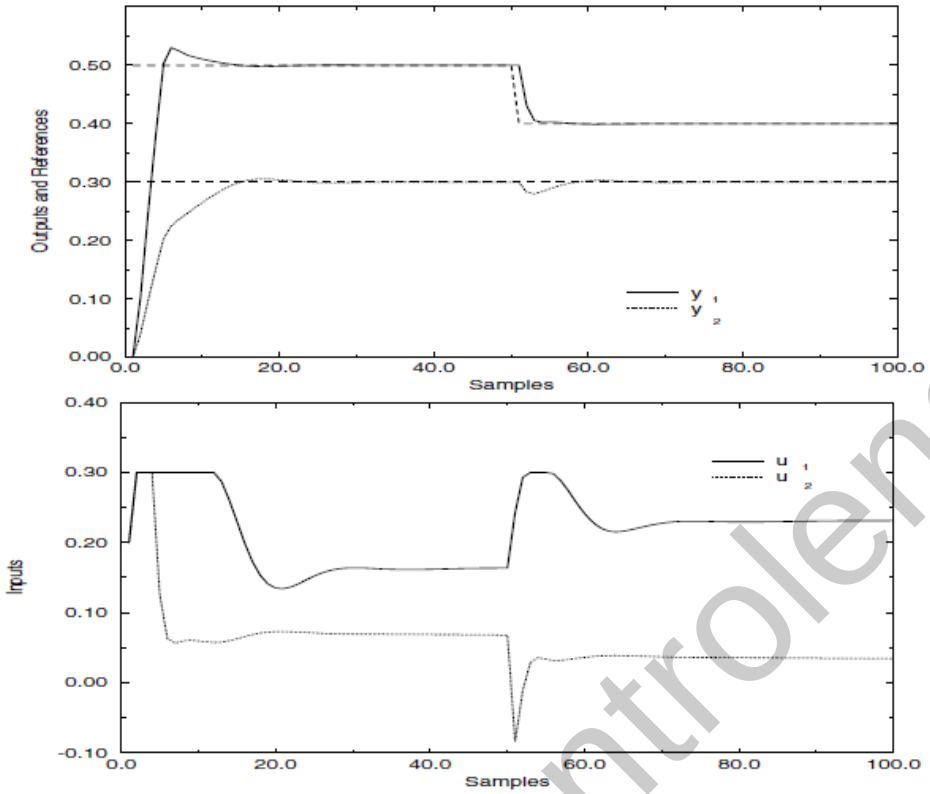


Fig. 7.2. Constraints in the manipulated variables

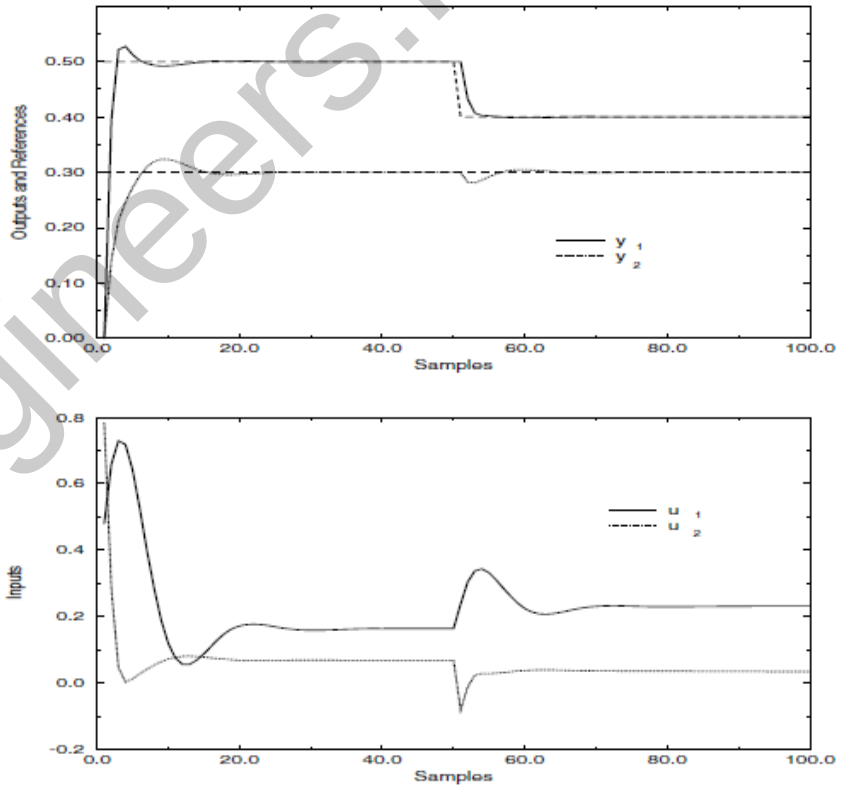


Fig. 6.2. Evolution of reactor temperature and effluent concentration

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- **قید Overshoot:**

سیستم اسیلاتوری با تابع تبدیل زیر:

$$G(s) = 50/(s^2 + 25)$$

- تابع تبدیل زمان گسسته با Ts=0.1 sec :

$$G(z^{-1}) = \frac{0.244835(z^{-1} + z^{-2})}{1 - 1.75516z^{-1} + z^{-2}}$$

- طراحی GPC با m=p=11 و ضریب وزنی ورودی ۵۰ یک بار به صورت نامقید و یک بار با قید اورشوت
- نتیجه: حذف اورشوت در طراحی مقید

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

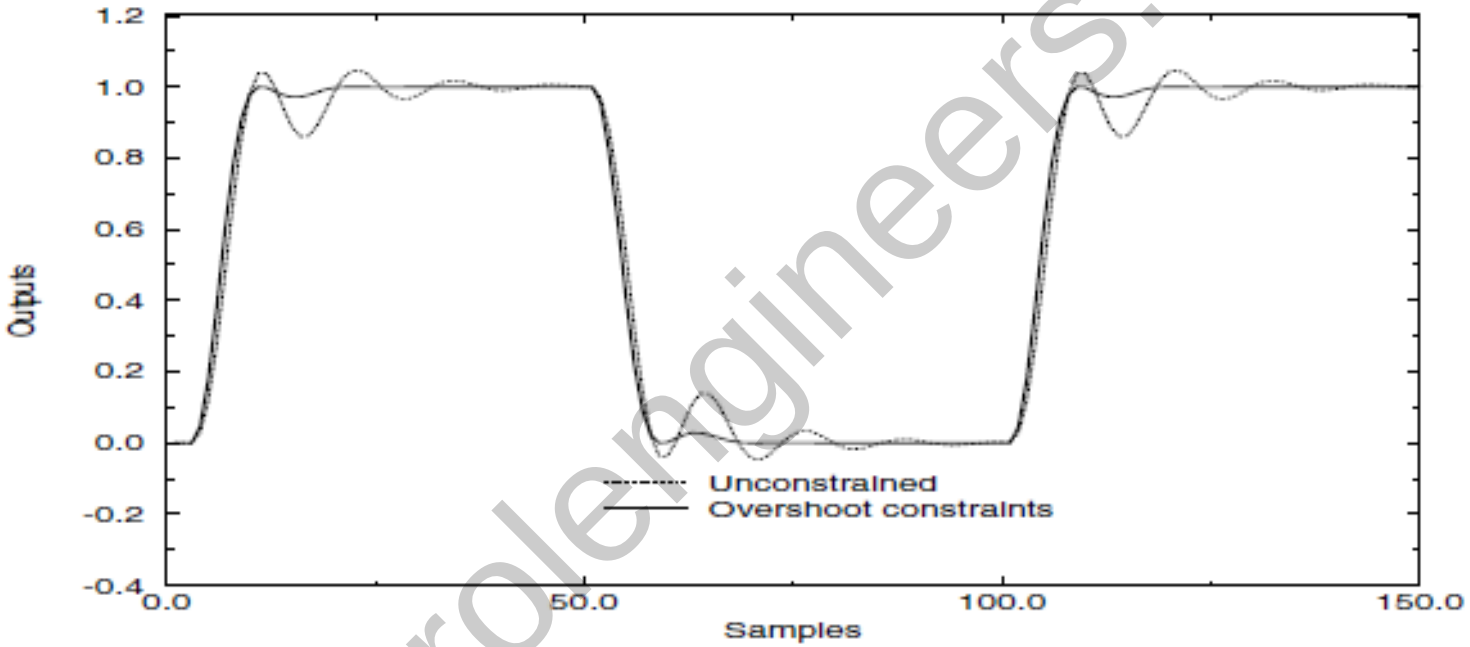


Fig. 7.3. Overshoot constraints

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- **رفتار یکنواخت:**
- وجود رفتار نوسانی در پاسخ در حالی که اورشوت حذف شده است (مثال قبلی)
- راه حل : قید یکنواختی پاسخ
- اعمال قید یکنواختی پاسخ به مثال قبلی با شرایط طراحی مشابه

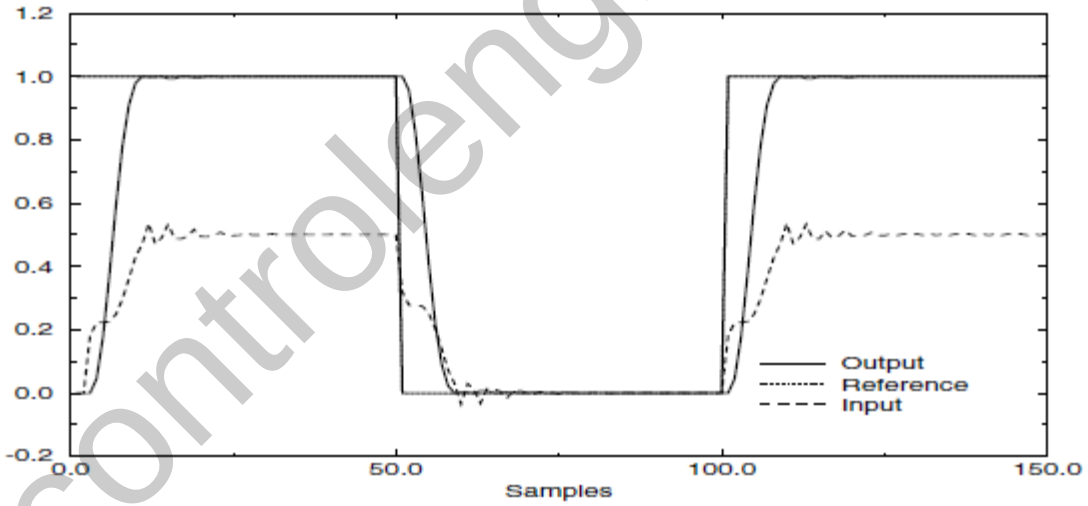


Fig. 7.4. Monotonic behaviour constraints

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- **فرایند NMP**

- سیستم NMP زیر:

$$G(S) = \frac{1 - S}{1 + S}$$

- تابع تبدیل گسسته با Ts=0.3

$$G(z^{-1}) = \frac{-1 + 1.2592z^{-1}}{1 - 0.7408z^{-1}}$$

رفتار سیستم:

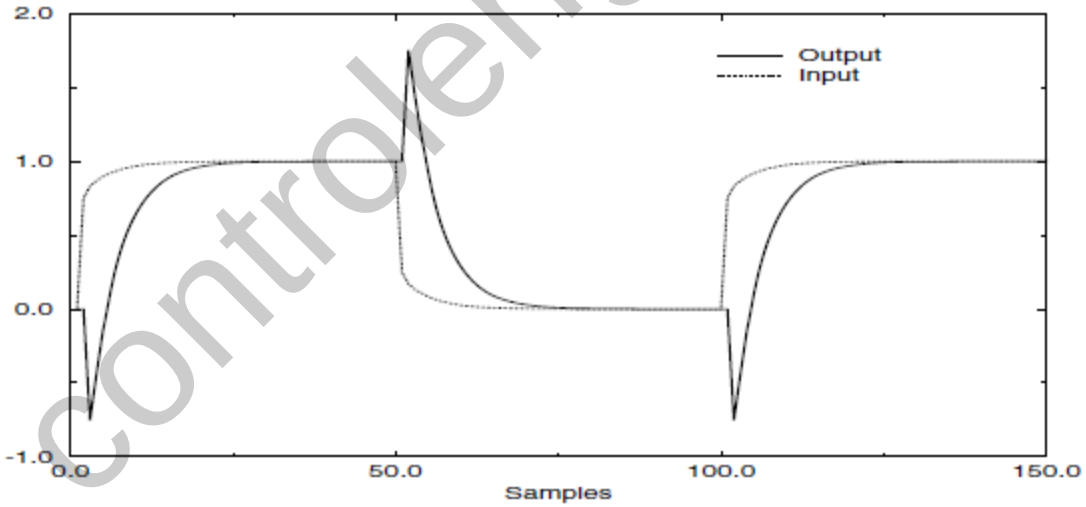


Fig. 7.5. Nonminimum phase behaviour

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- طراحی GPC با p=30 و m=10 و وزن ورودی ۰.۱ و محدودیت خروجی معکوس تا ۰.۰۵:
- به نرم شدن خروجی در ابتدا برای جلوگیری از ایجاد پاسخ در جهت عکس دقت شود

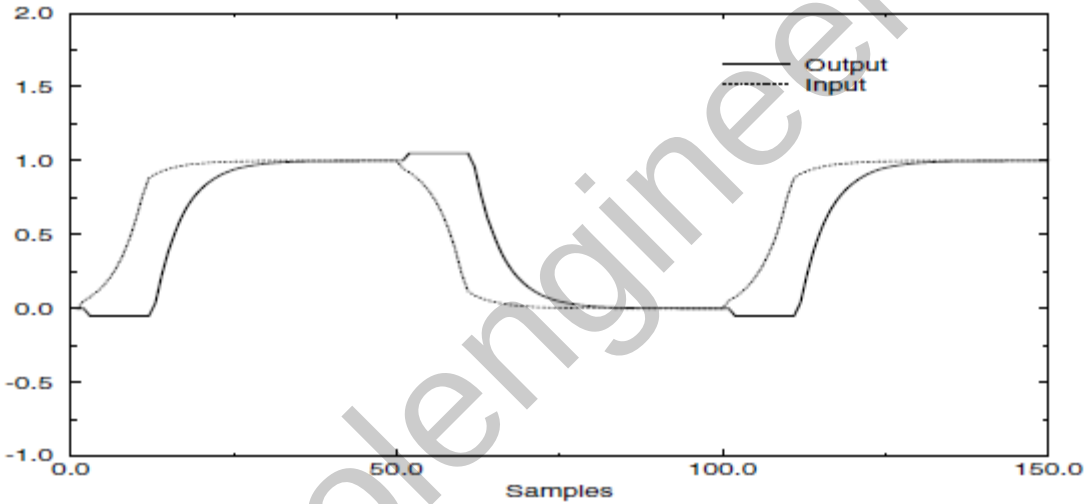


Fig. 7.6. Nonminimum phase constraints

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

CHAPTER 5:
Predictive Control with Constraints on Input Variables

S.K. Hosseini Sani

Assistant Professor

Electrical Engineering

Ferdowsi University

Mashhad, Iran
1392

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Numerical Solutions Using Quadratic Programming

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

فرم کلی تابع هزینه مربعی (Quadratic) و قیود بهینه سازی:

$$J = \frac{1}{2}x^T Ex + x^T F$$

$$Mx \leq \gamma,$$

فرض: ماتریس E متقارن و مثبت معین

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

مثال: مینیمم کردن تابع هزینه زیر با قید تساوی تعیین شده:

$$J = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2$$

$$x_1 + x_2 = 1.$$

حل: مینیمم کلی برای مسئله بدون قید:

$$x_1 = 2; x_2 = 2$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

حل مقید:

$$x_2 = 1 - x_1$$

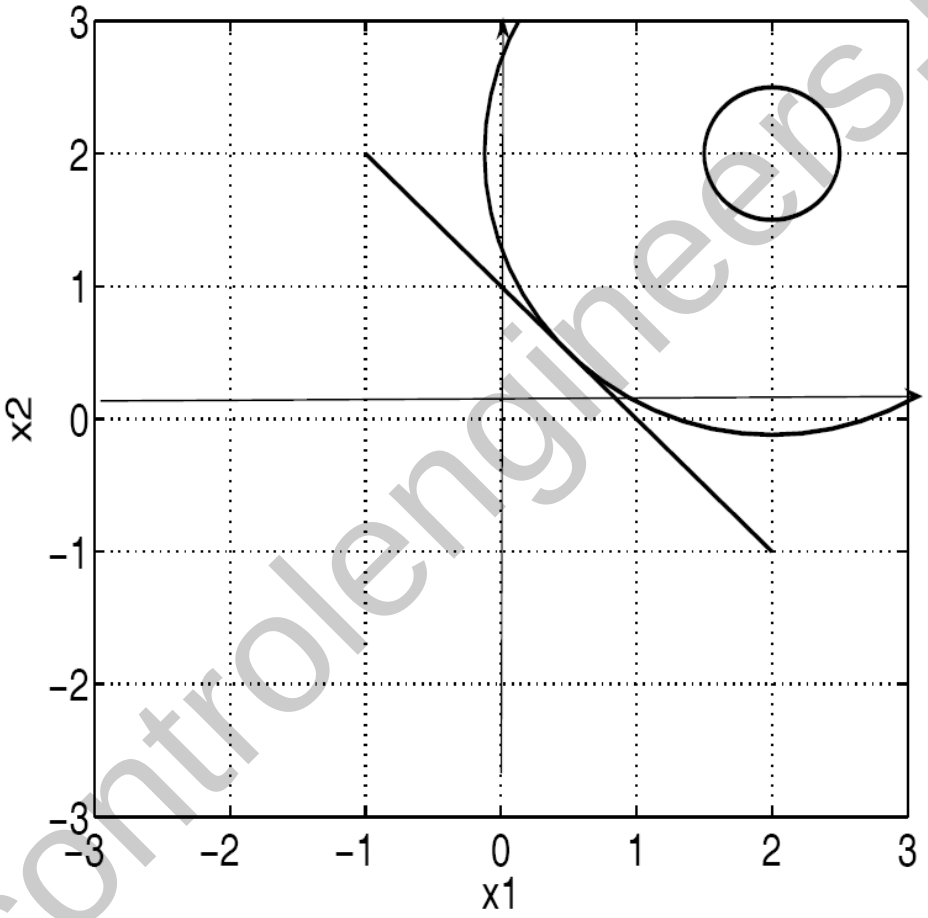
$$J = (x_1 - 2)^2 + (1 - x_1 - 2)^2$$
$$= 2x_1^2 - 2x_1 + 5.$$

$$\frac{\partial J}{\partial x_1} = 4x_1 - 2 = 0 \qquad x_1 = 0.5$$

$$x_2 = 1 - x_1 = 0.5$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers



controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

تعیین حل بهینه برای مسئله مقید با استفاده از Lagrange Multipliers :

$$J = \frac{1}{2}x^T Ex + x^T F + \lambda^T (Mx - \gamma).$$

$$\frac{\partial J}{\partial x} = Ex + F + M^T \lambda = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda} = Mx - \gamma = 0.$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

حل مسئله مقید:

$$\lambda = -(ME^{-1}M^T)^{-1}\left(\gamma + ME^{-1}F\right)$$
$$x = -E^{-1}(M^T\lambda + F).$$

حل مسئله نامقید:

$$x^0 = -E^{-1}F$$

حل مسئله مقید:

$$x = -E^{-1}F - E^{-1}M^T\lambda = x^0 - E^{-1}M^T\lambda,$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

مثال: بهینه سازی تابع زیر با قیدهای تساوی تعیین شده با استفاده از لاگرانژین:

$$J = \frac{1}{2}x^T Ex + x^T F,$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; F = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

subject to:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 1,$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

حل:

نقطه بهینه برای حل نامقید:

$$x^0 = -E^{-1}F = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T$$

حل مقید با لاگرانژین:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \end{bmatrix};\ \gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$ME^{-1}M^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 22 \end{bmatrix};\ ME^{-1}F = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(ME^{-1}M^T) = 62$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

$$\lambda = -(ME^{-1}M^T)^{-1}\left(\gamma + ME^{-1}F\right) = \begin{bmatrix} 1.6452 \\ -0.0323 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x^0 - E^{-1}M^T\lambda = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.6452 \\ -0.0323 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4516 \\ 1.2903 \\ -0.7419 \end{bmatrix}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

مثال: حل مسئله بهینه سازی وقتی قیدهای خطی تساوی وابسته خطی باشند

$$J = \frac{1}{2}x^T Ex + x^T F$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$2x_1 + 2x_2 = 6$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; F = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}; \gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad ME^{-1}M^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

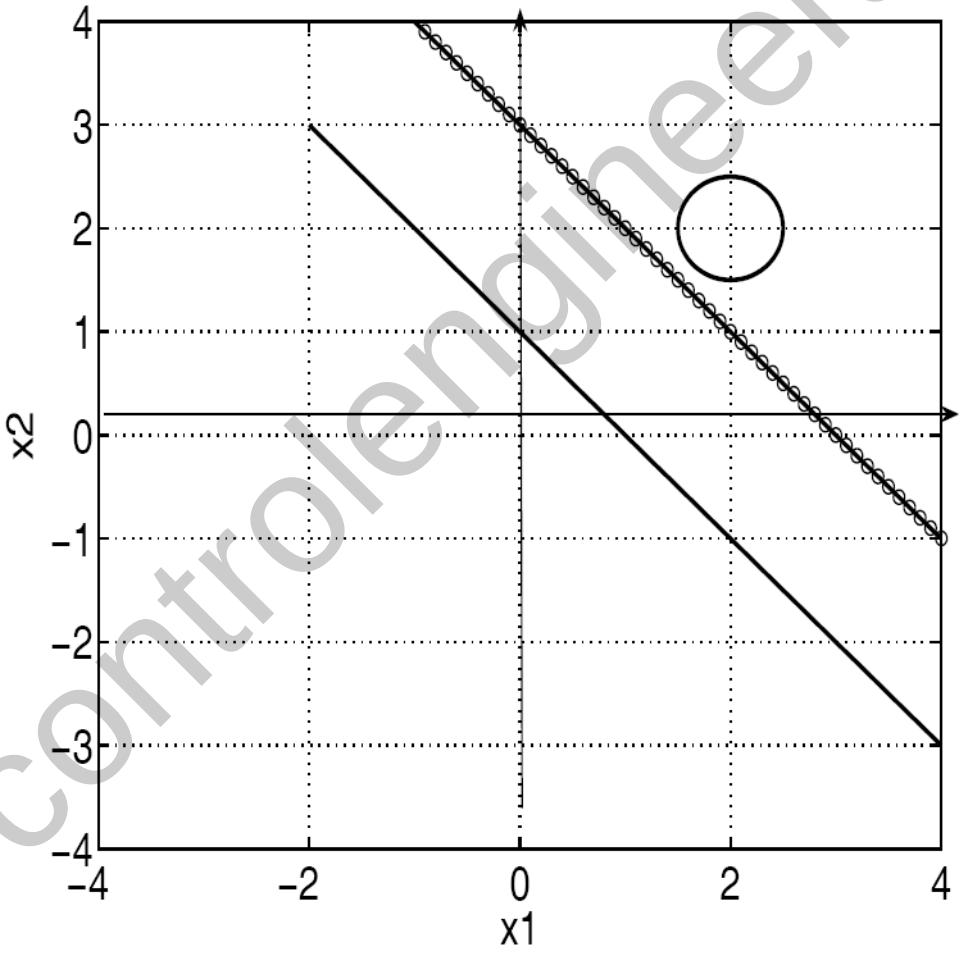
ماتریس $M^T E^{-1} M$ معکوس پذیر نیست ← حل *Feasible* برای x_1 و x_2 وجود ندارد

