اصول نظریه لیاپانوف

مباحث فصل:

- **سیستم های غیر خطی و نقاط تعادل**
- **مفاهیم پایداری**
- **خطی سازی و پایداری محلی**
- **روش مستقیم لیاپانوف**
- **آنالیز سیستم بر اساس روش مستقیم لیاپانوف**
- **طراحی کنترل کننده بر اساس روش مستقیم لیاپانوف**

فصل ۳: «اصول نظریه لیاپانوف»

- پایداری: اولین و مهمترین سوال در خصوص خواص مختلف یک سیستم کنترل
- سیستم های ناپایدار: بدون استفاده یا خطرناک
- معنای کیفی پایداری: اگر سیستمی در نزدیکی نقطه کار مطلوب شروع به کار کند، آنگاه در حدود همان نقطه باقی بماند، سیستم را پایدار گویند.
- مثال: پاندول در نقاط پایین (پایدار) و بالا (ناپایدار)
- مثال: آیا اختلال در مسیر حرکت یک هواپیما که ناشی از یک تند باد باشد، می تواند باعث انحراف قابل توجه در مسیر پرواز گردد؟
- هر سیستم کنترل اعم از خطی یا غیر خطی، درگیر مساله پایداری خواهد بود که بایستی با دقت مطالعه گردد.
- عمومی ترین و مفیدترین روش برای مطالعه پایداری سیستم های کنترل غیر خطی تئوری ایست که در اواخر قرن ۱۹ میلادی (سال ۱۸۹۲) توسط ریاضیدان روسی بنام الکساندر میخائیلوویچ لیاپانوف در مطالعه ای تحت عنوان "General Problem of Motion Stability" ارائه شد.
- این مطالعه شامل دو روش به نامهای «روش خطی سازی» و «روش مستقیم» بود.

فصل ۳: «اصول نظریه لیاپانوف»

- در روش خطی سازی با استفاده از خطی کردن سیستم غیر خطی حوالی نقاط تعادل، و استفاده از روشهای بررسی پایداری سیستم های خطی اقدام به بررسی پایداری نقطه تعادل می کند.
- در روش مستقیم با تعریف یک تابع شبه انرژی برای سیستم پایداری کلی سیستم غیر خطی را بررسی می کند.

- در این فصل بدون ورود به مباحث پیچیده ریاضی، هر دو روش فوق برای بررسی پایداری نقاط تعادل سیستم های خودمختار (autonomous) خواهیم پرداخت.

3

۳-۱: «سیستم های غیر خطی و نقاط تعادل»

- سیستم های غیر خطی:

$$\dot{x} = f(x,t) \qquad (3.1)$$

- که در آن f برداری ستونی و n بعدی از توابع، و x برداری ستونی و n بعدی از متغیر های حالت است.
- مقادیر خاصی از بردار حالت را «نقطه» می نامیم چرا که یک نقطه را در فضای حالت نشان می دهد.
- تعداد حالتها ، یعنی n را بعد سیستم می نامند.
- یک جواب x(t) از معادله (3.1) معمولا منحنی را در فضای حالت نشان می دهد که در آن زمان از صفر تا بی نهایت متغیر است که آنرا مسیر حالت(State Trajectory) یا مسیر سیستم (System Trajectory) می نامند.
- سوال: چرا در رابطه (3.1) اثری از سیگنال ورودی کنترلی دیده نمی شود؟
- جواب : این معادله در واقع یک سیستم کنترل حلقه بسته را نشان می دهد چرا که با فرض سیستم به فرم کلی تر:

$$\dot{x} = f(x,u,t)$$

- و ورودی کنترلی به فرم:

$$u = g(x,t)$$

4

۳-۱: «سیستم های غیر خطی و نقاط تعادل»

- خواهیم داشت:

$$\dot{x} = f(x, g(x,t), t) = f(x,t)$$

- البته همین مدل می تواند برای سیستمی که فاقد ورودی نیز باشد استفاده شود
- سیستم های خطی حالت خاص سیستم های غیر خطی اند که می توانند به فرم کلی زیر بیان شوند:

$$\dot{x} = A(t)x$$

- که در آن A ماتریسی n×n می باشد.

- ***سیستم های خود مختار و غیر خود مختار***
- سیستم های خطی شامل دو نوع کلی سیستم های ثابت با زمان و متغیر با زمان هستند. اگر در رابطه سیستم های خطی A ثابت با زمان باشد، سیستم را ثابت با زمان و در صورتی که بعضی از مقادیراین ماتریس متغیر با زمان باشند آنرا متغیر با زمان می گوییم.
- در سیستم های غیر خطی این ویژگی به نام سیستم های خود مختار (autonomous) و غیر خود مختار (Non-autonomous) خوانده می شوند.

5

۳-۱: «سیستم های غیر خطی و نقاط تعادل»

- تعریف ۳-۱: سیستم غیر خطی (3.1) خود مختار (autonomous) نامیده می شود اگر به طور صریح وابسته به زمان نباشد.یعنی بتوان معادله حالت آنرا به فرم زیر نوشت.

$$\dot{x} = f(x) \qquad (3.2)$$

- در غیر این صورت سیستم را غیر خود مختار(non-Autonomous) می نامیم.
- نکته ۱: اگر سیستم خود مختار دارای کنترل کننده غیر خود مختار باشد، سیستم کلی غیر خود مختار خواهد شد.
- نکته ۲: اگر سیستمی خطی باشد ولی کنترل کننده آن غیر خطی باشد، سیستم کلی غیر خطی خواهد شد.
- نکته ۳:تحلیل سیستم های غیر خطی غیر خود مختار مشکل تر از سیستم های غیر خطی خود مختار است.

- در این فصل فقط سیستم های خود مختار در نظر گرفته می شوند و در فصل بعد موضوع پایداری سیستم های غیر خود مختار مورد بررسی قرار می گیرد.

6

۳-۱: «سیستم های غیر خطی و نقاط تعادل»

- *نقاط تعادل*
- تعریف ۳-۲: حالت x^* را حالت تعادل (یا نقطه تعادل) سیستم می نامیم هرگاه اگر $x(t)$ برابر با x^* شود، آنگاه برای همیشه برابر با x^* بماند.
- یعنی از نظر ریاضی داشته باشیم:

$$0 = f(x^*) \qquad (3.3)$$

- سیستم خطی :

$$\dot{x} = Ax \qquad (3.4)$$

- دارای یک نقطه تعادل در مبدأ است اگر ماتریس A ویژه نباشد.
- در صورتیکه A ویژه باشد، فضای پوچی ماتریس A که فضایی است به هم پیوسته، تمامی نقاط تعادل سیستم می باشند.
- لذا در سیستم های خطی نقاط تعادل سیستم مجزا از هم نیستند.
- مثال: نقاط تعادل سیستم زیر

$$\ddot{x} + \dot{x} = 0$$

- روی محور x در صفحه فاز واقع می شود. (چرا؟)

7

۳-۱: «سیستم های غیر خطی و نقاط تعادل»

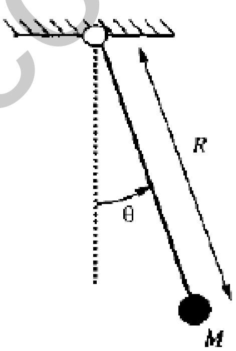
- مثال: معادله پاندول:

$$MR^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + MgR\sin\theta = 0$$

- که در آن b ضریب اصطکاک لولا است.
- با تعریف معادلات حالت:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \theta \\ x_2 &= \dot{\theta} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{b}{MR^2}x_2 - \frac{g}{R}\sin x_1 \end{aligned}\right.$$

- نقاط تعادل سیستم:



$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0 \\ \dot{x}_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ \sin x_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 &= 0 \ \text{ or } \ (\pi) \\ x_2 &= 0 \end{aligned}\right.$$

8

۳-۱: «سیستم های غیر خطی و نقاط تعادل»

- حرکت اسمی: اگر بررسی پایداری به جای یک نقطه مربوط به یک مسیر باشد، یعنی پایداری مسیرحرکت حالت های سیستم مد نظر باشد، می توان با تبدیل زیر پایداری مسیر را به پایداری نقطه تعادل یک سیستم غیر خود مختار تبدیل نمود.