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

نمایش Feasible نبودن مسئله بهینه سازی مقید:

Solid-line $x_1 + x_2 = 1$; *darker-solid-line* $2x_1 + 2x_2 = 6$



controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

مثال: اثر تعداد قیدهای تساوی در حل مسئله بهینه سازی

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; F = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

اضاف کردن یک قید به مثال اول:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 1$$
$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1.$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

تنها نقطه feasible برای برقراری قیود تساوی:

$$x = M^{-1}\gamma = \begin{bmatrix} 0.6552 & 0.069 & 0.2759 \end{bmatrix}^T$$

توجه: تعداد قیود تساوی باید کمتر یا مساوی تعداد متغیرهای بهینه سازی باشد
در حالت تساوی: فقط برقراری قیود (عدم بهینه سازی تابع هدف)

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- مسئله بهینه سازی با قیود نامساوی:

امکان بیشتر بودن قیود نامساوی از تعداد متغیرهای بهینه سازی

- در قید نامساوی $M_i X \leq \gamma_i$:

اگر $M_i X = \gamma_i$ ← قید Active
اگر $M_i X < \gamma_i$ ← قید Inactive

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- شرایط Kuhn-Tucker : بیان قیود Active و Inactive بر حسب ضرب کننده های لاگرانژ:

(شرایط لازم برای بهینه سازی با قیود نامساوی)

$$
\begin{aligned}
Ex + F + M^T\lambda &= 0 \\
Mx - \gamma &\leq 0 \\
\lambda^T(Mx - \gamma) &= 0 \\
\lambda &\geq 0,
\end{aligned}
$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- بیان شرایط لازم در K-T بر اساس قیدهای Activeشده:
(S_{act} : اندیس قیدهای فعال شده)

$$Ex + F + \sum_{i \in S_{act}} \lambda_i M_i^T = 0$$

$$M_i x - \gamma_i = 0 \quad i \in S_{act}$$
$$M_i x - \gamma_i < 0 \quad i \notin S_{act}$$
$$\lambda_i \geq 0 \quad i \in S_{act}$$
$$\lambda_i = 0 \quad i \notin S_{act},$$

Mi : i امین ردیف ماتریس M

- اگر $M_i X - \gamma_i = 0$, یعنی قید تساوی ← Active ← ضرب کننده لاگرانژ باید نامنفی باشد
- اگر $M_i X - \gamma_i < 0$, یعنی قید ارضا شده است ← Inactive ← ضرب کننده لاگرانژ صفر

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- با فرض معلوم بودن Active Set مسئله قبل را می توان به مسئله با قیدهای تساوی تبدیل کرد:

$$\lambda_{act} = -(M_{act}E^{-1}M_{act}^T)^{-1}(\gamma_{act} + M_{act}E^{-1}F)$$
$$x = -E^{-1}(F + M_{act}^T\lambda_{act}).$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- مثال: تعیین ضرب کننده های لاگرانژ برای قیدهای مشابه مثال قبل اما برای قیدهای نامساوی

$$J = \frac{1}{2}x^T Ex + x^T F,$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; F = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 6$$

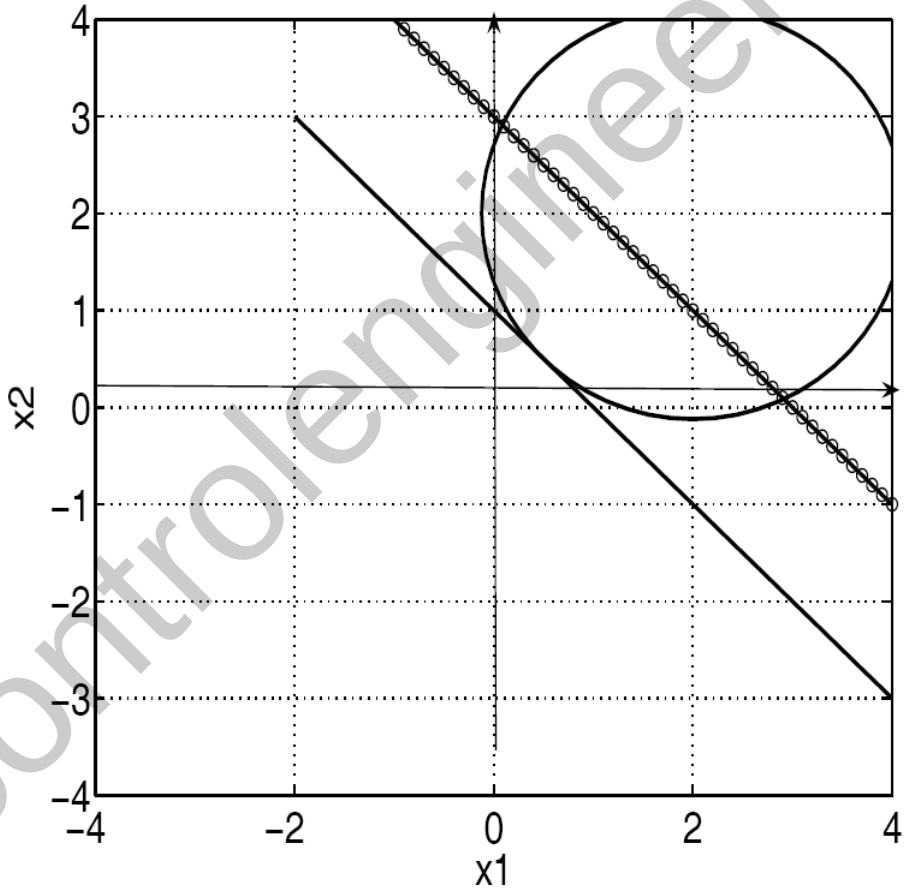
- اگر قید اول برقرار شود قید دوم حتما برقرار شده است:
  - قید اول: Active
  - قید دوم: Inactive

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

بهینه سازی مقید با قیدهای نامساوی:

Solid-line x1 + x2 = 1; darker-solid-line 3x1 +3x2 = 6



controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

روش Active Set :

- ایده اصلی: در هر لحظه از الگوریتم یک مجموعه از قیدها (Working Set) به عنوان Active Set تعیین می شوند.
- این مجموعه قیدها طوری انتخاب می شوند که زیر مجموعه ای باشند از قیدهایی که در نقطه فعلی Active باشند (در ابتدا کلیه قیود فعال فرض می شوند)
- الگوریتم با حرکت روی سطح working set به نقطه بهبودیافته می رود

روش:

- در هر مرحله از الگوریتم یک مسئله بهینه سازی با قید مساوی حل می شود
- اگر $\lambda_i \geq 0$ نقطه فعلی یک مینیمم محلی است
- در غیر اینصورت یک $\lambda_i < 0$ وجود دارد لذا شرط i ام رها می شود
- مجدد مسئله با قیدهای تساوی کاهش یافته حل می شود و الگوریتم ادامه می یابد

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

مثال الگوریتم Active Set :

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; F = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$$
$$3x_1 - 2x_2 - 3x_3 \leq 1$$
$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq 1.$$

حل مسئله با قیدهای تساوی:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 1$$
$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1.$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

$$\lambda = -(ME^{-1}M^T)^{-1}\left(\gamma + ME^{-1}F\right) = \begin{bmatrix} 1.6873 \\ 0.0309 \\ -0.4352 \end{bmatrix}$$

قید سوم : Inactive ← حذف قید تساوی سوم از مسئله

حل مسئله با قیدهای تساوی زیر:

$$J = \frac{1}{2}x^T Ex + x^T F$$

subject to:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 1$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

حل مسئله :

$$\lambda = \begin{bmatrix} 1.6452 \\ -0.0323 \end{bmatrix}$$

قید دوم: Inactive ← حذف قید تساوی دوم از مسئله

حل مسئله با قید تساوی زیر:

$$J = \frac{1}{2} x^T E x + x^T F$$

subject to:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

حل مسئله :

$$\lambda = \frac{5}{3}$$

$$x = \begin{bmatrix} 0.3333 & 1.3333 & -0.6667 \end{bmatrix}^T$$

توجه:

- در این مثال فقط یک قید Active وجود داشت. بقیه قیدها به صورت اتوماتیک ارضا می شوند
- تعداد قیود نامساوی در یک مسئله بهینه سازی می تواند بیشتر از تعداد متغیرهای بهینه سازی باشد چون لزوما همه قیدها فعال نمی شوند

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- **روش Primal-Dual**

- در روش های active که جزو روشهای primal محسوب می شوند، حل بر اساس متغیرهای بهینه سازی (متغیرهای Primal) بدست می آید
- در روش Active Set قیدهای active به همراه مقدار بهینه در هر مرحله باید محاسبه گردند.
  قیدهای زیاد ← بار محاسباتی زیاد

- روش dual :
  بدست آوردن قیدهای Inactive و حذف آنها از بهینه سازی
  متغیرهای Dual: ضرب کننده های لاگرانژ

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

با فرض feasible بودن قیود $Mx < \gamma$ مسئله Primal معادل است با:

$$\max_{\lambda \geq 0} \min_{x} [\frac{1}{2} x^T E x + x^T F + \lambda^T (Mx - \gamma)]$$

مینیمم سازی روی x بدون قید است و به صورت:

$$x = -E^{-1}(F + M^T \lambda)$$

جایگزینی x در مسئله ماکزیمم سازی:

$$\max_{\lambda \geq 0} (-\frac{1}{2} \lambda^T H \lambda - \lambda^T K - \frac{1}{2} F^T E^{-1} F)$$

$$H = M E^{-1} M^T$$
$$K = \gamma + M E^{-1} F$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

که معادل است با:

$$\min_{\lambda \geq 0}\left(\frac{1}{2}\lambda^T H\lambda + \lambda^T K + \frac{1}{2}\gamma^T E^{-1}\gamma\right)$$

مسئله Dual هم یک مسئله کوادراتیک است اما با متغیر بهینه سازی λ ،
اما می تواند بسیار ساده تر حل شود، زیرا قیود آن ساده تر هستند.
مسئله Dual :

$$J = \frac{1}{2}\lambda^T H\lambda + \lambda^T K + \frac{1}{2}\gamma^T E^{-1}\gamma,$$

$$\text{subject to } \lambda \geq 0,$$

مجموعه ای از ضرب کننده های لاگرانژ که تابع هزینه Dual را مینیمم می کند : λ_{act}
قیدهای مرتبط: γ_{act} و M_{act}

تعیین متغیر بهینه سازی Primal :

$$x = -E^{-1}F - E^{-1}M_{act}^T\lambda_{act}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Predictive Control with Constraints on Input Variables

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

مرور روابط GPC

$$J(N_1, N_2, N_u) = \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j)[\hat{y}(t+j \mid t) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j)[\Delta u(t+j-1)]^2$$

$$\boldsymbol{J} = (\boldsymbol{Gu} + \boldsymbol{f} - \boldsymbol{w})^T (\boldsymbol{Gu} + \boldsymbol{f} - \boldsymbol{w}) + \lambda \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{J} = \frac{1}{2} \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{H} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{u} + f0$$

$$\boldsymbol{H} = 2(\boldsymbol{G}^T \boldsymbol{G} + \lambda \boldsymbol{I}) \ , \ \mathbf{b}^{\mathrm{T}} = 2(\mathbf{f} - \mathbf{w})^{\mathrm{T}} \mathbf{G} \ , \ f_0 = (\mathbf{f} - \mathbf{w})^{\mathrm{T}} (\mathbf{f} - \mathbf{w})$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{H}^{-1} \mathbf{b} = \left(\mathbf{G}^{\mathrm{T}} \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I}\right)^{-1} \mathbf{G}^{\mathrm{T}} (\mathbf{w} - \mathbf{f})$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

قید روی نرخ تغییرات سیگنال کنترل

فرآیند زیر را در نظر بگیرید.

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 0.1s + 3} \quad \text{poles at } -0.0500 \pm 1.7313j$$

Sampling time: $\Delta = 0.1$

مطلوبست طراحی کنترلگری که :

$$N_c = 3,\ N_p = 20,\ \text{and}\ \lambda = 0.01 \times I$$

$$-1.5 \leq \Delta u(k) \leq 3$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

هدف : طراحی کنترل پیش بین با فرض محدودیت تنها روی اولین المان Δu

- ابتدا محاسبه مدل گسسته و سپس اضافه کردن انتگرالگیر به مدل

$$\boldsymbol{G^T G} = \begin{bmatrix} 0.1760 & 0.1553 & 0.1361 \\ 0.1553 & 0.1373 & 0.1204 \\ 0.1361 & 0.1204 & 0.1057 \end{bmatrix} ; \ \mathbf{G^T f} = \begin{bmatrix} 0.1972 & -0.1758 & 1.4187 \\ 0.1740 & -0.1552 & 1.2220 \\ 0.1522 & -0.1359 & 1.0443 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1.4187 \\ 1.2220 \\ 1.0443 \end{bmatrix} \ r(k_i).\ r(k_i) \text{ and } \hat{x}(k_i) \text{ are the set-point signal}$$

- قیود را بفرم استاندارد می نویسیم

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k_i) \\ \Delta u(k_i+1) \\ \Delta u(k_i+2) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 3.0000 \\ 1.5000 \end{bmatrix}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

برای نمایش نحوه حل دو مرحله محاسبات آورده شده است.

- فرض : r(k1)=1

۱. محاسبه مرحله اول :

بدون قید : $\Delta U = [6.1083 \;\; 2.3334 \;\; -0.5861]$

شرط نقض شد.

حل مساله با قید: $\Delta U = [3.0000 \;\; 4.2751 \;\; 1.0494]$ اعمال $\Delta u = 3$

۲. محاسبه مرحله بعد :

بدون قید : $\Delta U = [4.6329 \;\; 1.1265 \;\; -1.5559]$

شرط نقض شد.

حل مساله با قید: $\Delta U = [3.0000 \;\; 2.1466 \;\; -0.6769]$ اعمال $\Delta u = 3$

۳. محاسبه مرحله بعد :

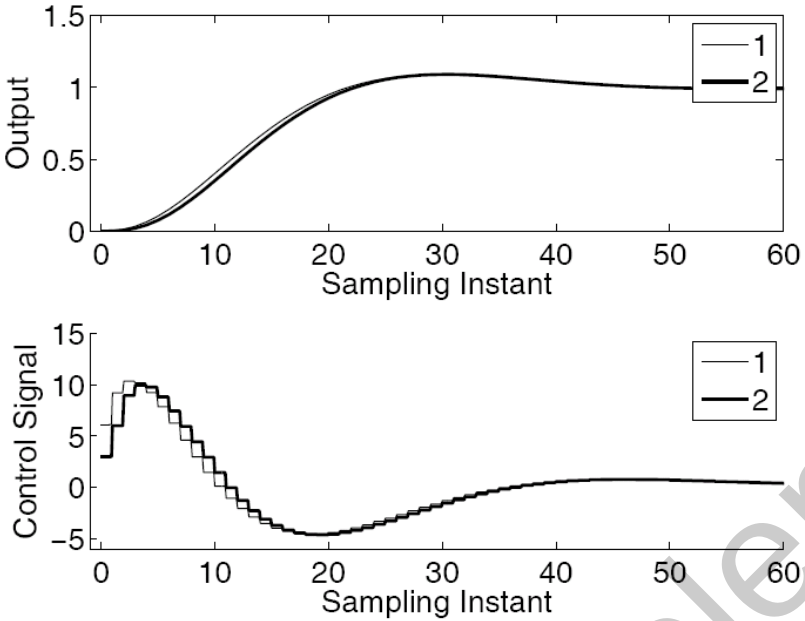
بدون قید : $\Delta U = [2.9338 \;\; -0.2126 \;\; -2.5828]$

شرط برقرار است و پاسخ بهینه بدست آمد.

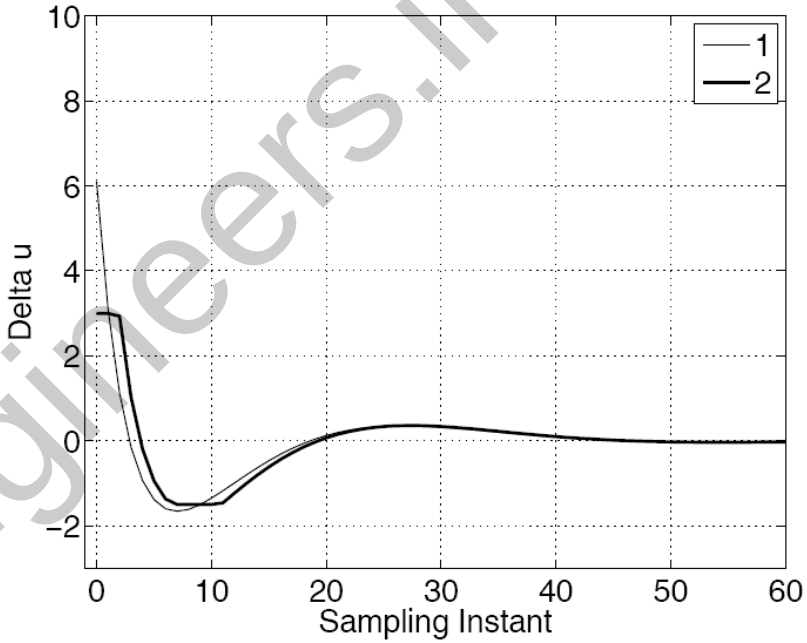
۴. ادامه محاسبات و شبیه سازی حلبه بسته

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers



(a) Output and Control Signal



(b) Δu

Fig. 2.6. Closed-loop system response with constraints. Key: line (1) without constraints; line (2) with constraints $-1.5 \leq \Delta u(k) \leq 3$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

هدف : طراحی کنترل پیش بین با فرض محدودیت تنها روی تمام مولفه های ΔU

- رابطه زیر نمایش در نظر گرفتن قید روی تمام مولفه ها

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k_i) \\ \Delta u(k_i+1) \\ \Delta u(k_i+2) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 1.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

برای نمایش نحوه حل دو مرحله محاسبات آورده شده است.

- فرض : ورودی مرجع r(k1)=1

۱. محاسبه مرحله اول :

بدون قید : $\Delta U = [6.1083 \;\; 2.3334 \;\; -0.5861]$

شرط نقض شد.

حل مساله با قید: $\Delta U = [3.0000 \;\; 3.0000 \;\; 2.3731]$

(شامل دو قید فعال)

۲. محاسبه مرحله بعد :

بدون قید : $\Delta U = [4.6329 \;\; 1.1265 \;\; -1.5559]$

شرط نقض شد.

حل مساله با قید: $\Delta U = [3.0000 \;\; 2.1466 \;\; -0.6769]$

(شامل یک قید فعال)

۳. محاسبه مرحله بعد :

بدون قید : $\Delta U = [2.9338 \;\; -0.2126 \;\; -2.5828]$

ترم سوم شرط را نقض میکند.

حل مساله با قید: $\Delta U = [2.4885 \;\; -0.6280 \;\; -1.5000]$

در مقایسه با مثال قبل ۲,۴۸۸۵ بجای ۲,۹۳۳۸ اعمال شده است.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

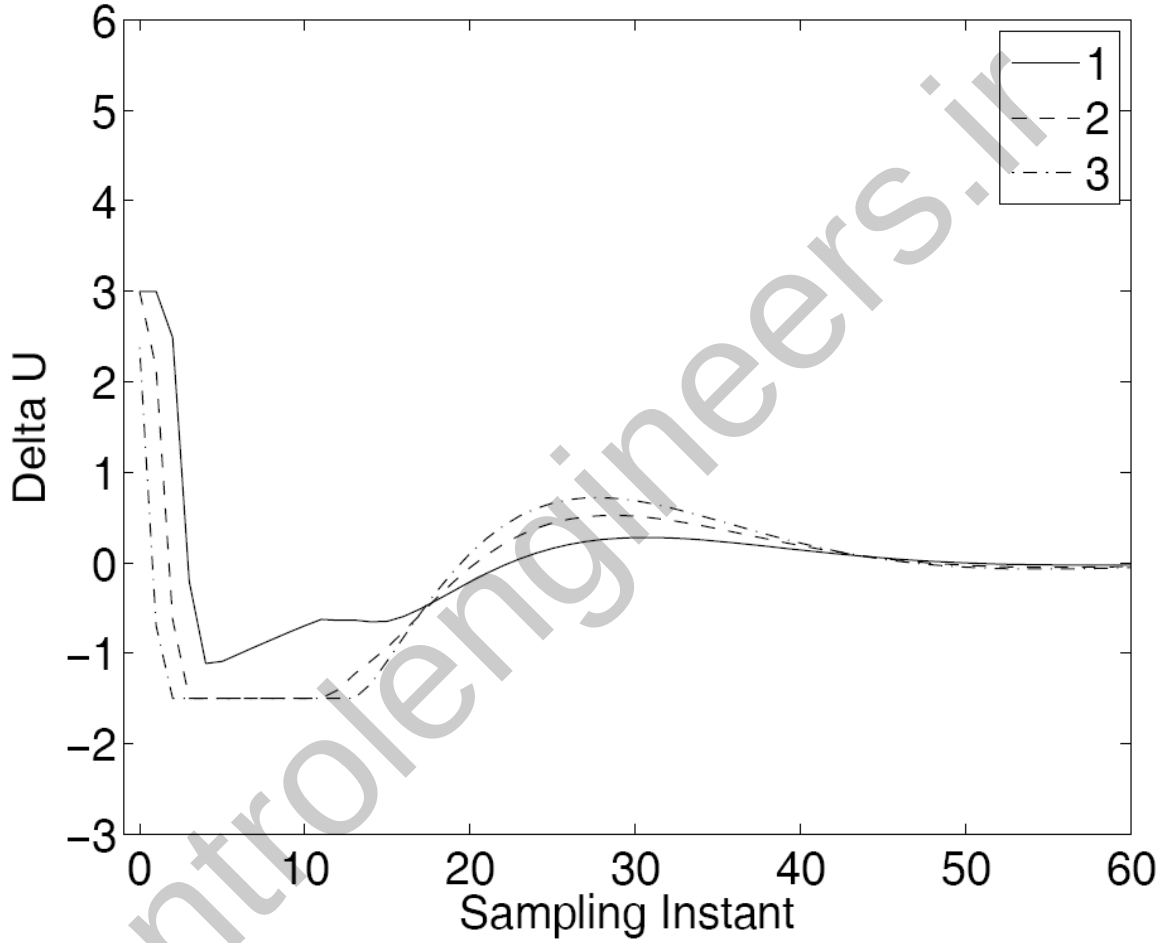
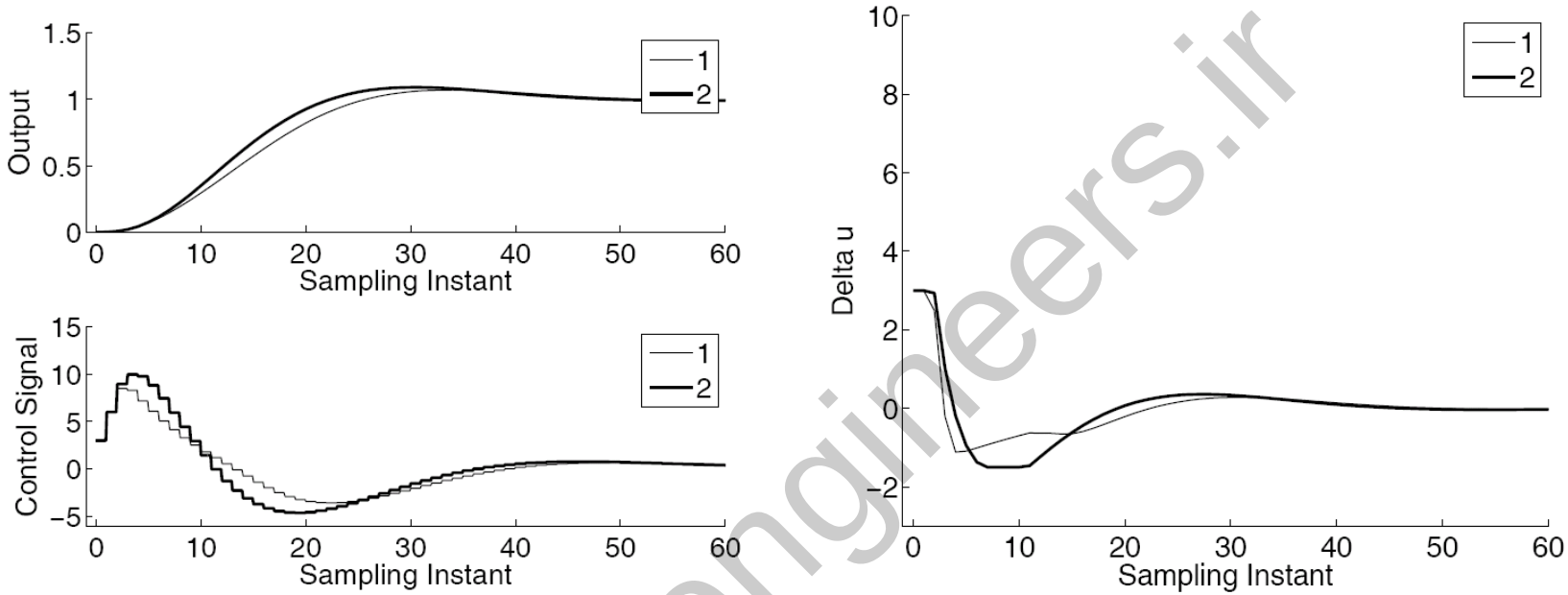


Fig. 2.7. All control elements with constraints. Key: line (1) $\Delta u(k_i)$; line (2) $\Delta u(k_i+1)$; line (3) $\Delta u(k_i+2)$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers



(a) Output and Control Signal (b) Δu

Fig. 2.8. Comparison results between Example 2.15 and 2.14. Key: line (1) solution from Example 2.15; line (2) the solution from Example 2.14

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Constraints on Amplitude of the Control

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

قید ها روی دامنه اولین مولفه سیگنال کنترل

طراحی مثال قبل با فرض قید روی دامنه بصورت $-3 \le u(k) \le 6$

$$u(k_i) = \Delta u(k_i) + u(k_i - 1);\ \Delta u(k_i) = [1 \quad 0 \quad 0]\Delta U$$

$$-3 \le [1 \quad 0 \quad 0]\Delta U + u(k_i - 1) \le 6.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k_i) \\ \Delta u(k_i + 1) \\ \Delta u(k_i + 2) \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 6 - u(k_i - 1) \\ 3 + u(k_i - 1) \end{bmatrix}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

برای نمایش نحوه حل دو مرحله محاسبات آورده شده است.

- فرض : ورودی مرجع r(k1)=1

۱. محاسبه مرحله اول :

بدون قید : $\Delta U = [6.1083 \;\; 2.3334 \;\; -0.5861]$

با فرض u(ki − 1) = 0 داریم u(ki) = 6.1083 که شرط نقض می شود.

حل مساله با قید: $\Delta U = [3.0000 \;\; 3.0000 \;\; 2.3731]$

حل مساله با قید: $\Delta U = [6.0000 \;\; 2.4010 \;\; -0.5291]$

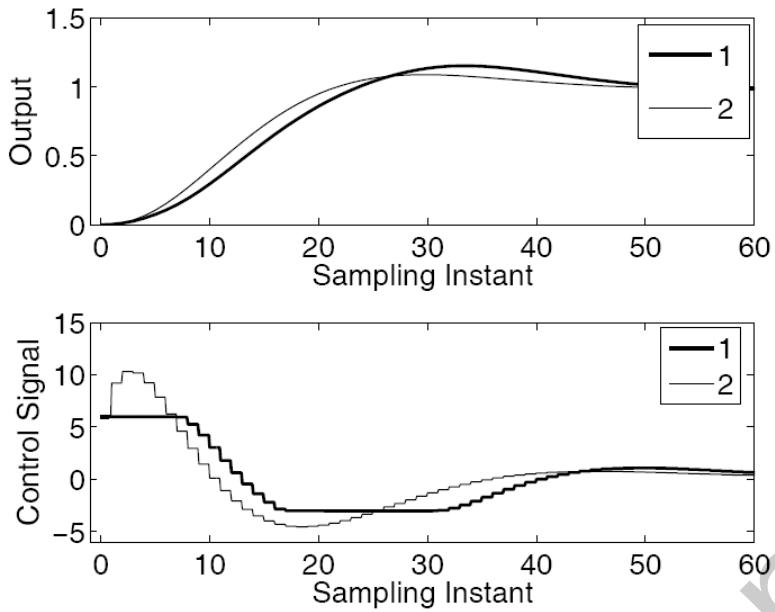
۲. محاسبه مرحله بعد :

بدون قید : $\Delta U = [0 \; 1.8921 \; -0.8643]$

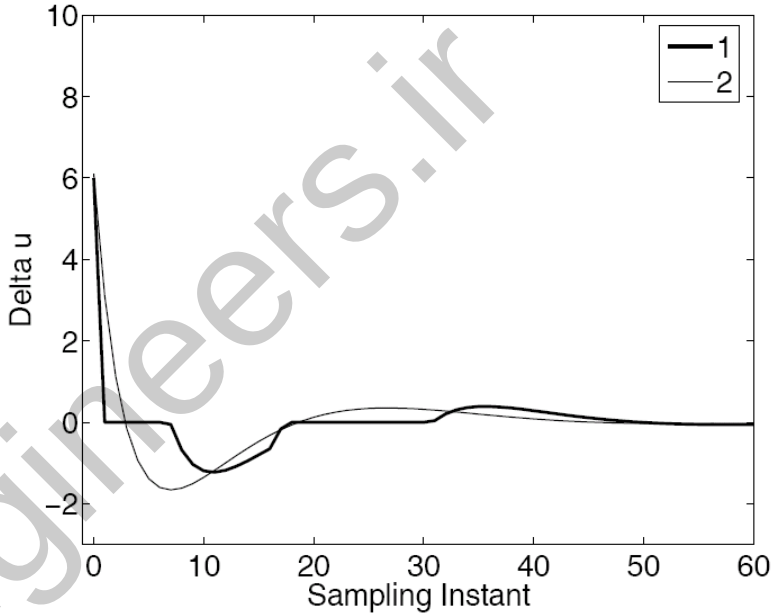
شرط برقرار است.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers



(a) Output and Control Signal



(b) Δu

Fig. 2.9. Closed-loop response with constraints (Example 2.16). Key: line (1) solution with constraints; line (2) solution without constraints

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

قید روی دامنه تمام مولفه های سیگنال کنترل

$$u(k_i+1) = \Delta u(k_i+1) + u(k_i) = \Delta u(k_i+1) + \Delta u(k_i) + u(k_i-1)$$

$$u(k_i+2) = \Delta u(k_i+2) + \Delta u(k_i+1) + \Delta u(k_i) + u(k_i-1).$$

$$\begin{bmatrix} u(k_i) \\ u(k_i+1) \\ u(k_i+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k_i) \\ \Delta u(k_i+1) \\ \Delta u(k_i+2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u(k_i-1) \\ u(k_i-1) \\ u(k_i-1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k_i) \\ \Delta u(k_i+1) \\ \Delta u(k_i+2) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 6 - u(k_i-1) \\ 6 - u(k_i-1) \\ 6 - u(k_i-1) \\ 3 + u(k_i-1) \\ 3 + u(k_i-1) \\ 3 + u(k_i-1) \end{bmatrix}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

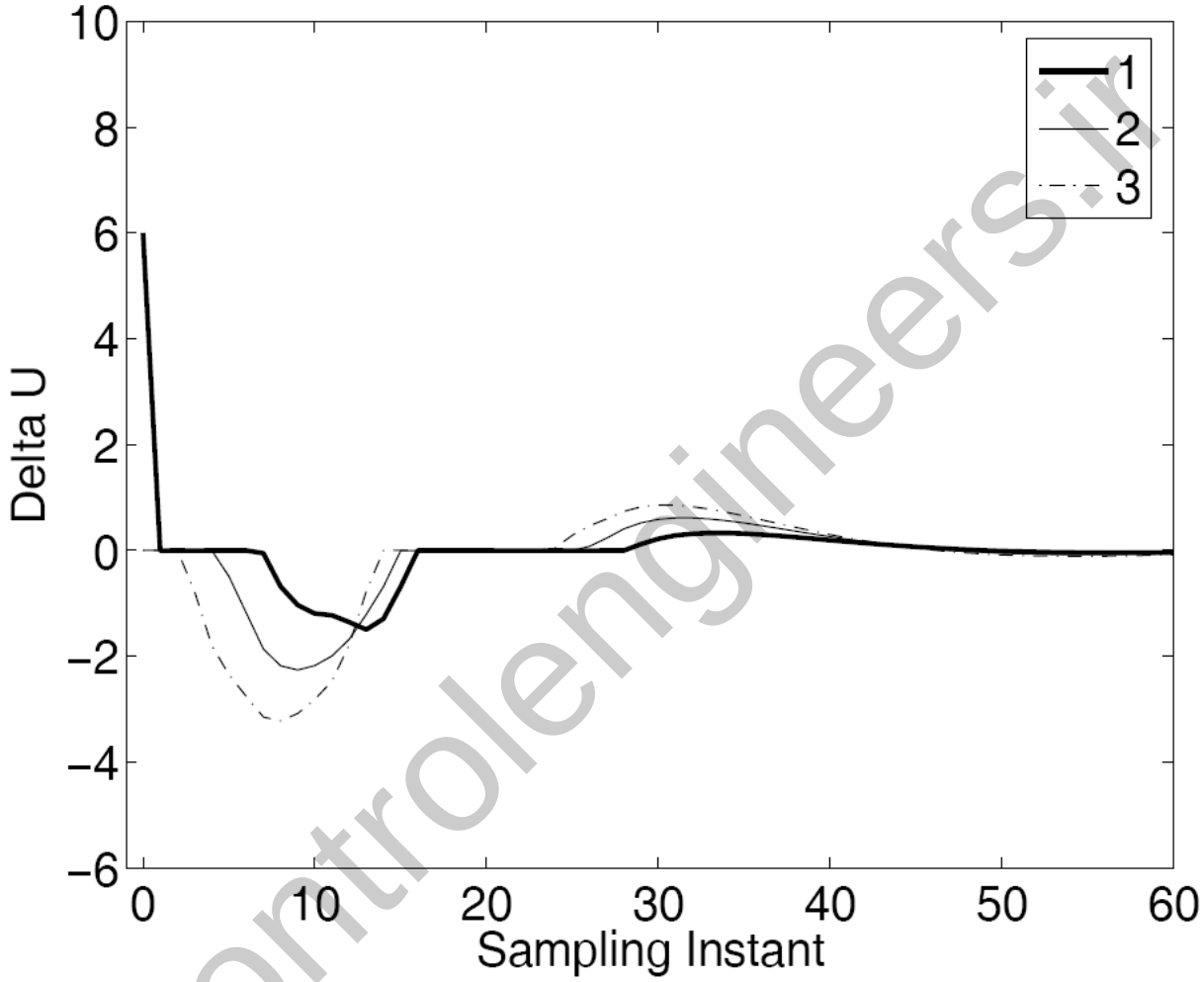
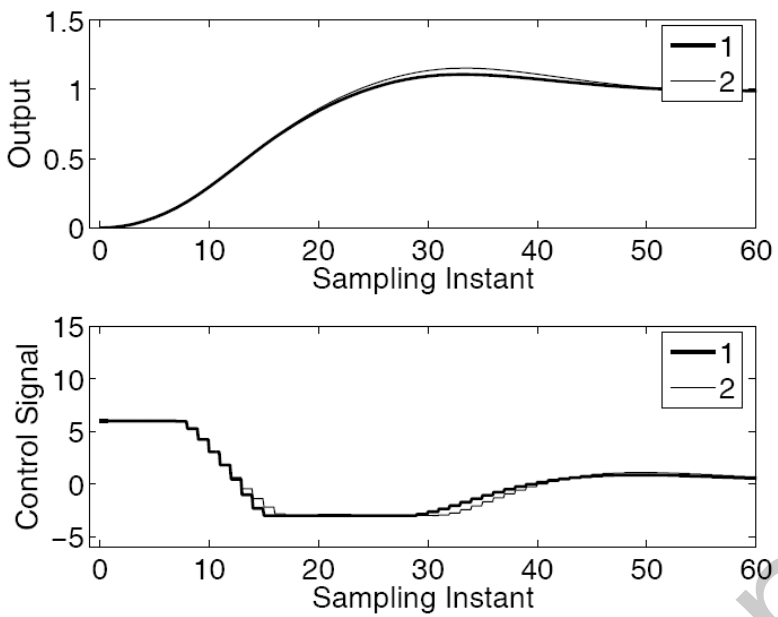


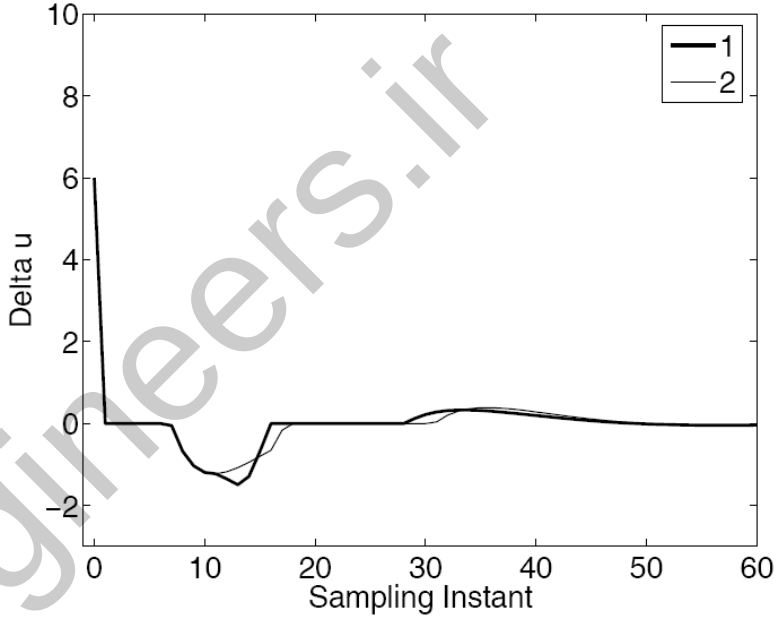
Fig. 2.10. All control elements. Key: line (1) $\Delta u(k_i)$; Line(2) $\Delta u(k_i + 1)$; line (3) $\Delta u(k_i + 2)$.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers



(a) Output and Control Signal



(b) Δu

Fig. 2.11. Comparison of results between Example 2.16 and 2.17. Key: line (1) solution with constraints on all future control; line (2) solution with constraints on the first sample of future control

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Constraints on Amplitude and Rate of Change

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

قید روی دامنه و نرخ تغییر سیگنال کنترل

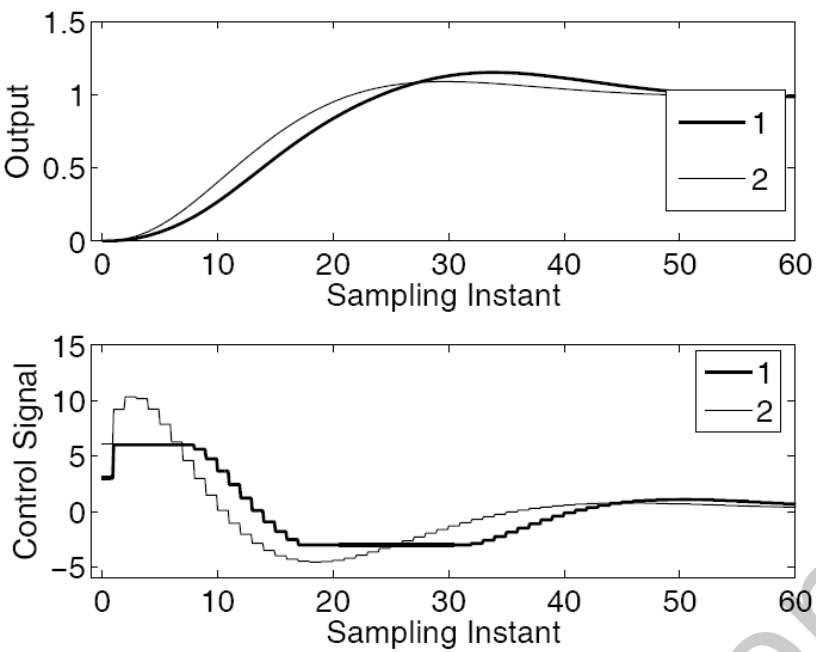
طراحی مثال قبل با فرض قید روی دامنه بصورت $-3 \leq u(k) \leq 6$
و روی سرعت بفرم : $-1.5 \leq \Delta U \leq 3$

$$-1.5 \leq \Delta u(k) \leq 3; \quad -3 \leq u(k) \leq 6$$

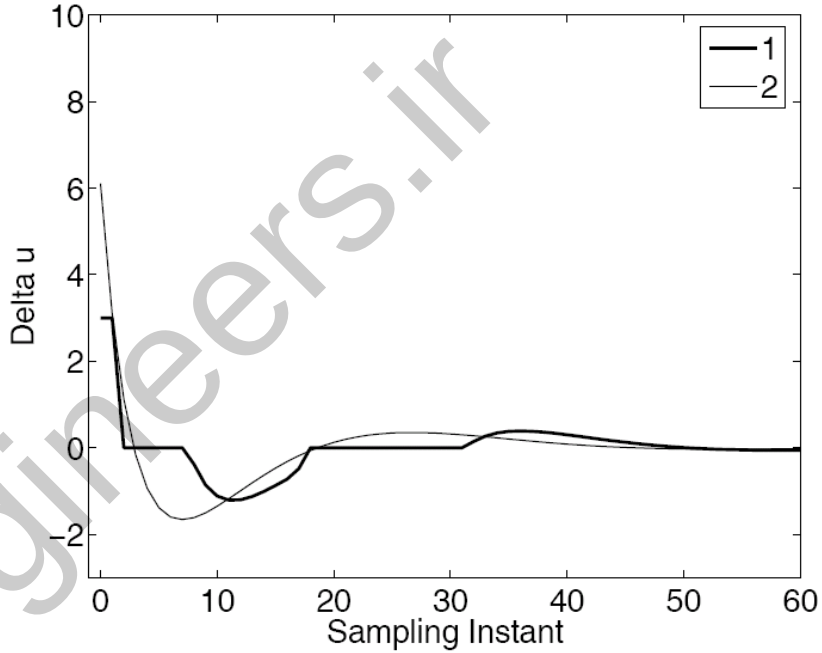
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k_i) \\ \Delta u(k_i+1) \\ \Delta u(k_i+2) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 3.0000 \\ 1.5000 \\ 6-u(k_i-1) \\ 3+u(k_i-1) \end{bmatrix}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers



(a) Output and Control Signal



(b) Δu

Fig. 2.12. Closed-loop control response with constraints (Example 2.18). Key: line (1) responses with constraints on both amplitude and rate of change; line (2) responses without constraints

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

قید روی دامنه و نرخ تغییر تمامی مولفه های سیگنال کنترل

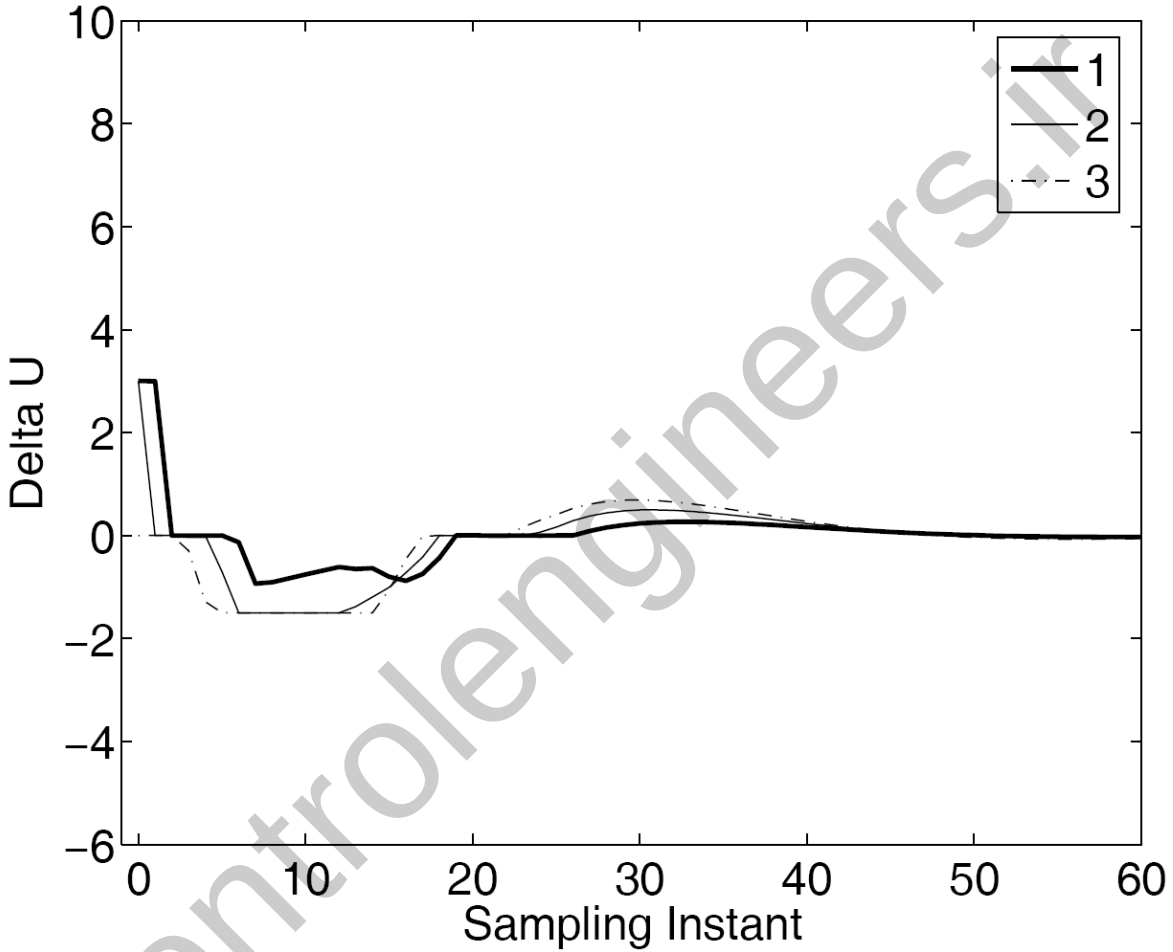
$$-1.5 \leq \Delta u(k) \leq 3; \qquad -3 \leq u(k) \leq 6$$