$$x^*(0) = x_0 \rightarrow x^*(t) \quad \text{is nominal motion trajectory}$$

- با فرض انحراف کوچکی در شرایط اولیه، بحث پایداری به معنای آنست که آیا مسیر حرکت جدید اطراف مسیر اسمی خواهد بود یا خیر؟

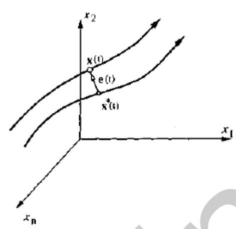


Figure 3.2 : Nominal and Perturbed Motions

۳-۱: «سیستم های غیر خطی و نقاط تعادل»

- با فرض:

$$x(0) = x_0 + \delta x_0$$
$$e(t) = x(t) - x^*(t)$$

- داریم:

$$\dot{x}^* = f(x^*) \qquad x(0) = x_0$$
$$\dot{x} = f(x) \qquad x(0) = x_0 + \delta x_0$$

- حال معادله حالت را بر حسب خطا می نویسیم:

$$\dot{e} = f(x^* + e, t) - f(x^*, t) = g(e, t) \qquad (3.8)$$

- شرایط اولیه معادلات جدید:

$$e(0) = \delta\, x_0 \Rightarrow g(0, t) = 0$$

- لذا میتوان مبدأ را به عنوان نقطه تعادل یک سیستم غیر خود مختار دانست.

۳-۱: «سیستم های غیر خطی و نقاط تعادل»

- مثال: سیستم غیر خطی جرم و فنر:

$$m\ddot{x}+k_1\dot{x}+k_2x^3=0$$

- فرض: مسیر $x^*(t)$ از شرایط اولیه x_0 شروع می شود.
- با فرض تغییر جزئی شرایط اولیه داریم:

$$x(0)=x_0+\delta x_0$$

- مسیر جدید را $x(t)$ می نامیم.
- داریم:

$$m\ddot{e}+k_1\dot{e}+k_2[e^3+3e^2x^*(t)+3ex^{*2}(t)]=0$$

- که سیستمی است با نقطه تعادل مبدأ ولی غیر خود مختار
- نکته: البته این موضوع در مورد سیستم های خطی منجر به سیستم متغیر با زمان نخواهد شد و کماکان سیستم خطی و ثابت با زمان خواهد ماند.

11

۳-۲: «مفاهیم پایداری»

- مفاهیم پایداری: در این بخش تعاریف مختلف پایداری نقاط تعادل سیستم بررسی میگردد.
- نمادگذاری:

$$B_R=\{x|\quad \|x\|<R\}$$

$$S_R=\{x|\quad \|x\|=R\}$$

- تعریف: حالت تعادل(نقطه تعادل) $x=0$ پایدار نامیده می شود، اگر برای هر $R>0$ یک عدد $r>=0$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\|x(0)\|<r \Rightarrow \|x(t)\|<R \quad \text{for all} \quad t\geq 0$$

- در غیر اینصورت نقطه تعادل را ناپایدار گویند.
- نکته: این نوع پایداری را «پایداری از نگاه لیاپانوف» یا «پایداری لیاپانوف» گویند.

12

۲-۳: «مفاهیم پایداری»

- تعریف دقیق پایداری لیاپانوف:

$$\forall \mathrm{R} > 0, \exists \mathrm{r} > 0, \|x(0)\| < r \Rightarrow \forall t \geq 0 \, , \|x(t)\| < R$$

- یا:

$$\forall \mathrm{R} > 0, \exists \mathrm{r} > 0, x(0) \in B_r \Rightarrow \forall t \geq 0 \, , x(t) \in B_R$$

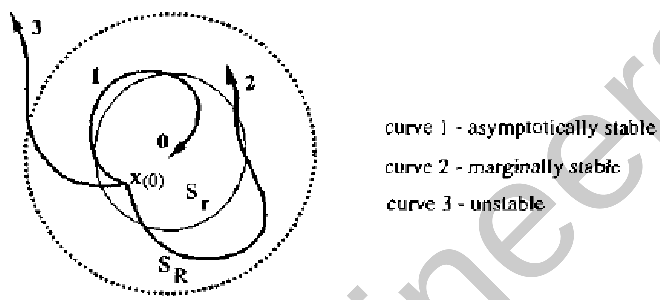


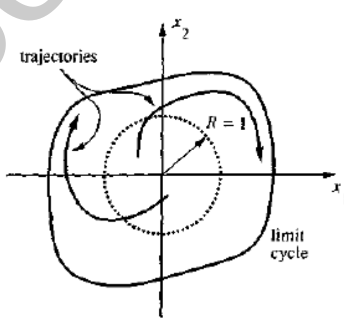
Figure 3.3 : Concepts of stability

۲-۳: «مفاهیم پایداری»

- نکته: هرچند در سیستم های خطی ناپایداری به مفهوم فرار مسیر سیستم به سمت بی نهایت است اما در سیستم های غیر خطی ممکن است نقطه تعادل سیستم ناپایدار باشد ولی مسیرهای آن به سمت بی نهایت نروند.
- مثال: نوسان ساز ون در پل

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + (1 - x_1^{\,2}) x_2$$



همانطور که دیده می شود مبدأ، نقطه تعادل ناپایدار است، ولی مسیرهای سیستم همگی به سمت سیکل حدی سیستم حرکت کرده و در آنجا خواهند ماند.

۳-۲: «مفاهیم پایداری»

- پایداری مجانبی و پایداری نمایی:
- در بسیاری از سیستم های صنعتی پایداری مجانبی کافی نیست. مثلا در ماهواره انحراف ارتفاع از مقدار نامی آن بایستی به حالت اولیه آن منجر گردد وگرنه ممکن است ماهواره به مدارهای پایینتر رفته و نهایتا سقوط کند یا با رفتن به مدار بالاتر باعث خروج از مدار مورد نظر و فرار از میدان جاذبه گردد. لذاپایداری نقاط تعادل تعاریف دیگری را می طلبد که در این قسمت به این تعاریف می پردازیم.
- تعریف۳-۴: نقطه تعادل 0 پایدار مجانبی است اگر پایدار بوده و به ازاء بعضی مقادیر $r > 0$ داشته باشیم:

$$\|x(0)\| < r \Rightarrow x(t) \to 0 \text{ as } t \to \infty$$

- B_r را ناحیه همگرایی نقطه تعادل می گویند.
- نکته: اگر نقطه تعادل پایدار لیاپانوف باشد ولی پایدار مجانبی نباشد، آنرا پایدار حاشیه ای یا پایدار مرزی (Marginally Stable) گویند

15

۳-۲: «مفاهیم پایداری»

- در بسیاری از سیستم های مهندسی میل کردن مسیر های سیستم به سمت صفر در زمان بینهایت کافی نیست بلکه سرعت حرکت این مسیرها به سمت صفر بسیار حائز اهمیت است. تخمین این سرعت می تواند با استفاده از توابع نمایی صورت پذیرد. این مفهوم در تعریف پایداری نمایی مورد استفاده قرار میگیرد.

- تعریف ۳-۵: نقطه تعادل 0 پایدار نمایی است اگر اعداد اکیداً مثبت α و λ موجود باشند به نحوی که خاصیت:

$$\forall t > 0, \|x(t)\| \le \alpha \|x(0)\| e^{-\lambda t}$$

- برای نقاط بعضی همسایگی های Br حول مبدأ صدق کند.
- مقدار λ را نرخ همگرایی نمایی می نامند. اگر زمان به اندازه $1/\lambda$ زیاد شود حالت سیستم به اندازه ۳۷ درصد نسبت به مقدار قبل آن کاهش می یابد و اگر این مقدار $3/\lambda$ شود میزان حالت ۵ درصد مقدار قبل آن خواهد بود. لذا حالت سیستم با سرعت معلومی به سمت صفر می رود.

16

۳-۲: «مفاهیم پایداری»

- مثال: $\dot{x} = -(1+\sin^2 x)x$
- با انتگرال گیری از معادله داریم:

$$x(t) = x(0)\exp\left(-\int_0^t 1+\sin^2 x(\tau)d\tau\right)$$

- با دقت در این رابطه می توان دید: $|x(t)| \le |x(0)|e^{-t}$
- پس نرخ همگرایی نمایی مبدأ (نقطه تعادل سیستم) $\lambda=1$ می باشد.