قید روی تمامی مولفه های ΔU
و تمامی مولفه های u(ki) و u(ki+1) و u(ki+2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k_i) \\ \Delta u(k_i+1) \\ \Delta u(k_i+2) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 1.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \\ 6-u(k_i-1) \\ 6-u(k_i-1) \\ 6-u(k_i-1) \\ 3+u(k_i-1) \\ 3+u(k_i-1) \\ 3+u(k_i-1) \end{bmatrix}$$

controlengineers.ir

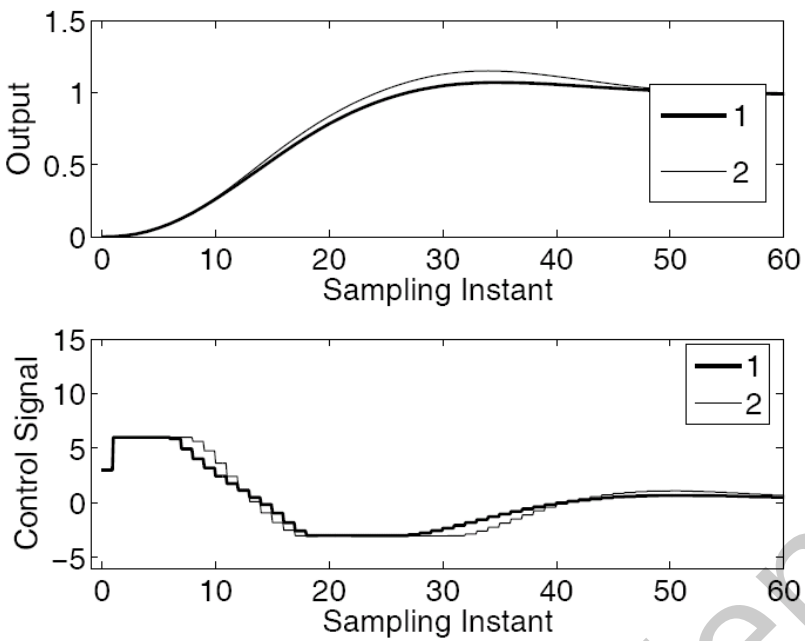
اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers



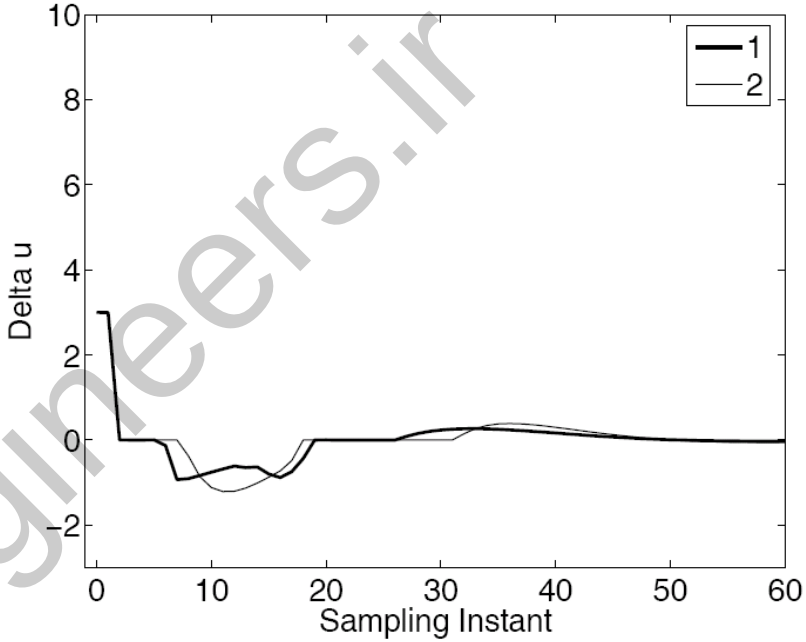
controlengineers.ir

Fig. 2.13. All control elements with constraints. Key: line (1) $\Delta u(k_i)$; line (2) $\Delta u(k_i + 1)$; line (3) $\Delta u(k_i + 2)$

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers



(a) Output and Control Signal



(b) Δu

Fig. 2.14. Comparison of results between Examples 2.18 and 2.19. Key: line (1) solution with constraints on all future control; line (2) solution with constraints on the first sample of future control

بهبود عملکرد و کاهش حداکثر جهش

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Constraints on the Output Variable

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

قید روی خروجی

مثال : سیستم گسسته بفرم زیر را در نظر بگیرید.

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.0048z + 0.0047}{(z-1)(z-0.9048)}$$

$$(q^2 - 1.9048q + 0.9048)y(k) = (0.0048q + 0.0047)u(k)$$

فرض متغیرهای حالت بفرم زیر باشند.

$$x_m(k) = [y(k)\ y(k-1)\ u(k-1)]^T$$

$$\begin{bmatrix} y(k+1) \\ y(k) \\ u(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9048 & -0.9048 & 0.0047 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k-1) \\ u(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0048 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_m(k). \qquad (2.102)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

مثال : سیستم گسسته بفرم زیر باشد.

$$N_p = 46,\ N_c = 8,\ \text{and}\ \bar{\boldsymbol{w}} = 0.1 \times I$$

مطلوبست طراحی سیستم کنترل با فرض قیود زیر

$$0 \le y(k) \le 1.$$

$$-1.2 \le u(k) \le 1.8, \quad -0.5 \le \Delta u(k) \le 0.5.$$

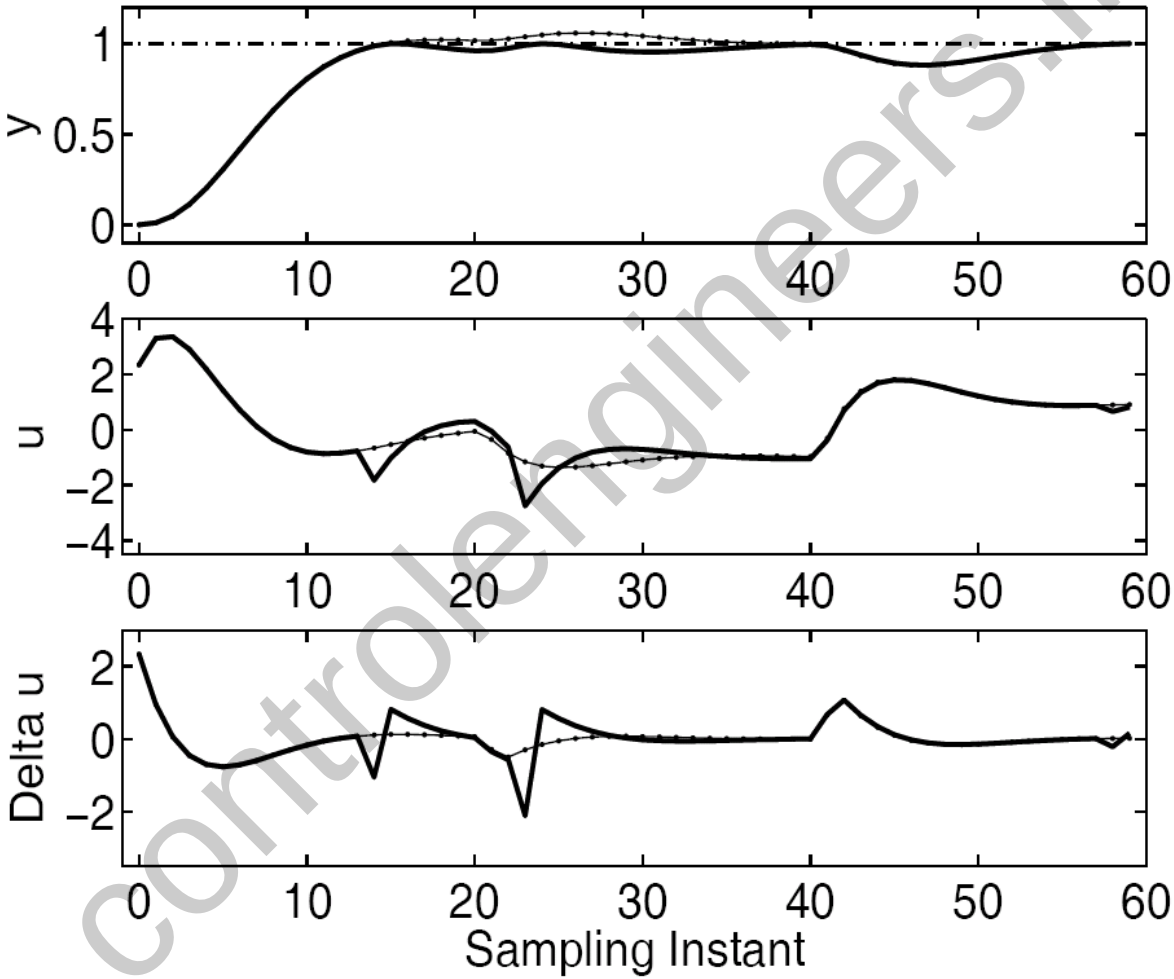
اعمال سیگنال اغتشاش پله در زمان k=20 و در جهت مخالف در k=40

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

قید $0 \leq y(k) \leq 1.$

فعال شدن قید ها در k=13, k=23 بدلیل تغییر در سیگنال مرجع و ورود اغتشاش



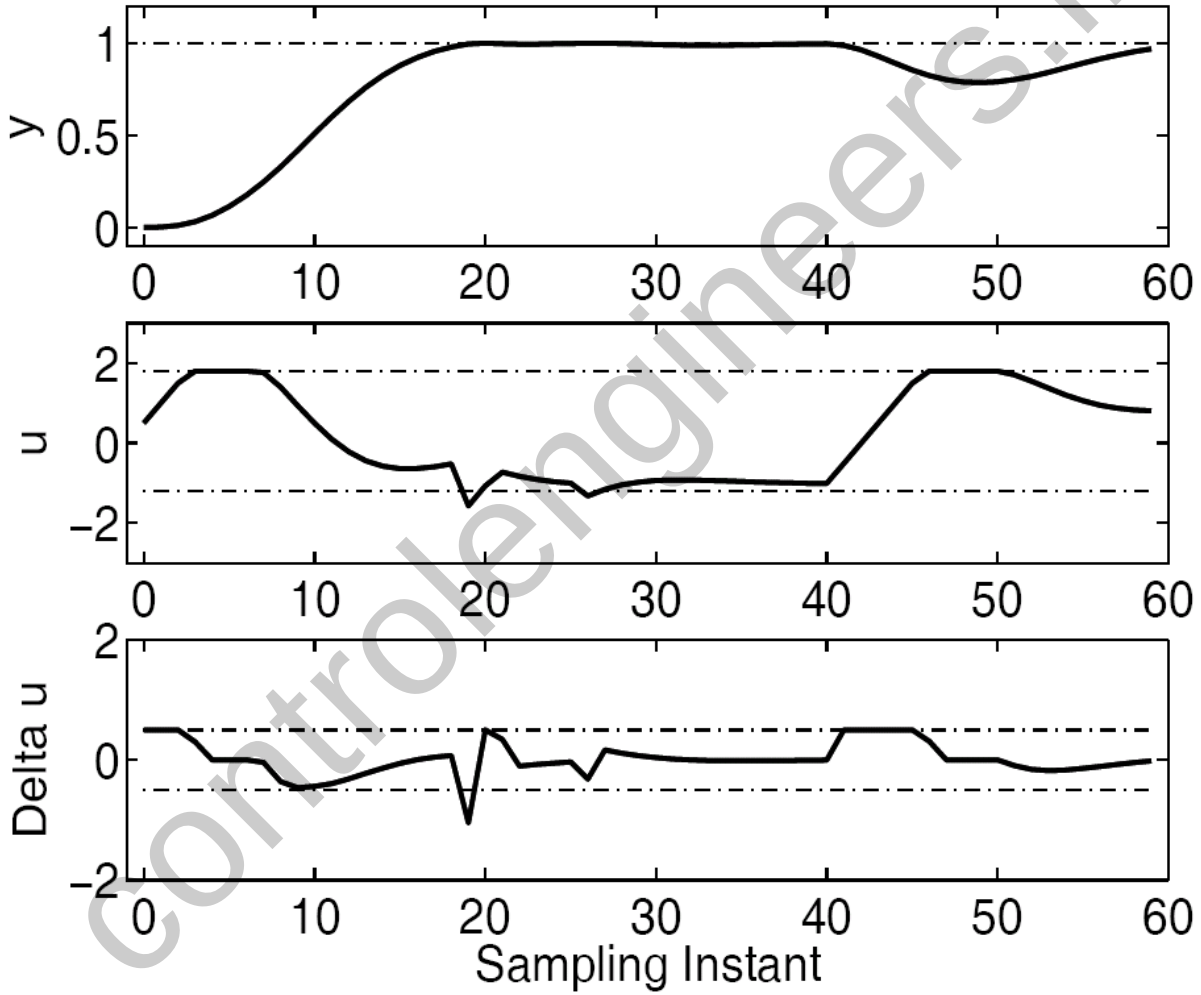
controlengineers.ir

Fig. 2.15. Predictive control with output constraints $0 \leq y(k) \leq 1$. Solid line constrained response; solid dotted line unconstrained response

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

$-1.2 \leq u(k) \leq 1.8, \quad -0.5 \leq \Delta u(k) \leq 0.5, 0 \leq y(k) \leq 1.$ قید

فعال شدن قید ها در k=13, k=23 بدلیل تغییر در سیگنال مرجع و ورود اغتشاش



controlengineers.ir

Fig. 2.16. Predictive control with constraints. $-1.2 \leq u(k) \leq 1.8$, $-0.5 \leq \Delta u(k) \leq 0.5$, $0 \leq y(k) \leq 1$

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- مشاهده می شود که قیود دامنه و سرعت سیگنال کنترل وقتی که تنظیم تیز سیگنال کنترل بدلیل قید خروجی لازم باشد نقض می شود.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

CHAPTER 2:
Robust Model Predictive Control

S.K. Hosseini Sani

Assistant Professor

Electrical Engineering

Ferdowsi University

Mashhad, Iran
1392

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Robust Model Predictive Control

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- فرضیات ساده کننده ای برای اهداف کنترل استفاده می شود. مثلا مدل را با ساختار ساده و اندازه کوچک در نظر می گیریم که بتوان تکنیکهای کنترل در دسترس و زمان حقیقی را بکار برد.
- بنابراین مدلهای ریاضی دینامیک فرآیند را بطور تقریبی تخمین می زنند.
- اکثر تکنیکهای کنترلی نیاز به مدلی از فرآیند دارند که دارای ساختار و پارامترهای ثابت باشد.
- اگر مدل فرآیند دقیق باشد و اغتشاش خارجی وجود نداشته باشد می توان از کنترل حلقه باز استفاده کرد.
- بنابراین بدلیل عدم دقت مدل و یامعینی های موجود باید از فیدبک استفاده کرد.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- هدف کنترل مقاوم طراحی کنترلگری است که بتواند پایداری و عملکرد مطلوب را با وجود نامعینیها و عدم دقت مدل حفظ کند.

- گرچه بکارگیری فیدبک عدم دقت را بطور ضمنی در نظر می گیرد اما عبارت کنترل مقاوم برای کنترل سیستمهایی استفاده می شود که بطور صریح اختلاف بین مدل و سیستم واقعی را در نظر بگیرد.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- روشهای متفاوتی برای مدل سازی نامعینی بسته به انواع تکنیکهای طراحی کنترلگر وجود دارد.

- مهمترین آنها : نامعینیهای پاسخ فرکانسی و نامعینیهای ضرایب تابع تبدیل می باشد.

- روش مورد نظر در اینجا مرتبط به ایده MPC برای پیش بینی مقادیر آینده متغیرهای خروجی است.

- نامعینی ها حول پیش بینی مدل تعریف می شود.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

8.1 Process Models and Uncertainties

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

8.1 Process Models and Uncertainties

- نامعینی های پاسخ فرکانسی : معمولا با یک باند حول پاسخ فرکانسی مدل نامی تعریف می شوند.

- نامعینی های ضرایب تابع تبدیل :هر ضربی تابع تبدیل با یک مقدار مشخصی از ماکزیمم نامعینی محدود می شود.

- فرض می شود فرآیند دارای تابع تبدیلی باشد که پارامترهای آن در یک مجموعه نامعینی قرار گیرد.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

8.1 Process Models and Uncertainties

- در هر دو روش مدلسازی نامعینی : مدل دقیق فرآیند متعلق به باند مدل سازی نامعینی در نظر گرفته می شود.

- یعنی فرآیند خطی است با پاسخ فرکانسی داخل باند نامعینی و با مدل با مرتبه یکسان در مقایسه با مدل با وجود نامعینی

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

8.1 Process Models and Uncertainties

- مدلهای کنترل در MPC برای پیش بینی مسیر آینده استفاده می گردد.

- روش مرسوم توصیف نامعینی، مدل یا خانواده ای از مدل هاست که بجای تولید مسیرهای آینده باندی از مسیرها را تولید کند که با وجود نامعینی ممکن است اتفاق بیافتد.

- برای مدل خوب انتظار می رود که باند باریک باشد.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

8.1 Process Models and Uncertainties

- دینامیک فرآیند بطور کامل و بفرم زیر قابل بازنویسی است.

$$y(t+1) = f\big(y(t), \dots, y(t-n_y), u(t), \dots, u(t-n_u), z(t), \dots, z(t$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- فرض مدل فرآیند:

$$\hat{y}(t+1) = \hat{f}\left(y(t), \dots, y(t-n_{na}), u(t), \dots, u(t\right.$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- پارامترهای $\theta_i \in \boldsymbol{\Theta}$ وجود دارد بطوری که :

$$f\left(y(t),\dots,y\left(t-n_y\right),u(t),\dots,u(t-n_u),z(t),\dots,z(t-n_z),\psi\right) = \hat{f}(y(t),\dots,y(t-n_{na}),u(t),\dots,u(t-n_{nb}),\theta_i)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- **پاسخ ضربه برش داده شده**

- فرض H_t مولفه های پاسخ ضربه برش داده شده
با N مولفه برای سیستم چند متغیره پایدار $(n \times m)$ باشد.

فرض ضرایب دقیق پاسخ ضربه بدلیل نامعینی در دسترس نباشند.
می توان فرض کرد که پاسخ ضربه سیستم در باند زیر باشد.

$$\left(\underline{H_t}\right)_{ij} \leq (H_t)_{ij} \leq \left(\overline{H_t}\right)_{ij}$$
$$(H_t)_{ij}(\Theta) = (Hm_t)_{ij} + \Theta_{t_{ij}}$$

- با تعریف Θ:

$$(Hm_t)_{ij} - \left(\overline{H_t}\right)_{ij} \leq \Theta_{t_{ij}} \leq \left(\underline{H_t}\right)_{ij} - (Hm_t)_{ij}$$

- که Hm_t پاسخ نامی است.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- تعداد نامعینی های پاسخ ضربه $N \times (m \times n)$

- مثال : $N = 40$ و سیستم ۵*۵ تعداد نامعینی برابر ۱۰۰۰و برای حل مسابل بهینه سازی خیلی بزرگ است و باید بنحوی کاهش یابد.
- پیشنهاد میشود :

$$H_t = \sum_{j=1}^{q} G_{t_j} \theta_j$$

- فرآیند با ترکیب خطی q عدد فرآیند پایدار معلوم و LTI با وزن نامعلوم θ_j مشخص شود. (برای فرآیندهای غیر خطی و مدل های خطی در نواحی کاری مطلوب است.)

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- در حل مسایل کنترل مقاوم MPC در نظر گرفتن پاسخ ضربه به عنوان ترکیب خطی از پارامترهای نامعینی مطلوب است.
- در حالت توصیف کلی تر:

$$(H_t)_{ij}(\Theta) = \left(\underline{H_t}\right)_{ij} + \Theta_{t_{ij}}$$

- و بنابراین

$$H_t(\theta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\underline{H_t}\right)_{ij} + \Theta_{t_{ij}} H_{ij}$$

که H_{ij} ماتریس یکانی است.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- خروجی پیش بینی :

$$y(t+j) = \sum_{i=1}^{N} (Hm_i + \theta_i) u(t+j-i)$$

- خروجی نامی پیش بینی

$$ym(t+j) = \sum_{i=1}^{N} Hm_i u(t+j-i)$$

- محدوده باند پیش بینی حول پاسخ نامی

$$\min_{\theta \epsilon \Theta} \theta_i u(t+j-i) \;\; and \;\; \max_{\theta \epsilon \Theta} \theta_i u(t+j-i)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- **نامعینی های با توصیف کسر ماتریسی**

- فرض سیستم چندمتغیره $(n \times m)$:

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t-1) \qquad (8.3)$$

- نامعینی پارامتری حول فرآیند :

$$\left(\underline{A_k}\right)_{ij} \le (A_k)_{ij} \le \left(\overline{A_k}\right)_{ij}$$
$$\left(\underline{B_k}\right)_{ij} \le (B_k)_{ij} \le \left(\overline{B_k}\right)_{ij}$$

$$(A_k)_{ij} = \left(\underline{A_k}\right)_{ij} + \Theta_{a_{k_{ij}}}, (B_k)_{ij} = \left(\underline{B_k}\right)_{ij} + \Theta_{b_{k_{ij}}}.$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- تعداد پارامترهای نامعینی :

$$n_a \times n \times n + (n_b + 1) \times n \times m.$$

- اگر پارامترهای چندجمله ایهای $A(z^{-1})$ و $B(z^{-1})$ از شناسایی بدست آورده شوند ماتریس کئوواریانس مقدار بزرگی برای باند ضرایب نامعینی را نشان خواهد داد.

- در صنعت مولفه های تابع تبدیل با بهره، ثابت زمانی و تاخیر در نظر گرفته می شوند.

- مشکل عمده رفع کردن نامعینی تاخیر زمانی.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

8.1 Process Models and Uncertainties

- معادلات پیش بینی می تواند بر حسب پارامترهای نامعینی بیان شود.

- در حالت کلی، عبارات حاصل شده آنقدر پیچیده می شود (تعداد زیاد پارامترها) که روش min-max را بزحمت می اندازد و قابل استفاده نیست.

- اگر نامعینی تنها روی $B(z^{-1})$ باشد معادلات پیش بینی یک تابع affine از پارامترهای نامعینی خواهد بود و امکان محاسبات min-max وجود خواهد داشت.
- در اکثر کاربردها :

$$(B_i = B_{n_i} + \theta_i).$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

8.1 Process Models and Uncertainties

- اگر فرآیند با ترکیب خطی q فرآیند خطی LTI با پارامترهای وزنی نامعلوم θ_j مدل شود

$$B(z^{-1}) = \sum_{i=1}^{q} \theta_i P_i(z^{-1})$$

- که در آن $P_i(z^{-1})$ تابعی از ماتریسهای چندجمله ای $B_i(z^{-1})$ و $A_i(z^{-1})$ مشابه با MFD هر یک ازفرآیندهاست.

- اگر ماتریس $A_i(z^{-1})$ قطری باشد:

$$P_i(z^{-1}) = \prod_{j=1, i\neq j}^{q} A_j(z^{-1}) B_i(z^{-1})$$

- از معادله پیش بین (۵-۶):

$$y(t+j|t) = F_j(z^{-1})y(t) + E_j(z^{-1})B(z^{-1}) \Delta u(t+j-1)$$

$$= F_j(z^{-1})y(t) + E_j(z^{-1})\left(\sum_{i=1}^{q} \theta_i P_i(z^{-1})\right) \Delta u(t+j-1)$$

که تابع افاین از θ_i است.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- **نامعینی global**

- در این تعریف فرض می شود همه خطاهای مدل سازی بطور جامع در بردار پارامتر ها لحاظ شود طوری که فرآیند با خانواده مدل های زیر بیان گردد.

$$\hat{y}(t+1) = \hat{f}(y(t),\cdots,y(t-n_{n_a}),u(t),\cdots,u(t-n_{n_b})) + \theta(t)$$

- $dim(\theta(t)) = n.$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

8.1 Process Models and Uncertainties

- نکته : نامعینی جامع می تواند به انواع دیگر نامعینی مرتبط باشد.
- برای مدل پاسخ ضربه، خروجی در لحظه $t + j$ با فرض نامعینی پارامتری و موقت :

$$\hat{y}(t+j) = \sum_{i=1}^{N} (Hm_i + \theta_i) u(t+j-i)$$

$$\hat{y}(t+j) = \sum_{i=1}^{N} (Hm_i) u(t+j-i) + \theta(\mathrm{t}+\mathrm{j})$$

- بنابراین

$$\theta(\mathrm{t}+\mathrm{j}) = \sum_{i=0}^{N} \theta_i u(t+j-1)$$

- و محدوده i امین جزء $\theta(t+j)$ برای ورودی محدود دارای محدوده زیر است. $(\underline{\theta}_i, \overline{\theta}_i)$

$$\underline{\theta}_i = \min_{u(0)\epsilon U, \theta_i \epsilon \Theta} \sum_{i=0}^{N} \theta_{t_i} u(t+j-i)$$

$$\overline{\theta}_i = \max_{u(0)\epsilon U, \theta_i \epsilon \Theta} \sum_{i=0}^{N} \theta_{t_i} u(t+j-i)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- برای LMFD نامعینی مدل :

$$\tilde{A}(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})\Delta u(t-1) + \theta(t) \qquad (8.4)$$

- که $\theta(t) \in \Theta$ و $\underline{e}(t) \leq \theta(t) \leq \overline{e}(t)$
- فرض می شود که فرآیند بتواند با مدل خطی که همه مسیرهای ممکن در باند $\underline{\theta}(t)$ $\overline{\theta}(t)$ را پوشش دهد تخمین زده شود.

- اگر متغیرهای فرآیند محدود باشند نامعینی جامع هم محدود خواهد بود.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- در مدل بیان شده ممکن است نامعینی با زمان رشد کند.

$$\tilde{A}(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})\Delta u(t-1) + \theta(t) \qquad (8.4)$$

- برای مثال برای سیستم درجه اول بدون انتگرالگیر:

$$y(t+1) = ay(t) + bu(t) + \theta(t+1) \quad \text{با} \quad \underline{\theta} \le \theta(t) \le \overline{\theta}$$

- با فرض اینکه همه ورودی و خروجی های گذشته و ورودیهای آینده صفر باشند، مسیر تولیدی نامی صفر است.
- خروجی سیستم نامعین :

$$y(t+1) = \theta(t+1)$$
$$y(t+2) = a\theta(t+1) + \theta(t+2)$$
$$\vdots$$
$$y(t+N) = \sum_{j=0}^{N-1} a^j \theta(t+1+j)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- رشد باند بالا به $|a|^{(j-1)}\overline{\theta}$ و باند پایین به $|a|^{(j-1)}\underline{\theta}$
- برای سیستم پایدارمقادیر ماکزیمم $\overline{\theta}/(1-|a|)$ و$\underline{\theta}/(1-|a|)$ هستند

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- برای حالت انتگرالگیری در مدل :

$$y(t+1) = ay(t) + bu(t) + \frac{\theta(t)}{\Delta}$$

- داریم :

$$\Delta y(t+k) = \sum_{j=0}^{k-1} a^j \theta(t+j+1)$$

- و

$$y(t+N) = \sum_{k=1}^{N} \Delta y(t+j) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=0}^{k-1} a^j \theta(t+j+1)$$

- که باند نامعینی بطور پیوسته رشد می کند.
- نرخ رشد پس از گذشت حالت گذرا : $\underline{\theta}/(1-|a|)$ و $\overline{\theta}/(1-|a|)$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- خروجی پیش بینی :

$$y(t+j) = F_j(z^{-1})y(t) + E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(t+j-1) + E_j(z^{-1})\theta(t+j) \quad (8.6)$$

- برای نمایش در فرم باند، خروجی نامی :

$$ym(t+j) = F_j(z^{-1})y(t) + E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(t+j-1)$$

- و باندها :

$$ym(t+j) + \min_{\theta(0)\epsilon\Theta} E_j(z^{-1})\theta(t+j) \le y(t+j) \le ym(t+j) + \max_{\theta(0)\epsilon\Theta} E_j(z^{-1})\theta(t+j)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- در نظر بگیرید که خروجی y بهینه j مرحله رو به جلو برای $j = 1, \cdots, N$ بفرم زیر نوشته شود.

$$\mathbf{y} = \mathbf{G_u u} + \mathbf{G_\theta}\theta + \mathbf{f} \qquad (8.7)$$

- که در آن $\theta = [\theta(t+1), \theta(t+2), \cdots, \theta(t+N)]^T$ بردار نامعینی های آتی است.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

8.2 Objective Functions

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- تابع هدف سیستم کنترل پیش بین محاسبه $u(t),u(t+1),\ldots,u(t+N_u)$ که $y(t+j \mid t)$ به $w(t+j)$ نزدیک شود.

- فرض ورود نامعینی در بهینه سازی

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

8.2 Objective Functions

- وقتی که نامعینی محدود بطور صریح در نظر گرفته شود و محدوده روی مسیر پیش بینی محاسبه شود میتوان کنترل مقاومتری بدست آورد اگر کنترلگر از می نیمایز کردن تابع هدف برای بدترین حالت محاسبه شده باشد. یعنی :

$$\min_{u \epsilon U} \max_{\theta \epsilon \Theta} J(u, \theta)$$

- تابعی که مینیمایز می شود ماکزیمم نرمی است که اندازه دنبال کردن مرجع توسط خروجی را نشان می دهد.

- انواع نرم ها قابل تعریف هستند.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- **تابع هزینه مربعی:**

- تابع هزینه :

$$J(N_1, N_2, N_u) = \sum_{j=N_1}^{N_2} [\hat{y}(t+j|t) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda[\Delta u(t+j-1)]^2 \qquad (8.8)$$

- با توجه به $\mathbf{y} = \mathbf{G_u u} + \mathbf{G_\theta}\theta + \mathbf{f}$:

$$J = (G_u u + G_\theta \theta + f - w)^T (G_u u + G_\theta \theta + f - w) + \lambda u^T u$$
$$= u^T M_{uu} u + M_u u + M + M_\theta \theta + \theta^t M_{\theta\theta} \theta + \theta^t M_{eu} u \qquad (8.9)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

8.2 Objective Functions

- ماتریس $M_{\theta\theta} = G_\theta^t G_\theta$ مثبت معین است چون G_θ پایین مثلثی است.

- از آنجایی که $M_{\theta\theta}$ مثبت معین است تابع هزینه محدب خواهد بود و ماکزیمم J روی قله های چندوجهی Θ بدست خواهد آمد.

- مساله مقدار ماکزیمم $J(u,\theta)$ با تعیین $2^{N\times n}$ قله از چند وجهی Θ قابل اقتباس است.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

8.2 Objective Functions

- تابع $J_m(u)$ تابع تکه تکه مربعی از u است.

- فرض کنید u از دامنه U_{in} را به U_p تقسیم کنیم که $u \in U_p$ بنحوی اختیار شود که ماکزیمم $J(u,\theta)$ را روی چندوجهی θ_p بدست دهد.

- برای نواحی U_p تابع $J_m(u)$ را بصورت زیر تعریف می کنیم.

$$Jm(u) = u^t M_{uu} u + M_u^*(\theta_p)u + M^*\theta_p$$

- با:

$$M_u^* = M_u + M_u\theta_p^t$$
$$M^* = M + \theta_p^t M_{\theta\theta}\theta_p + \theta_p M_\theta$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

CHAPTER 2:
Robust Model Predictive Control

S.K. Hosseini Sani

Assistant Professor

Electrical Engineering

Ferdowsi University

Mashhad, Iran
1392

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Robust Model Predictive Control

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Robust Model Predictive Control (RMPC)

- کنترل MPC :

برای مدل خطی زمان گسسته

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k)$$

$u(k)$: سیگنال کنترل

$x(k)$: حالت های پلنت

A,B,C : ماتریس های سیستم بدون عدم قطعیت

- تابع هزینه:

$$\min_{u(k+i),i=0,1,\ldots,H} J(k)$$
$$Sub.to:$$

Input Constraint

Output Constraint

State Constraint

به عبارت دیگر:

$$\min_{u(k+i),i=0,1,\ldots,H} J(k)$$
$$Sub.to: \quad F\,u < 0$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- کنترل MPC :

تابع هزینه کوادراتیک:

$$J(k) = \sum_{i=0}^{H} (x(k+i)^T Q_1 x(k+i) + u(k+i)^T R u(k+i)$$

$Q_1 > 0 \, , R > 0$: ماتریس های وزنی متقارن

- مزایا: قابلیت درنظرگرفتن قیود در طراحی
  توسعه به MIMO به راحتی
  پیاده سازی راحت
  مقاوم بودن در برابر اغتشاشات و نامعینی های کوچک

- معایب: عدم حضور صریح عدم قطعیت در طراحی

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- یکی از رویکردهای اصلی برای مقاوم کردن MPC :

تعیین بدترین شرایط عدم قطعیت که بر تابع هزینه موثر است و مینیمم کردن تابع هزینه متناظر با آن

به عبارت دیگر : تبدیل مسئله بهینه سازی مقید به مسئله min-max

- مدل سیستم با عدم قطعیت:

الف) سیستم خطی متغیر با زمان:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k)$$
$$y(k) = C(k)x(k)$$

تبدیل به سیستم خطی با وجود عدم قطعیت در ماتریس های سیستم A(k) و B(k) به صورت :

$$[A(k)\ B(k)] \in \Omega \qquad \Omega = Co\{[A_1\ \ B_1], [A_2\ \ B_2], \dots\ , [A_L\ \ B_L]\}$$

Convex hull : Co

L : تعداد راس های Convex hull

ب) مدل Polytopic

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

رویکرد min-max برای طراحی RMPC :

مینیمم سازی بدترین تابع هزینه (مینیمم سازی تابع هزینه ماکزیمم در ناحیه Ω):

$$\min J(k) = \min \sum_{i=0}^{H} \left(x(k+i)^T Q_1 x(k+i) + u(k+i)^T R u(k+i) \right)$$

$$\Rightarrow \quad \min_{u(k+i),i=0,1,\ldots,H} \left(\max_{[A(k+i) \;\; B(k+i)] \in \Omega, i \geq 0} J(k) \right)$$

روش حل:

تعیین یک حد بالا برای J(k) و سپس مینیمم سازی این حد بالا کنترل فیدبک حالت به صورت:

$$u(k+i) = F\, x(k+i), i \geq 0$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

تعریف:

$V(x) = x^T Px, P > 0$ تابع کوادراتیک

$V(0) = 0$

فرض:

V در نامساوی زیر صدق کند:

$$V(x(k+i+1)) - V(x(k+i)) \leq -[x(k+i)^T Q_1 x(k+i) + u(k+i)^T Ru(k+i)]$$

جمع طرفین نامساوی فوق برای $i = 0$ تا $i = \infty$:

$$J \leq V(x(k)) \quad \Longrightarrow \quad -V(x(k)) \leq -J$$

(توجه: با شرط پایداری فوق، $x(\infty) = 0$ پس $V(x(\infty)) = 0$)

یعنی $V(x(k))$ یک حدبالا برای تابع هزینه است

پس می توان نوشت:

$$\max_{[A(k+i)\ B(k+i)] \in \Omega, i \geq 0} J(k) \leq V(x(k))$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

جایگزینی در مسئله بهینه سازی min-max :

$$\min_{u(k+i),i=0,1,\ldots,H} \left(\max_{[A(k+i)\ \ B(k+i)]\in\Omega, i\geq 0} J(k) \right)$$

$$\Rightarrow \quad \min_{u(k+i),i=0,1,\ldots H} V(x(k))$$

مسئله بهینه سازی به دست آمده به صورت ضمنی به عدم قطعیت ها بستگی دارد (P اثرات عدم قطعیت را دربر دارد)

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

یادآوری Schur Complement :

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow Q(x) > 0, R(x) - S(x)^T Q(x)^{-1} S(x) > 0$$

$$\Leftrightarrow R(x) > 0, Q(x) - S(x) R(x)^{-1} S(x)^T > 0$$

که در آن:

$$Q(x) = Q(x)^T, R(x) = R(x)^T$$

و $S(x)$ نسبت به x تابع افاین است

مثال:

$$c(x)^T P(x)^{-1} c(x) < 1 \Leftrightarrow \left(1 - c(x)^T P(x)^{-1} c(x)\right) > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} P(x) & c(x) \\ c(x)^T & 1 \end{bmatrix} > 0$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

بیان مسئله بهینه سازی با استفاده از LMI :

$$\min c^T x$$
$$s.t.\ \ M(x) > 0$$

$M(x)$: ماتریس متقارن و افاین نسبت به x

C : بردار حقیقی با سایز متناظر با x

RMPC با استفاده از LMI :

در هر لحظه از زمان یک مسئله بهینه سازی مبتنی بر LMI که شامل قیود و توصیف عدم قطعیتها است، حل می شود، به صورت زیر:

$$\min c^T x$$
$$s.t.\ \ M(x) > 0$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

مسئله بهینه سازی کوادراتیک:

$$\min_{u(k+i),\, i=0,1,\ldots H} V\left(x(k)\right)$$

تبدیل مسئله فوق به LMI :

درنظرگرفتن حد بالا برای V :

$$V\left(x(k)\right) = x(k)^T P x(k) \leq \gamma$$

بیان جدید مسئله به صورت (فعلا بدون قید):

$$\min_{subject\ to} \gamma$$
$$x(k)^T P x(k) \leq \gamma$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

تبدیل قید کوادراتیک $x(k)^T P x(k) \leq \gamma$ به LMI با استفاده از Schur Complement:

$$X^T(k)PX(k) \leq \gamma \Leftrightarrow 1 - X^T(k)\gamma^{-1}PX(k) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & x(k)^T \\ x(k) & Q \end{bmatrix} \geq 0$$

که در آن $Q = \gamma P^{-1}$

یادآوری مکمل Schur:

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow R(x) > 0, Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

تبدیل مسئله بهینه سازی کوادراتیک به LMI:

$$\min_{\gamma,P} \gamma$$

Sub. to

$$x(k)^T P x(k) \leq \gamma$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\min_{\gamma,Q} \gamma$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x(k)^T \\ x(k) & Q \end{bmatrix} \geq 0$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

تبدیل فرض ابتدایی (فرض لیاپانوف گسسته برای تضمین پایداری) به LMI

در ابتدا فرض شد:

$$V(x(k+i+1))-V(x(k+i))\le -[x(k+i)^T Q_1 x(k+i)+u(k+i)^T Ru(k+i)]$$

- جایگزینی $V(x(k+i))$ با $x(k+i)^T Px(k+i)$
- جایگزینی $V(x(k+i+1))$ با $x(k+i+1)^T Px(k+i+1)$
- جایگزینی $u(k+i)$ با $Fx(k+i)$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

حاصل جایگزینی:

$$x(k+i)^T \begin{pmatrix} (A(k+i)+B(k+i)F)^T P(A(k+i)+B(k+i)F) \\ -P+F^T RF+Q_1 \end{pmatrix} x(k+i) \le 0$$

نامساوی فوق برقرار می شود اگر داشته باشیم:

$$\left((A(k+i)+B(k+i)F)^T P(A(k+i)+B(k+i)F)-P+F^T RF+Q_1\right) \le 0$$

- تعریف $P=\gamma Q^{-1}, (Q>0)$ و $Y=FQ$
- با ضرب Q از چپ وراست در نامساوی فوق:

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

حاصل بر اساس Schur Comp. :

$$\begin{bmatrix} Q & QA(k+i)^T + Y^T B(k+i)^T & QQ_1^{1/2} & Y^T R^{1/2} \\ A(k+i)Q + B(k+i)Y & Q & 0 & 0 \\ Q_1^{1/2}Q & 0 & \gamma I & 0 \\ R^{1/2}Y & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0$$

یادآوری مکمل Schur:

$$F(x) = \begin{pmatrix} F_{11}(x) & F_{12}(x) \\ F_{21}(x) & F_{22}(x) \end{pmatrix}$$

where $F_{11}(x)$ *is square. Then* $F(x) \prec 0$ *if and only if*

$$\begin{cases} F_{11}(x) \prec 0 \\ F_{22}(x) - F_{21}(x)\,[F_{11}(x)]^{-1}\,F_{12}(x) \prec 0. \end{cases}$$

if and only if

$$\begin{cases} F_{22}(x) \prec 0 \\ F_{11}(x) - F_{12}(x)\,[F_{22}(x)]^{-1}\,F_{21}(x) \prec 0 \end{cases}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

LMI به دست آمده برای تمامی $[A(k+i)\ \ B(k+i)]$ها به صورت

$$[A(k+i)\ \ B(k+i)] \in \Omega = Co\{[A_1\ \ B_1],[A_2\ B_2]\quad \dots [A_L\ \ B_L]\}$$

برقرار است اگر و فقط اگر $Q > 0$ و $Y = FQ$ و γ وجود داشته باشند به طوری که:

$$\begin{bmatrix} Q & QA_j^T + Y^T B_j^T & QQ_1^{1/2} & Y^T R^{1/2} \\ A_j Q + B_j Y & Q & 0 & 0 \\ Q_1^{1/2} Q & 0 & \gamma I & 0 \\ R^{1/2} Y & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0$$

$$j = 1,2,\dots,L.$$

- **ماتریس فیدبک حالت پایدارساز عبارت است از :**

$$\boldsymbol{F = YQ^{-1}}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

قضیه:

$$[A(k+i)\ \ B(k+i)] \in \Omega = Co\{[A_1\ \ B_1],[A_2\ B_2]\ \ \ldots [A_L\ \ B_L]\}$$

برقرار است اگر و فقط اگر $Q > 0$ و $Y = FQ$ و γ وجود داشته باشند به طوری که:

$$\begin{bmatrix} Q & QA_j^T + Y^T B_j^T & QQ_1^{1/2} & Y^T R^{1/2} \\ A_j Q + B_j Y & Q & 0 & 0 \\ Q_1^{1/2} Q & 0 & \gamma I & 0 \\ R^{1/2} Y & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0$$

$$j = 1,2,\ldots,L.$$

- **ماتریس فیدبک حالت پایدارساز عبارت است از :**

$$\boldsymbol{F = YQ^{-1}}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

بنابراین با فرض $F = YQ^{-1}$

$Q > 0$ و Y از حل مسئله مینیمم سازی خطی زیر به دست می آیند:

$$\min_{\gamma, Q, Y} \gamma$$

$$s.t. \begin{bmatrix} 1 & x(k) \\ x(k) & Q \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} Q & QA_j^T + Y^T B_j^T & QQ_1^{1/2} & Y^T R^{1/2} \\ A_j Q + B_j Y & Q & 0 & 0 \\ Q_1^{1/2} Q & 0 & \gamma I & 0 \\ R^{1/2} Y & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0$$

که:

j=1,2,... , L

L تعداد راس های چندوجهی عدم قطعیت polytopic

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

ماتریس فیدبک F

$$u(k+i) = Fx(K+i)$$

که در این روش به دست می آید یک ماتریس ثابت است

با رویکرد MPC ، F(k+i) در هر سیکل نمونه برداری محاسبه شده و سبب بهبود کارایی سیستم و تضمین پایداری حلقه بسته می شود

مثال: طراحی RMPC برای سیستم Polytopic به صورت زیر:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.9347 & 0.5194 \\ 0.3835 & 0.8310 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0.0591 & 0.2641 \\ 1.7971 & 0.8717 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1.4462 \\ -0.7012 \end{bmatrix}$$