۳-۲: «مفاهیم پایداری»

- نکته: اگر نقطه تعادل سیستمی پایدار نمایی باشد، حتما پایدار مجانبی می باشد. ولی عکس این موضوع همیشه صادق نیست یعنی پایداری مجانبی دلالت بر پایداری نمایی نخواهد کرد
- مثال: سیستم مرتبه اول غیر خطی : $\dot{x} = -x^2$
- دارای پاسخی به شکل زیر می باشد که نرخ صفر شدن آن از هر تابع نمایی کند تر است.

$$x(t) = \frac{1}{1+t}$$

۳-۲: «مفاهیم پایداری»

- ***پایداری محلی و پایداری فراگیر:***
- در تعاریف فوق خواص محلی نقاط نزدیک به نقطه تعادل بررسی گردید اگر این خواص برای هر نقطه در فضای حالت سیستم برقرار باشد، نوع پایداری از محلی به فراگیر تغییر می یابد.

- تعریف ۳-۶ : اگر پایداری مجانبی (یا نمایی) برای هر شرایط اولیه ای برقرار باشد، نقطه تعادل را پایدار مجانبی (یا نمایی) فراگیر می گویند.

- مثال: در تمامی سیستم های خطی مبدأ اگر پایدار باشد (از هر نوع) آنگاه پایدار فراگیر (از همان نوع) می باشد.
- انواع پایداری سیستم های خطی:
- ۱- پایدار نمایی (مجانبی) فراگیر
- ۲- پایدار مرزی(نوسانی) فراگیر
- ۳- ناپایدار

19

۳-۳: «خطی سازی و پایداری محلی»

- روش خطی سازی لیاپانوف مرتبط با پایداری محلی سیستم های غیر خطی می باشد.
- این روش از این مفهوم نشأت میگیرد که سیستم های غیر خطی در اطراف نقاط تعادل خود دارای خواصی شبیه سیستم خطی سازی شده می باشند.

- از آنجا که سیستم های فیزیکی دارای طبیعت غیر خطی هستند، روش خطی سازی لیاپانوف به عنوان توجیه بررسی تکنیک های کنترل خطی در کاربردهای عملی می باشد. لذا طراحی پایدار ساز خطی، پایداری سیستم غیر خطی اولیه در اطراف نقطه تعادل را تضمین می کند.

- فرض کنید تابع $f(x)$ تابع پیوسته و مستق پذیر باشد، دینامیک سیستم را می توان به فرم کلی زیر نوشت:

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0} x + f_{h.o.t.}(x) \qquad (3.11)$$

20

۳-۳: «خطی سازی و پایداری محلی»

- با فرض اینکه ماتریس A ژاکوبین بردار f نسبت به بردار x در x=0 باشد یعنی:

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=0}$$

- در اینصورت رابطه:

$$\dot{x} = Ax \qquad (3.12)$$

- خطی شده (یا تقریب خطی) سیستم غیر خطی اولیه در نقطه x=0 است.
- در خصوص سیستم هایی که دارای ورودی باشند داریم:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ f(0,0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \dot{x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{(x=0,u=0)} x + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)_{(x=0,u=0)} u + f_{h.o.t.}(x,u)$$

۳-۳: «خطی سازی و پایداری محلی»

- با فرض صرف نظر از عبارات مرتبه بالا و جایگزینی ماتریسهای ژاکوبین فوق با ماتریسهای A و B داریم:

$$\begin{cases} A = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{(x=0,u=0)} \\ B = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)_{(x=0,u=0)} \end{cases} \Rightarrow \dot{x} = Ax + Bu$$

- که سیستم فوق را نیز خطی شده (تقریب خطی) سیستم غیر خطی اولیه در نقطه (x=0 , u=0) می نامند.
- همچنین با فرض قانون کنترل (سیستم حلقه بسته) به فرم: $u = U(x)$
- خواهیم داشت:

$$u = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{x=0} x + f_{h.o.t.}(x)$$

۳-۳: «خطی سازی و پایداری محلی»

- و لذا با چشم پوشی از جملات با توان بالا و نیز با فرض:

$$G=\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=0}$$

- خواهیم داشت:

$$\dot{x}=f(x,u(x))=(A+BG)x$$

- همین نتیجه را می توان بطور مستقیم از رابطه غیر خطی زیر با یک بار محاسبه ژاکوبین بدست آورد.

$$\dot{x}=f(x,u(x))=f_1(x)$$

- چرا که داریم:

$$A_1=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_{x=0}\Rightarrow \dot{x}=A_1x$$

23

۳-۳: «خطی سازی و پایداری محلی»

- در عمل خطی سازی به سادگی و با صرف نظر از عبارتهای مرتبه بالاتر از یک در دینامیک سیستم انجام می شود.
- مثال:

$$\dot{x}_1=x_2{}^2+x_1\cos x_2$$
$$\dot{x}_2=x_2+(x_1+1)x_1+x_1\sin x_2$$

- همانطور که دیده می شود مبدأ $(0,0)$ یک نقطه تعادل سیستم است. با صفر قرار دادن عبارات مرتبه بالا در معادله غیر خطی فوق و تقریب توابع sin و cos حول صفر داریم:

$$\dot{x}_1=0+x_11=x_1$$
$$\dot{x}_2=x_2+0+x_1+x_1x_2=x_2+x_1$$

- لذا خواهیم داشت:

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}X$$

24

۳-۳: «خطی سازی و پایداری محلی»

- مثال (سیستم با سیگنال ورودی کنترل):

$$\ddot{x}+4\dot{x}^5+(x^2+1)u=0$$

- سیستم خطی شده حول x=0 :

$$\ddot{x}+0+(0+1)u=0 \Rightarrow \ddot{x}=-u$$

- حال فرض کنید قانون کنترل سیستم فوق به صورت زیر باشد:

$$u=\sin x+x^3+\dot{x}\cos^2 x$$

- در اینصورت خطی سازی شده سیستم حلقه بسته را میتوان به صورت زیر نوشت:
-

$$u=x+0+\dot{x}\times 1=x+\dot{x}$$

$$\ddot{x}+\dot{x}+x=0$$

25

۳-۳: «خطی سازی و پایداری محلی»

- قضیه ۳-۱ : روش خطی سازی لیاپانوف:
- اگر سیستم خطی شده اکیداً پایدار باشد، یعنی اگر مقادیر ویژه ماتریس A همگی سمت چپ محور موهومی در صفحه اعداد مختلط باشند، در این صورت نقطه تعادل سیستم غیر خطی اصلی، پایدار مجانبی است.
- اگر سیستم خطی شده ناپایدار باشد، یعنی اگر حداقل یکی از مقادیر ویژه ماتریس A سمت راست محور موهومی باشد، در این صورت نقطه تعادل سیستم غیر خطی اصلی، ناپایدار است.
- اگر سیستم خطی شده پایدار مرزی(حاشیه ای) باشد، یعنی اگر مقادیر ویژه ماتریس A همگی سمت چپ محور موهومی بوده ولی تعدادی از آنها به صورت غیر تکراری روی محور موهومی واقع شوند، در این صورت نقطه تعادل سیستم غیر خطی اصلی، ممکن است پایدار یا ناپایدار باشد و نمی توان راجع به پایداری آن چیزی گفت.

- درک شهودی قضیه فوق آنست که چون سیستم خطی شده حوالی نقطه تعادل تقریبا رفتار مشابهی با سیستم اصلی دارد، لذا اکیداً پایداری یا ناپایداری آن دلیل بر پایداری یا ناپایداری سیستم غیر خطی اصلی است ولی در خصوص پایداری مرزی آن نمی توان اظهار نظری کرد.

26

۳-۳: «خطی سازی و پایداری محلی»

- مثال: در سیستم پاندول میخواهیم پس از خطی کردن سیستم حول یکی از نقاط تعادل، به بررسی پایداری سیستم حول این نقطه تعادل بپردازیم.

$$\left.\begin{array}{l} x_1=\theta \\ x_2=\dot{\theta} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dot{x}_1=x_2 \\ \dot{x}_2=-\dfrac{b}{MR^2}x_2-\dfrac{g}{R}\sin x_1 \end{array}\right.$$

- با توجه به رابطه :

$$\sin\theta=\sin(\pi-\alpha)=\sin(\pi)\cos(\alpha)-\cos(\pi)\sin(\alpha)=\sin(\alpha)$$
$$\sin(\alpha)=\sin(\pi-\theta)\approx\pi-\theta$$

- با فرض زیر می توان نوشت:

$$\tilde{\theta}=\theta-\pi \Rightarrow \ddot{\tilde{\theta}}+\frac{b}{MR^2}\dot{\tilde{\theta}}-\frac{g}{R}\tilde{\theta}=0$$

- که نشاندهنده ناپایداری سیستم است. لذا نقطه تعادل سیستم در (π,0) ناپایدار است.

27

۳-۳: «خطی سازی و پایداری محلی»

- مثال: در سیستم مرتبه اول زیر:

$$\dot{x}=ax+bx^5$$

- سیستم خطی شده:

$$\dot{x}=ax$$

- لذا داریم:

$$a<0\Rightarrow \textit{asymptotically stable}$$
$$a>0\Rightarrow \textit{unstable}$$
$$a=0\Rightarrow \text{cannot tell from linearization}$$

- در حالت سوم که a=0 است، سیستم غیر خطی به فرم زیر تبدیل می شود:

$$\dot{x}=bx^5$$

- بررسی پایداری نقاط تعادل این سیستم توسط روش خطی سازی میسر نیست. که راه آن روش مستقیم لیاپانوف می باشد.

28

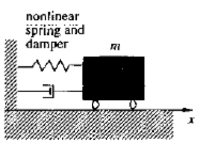
۳-۴: «روش مستقیم لیاپانوف»

- فلسفه روش مستقیم لیاپانوف، بر اساس تعمیم مفهوم انرژی در سیستم های واقعی است.
- اگر انرژی کلی یک سیستم به طور مداوم کاهش یابد، سیستم چه خطی باشد یا غیر خطی به سمت نقطه تعادل می رود.
- این رفتار می تواند با اتخاذ یک تابع اسکالر به عنوان تابع انرژی بسط داده شود. بطوریکه تغییرات این تابع تحت سیستم مورد نظر بررسی گردد.

- مثال (سیستم فنر و جرم) :

$$m\ddot{x} + b\dot{x}|\dot{x}| + k_0 x + k_1 x^3 = 0$$

- که در آن جمله دوم نشاندهنده خاصیت غیر خطی دمپر (میرا کننده) و جمله سوم مبین خواص غیر خطی مربوط به فنر است.
- سوال: اگر جرم را از موقعیت تعادل خود به میزان زیادی تغییر دهیم و رها کنیم آیا حرکت حاصل پایدار خواهد بود؟
- جواب دادن به این سوال بخاطر نداشتن پاسخ صریح معادله آسان نخواهد بود.



29

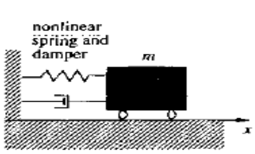
۳-۴: «روش مستقیم لیاپانوف»

- روش خطی سازی نیز نمی تواند در این نوع مسائل کمکی نماید چرا که تغییرات سیستم حول نقطه تعادلش زیاد است و نمی توان با روش تقریب خطی سازی استفاده نمود.
- این موضوع در مورد سیستمی که مدل خطی شده آن پایدار مرزی باشد نیز صادق است.

- همانطور که می دانید انرژی کلی یک سیستم مجموع انرژی های جنبشی و پتانسیل آنست.

$$V(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \int_0^x (k_0 x + k_1 x^3)dx = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k_0 x^2 + \frac{1}{4}k_1 x^4$$

- مقایسه مفاهیم انرژی مکانیکی سیستم ها و پایداری نکات زیر را در پی دارد:
- در نقطه تعادل انرژی سیستم صفر است. $(x=0\ ,\ \dot{x}=0)$
- پایداری مجانبی معادل همگرایی انرژی مکانیکی به سمت صفر است.
- ناپایداری معادل رشد انرژی مکانیکی است.



30

۳-۴: «روش مستقیم لیاپانوف»

- عبارات فوق بیانگر آنست که مقدار کمیت اسکالر انرژی مکانیکی بطور غیر مستقیم دامنه بردار حالت را منعکس میکند.
- بعلاوه خواص پایداری سیستم می تواند با تغییرات انرژی مکانیکی سیستم توصیف شود.

- در مورد مثال فوق داریم:

$$\dot{V}(x) = m\dot{x}\ddot{x} + (k_0 x + k_1 x^3)\dot{x} = \dot{x}(-b\dot{x}|\dot{x}|) = -b|\dot{x}|^3$$

- با فرض $b > 0$ نرخ رشد انرژی منفی است. لذا با هر مقدار اولیه، نرخ تغییرات انرژی منفی است و این نشاندهنده نزول انرژی تا رسیدن به ثبات(نقطه تعادل) است.
- این نقطه تعادل جایی است که فنر در طول طبیعی خود قرار گیرد چرا که هر نقطه غیر از طول طبیعی فنر باعث ایجاد نیرو و حرکت جسم خواهد شد.
- روش مستقیم لیاپانوف تعمیم مفهوم مثال فوق با تعریف یک تابع اسکالر شبه انرژی و اعمال آن به معادلات دینامیکی سیستم است.
- این روش بدون نیاز به تست تعاریف پایداری و بدون دانستن جواب معادله امکان پذیر است.

31

۳-۴: «روش مستقیم لیاپانوف»

- ***۳-۴-۱: توابع مثبت معین و توابع لیاپانوف***
- خاصیت تابع انرژی مثال قبل
- ۱- این تابع اکیداً مثبت است مگر آنکه هر دو حالت سیستم صفر شوند.
- ۲- این تابع بطور مداوم کاهش می یابد، همانطور که x و $\dot{x}$ تغییر می کنند.
- تعریف: تابع اسکالر پیوسته $V(x)$ بصورت محلی مثبت معین است اگر:
- ۱- $V(0)=0$
- ۲- در کره B_{R0} داشته باشیم:

$$x \neq 0 \Rightarrow V(x) > 0 \qquad x \in B_{R_0}$$

- اگر خاصیت دوم در همه نقاط برقرار باشد، تابع را مثبت معین فراگیر می گویند.

- مثال: تابع انرژی پاندول:
- مثبت معین محلی است.

$$V(x) = \frac{1}{2}MR^2 {x_2}^2 + MRg(1-\cos x_1)$$

- مثال: تابع انرژی جرم و فنر:
- مثبت معین فراگیر است.

$$V(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k_0 x^2 + \frac{1}{4}k_1 x^4$$

32

۴-۳: «روش مستقیم لیاپانوف»

- نکته مهم: اگر تابعی غیر از صفر در نقاط دیگری صفر شود، مثبت معین نیست مثلا انرژی جنبشی مثال جرم و فنر با رابطه:

$$K(x)=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

- در تمامی نقاطی که $x\neq 0$ میتواند صفر باشد.

- تعریف مثبت معین دلالت بر این دارد که تابع V یک حداقل منحصر بفرد در مبدأ دارد.

- نکته: اگر تابعی دارای یک نقطه مینیمم باشد، میتوان با اضافه کردن عددی ثابت به آن، به تابع مثبت معین تبدیل نمود.

- مثال: تابع

$$V(x)=x_1{}^2+x_2{}^2-1$$

- یک تابع از پایین محدود و دارای یک نقطه مینیمم در مبدأ با مقدار 1- است که تنها نقطه مینیمم سیستم است. با اضافه کردن عدد یک به تابع فوق (که تاثیری روی مشتق تابع ندارد) به یک تابع مثبت معین فراگیر تبدیل خواهد شد.