با ماتریسهای وزنی $Q_1 = r = I$ و تابع هزینه به صورت:

$$J(k) = \sum_{i=0}^{H} \left(x(k+i)^T Q_1 x(k+i) + u(k+i)^T R u(k+i) \right)$$

controlengineers.ir

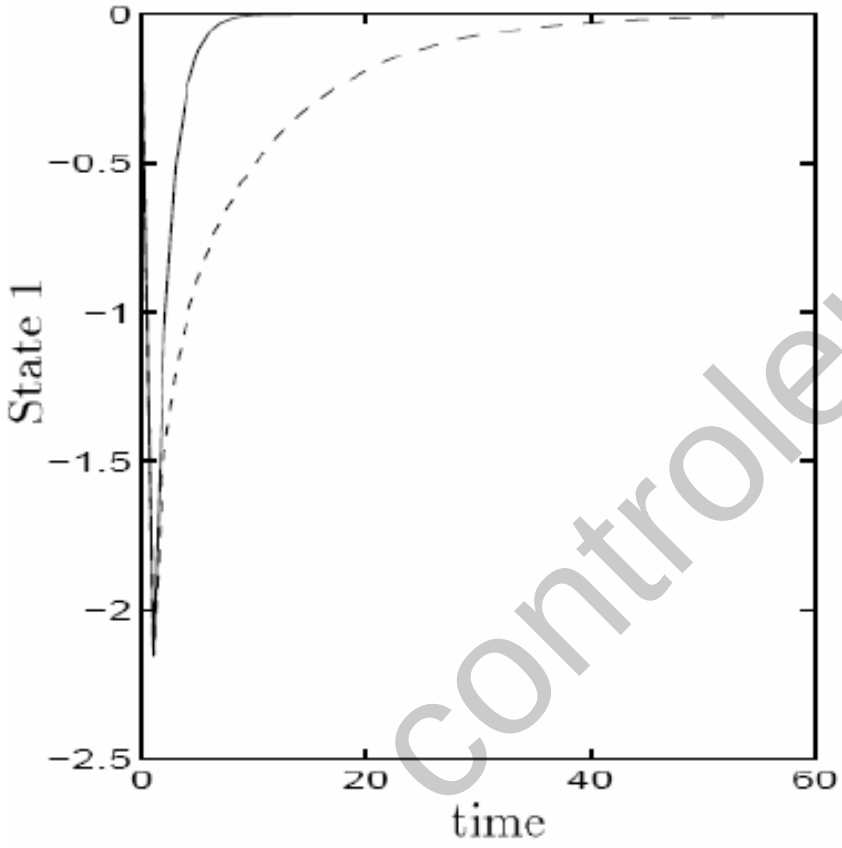
اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Robust Model Predictive Control (RMPC)

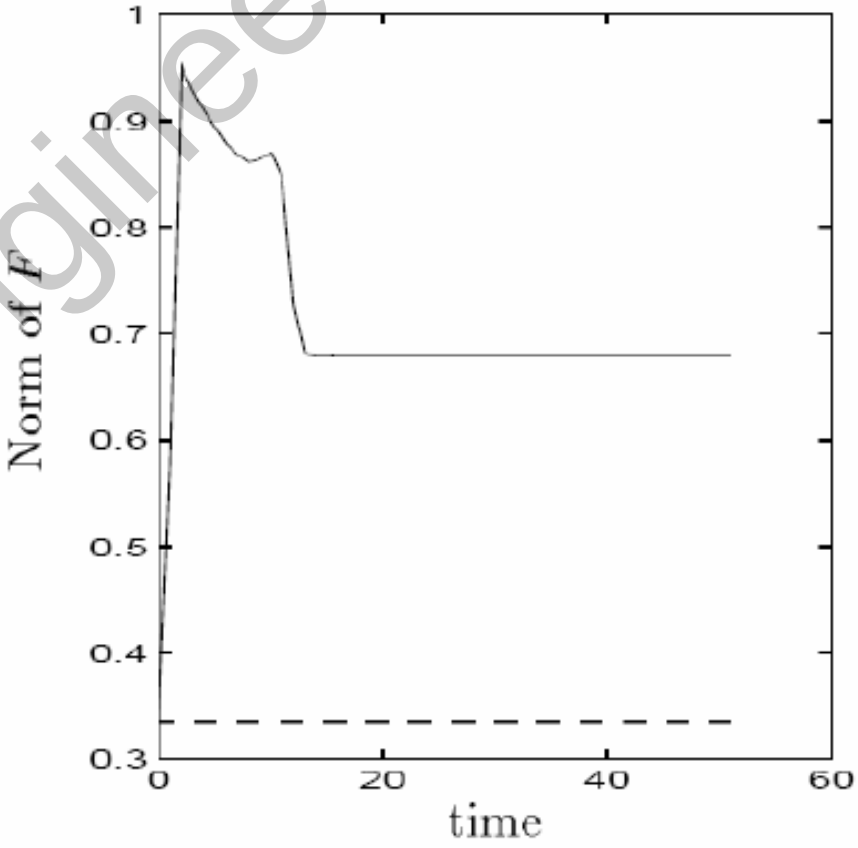
شکل (a) : پاسخ حلقه بسته (نامقید)

شکل (b): نرم ماتریس فیدبک F(k)

توپر : MPC خط چین: فیدبک استاتیک



(a)



(b)

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

CHAPTER 8:
Robust Model Predictive Control

S.K. Hosseini Sani

Assistant Professor

Electrical Engineering

Ferdowsi University

Mashhad, Iran
1392

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

Robust Model Predictive Control

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- یادآوری ناحیه جذب:

سیستم غیرخطی:

$$\dot{x} = f(x,u)$$
$$x \in R^n \ ،u \in R^m$$

x_{eq} :نقطه تعادل

x_0 :شرط اولیه

$x(t,x_0)$: پاسخ سیستم به شرط اولیه در زمان t

- ناحیه جذب یا ROC برای نقطه تعادل x_{eq} :

$$\Omega = \{x_0 \in R^n | \lim_{t\to\infty} x(t,x_0) = x_{eq}\}$$

Ω :مجموعه نامتغیر (Invariance Set) مجانبی

یعنی هر شرط اولیه در داخل Ω تا زمان بینهایت در Ω خواهد ماند و در نهایت به x_{eq} خواهد رفت

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- مجموعه نامتغیر مجانبی در RMPC (Invariance Ellipsoid) :

بر اساس قضیه پایدارسازی RMPC که $P = \gamma Q^{-1}$ اگر:

$$x(k)^T Q^{-1} x(k) \leq 1 \iff x(k)^T P x(k) \leq 1$$

آنگاه:

$$\max_{[A(k+i) \;\; B(k+i)] \in \Omega, j \geq 0} x(k+i)^T Q^{-1} x(k+i) < 1, i \geq 1$$

به عبارت دیگر:

$$\Leftrightarrow \max_{[A(k+i) \;\; B(k+i)] \in \Omega, i \geq 0} x(k+i)^T P x(k+i) < \gamma, i \geq 1$$

آنگاه:

مجموعه Φ مقابل یک مجموعه بیضی گون نامتغیر برای حالت های پیش بینی شده سیستم با عدم قطعیت است

$$\Phi = \left\{ x \middle| x^T Q^{-1} x \leq 1 \right\} = \left\{ x \middle| x^T P x \leq \gamma \right\}$$

controlengineers.ir

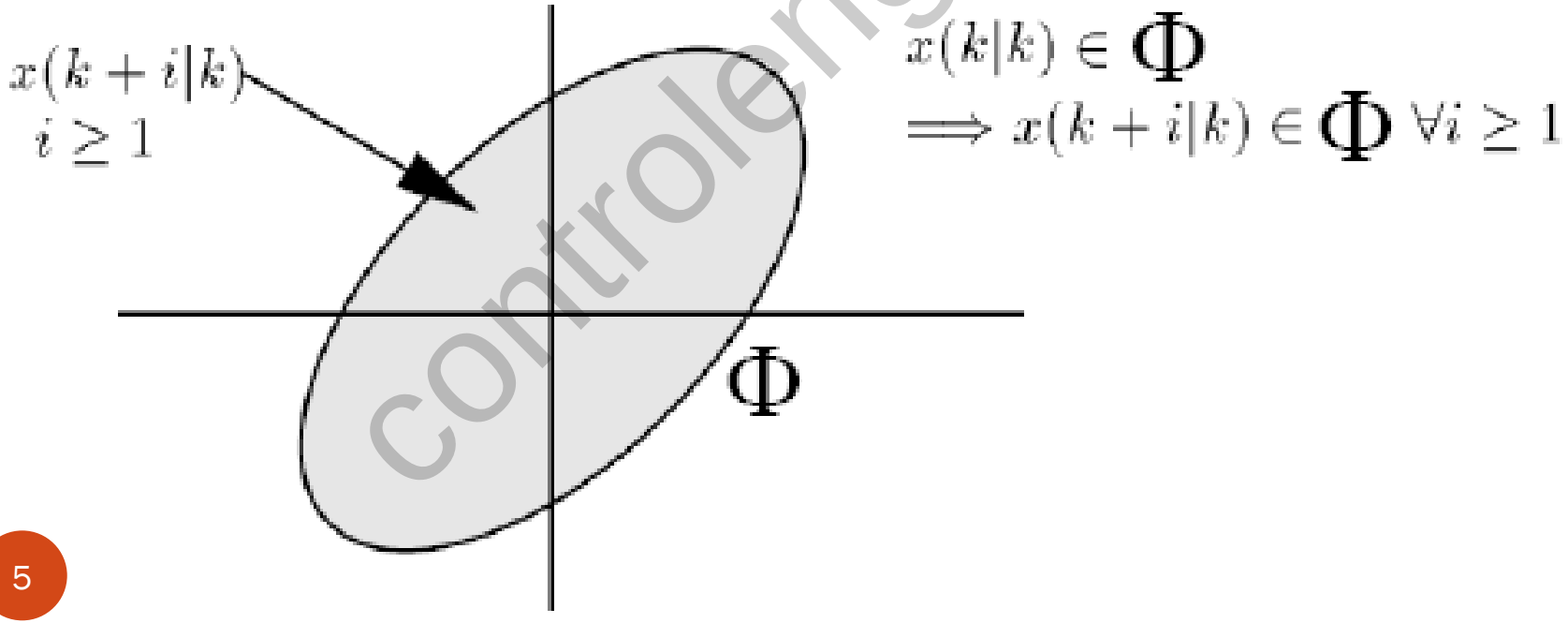
اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- بنابراین:

$$\Phi = \{x | x^T Q^{-1} x \leq 1\} = \{x | x^T P x \leq \gamma\}$$

برای حالتهای پیش بینی شده سیستم با عدم قطعیت، یک بیضی گون نامتغیر است

نمایش دوبعدی بیضی گون نامتغیر:



controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- اثبات:

فرض کنید

$$V(x(k+i+1))-V(x(k+i))\leq$$
$$-[x(k+i)^T Q_1 x(k+i)+u(k+i-1)^T Ru(k+i-1)]$$

چون $R>0$ و $Q_1>0$ پس سمت چپ رابطه بالا منفی است :

$$\Rightarrow x(k+i+1)^T Px(k+i+1)-x(k+i)^T Px(k+i)\leq$$
$$-x(k+i)^T Q_1 x(k+i)-u(k+i-1)^T Ru(k+i-1)<0$$
$$\Rightarrow x(k+i+1)^T Px(k+i+1)<x(k+i)^T Px(k+i), i\geq 0,$$
$$x(k+i)\neq 0$$

بنابراین اگر $x(k)^T Px(k)<\gamma$ می توان نتیجه گرفت:

$$x(k+1)^T Px(k+1)<\gamma$$

این فرایند برای $x(k+2)$ و $x(k+3)$ و .... برقرار است

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- اعمال قید ورودی در RMPC:

با فرض قید ورودی به صورت : $\|u(k+i)\|_2 \le u_{max} \quad , i \ge 0$

حل:

یادآوری: مجموعه ξ برای حالت‌های پیش‌بینی شده سیستم غیرخطی یک مجموعه نامتغیر است:

$$\xi = \{z | z^T Q^{-1} z \le 1\} = \{z | z^T P z \le \gamma\}$$

با توجه به : $u(k+i) = Fx(k+i) = YQ^{-1}x(k+i)$

$$\max_{i\ge 0} \|u(k+i|k)\|_2^2 = \max_{i\ge 0} \|YQ^{-1}x(k+i|k)\|^2 \le \max_{z\in\xi} \|YQ^{-1}z\|_2^2$$

از طرفی:

$$\max_{z\in\xi} \|YQ^{-1}z\|_2^2 = \max_{(z^T Q^{-\frac{1}{2}})(Q^{-\frac{1}{2}}z)\le 1} (z^T Q^{-1} Y^T Y Q^{-1} z) \le \lambda_{max}(Q^{-\frac{1}{2}} Y^T Y Q^{-\frac{1}{2}})$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

بنابر این:

$$\lambda_{max}\left(Q^{-\frac{1}{2}}Y^{T}YQ^{-\frac{1}{2}}\right) \leq u^{2}{}_{max}$$

با استفاده از مکمل Schur شرط کافی برای برقراری نامساوی فوق به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} u_{max}^{2} I & Y \\ Y^{T} & Q \end{bmatrix} \geq 0$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- اعمال قید خروجی در RMPC:

فرض: در هر لحظه k باید:

$$\max_{[A(k+i)\ \ B(k+i)]\in\Omega, j\geq 0} \|y(k+i)\|_2 \leq y_{max}, \qquad i \geq 1$$

LMI زیر شرط لازم برای قید فوق است:

$$\begin{bmatrix} Q & (A_jQ + B_jY)^T C^T \\ C(A_jQ + B_jY) & y_{\max}^2 I \end{bmatrix} \geq 0,\ j = 1,2,\ldots,L$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- اثبات:

$$\max_{i\geq 0}\left\|y(k+i)\right\|_2 = \max_{i\geq 0}\left\|C\left(A(k+i)+B(k+i)F\right)x(k+i)\right\|_2$$

$$\leq \max_{z\in\Phi}\left\|C\left(A(k+i)+B(k+i)F\right)z\right\|_2, i\geq 0 = \lambda\left[C\left(A(k+i)+B(k+i)F\right)Q^{1/2}\right]\leq y_{\max}$$

رابطه بالا معادل است با:

$$\Leftrightarrow Q^{1/2}\left(A(k+i)+B(k+i)F\right)^T C^T C\left(A(k+i)+B(k+i)F\right)Q^{1/2}\leq y_{\max} I$$

که معادل است با:

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} Q & \left(A(k+i)Q+B(k+i)Y\right)^T C^T \\ C\left(A(k+i)Q+B(k+i)Y\right) & y_{\max}^2 I \end{bmatrix}\geq 0, i\geq 0$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

چون LMI به دست آمده برای همه $[A(k+i) \quad B(k+i)]$
$\in \Omega, i \geq 0$ باید برقرار باشد، پس برای همه راس های Polytope
باید برقرار باشد، یعنی:

$$\begin{bmatrix} Q & (A_j Q + B_j Y)^T C^T \\ C(A_j Q + B_j Y) & y_{\max}^2 I \end{bmatrix} \geq 0, \; j = 1,2,\ldots,L$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

تغییر مسئله RMPC بدون قید به مسئله RMPC مقید

راه حل: اضافه کردن قیدهای ورودی، خروجی، ...

$$\min_{\gamma, Q, Y} \gamma$$

$$s.t. \quad \begin{bmatrix} 1 & x(k) \\ x(k) & Q \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} Q & QA_j^T + Y^T B_j^T & QQ_1^{1/2} & Y^T R^{1/2} \\ A_j Q + B_j Y & Q & 0 & 0 \\ Q_1^{1/2} Q & 0 & \gamma I & 0 \\ R^{1/2} Y & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0, j = 1,2,\ldots,L$$

Input constraints:

$$\begin{bmatrix} u_{\max}^2 I & Y \\ Y^T & Q \end{bmatrix} \geq 0$$

Output constraints:

$$\begin{bmatrix} Q & (A_j Q + B_j Y)^T C^T \\ C(A_j Q + B_j Y) & y_{\max}^2 I \end{bmatrix} \geq 0, j = 1,2,\ldots,L$$

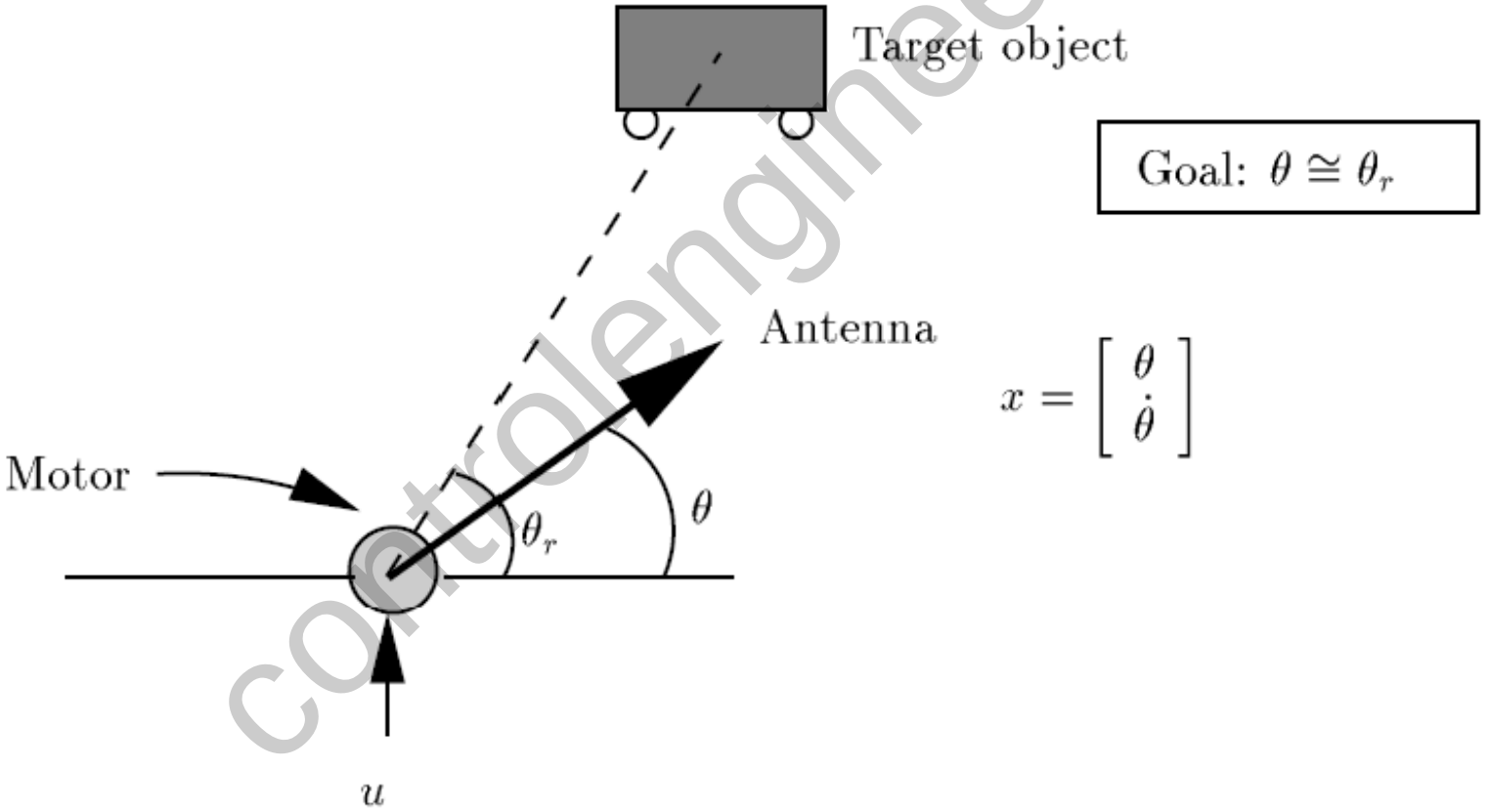
controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

مثال: سیستم کنترل موقعیت زاویه ای

یک آنتن در مبدا توسط یک موتور الکتریکی درایو می شود

هدف: کنترل موقعیت آنتن برای قرارگیری در راستای هدف



controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

گسسته سازی معادلات دینامیک سیستم با زمان نمونه برداری 0.1 ثانیه

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}\theta(k+1)\\ \dot{\theta}(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0.1\\ 0 & 1-0.1\alpha(k)\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0\\ 0.1\kappa\end{bmatrix}u(k) \triangleq A(k)x(k)+Bu(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(k)$$

قید ورددی: $\|u\| \le 2$

فرض:

$$x(0)=\begin{bmatrix}0.05\\ 0\end{bmatrix}$$

پارامترهای سیستم:

$$\kappa = 0.787, 0.1 \le \alpha(k) \le 10$$

$\alpha(k)$: ضریب اصطکاک ویسکوزیته (متغیر با زمان)

تعیین Convex Hull :

$$A(k) \in \Omega = Co\{A_1, A_2\}$$

که:

$$A_1=\begin{bmatrix}1 & 0.1\\ 0 & 0.99\end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix}1 & 0.1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

controlengineers.ir

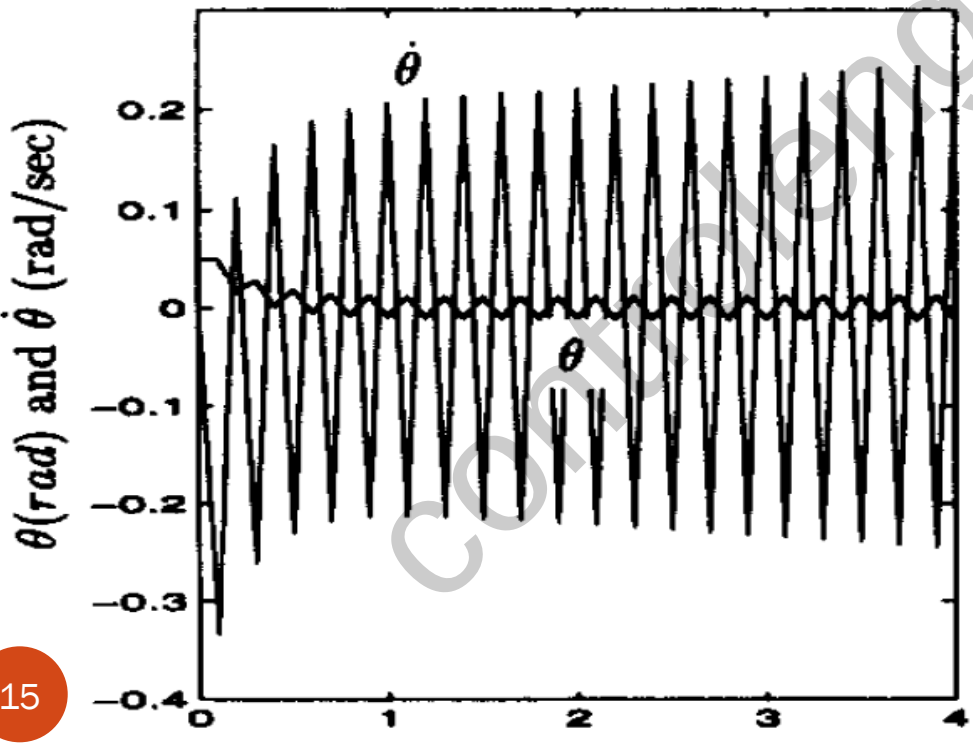
اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

تعیین تابع هزینه:

$$\min_{\substack{u(k+i)=Fx(k+i)\\ i\geq 0}} \ \max_{\substack{A(k+i)\in\Omega\\ i\geq 0}} \left(J(k) = \sum_{i=0}^{H} \left(y(k+i)^2 + Ru(k+i)^2 \right) \right)$$

$$s.t. \quad \|u(k+i)\|_2 \leq 2, \ \ i \geq 0$$

با انتخاب $R = 0.00002$



نتایج:

الف) طراحی بر اساس پلنت بدون عدم قطعیت (با فرض $\alpha = 1$)

واما در عمل $\alpha = 9$ باشد.

نتیجه: سیستم ناپایدار

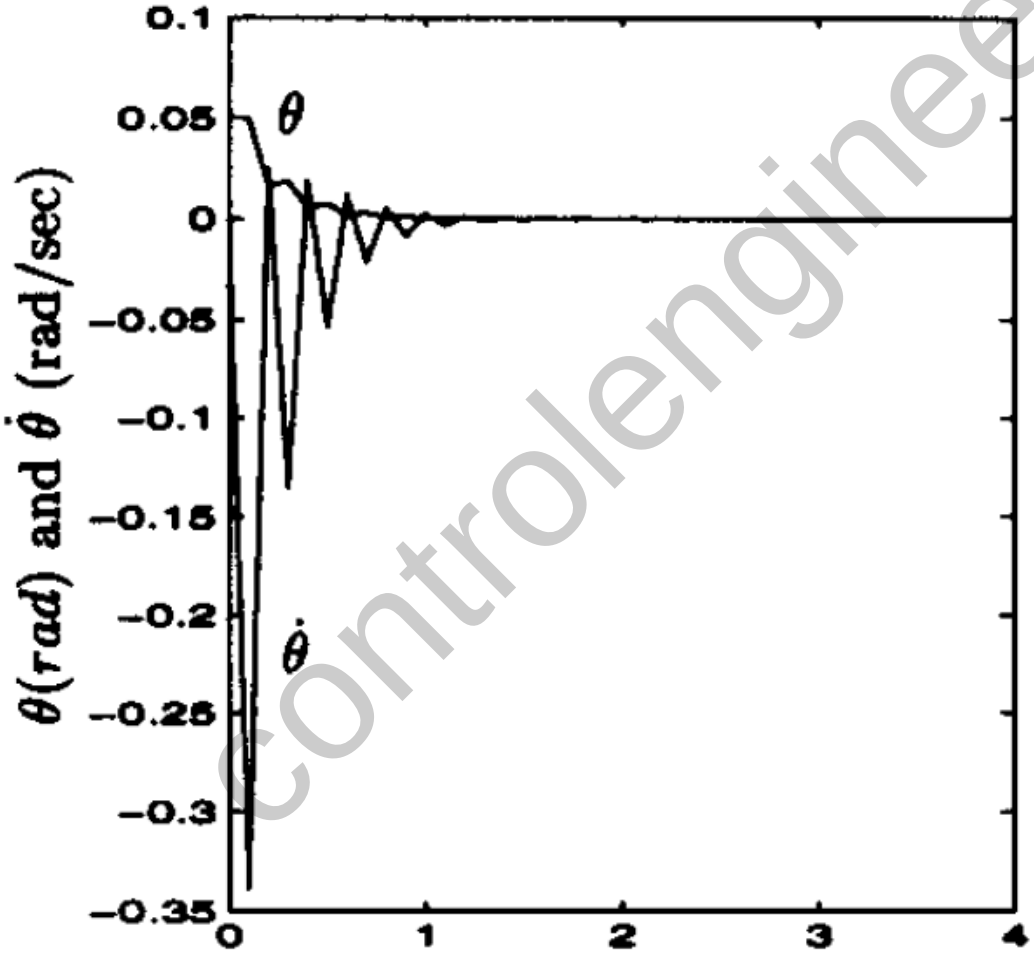
controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

ب) طراحی بر اساس عدم قطعیت

در عمل: تغییر α به صورت رندم بین 0.1 تا 10 به صورت متغیر با زمان

نتیجه: سیستم پایدار با عملکرد مناسب



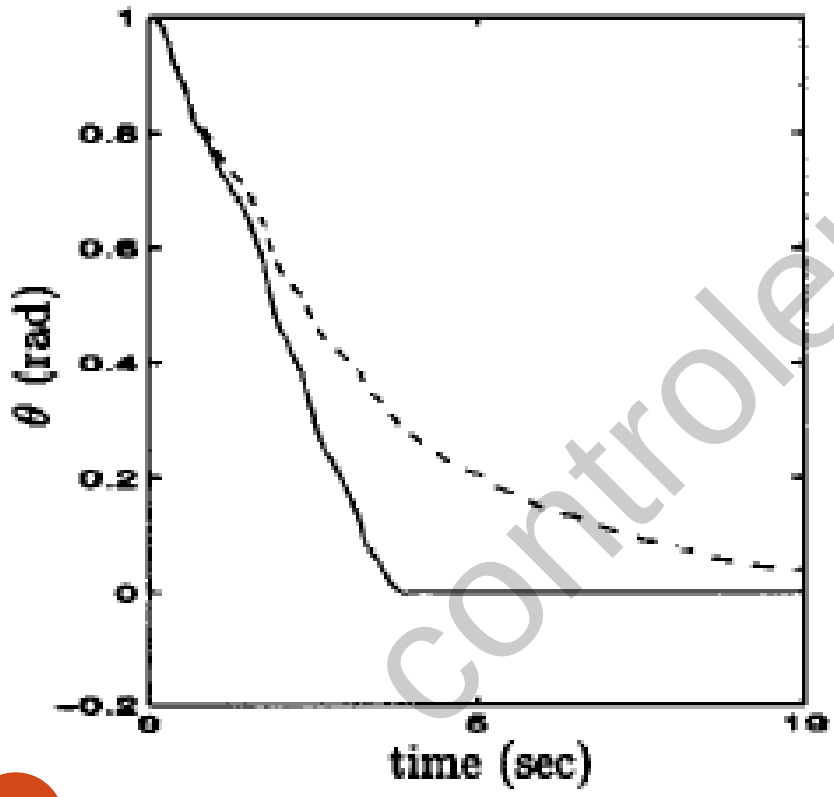
controlengineers.ir

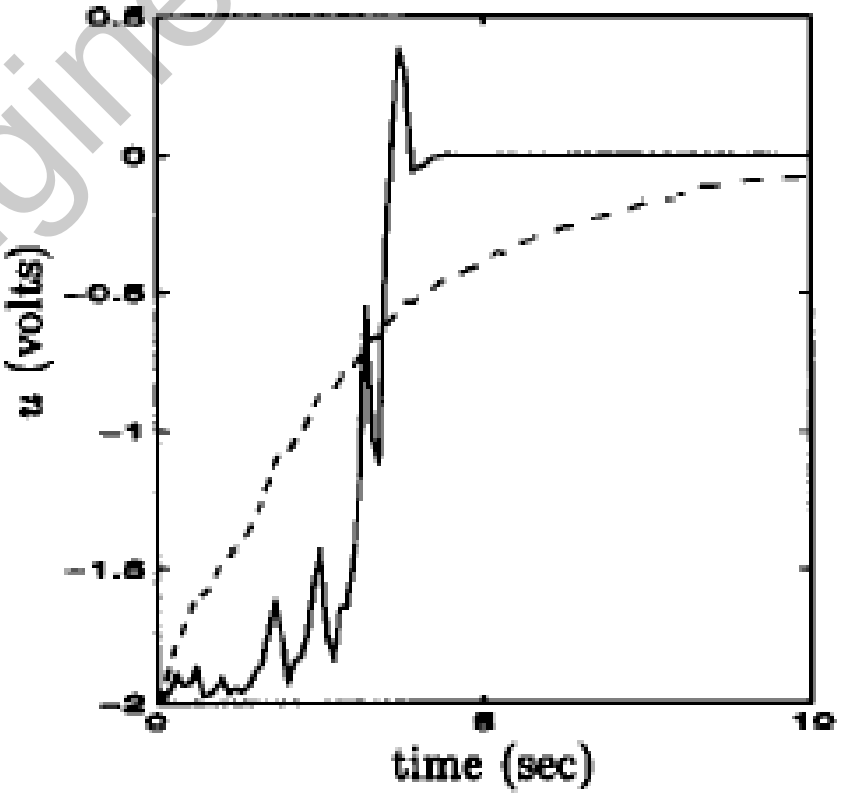
اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

ج) طراحی بر اساس عدم قطعیت و رعایت قید ورودی

یک بار با فیدبک ثابت (خط چین) و یک بار با فیدبک متغیر (MPC)

در عمل: تغییر α به صورت رندم بین 0.1 تا 10 به صورت متغیر با زمان

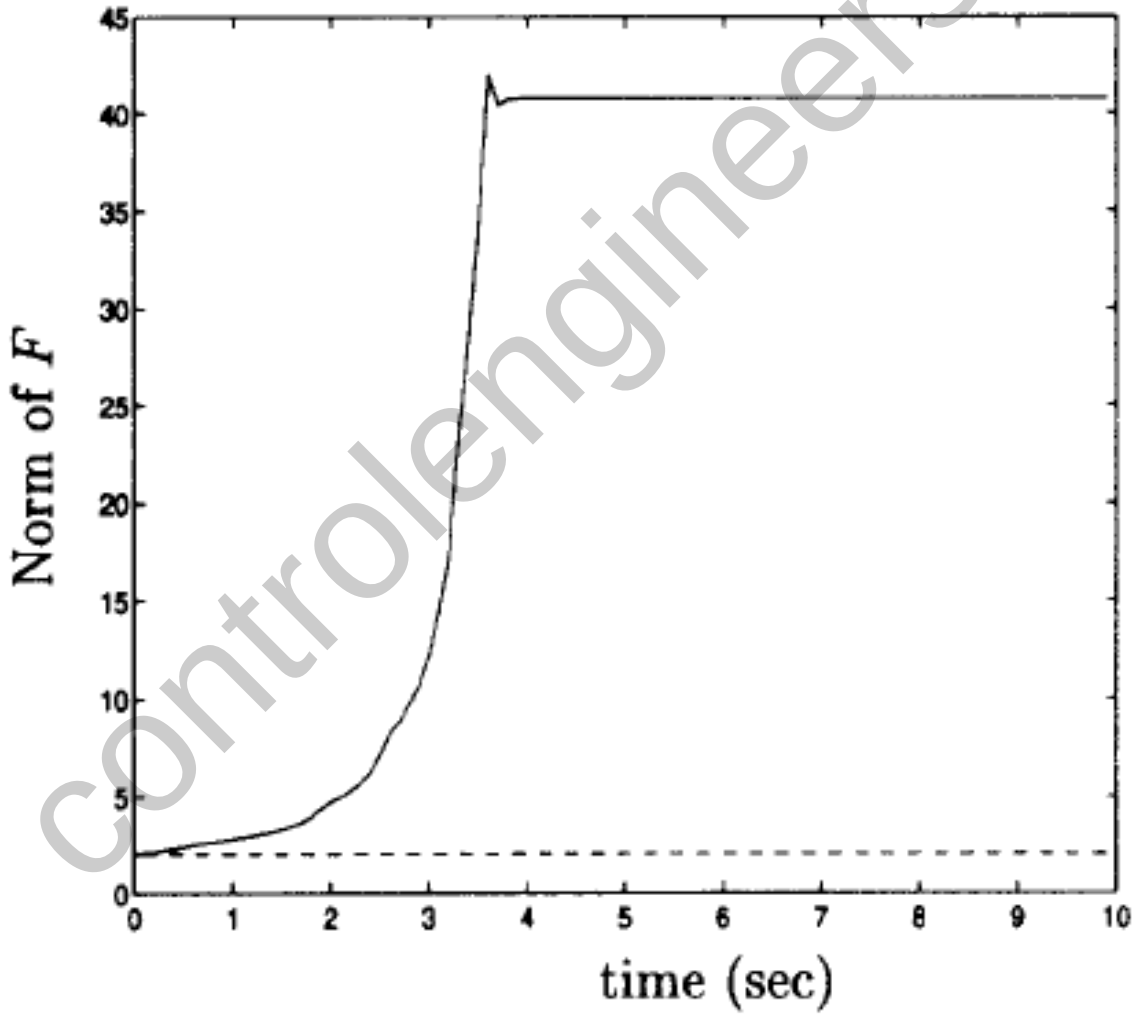




controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

گین فیدبک در حالت
یک بار با فیدبک ثابت (خط چین) و یک بار با فیدبک متغیر (MPC)



controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

CHAPTER 4:
Robust Model Predictive Control

S.K. Hosseini Sani

Assistant Professor

Electrical Engineering

Ferdowsi University

Mashhad, Iran
1392

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

8.2 Objective Functions

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- **8.2.2 $\infty - \infty$*norm***
- Campo and Morari [47], showed that by using an $\infty - \infty$type of norm the minmax problem involved can be reduced to a linear programming problem that requires less computation and can be solved with standard algorithms.

- Although the algorithm proposed by Campo and Morari was developed for processes described by the truncated impulse response, it can easily be extended to the left matrix fraction descriptions used throughout the text.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- The objective function is now described as:

$$J(u,\theta) = j = \max_{j=1\ldots N} \|\hat{y}(t+j|t) - w(t)\|_\infty$$
$$= \max_{j=1\ldots N} \max_{i=1\ldots N} |\hat{y}_i(t+j|t) - w_i(t)| \qquad (8.11)$$

- Note that this objective function will result in an MPC which minimizes the maximum error between any of the process outputs and the reference trajectory for the worst situation of the uncertainties; the control effort required to do so is not taken into account.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

8.2 Objective Functions

- By making use of the prediction equation $\mathbf{y} = \mathbf{G_u u} + \mathbf{G_\theta \theta} + \mathbf{f}$ and defining $g(\mathbf{u}, \theta) = (\mathbf{y} - \mathbf{w})$, the control problem can be expressed as:

$$\min_{u \epsilon U} \max_{\theta \epsilon \Theta} \max_{i=1 \ldots n \times N} |g_i(u, \theta)|$$

- Define $\mu^*(\mathbf{u})$ as:

$$\mu^*(\mathrm{u}) = \max_{\theta \epsilon \Theta} \max_{\mathrm{i}=1 \ldots \mathrm{n} \times \mathrm{N}} |g_i(u, \theta)|$$

- If there is any positive real value μ satisfying $-\mu \leq g_i(u, \theta) \leq \mu, \forall \theta \in \Theta$ and for $i = 1 \cdots n \times N$

- it is clear that μ is an upper bound of $\mu^*(\mathbf{u})$

controlengineers.ir

controlengineers.ir
@controlengineers

- The problem can now be transformed into finding the smallest upper bound μ and some $u \in U$ $for\ all\ \theta \in \Theta$.

- When constraints on the controlled variables $(\underline{y}, \overline{y})$ are taken into account, the problem can be expressed as:

$$\min_{\mu,\mathbf{u}} \mu$$

$$subject\ to \begin{matrix} -\mu \le g_i(u,\theta) \le \mu \\ \underline{y}_i - w_i \le g_i(u,\theta) \le \overline{y}_i - w_i \end{matrix} \Bigg\}$$

$$for\ i = 1, \dots, n \times N, \forall \theta \epsilon \Theta$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

8.2 Objective Functions

- The control problem has been transformed into an optimization problem with an objective function which is linear in the decision variables (μ, u) and with an infinite (continuous) number of constraints.

- If $g(u, \theta)$ is an affine function of $\theta, \forall u \in U$, the maximum and minimum of $g(u, \theta)$ can be obtained at one of the extreme points of Θ [47].

- Let us call E the set formed by the $2n \times N$ vertices of Θ. If constraints are satisfied for every point of E they will also be satisfied for every point of Θ.

- Thus the infinite, and continuous, constraints can be replaced by a finite number of constraints.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- When the global uncertainty model is used and constraints on the manipulated variables $(\underline{U}, \overline{U})$ and on the slew rate of the manipulated variables $(\underline{u}, \overline{u})$ are also taken into account, the problem can be stated as:

$$\min_{\mu,u} \mu$$

$$\left.\begin{aligned} 1\mu &\geq G_u u + G_\theta \theta + f - w \\ 1\mu &\geq -G_u u - G_\theta \theta - f + w \\ \overline{y} &\geq G_u u + G_\theta \theta + f \\ -\underline{y} &\geq -G_u u - G_\theta \theta - f \end{aligned}\right\} \forall \theta \epsilon \varepsilon$$

$$\overline{u} \geq u$$

$$-\underline{u} \geq -u$$

$$\overline{U} \geq Tu + 1u\big(Tu + 1u(t-1)\big)$$

$$-\underline{U} \geq -Tu - 1u(t-1)$$

controlengineers.ir

controlengineers.ir
@controlengineers

- where l is an (N × n) ×m matrix formed byN m×m identity matrices and
- T is a lower triangular block matrix whose non null block entries are $m \times m$ identity matrices.

- The problem can be transformed into the usual form:

$$\min_X c^t X \ \ subject\ to\ Ax \leq b, x \geq 0$$

- With:

$$X = \begin{bmatrix} u \\ \mu \end{bmatrix} \quad c^t = [0,..0,1] \quad A^t = [A_1^t, \ \ldots, \ A_{2N}^t, \ A_u^t] \quad b^t = [b_1^t, \ \ldots, \ b_{2N}^t, \ b_u^t]$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- The block matrices have the form:

$$A_i = \begin{bmatrix} G_u & -1 \\ -G_u & -1 \\ G_u & 0 \\ -G_u & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ T & 0 \\ -T & 0 \end{bmatrix}$$

$$b_i = \begin{bmatrix} -G_u \underline{u} - G_\theta \theta_i - f + w \\ G_u \underline{u} + G_\theta \theta_i + f - w \\ \overline{y} - G_n \underline{u} - G_\theta \theta_i - f \\ -\underline{y} + G_n \underline{u} + G_\theta \theta_i - f \end{bmatrix}$$

$$b_n = \begin{bmatrix} \overline{u} - \underline{u} \\ \overline{U} + Tu + 1u(t-1) \\ -\underline{U} - Tu - 1u(t-1) \end{bmatrix},$$

- where θ_i is the ith vertex of E.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- The number of variables involved in the linear programming problem is $m \times N_u + 1$ while the number of constraints is $4 \times n \times N \times 2n \times N + 3m \times N_u$.

- As the number of constraints is much higher than the number of decision variables, solving the dual LP problem should be less computationally expensive, as pointed out by Campo and Morari [47].

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- The number of constraints can, however, be dramatically reduced because of the special form of matrix A.

- Consider the jth row for each of the constraint blocks $A_i\mathbf{x} \leq \mathbf{b}i$.

- $As\ A_1 = A_2 = \cdots = A_{2N}$, the only constraint limiting the feasible region will be the one with the smallest value on the jth element of vector $\mathbf{b}_i$.

- Therefore, all the other $(2^N - 1)$ constraints can be eliminated and the number of constraints can be reduced to $4 \times n \times N + 3m \times N_u$.

controlengineers.ir

controlengineers.ir
@controlengineers

- Notice that any uncertainty model giving rise to an affine function $g(\mathbf{u}, \theta)$ can be transformed into an LP problem as shown by Campo and Morari [47].

- The truncated impulse response uncertainty model or uncertainties in the $\mathbf{B}(z^{-1})$ polynomial matrix produce an affine function $g(\mathbf{u}, \theta)$.

- However, the constraint reduction mechanism described earlier cannot be applied and the number of constraints would be very high.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- **8.2.3 1-norm**

- Although the type of ∞-∞ norm used earlier seems to be appropriate interms of robustness, the norm is only concerned with the maximum deviation and the rest of the behaviour is not taken explicitly into account.

- Other types of norms are more appropriate for measuring the performance.

- Allwright [5] has shown that this method can be extended to the 1-norm for processes described by their truncated impulse response.

- The derivation for the left matrix representation is also straightforward.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

8.2 Objective Functions

- The objective function is:

$$J(u,\theta) = \sum_{j=N_1}^{N_2} \sum_{i=1}^{n} |y_i(t+j|t,\theta)$$

controlengineers.ir

controlengineers.ir
@controlengineers

- then γ is an upper bound of:

$$\mu^*(u) = \max_{\theta \epsilon \varepsilon} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1} |y_i(t+j|t,\theta) - w_i(t+j)| + \lambda \sum_{j=1}^{N_u} \sum_{i=1}^{m} |\Delta u_i(t+j-1)|$$

- The problem is reduced to minimizing the upper bound γ.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- When the global uncertainty model is used and constraints on the output variables, the manipulated variables $(\underline{U}, \overline{U})$, and the slew rate of the manipulated variables $(\underline{u}, \overline{u})$ are taken into account, the problem can be interpreted as an LP problem with:

controlengineers.ir

$$\min_{\gamma,\mu,\beta} \gamma$$

$$\left.\begin{aligned} \mu &\geq G_u u + G_\theta \theta + f - w \\ \mu &\geq -G_u u - G_\theta \theta + f - w \\ \overline{y} &\geq G_u u + G_\theta \theta + f \\ -\underline{y} &\geq -G_u u - G_\theta \theta - f \end{aligned}\right\} \forall \theta \epsilon \varepsilon$$

$$\beta \geq u$$

$$\beta \leq -u$$

$$\overline{u} \geq u$$

$$-\underline{u} \geq u$$

$$\overline{U} \geq Tu + 1u(t-1)$$

$$-\underline{U} \geq -Tu - 1u(t-1)$$

$$\gamma \geq 1^t \mu + \lambda 1 \beta$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- The problem can be transformed into the usual form:

$$\min_X c^t x \,, subject\ to\ Ax \leq b, x \geq 0$$

$$x = \begin{bmatrix} u - \underline{u} \\ \hline \mu \\ \hline \beta \\ \hline \gamma \end{bmatrix} \quad c^t = [\overbrace{0, \ldots, 0}^{m \times N_u}, \overbrace{0, \ldots, 0}^{n \times N}, \overbrace{0, \ldots, 0}^{m \times N_u}, 1]$$

$$A^t = [A_1^t, \ldots, A_2^t N, A_u^t] \qquad b^t = [b_1^t, \ldots, b_2^t N, b_u^t]$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

8.2 Objective Functions

- where the block matrices take the following form:

$$A_i = \begin{bmatrix} G_u & -I & 0 & 0 \\ -G_u & -I & 0 & 0 \\ G_u & 0 & 0 & 0 \\ -G_u & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b_i = \begin{bmatrix} -G_u u - G_\theta \theta_i - f + w \\ G_u u + G_\theta \theta_i + f - w \\ \bar{y} - G_u u - G_\theta \theta_i - f \\ -\underline{y} - G_u u - G_\theta \theta_i - f \end{bmatrix}$$

$$A_u = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ -I & 0 & 0 \\ T & 0 & 0 \\ -T & 0 & 0 \\ 0 & \underbrace{1, \dots, 1}_{n \times N} & \underbrace{1, \dots, 1}_{m \times N_u} \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{matrix}$$

$$b_u = \begin{bmatrix} \bar{u} - \underline{u} \\ -\underline{u} \\ \underline{u} \\ \bar{U} - T\underline{u} - 1u(t-1) \\ -\underline{U} + T\underline{u} + 1u(t-1) \\ 0 \end{bmatrix}$$

controlengineers.ir

controlengineers.ir
@controlengineers

8.2 Objective Functions

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} - \underline{\mathbf{u}} \\ \hline \mu \\ \hline \beta \\ \hline \gamma \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c}^t = [\overbrace{0, \cdots, 0}^{m \times N_u}, \overbrace{0, \cdots, 0}^{n \times N}, \overbrace{0, \cdots, 0}^{m \times N_u}, 1]$$

$$A^t = [A_1^t, \cdots, A_{2^N}^t, A_u^t] \qquad \mathbf{b}^t = [\mathbf{b}_1^t, \cdots, \mathbf{b}_{2^N}^t, \mathbf{b}_u^t]$$

$$A_i = \left[\begin{array}{rrrr} \mathbf{G}_u & -I & 0 & 0 \\ -\mathbf{G}_u & -I & 0 & 0 \\ \hline \mathbf{G}_u & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{G}_u & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} -\mathbf{G}_u \underline{\mathbf{u}} - \mathbf{G}_\theta \theta_i - \mathbf{f} + \mathbf{w} \\ \mathbf{G}_u \underline{\mathbf{u}} + \mathbf{G}_\theta \theta_i + \mathbf{f} - \mathbf{w} \\ \hline \overline{\mathbf{y}} - \mathbf{G}_u \underline{\mathbf{u}} - \mathbf{G}_\theta \theta_i - \mathbf{f} \\ -\underline{\mathbf{y}} + \mathbf{G}_u \underline{\mathbf{u}} + \mathbf{G}_\theta \theta_i + \mathbf{f} \end{bmatrix}$$

$$A_u = \left[\begin{array}{rrrr} I & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & -I & 0 \\ -I & 0 & -I & 0 \\ \hline T & 0 & 0 & \\ -T & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \underbrace{1, \cdots, 1}_{n \times N} & \underbrace{1, \cdots, 1}_{m \times N_u} & -1 \end{array}\right] \qquad \mathbf{b}_u = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{u}} \\ \hline -\underline{\mathbf{u}} \\ \hline \underline{\mathbf{u}} \\ \hline \overline{\mathbf{U}} - T\underline{\mathbf{u}} - 1u(t-1) \\ -\underline{\mathbf{U}} + T\underline{\mathbf{u}} + 1u(t-1) \\ \hline 0 \end{bmatrix}$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- and θ_i is the ith vertex of E.