33

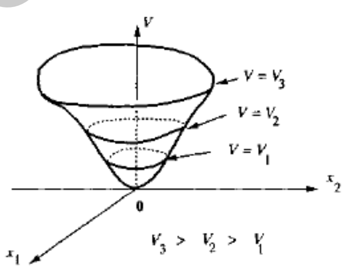
۴-۳: «روش مستقیم لیاپانوف»

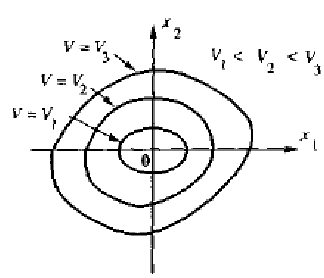
- مفهوم هندسی توابع مثبت معین محلی:
- اگر (x_1,x_2) مختصات دکارتی باشند، منحنی های مسطح به فرم:

$$V(x_1,x_2)=V_\alpha$$

- بیضی گون هایی را حول مبدأ تشکیل می دهند که با مقادیر مثبت V_α متناظر می باشند. این مسیرهای بسته را "منحنی های کانتور" می نامند.

- نکته: این کانتورها در هیچ نقطه ای تلاقی ندارند چرا که تابع فوق در هر نقطه مقدار منحصر بفردی است.





34

۳-۴: «روش مستقیم لیاپانوف»

- تعریف های مشابهی را می توان برحسب تعریف مثبت معین تعریف نمود.
- تعریف: تابع V(x) منفی معین است اگر −V(x) مثبت معین باشد.
- تعریف: تابع V(x) مثبت نیمه معین است اگر V(0)=0 بوده و $V(x) \geq 0$ برای $x \neq 0$
- تعریف: تابع V(x) منفی نیمه معین است اگر −V(x) مثبت نیمه معین باشد.

- نکته: کلمه نیمه برای مشخص نمودن امکان صفر شدن تابع V(x) در برخی از نقاط غیر مبدأ است.

- حال با فرض اینکه x حالت سیستم : $\dot{x} = f(x)$

- باشد، تابع اسکالر V(x) تابعی ضمنی برحسب t است. اگر V مشتق پذیر باشد داریم:

$$\dot{V}(x) = \frac{dV(x)}{dt} = \frac{\partial V(x)}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x)$$

- لذا با توجه به رابطه سیستم غیر خطی، دیده می شود که مشتق زمانی تابع V(x) فقط برحسب x است.

35

۳-۴: «روش مستقیم لیاپانوف»

- عبارت فوق را "مشتق V در طول مسیر سیستم" می نامند. در حالت خاص مشتق V نسبت به زمان در نقطه تعادل سیستم صفر است. یعنی:

$$\dot{V}(x)\Big|_{x=e} = 0$$

- مثال: در مورد سیستم جرم و فنر با رابطه:

$$m\ddot{x} + b\dot{x}|\dot{x}| + k_0 x + k_1 x^3 = 0$$

- داریم:

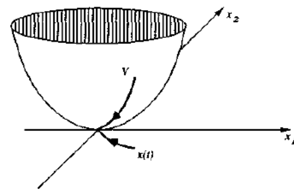
$$\dot{V}(x) = m\dot{x}\ddot{x} + (k_0 x + k_1 x^3)\dot{x} = \dot{x}(-b\dot{x}|\dot{x}|) = -b|\dot{x}|^3$$

- که نشان می دهد به ازاء مقادیر مثبت b مشتق زمانی تابع انرژی سیستم منفی است.
- تعریف ۳-۸: اگر در یک گوی B_{R_0} تابع V(x) مثبت معین بوده و دارای مشتقات جزئی پیوسته باشد، و نیز مشتق زمانی آن در طول مسیرهای حالت یک سیستم، منفی نیمه معین باشد، یعنی $\dot{V}(x) \leq 0$ آنگاه V(x) را "تابع لیاپانوف" آن سیستم می نامند.

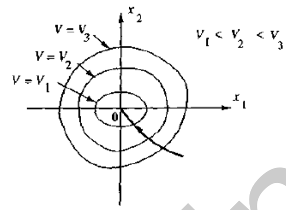
36

۳-۴: «روش مستقیم لیاپانوف»

- تجسم هندسی تابع لیاپانوف برای سیستم دو بعدی:



- منحنی های کانتور در شکل فوق:



37

۳-۴: «روش مستقیم لیاپانوف»

- ***قضیه لیاپانوف برای پایداری محلی***
- قضیه ۳-۲: (پایداری محلی) اگر در یک گوی B_{R_0} یک تابع اسکالر V(x) با اولین مشتقات جزئی پیوسته موجود باشد به قسمی که
- V(x) مثبت معین باشد (به صورت محلی در B_{R_0})
- $\dot{V}(x)$ منفی نیمه معین باشد (به صورت محلی در B_{R_0})
- آنگاه نقطه 0 پایدار است. اگر $\dot{V}(x)$ بصورت محلی منفی معین باشد آنگاه پایدار مجانبی خواهد بود.
- مراحل اثبات پایداری لیاپانوف
- ۱- انتخاب تابع لیاپانوف مناسب
- ۲- محاسبه مشتق زمانی آن در راستای مسیر حالت سیستم

38

۳-۴: «روش مستقیم لیاپانوف»

- مثال ۳-۷: پایداری محلی
- پاندول با میرایی چسبناک (viscous):

$$\ddot{\theta}+\dot{\theta}+\sin\theta=0$$

- تابع اسکالر زیر را در نظر بگیرید:

$$V(x)=(1-\cos\theta)+\frac{\dot{\theta}^2}{2}$$

- این تابع به صورت محلی مثبت معین است. (چرا؟)
- این تابع انرژی کل پاندول (مجموع انرژی های جنبشی و پتانسیل)را نشان می دهد.

$$\dot{V}(x)=\dot{\theta}\sin\theta+\dot{\theta}\ddot{\theta}=-\dot{\theta}^2\le 0$$

- لذا با توجه به محاسبات فوق دیده می شود که مبدأ نقطه تعادل پایدار سیستم است.
- از رابطه فوق پایداری مجانبی سیستم نتیجه گیری نمی شود. (چرا؟)

39

۳-۴: «روش مستقیم لیاپانوف»

- مثال ۳-۸: پایداری مجانبی
- سیستم:

$$\dot{x}_1=x_1({x_1}^2+{x_2}^2-2)-4x_1{x_2}^2$$
$$\dot{x}_2=4{x_1}^2x_2+x_2({x_1}^2+{x_2}^2-2)$$

- نقطه تعادل سیستم در مبدأ واقع است.
- تابع مثبت معین زیر را در نظر بگیرید:

$$V(x_1,x_2)={x_1}^2+{x_2}^2$$

- مشتق زمانی آن در راستای هر مسیر از سیستم به صورت زیر است:

$$\dot{V}=2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2=2({x_1}^2+{x_2}^2)({x_1}^2+{x_2}^2-2)$$

- تابع فوق در داخل گوی به شعاع 2 منفی معین است. پس سیستم فوق در نقطه تعادل مبدأ پایدار مجانبی است.

40

۳-۴: «روش مستقیم لیاپانوف»

- قضیه لیاپانوف برای پایداری فراگیر
- قضیه ۳-۳: (پایداری فراگیر) فرض کنید تابع اسکالر $V(x)$ با مشتق اول پیوسته وجود داشته باشد به قسمی که:
- V(x) مثبت معین باشد
- $\dot{V}(x)$ منفی معین باشد
- اگر $\|x\| \to \infty$ آنگاه $\|V(x)\| \to \infty$
- آنگاه نقطه 0 پایدار مجانبی فراگیر است.

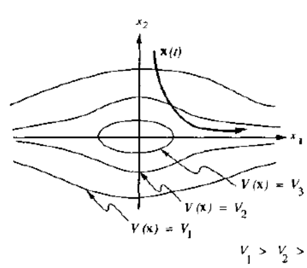
41

۳-۴: «روش مستقیم لیاپانوف»

- دلیل شرط کراندار نبودن شعاعی آنست که اطمینان حاصل شود منحنی های کانتور به فرم V(x)=Vα منحنی های بسته ای را نشان دهند. اگر این منحنی ها باز باشند ممکن است مسیرهای حالت سیستم به سمت این پارگی ها رفته و بدون اینکه V(x) به سمت بینهایت برود، x به سمت بی نهایت برود.
- مثال: تابع مثبت معین زیر را در نظر بگیرید:

$$V = \frac{x_1^{\ 2}}{1+x_1^{\ 2}} + x_2^{\ 2}$$

- توابع $V(x)=V_\alpha$ با فرض $V_\alpha > 1$ منحنی های باز هستند.



42

۳-۴: «روش مستقیم لیاپانوف»

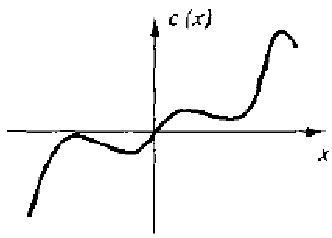
- مثال: یک طبقه از سیستم های مرتبه اول
- سیستم غیر خطی زیر مفروض است.

$$\dot{x} + c(x) = 0$$

- که در آن c می تواند هر تابع پیوسته با شرط یکسان بودن علامت آن با علامت x باشد. یعنی

$$xc(x) > 0 \quad \text{for} \ \ x \neq 0$$

- این شرط دلالت دارد بر اینکه $-c(x)$ مسیرهای حالت سیستم را به سمت نقطه x=0 خواهد برد.
- *چون تابع $c(x)$ پیوسته است، داریم: $c(0)=0$*
- با فرض تابع اسکالر V به عنوان تابع لیاپانوف



- با توجه به بیکران شعاعی بودن تابع فوق

$$V(x) = x^2$$

- داریم:
- پس مبدأ نقطه تعادل پایدار مجانبی فراگیر است.

$$\dot{V} = 2x\dot{x} = -2xc(x) < 0$$

۳-۴: «روش مستقیم لیاپانوف»

- مثال: سیستم

$$\dot{x} = \sin^2 x - x$$

- بصورت مجانبی فراگیر به مبدأ میل میکند.
- زیرا برای $x \neq 0$ داریم:

$$\sin^2 x \leq |\sin x| \leq |x|$$

- مثال: سیستم

$$\dot{x} = -x^3$$

- بصورت مجانبی فراگیر به مبدأ میل میکند.
- توجه کنید که تقریب خطی این سیستم

$$\dot{x} \approx 0$$

- پایداری سیستم را در مبدأ تضمین نمی کند. ولی سیستم غیر خطی اصلی با این قضیه خاصیت پایداری قوی (پایداری مجانبی فراگیر) را نشان می دهد.

۳-۴: «روش مستقیم لیاپانوف»

- مثال ۳-۱۰: سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

- مبدأ یک نقطه تعادل سیستم است.
- فرض کنید:

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

- داریم:

$$\dot{V} = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -2(x_1^2 + x_2^2)^2$$

- که منفی معین است. لذا مبدأ نقطه تعادل پایدار مجانبی فراگیر است.
- نکته: فراگیر بودن پایداری دلالت می کند که سیستم تنها یک نقطه تعادل دارد.

45

۳-۴: «روش مستقیم لیاپانوف»

- نکات مهم:
- برای هر سیستم ممکن است توابع لیاپانوف زیادی وجود داشته باشد.
- مثلا اگر V تابع لیاپانوف یک سیستم باشد، تابع

$$V_1 = \rho V^{\alpha}$$

- که در آن ρ ثابتی اکیداً مثبت و α ثابتی (نه لزوما عدد طبیعی) بزرگتر از یک باشد نیز تابع لیاپانوف همان سیستم است.
- بعلاوه مثبت معین بودن V مثبت معین بودن V_1 را تضمین می کند.
- سایر خواص V از قبیل منفی معین بودن مشتق زمانی V و نیز بیکران شعاعی بودن V به V_1 تسری پیدا می کند.
- مهمتر اینکه برای هر سیستم داده شده انتخاب خاص تابع لیاپانوف نتایج دقیق تری را به دنبال دارد.
- مثلاً برای سیستم پاندول انتخاب تابع زیر به عنوان تابع لیاپانوف

$$V(x) = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(\dot{\theta} + \theta)^2 + 2(1 - \cos\theta)$$

46

۳-۴: «روش مستقیم لیاپانوف»

- نتیجه خواهد داد:

$$\dot{V} = -(\dot{\theta}^2 + \theta \sin\theta) \le 0$$

- که نشان می دهد مشتق زمانی تابع لیاپانوف بصورت محلی منفی معین است.
- هر چند این تابع لیاپانوف معنی فیزیکی روشنی ندارد ولی پایداری مجانبی محلی پاندول را اثبات می کند.

- نکته مهم در مباحث پایداری لیاپانوف آنست که تمامی قضایای لیاپانوف شرایط لازم برای پایداری را مشخص می کند. لذا تست یک تابع لیاپانوف خاص و برآورده نشدن شرایط مشتق زمانی آن دلیل بر ناپایداری سیستم نیست بلکه بایستی تعداد زیادی تابع لیاپانوف تست شود.

47

۳-۴: «روش مستقیم لیاپانوف»

- **۳-۴-۳ قضایای مجموعه ثابت *(Invariant Set Theorem)***
- مفهوم اصلی این قضایا مبتنی بر تعریف مجموعه ثابت است که یک تعمیم از مفهوم نقطه تعادل است.

- تعریف ۳-۹: مجموعه G یک مجموعه ثابت برای سیستم دینامیکی است اگر هر مسیر سیستم که از نقطه ای داخل G شروع می شود برای تمام زمانهای بعدی در G بماند.

- مثالها:
- هر نقطه تعادل سیستم یک مجموعه ثابت است.
- ناحیه همگرایی نقطه تعادل سیستم نیز یک مجموعه ثابت است.
- تمامی فضای حالت یک مجموعه ثابت بدیهی، برای هر سیستم است.
- برای هر سیستم خودمختار هر مسیر در فضای حالت یک مجموعه ثابت آن سیستم است.
- سیکل های حدی نیز یک حالت خاص از مجموعه های ثابت است.

48

۳-۴: «روش مستقیم لیاپانوف»

- قضیه مجموعه ثابت محلی (Local Invariant Set)
- قضیه ۳-۴: سیستم خود مختار زیر را در نظر بگیرید که در آن f پیوسته است، و فرض کنید $V(x)$ تابع اسکالر با مشتق زمانی پیوسته باشد.

$$\dot{x} = f(x)$$

- فرض کنید:
- ۱- برای بعضی مقادیر $l > 0$ ناحیه Ω_l تعریف شده با شرط $V(x) < l$ کراندار باشد
- ۲-برای تمام نقاط داخل Ω_l داشته باشیم:

$$\dot{V}(x) \le 0$$

- فرض کنید R تمامی نقاط داخل Ω_l باشد که در آنها $\dot{V}(x) = 0$ و M بزرگترین مجموعه ثابت در R باشد.

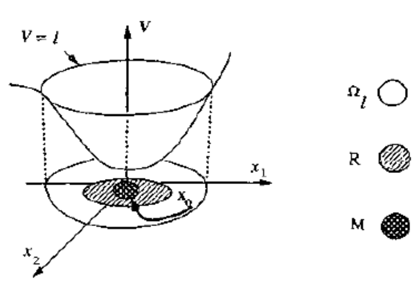
- آنگاه هر پاسخ x(t) که در Ω_l شروع شود با $t\rightarrow\infty$ به سمت M میل می کند.

- در قضیه فوق کلمه بزرگترین به معنی اجتماع تمامی مجموعه های دارای خاصیت $\dot{V}(x) = 0$ در R است. (نقاط تعادل و سیکل های حدی)

۳-۴: «روش مستقیم لیاپانوف»

- در حالت خاص اگر R خودش مجموعه ثابت باشد(یعنی در این مجموعه اگر $\dot{V}(x) = 0$ شود، آنگاه $\dot{V}(x) \equiv 0$ برای تمامی زمانهای آینده برقرار باشد)، آنگاه M=R

- نکته مهم۱: لازم نیست تابع لیاپانوف مثبت معین باشد.
- نکته مهم۲: لازم نیست مجموعه های R یا M متصل باشند.
- نکته: پایداری مجانبی در قضیه لیاپانوف محلی حالت خاص قضیه مجموعه ثابت است که در آن مجموعه M فقط از مبدأ تشکیل شده است.