- The number of variables involved in the linear programming problem is $2 \times m \times N_u + n \times N + 1$, while the number of constraints is $4 \times n \times N \times 2n \times N + 5 \times m \times N_u + 1$.

- As the number of constraints is much higher than the number of decision variables, solving the dual LP problem should also be less computationally expensive than the primal problem.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- The number of constraints can be reduced considerably as in the ∞-∞ norm case because of the special form of the constraint matrix A.

- Consider the jth row for each constraint block $A_i\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_i$.
- As $A_1 = A_2 = \cdots = A_{2N}$;the only constraint limiting the feasible region will be the one with the smallest value on the jth element of vector $\mathbf{b}_i$.

- Therefore, all the other $(2^N - 1)$ constraints can be eliminated. The number of constraints can be reduced to $4 \times n \times N + 5m \times N_u + 1$.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

8.3 Robustness by Imposing Constraints

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

8.3 Robustness by Imposing Constraints

- A way of guaranteeing robustness in MPC is to impose that stability conditions are satisfied for all possible realizations of the uncertainties.
- The stability conditions (see Section 9.5) were summarized in [137].
- The key ingredients of the stabilizing MPC are a terminal set and a terminal cost.
- The terminal state (i.e. the state at the end of the prediction horizon) is forced to reach a terminal set that contains the steady state.
- An associated cost denoted as terminal cost, which is added to the cost function, is associated to the terminal state.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- The robust MPC consists of finding a vector of future control moves such that it minimizes an objective function (including a terminal cost satisfying the stability conditions [137]) and forces the final state to reach the terminal region for all possible value of the uncertainties; that is:

$$\min_{u} J(x(t), u) \quad (8.13)$$
$$subject\ to$$
$$\mathbf{Ru} \leq \mathbf{r} + \mathbf{V}x(t)$$
$$x(t + N) \in \mathbf{\Omega}_T$$
$$\forall \theta \in \Theta$$

- where the terminal set Ω_T is usually defined by a polytope $\Omega_T \triangleq \{x : R_T\, x \leq r_T\}$.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- The inequalities $\mathbf{Ru} \leq \mathbf{r} + \mathbf{V}x(t)$ contain the operating constraints.

- If there are operating constraints on the process output and/or state, vector $\mathbf{r}$ is an affine function of the uncertainties θ; i.e., $\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{R_{\theta\theta}}$.

- The vector of predicted state can be written as:

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}_u u + \mathbf{G}_\theta \theta + \mathbf{f}_x x(t) \qquad (8.14)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- Taking the rows corresponding to $x(t+N)$ and substituting them into the inequality defining the terminal region:

$$\mathbf{R}_T \left(g_{u_N} u + g_{\theta_N} \theta + f_{x_N} x(t) \right) \leq r_T \qquad (8.15)$$

- where g_{u_N} , g_{θ_N} , and f_{x_N} are the last n rows of G_u, G_θ, and F_x respectively, with $n = \dim(x)$.

- The left-hand side of Inequalities (8.15) are affine functions of the uncertainty vector θ.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- Problem (8.13) results in a QP or LP problem (depending on the type of the objective function) with an infinite number of constraints.

- As in the previous cases, because the constraints are affine expressions of the uncertainties, if the inequalities hold for all extreme points (vertices) of Θ they also hold for all points inside Θ;

- that is, the infinite constraints can be replaced by a finite number (although normally very high) of constraints and the problem is solvable.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- The problem can be expressed as

$$\min_{u} J(x(t), u) \quad (8.16)$$

$$subject\ to$$

$$\mathbf{Ru} \leq \mathbf{r}_0 + \mathbf{R}_\theta \theta_i + \mathbf{V} x(t)$$

$$\mathbf{R}_T \left(g_{u_N} u + g_{\theta_N} \theta_i + f_{x_N} x(t) \right) \leq r_T$$

$$\forall \theta_i \in \varepsilon$$

- where ε is the finite set of extreme points (vertices) of Θ.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

8.4 Constraint Handling

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- As seen in the previous sections, when uncertainties are additive, the robust MPC consists of solving at each sampling step a problem of the form:

$$\min_{u} J(x(t), u) \quad (8.17)$$

$$subject\ to\ R_u u \leq r + R_\theta \theta_i + R_x x(t) \quad (8.18)$$

$$\forall \theta_i \in \varepsilon$$

- where function $J(x(t), u)$ can be a linear, quadratic, or piecewise quadratic objective function.

- The number of constraints in (8.18) is equal to the number of rows of R_u times the number of vertices of the polytope defining the uncertainties along the prediction horizon.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- The number of constraints can be reduced dramatically as indicated in Sections 8.2.2 and 8.2.3. Consider the Type equation here.j rows of all the constraints in (8.18):

$$\mathbf{r}_{u_j}\mathbf{u} \leq \mathbf{r}_j + \mathbf{r}_{\theta_j}\theta_i + \mathbf{r}_{x_j}x(t) \quad \forall\theta_i \in \varepsilon \qquad (8.19)$$

- where $\mathbf{r}_{u_j}$, $\mathbf{r}_{\theta_j}$, and $\mathbf{r}_{\mathrm{x_j}}$ are the j rows of matrices R_u, R_θ, and $R_x x(t)$, respectively.
- The scalar $\mathbf{r}_j$ is the j entry of vector $\mathbf{r}$.

- Let us define:

$$m_j \triangleq \min_{\theta_i \in \epsilon} \mathbf{r}_{\theta_j}\theta_i .$$

- Now consider the inequality:

$$\mathbf{r}_{u_j}\mathbf{u} \leq \mathbf{r}_j + m_j + \mathbf{r}_{x_j}x(t) \quad (8.20)$$

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- It is easy to see that if Inequality (8.20) is satisfied, all constraints in (8.19) will also be satisfied.
- Furthermore, if any constraints in (8.19) is not satisfied then constraint (8.20) will not be satisfied.
- Problem (8.17) can be expressed with a considerably smaller number of constraints:

$$\min_{u} J(x(t), u) \quad (8.21)$$

$$subject\ to\ \mathbf{R}_u\mathbf{u} \leq \mathbf{r} + \mathbf{m} + \mathbf{R}_x x(t) \quad (8.22)$$

- where m is a vector with its j entry equal to $\min_{\theta_i \in \epsilon} \mathbf{r}_{\theta_j}\ \theta_i$.
- Notice that these quantities are constant and can be computed offline.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

8.5 Illustrative Examples

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- **8.5.1 Bounds on the Output**

- The setpoint of many processes in industry is determined by an optimization program to satisfy economic objectives.

- As a result, the optimal set-point is usually on the intersection of some constraints.

- This is, for example, the normal situation when maximizing the throughput, which normally results in operating the process at extreme conditions as near as possible to the safety or quality constraints.

- Consideration of uncertainties may be of great interest for this type of situation.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- If an MPC that takes into account the constraints is used, the MPC will solve the problem, keeping the expected values of the output signals within the feasible region, but, because of external perturbations or uncertainties, this does not guarantee that the output is going to be bound.

- When uncertainties are taken into account, the MPC will minimize the objective function for the worst situation and keep the value of the variables within the constraint region for all possible cases of uncertainties.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- To illustrate this point, consider the process described by the following difference equation:

$$y(t+1)$$
$$= -1.4y(t) + 0.42y(t-1) + 0.1u(t) + 0.2u(t-1) + \frac{\theta(t+1)}{\Delta}$$

- With:

$$-0.03 \leq \theta(t) \leq 0.03, y(t) \leq 1$$
$$-1 \leq \Delta u(t) \leq 1$$

- A 1-norm MPC is applied with a weighting factor of 0.2, and predictions and control horizon of 3 and 1, respectively.

- The setpoint is set at the output constraint value.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

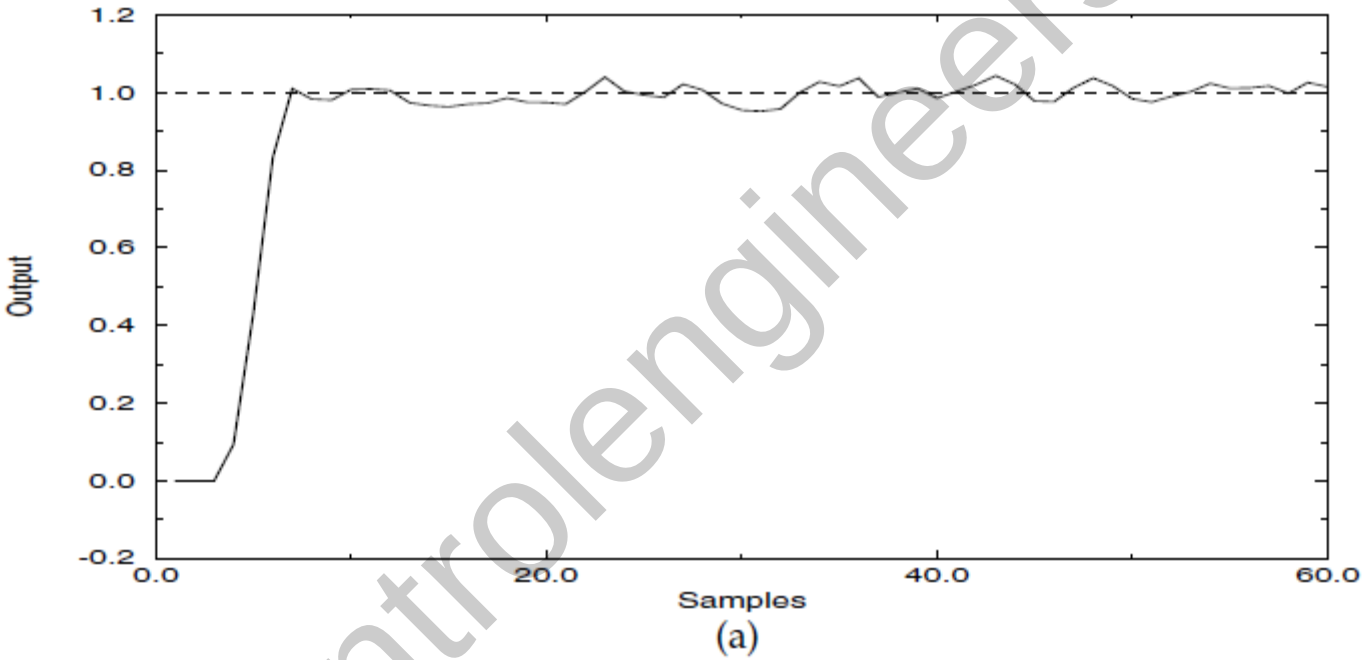
8.5 Illustrative Examples

- The uncertainties are randomly generated within the uncertainty set with a uniform distribution.
- The results obtained are shown in Figure 8.1(a).
- Note that the output signal violates the constraint because the MPC only checked the constraints for the expected values.
- The results obtained when applying a min-max algorithm are shown in Figure 8.1(b).
- As can be seen, the constraints are always satisfied because the MPC checked all possible values of the uncertainties.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

8.5 Illustrative Examples



(a)

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

8.5 Illustrative Examples

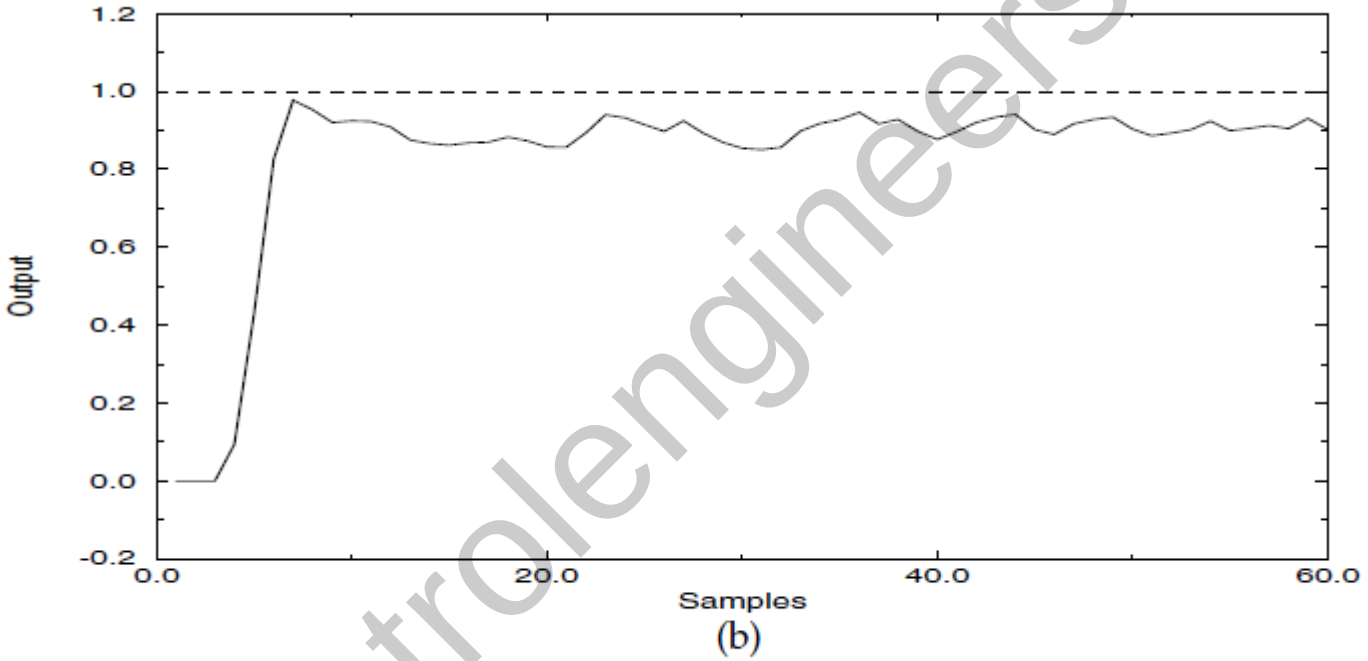


Fig. 8.1. (a) Output bound violation and (b) output with min-max algorithm

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- **8.5.2 Uncertainties in the Gain**

- The next example is the frequently found case of uncertainties in the gain.

- Consider a second-order system described by the following difference equation:

$$\begin{aligned} & y(t+1) \\ & = 1.97036y(t) - 0.98019y(t-1) \\ & + 0.049627K\big(u(t) + 0.99335u(t-1)\big) \end{aligned}$$

- where $0.5 \leq K \leq 2$.

- That is, the process static gain can be anything from half to twice the nominal value.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- A quadratic norm is used with a weighting factor of 0.1 for the control increments, a control horizon of 1, and a prediction horizon of 10.

- The control increments were constrained between −1 and 1.

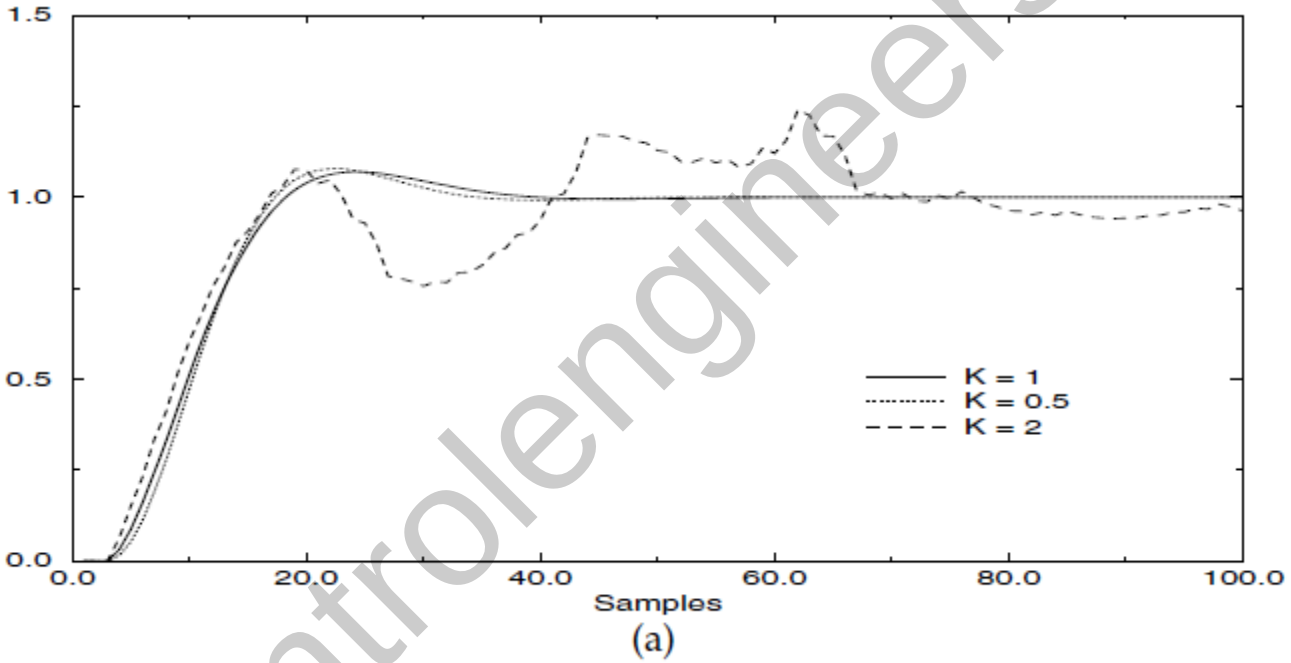
- Figure 8.2(a) shows the results obtained by applying a constrained GPC for three different values of the process gain (nominal, maximum and minimum).

- As can be seen, the results obtained by the GPC deteriorate when the gain takes the maximum value giving rise to an oscillatory behaviour.

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

8.5 Illustrative Examples



(a)

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

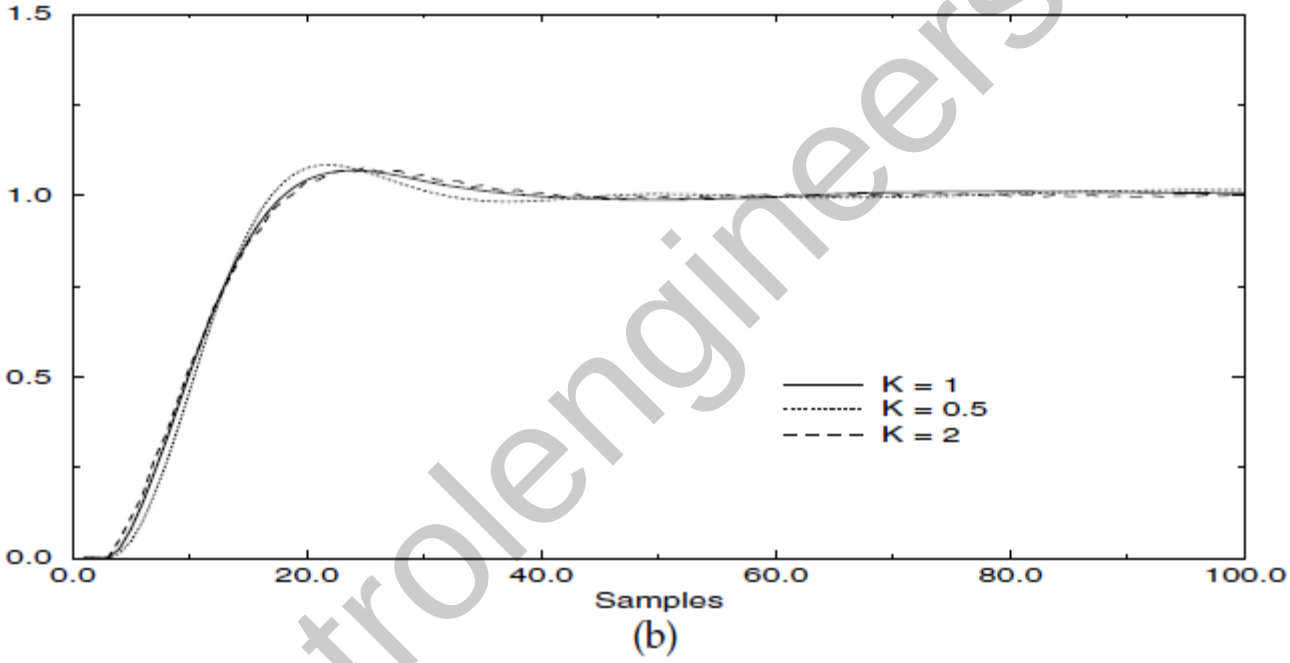
8.5 Illustrative Examples

- The results obtained when applying a min-max GPC for the same cases are shown in Figure 8.2b.
- The min-max problem was solved in this case by using a gradient algorithm in the control increments space.
- For each point visited in this space the value of K maximizing the objective function had to be determined.
- This was done by computing the objective function for the extreme points of the uncertainty polytope (two points in this case).
- The responses of the min-max GPC, which takes into account the worst case, are acceptable for all situations as can be seen in Figure 8.2(b).

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

8.5 Illustrative Examples



(b)

Fig. 8.2. (a) Uncertainty in the gain for constrained GPC (b) and min-max GPC

controlengineers.ir

اختصاصی مهندسی کنترل
controlengineers.ir
@controlengineers

- A simulation study was carried out with 600 cases varying the process gain uniformly in the parameter uncertainty set from the minimum to maximum value.

- The bands limiting the output for the constrained GPC and the min-max constrained GPC are shown in Figure 8.3.

- As can be seen, the uncertainty band for the min-max constrained GPC is much smaller than the one obtained for the constrained GPC.

controlengineers.ir