۴-۳: «روش مستقیم لیاپانوف»

- مثال۳-۱۱: پایداری مجانبی سیستم جرم-دمپر-فنر
- معادله دینامیکی سیستم:

$$m\ddot{x}+b\dot{x}|\dot{x}|+k_0x+k_1x^3=0$$

با گرفتن $V(x)$ به عنوان انرژی سیستم :

$$V(x)=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\int_0^x (k_0x+k_1x^3)dx=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}k_0x^2+\frac{1}{4}k_1x^4$$

- چون مشتق زمانی این تابع منفی نیمه معین است، لذا با قضیه لیاپانوف ما فقط قادریم اثبات کنیم نقطه تعادل سیستم پایدار حاشیه ای است.
- اما با توجه به قضیه مجموعه ثابت می توان نشان داد سیستم در واقع پایدار مجانبی است.
- این کار به این روش اثبات می شود که مجموعه M ، تنها شامل نقطه مبدأ است.
- اثبات: با توجه به رابطه

$$\dot{V}(x)=m\dot{x}\ddot{x}+(k_0x+k_1x^3)\dot{x}=\dot{x}(-b\dot{x}|\dot{x}|)=-b|\dot{x}|^3$$

- مشتق تابع $V(x)$ همواره منفی است(b مثبت) مگر نقاط محور افقی که در آن داریم:

$$\dot{x}=0$$

51

۴-۳: «روش مستقیم لیاپانوف»

- مجموعه R نقاطی است که در آن داریم: $\dot{x}=0$
- این نقاط همان محور x یا محور افقی در صفحه فاز است. با توجه به استدلال زیر بزرگترین مجموعه ثابت M در مجموعه R فقط شامل مبدأ می باشد.
- فرض کنید M شامل نقاط دیگری غیر از مبدأ باشد. در این صورت با توجه به صفر بودن $\dot{x}$ داریم:

$$\ddot{x}=-\frac{1}{m}(k_0x+k_1x^3)\neq 0$$

- لذا x بلافاصله از مجموعه R و همچنین M بیرون می آید. و این موضوع با تعریف مجموعه M تناقض دارد. لذا x بایستی صفر باشد تا مشتق دوم آن نیز صفر شود.

52

۳-۴: «روش مستقیم لیاپانوف»

- مثال۳-۱۲: ناحیه همگرایی
- سیستم زیر مفروض است:

$$\dot{x}_1 = x_1(x_1^2 + x_2^2 - 2) - 4x_1 x_2^2$$
$$\dot{x}_2 = 4x_1^2 x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 2)$$

- برای l=2 ناحیه Ω_l که با رابطه:

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2 < 2$$

- تعریف می شود، کراندار است. مجموعه R همان مبدأ است. چرا که یک مجموعه ثابت است. (چرا که یک نقطه تعادل سیستم است.)
- تمامی شرایط قضیه مجموعه های ثابت محلی برقرار است.(چرا؟) لذا هر مسیری که در ناحیه فوق باشد، به سمت مبدأ میل می کنند.
- همانطور که دیده شد با استفاده از قضیه مجموعه ثابت می توان ناحیه همگرایی را بدست آورد.

53

۳-۴: «روش مستقیم لیاپانوف»

- مثال۳-۱۳: سیکل حدی همگرا
- سیستم زیر مفروض است:

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1^2(x_1^4 + 2x_2^2 - 10)$$
$$\dot{x}_2 = -x_1^3 - 3x_2^5(x_1^4 + 2x_2^2 - 10)$$

- مجموعه نقاط واقع در رابطه زیر:

$$x_1^4 + 2x_2^2 = 10$$

- مجموعه ای ثابت است زیرا مشتق زمانی نقاط روی این منحنی بسته (بیضی) عبارت است از:

$$\frac{d}{dt}(x_1^4 + 2x_2^2 - 10) = 4x_1^3\dot{x}_1 + 4x_2\dot{x}_2 = \cdots = -(4x_1^{10} + 12x_2^6)(x_1^4 + 2x_2^2 - 10)$$

- که در روی نقاط بیضی مذکور مقدار عبارت فوق صفر است. در روی این بیضی معادلات حالت سیستم به فرم زیر تبدیل می شوند:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1^3$$

- که نشان می دهد این مجموعه ثابت یک سیکل حدی است. (ساعتگرد)

54

۴-۳: «روش مستقیم لیاپانوف»

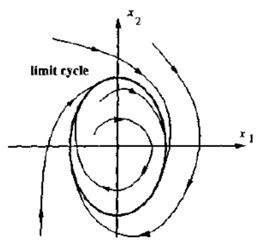
- چرا این سیکل حدی همگرا است؟
- تابع زیر را به عنوان کاندیدای تابع لیاپانوف در نظر بگیرید:

$$V(x)=(x_1^{\,4}+2x_2^{\,2}-10)^2$$

- که معیاری بر اساس فاصله نقطه تا سیکل حدی است. برای هر عدد مثبت l ناحیه Ω_l که اطراف سیکل حدی است را در نظر بگیرید. این ناحیه کراندار است. از طرفی داریم:

$$\dot{V}(x)=-8(x_1^{\,10}+3x_2^{\,6})(x_1^{\,4}+2x_2^{\,2}-10)^2$$

- که نشان میدهد مشتق V غیر از نقاط روی سیکل حدی و مبدأ، همواره منفی است.



- از آنجا که مجموعه M اجتماع مجموعه نقاط سیکل حدی و مبدأ می باشد، لذا هر مسیر سیستم که در Ω_l شروع شود به سیکل حدی یا مبدأ میل می کند.
- از طرفی می توان نشان داد، مبدأ نقطه تعادل ناپایدار است.
- که از خطی سازی نوع پایداری این نقطه حاشیه ای خواهد بود.

55

۴-۳: «روش مستقیم لیاپانوف»

- قضیه فرعی(استنباط): سیستم خود مختار زیر با تابع f پیوسته را در نظر بگیرید.

$$\dot{x}=f(x) \qquad (3.2)$$

- فرض کنید V(x) یک تابع اسکالر با مشتقات جزئی پیوسته باشد، فرض کنید در یک همسایگی Ω حول مبدأ داشته باشیم:
- V(x) مثبت معین محلی باشد.
- $\dot{V}(x)$ منفی نیمه معین باشد.
- مجموعه نقاط R که در آن نقاط $\dot{V}(x)=0$ شامل هیچ مسیری از معادله (۳-۲) غیر از مسیر بدیهی $x\equiv 0$ نباشد،
- آنگاه نقطه تعادل x=0 پایدار مجانبی است. بعلاوه وسیع ترین ناحیه متصل به فرم Ω_l (که با رابطه V(x)<l تعریف می شود) در داخل Ω ناحیه همگرایی نقطه تعادل است.
- بعلاوه بزرگترین مجموعه ثابت M در R تنها شامل نقطه تعادل مبدأ است.

56

۳-۴: «روش مستقیم لیاپانوف»

- نکات مهم:
- قضیه فرعی فوق شرط منفی معین بودن $\dot{V}(x)$ در قضیه پایداری مجانبی محلی لیاپانوف با شرط منفی نیمه معین $\dot{V}(x)$ ، به همراه شرط سوم روی مسیرهای داخل R جایگزین شده است.
- بزرگترین ناحیه متصل به فرم Ω_l داخل ناحیه Ω ناحیه همگرایی نقطه تعادل است. اما نه تمام ناحیه همگرایی چرا که تابع V(x) یکتا نیست.
- مجموعه Ω لزوماً ناحیه همگرایی نیست. در واقع قضیه فوق تضمینی برای ثابت بودن مجموعه Ω نیست. برخی از مسیرهای سیستم که از داخل ناحیه Ω و بیرون ناحیه Ω_l شروع می شوند ممکن است در بیرون از Ω خاتمه یابند.

57

۳-۴: «روش مستقیم لیاپانوف»

- قضیه ۳-۵ (مجموعه ثابت فراگیر)
  - سیستم خود مختار زیر مفروض است:

$$\dot{x} = f(x) \qquad (3.2)$$

- که در آن f پیوسته بوده و فرض کنید V(x) تابعی اسکالر با مشتقات اول جزئی پیوسته باشد. همچنین فرض کنید:
- ۱- $V(x) \to \infty \text{ as } \|x\| \to \infty$
- ۲- روی تمامی فضای حالت داشته باشیم: $\dot{V}(x) \le 0$
- همچنین فرض کنید R مجموعه ای از تمام نقاطی باشد که در آنها $\dot{V}(x) = 0$ و نیز M بزرگترین مجموعه ثابت در R باشد
- آنگاه با t⟶∞ تمامی جوابها، به صورت مجانبی فراگیر به سمت M همگرا می شود

58

۴-۳: «روش مستقیم لیاپانوف»

- در مثال ۳-۱۳ همگرایی سیکل حدی فراگیر است. چرا که هر مسیر سیستم به این سیکل حدی ختم می شود. (غیر از نقطه مبدأ که یک نقطه تعادل ناپایدار است.)

- مثال ۳-۱۴: دسته ای از سیستم های غیر خطی مرتبه دوم
- سیستم غیر خطی به فرم زیر را در نظر بگیرید:

$$\ddot{x} + b(\dot{x}) + c(x) = 0$$

- که در آن توابع b و c توابعی پیوسته اند که شرایط علامتی زیر را برآورده کند.

$$\dot{x}b(\dot{x}) > 0 \quad \text{for} \quad \dot{x} \neq 0$$
$$xc(x) > 0 \quad \text{for} \quad x \neq 0$$

- تابع مثبت معین زیر را در نظر بگیرید:

$$V(x) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \int_0^x c(y)dy$$

- (که می تواند به عنوان مجموع انرژی های جنبشی و پتانسیل سیستم تصور شود.)
- داریم:

$$\dot{V}(x) = \dot{x}\ddot{x} + c(x)\dot{x} = -\dot{x}b(\dot{x}) - \dot{x}c(x) + c(x)\dot{x} = -\dot{x}b(\dot{x}) \leq 0$$

59

۴-۳: «روش مستقیم لیاپانوف»

- همچنین با فرض

$$\dot{x}b(\dot{x}) = 0 \quad \text{only if } \dot{x} = 0$$

- در نقاطی که $\dot{x}=0$ خواهیم داشت:

$$\ddot{x} = -c(x)$$

- که غیر صفر است مگر در $x=0$

- لذا با فرض اینکه مجموعه R تمامی نقاط $\dot{x}=0$ باشد مجموعه M تنها شامل مبدأ می باشد.
- با استفاده از قضیه مجموعه ثابت محلی می توان نتیجه گرفت که مبدأ نقطه پایدار مجانبی محلی است.

- از طرف دیگر اگر حد انتگرال زیر بیکران شود، تابع اسکالر V بصورت شعاعی بیکران بوده و بنابراین بر اساس قضیه مجموعه ثابت فراگیر نقطه تعادل سیستم در مبدأ پایدار مجانبی فراگیر خواهد بود.

$$\int_0^x c(r)dr \to \infty \quad \text{as} \quad |x| \to \infty$$

60

۴-۳: «روش مستقیم لیاپانوف»

- برای مثال سیستم

$$\ddot{x}+\dot{x}^3+x^5=x^4\sin^2 x$$

- به صورت فراگیر به مبدأ همگرا است. در صورتی که از تقریب خطی آن حتی در خصوص پایداری محلی نتیجه ای حاصل نمی شود)

- مثال ۳-۱۵: تابع لیاپانوف چند ماهیتی
- سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\ddot{x}+|x^2-1|\dot{x}^3+x=\sin(\frac{\pi}{2}x)$$

- مشابه مثال قبل تابع لیاپانوف زیر را در نظر می گیریم:

$$V(x)=\frac{1}{2}\dot{x}^2+\int_0^x(y-\sin\frac{\pi}{2}y)dy$$

- این تابع دو مینیمم در نقاط $x=\pm1$ و $\dot{x}=0$ و نیز یک نقطه ماکزیمم در $x=0$ و $\dot{x}=0$ دارد.
- مشتق زمانی تابع V عبارت است از :

$$\dot{V}(x)=-|x^2-1|\dot{x}^4$$

- یعنی توان مجازی این سیستم به مرور کم می شود. حال با توجه به رابطه:

$$\dot{V}(x)=0\Rightarrow\dot{x}=0\quad\text{or}\quad x=\pm1$$

61

۴-۳: «روش مستقیم لیاپانوف»

- خواهیم داشت:

$$\dot{x}=0\Rightarrow\ddot{x}=\sin(\frac{\pi}{2}x)-x\neq0\quad\text{except if}\quad x=0\quad\text{or}\quad x=\pm1$$

$$x=\pm1\Rightarrow\ddot{x}=0$$

- لذا با استناد به قضیه مجموعه ثابت نتیجه می شود که سیستم بصورت فراگیر به نقطه ($x=1$, $\dot{x}=0$) یا نقطه ($x=-1$, $\dot{x}=0$) و یا نقطه ($x=0$, $\dot{x}=0$) همگرا خواهد بود.

- دو نقطه اول از این نقاط تعادل پایدار هستند چرا که نقاط مینیمم تابع V هستند و نقطه سوم (مبدأ) نقطه تعادل ناپایدار آن است چرا که ماکزیمم تابع لیاپانوف می باشد و هر تغییر کوچکی در جهت x مسیر های سیستم را از این نقطه تعادل دور میکند.

62

۳-۴: «روش مستقیم لیاپانوف»

- نکته مهم: همانطور که می دانیم توابع لیاپانوف متعددی را می توان برای بررسی پایداری نقاط تعادل یک سیستم تعریف نمود. لذا مسیر های سیستم به سمت اشتراک مجموعه های M_i مربوط به هر تابع لیاپانوف میل میکنند لذا اشتراک این مجموعه ها نتایج دقیق تری از هر کدام از مجموعه های مجزا ناشی از توابع لیاپانوف ارائه می نماید.

- به طور مشابه مجموع دو تابع لیاپانوف تابع لیاپانوفی خواهد شد که مجموعه R آن اشتراک مجموعه R_i هر کدام از توابع هستند لذا میتواند به عنوان تابع بهتری نسبت به هر یک از توابع لیاپانوف به تنهایی عمل کند.

63

۳-۵: «آنالیز سیستم با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف»

- با توجه به قضایا و مثال های فراوان بخش قبل، ممکن است نسبت به حل مسائل کنترل غیر خطی عملی اطمینان کافی حاصل شود. اما تمام قضایای قبل مبتنی بر این فرض است که تابع لیاپانوف صریحی موجود است.
- سوال : چگونه تابع لیاپانوف یک مسئله خاص را پیدا کنیم؟
- تا کنون روش عمومی برای یافتن تابع لیاپانوف برای سیستم های غیر خطی وجود ندارد.
- این مشکل، مهمترین عیب روش مستقیم لیاپانوف است.
- در برخورد با یک سیستم خاص بایستی از تجربیات، بینش و دید فنی، برای یافتن تابع لیاپانوف مناسب استفاده کرد.
- در این بخش روش هایی جهت تسهیل در یافتن تابع لیاپانوف ارائه خواهد شد.
- در ابتدا تابع لیاپانوف سیستم های خطی را به روشی منظم بدست خواهیم آورد.
- سپس دو روش از بین روشهای متعدد محاسباتي، که میتواند در یافتن تابع لیاپانوف برای سیستم داده شده مفید باشد، ارائه خواهد شد.
- سپس با در نظر گرفتن دید فنی (فیزیکی)، قوی ترین و زیباترین راه حل مسئله که نزدیکترین متد به مفهوم واقعی روش مستقیم لیاپانوف است، ارائه خواهد شد.
- در نهایت استفاده از تابع لیاپانوف برای آنالیز مشخصه گذرا توضیح داده خواهد شد.

64

۳-۵: «آنالیز سیستم با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف»

- ۳-۵-۱ آنالیز لیاپانوف برای سیستم های خطی تغییر ناپذیر با زمان

- دلایل توسعه روش لیاپانوف جهت سیستم های خطی
- ۱- توصیف سیستم های خطی و غیر خطی با یک زبان مشترک
- ۲- بدست آوردن تابع لیاپانوف ترکیبی از سیستم های خطی و غیر خطی به صورت مجموع تابع لیاپانوف هر زیر سیستم

- ***ماتریس های متقارن، پاد متقارن و مثبت معین***
- تعریف ۳-۱۰: ماتریس مربعی M متقارن است اگر $M = M^T$
- ماتریس مربعی M پاد متقارن است اگر $M = -M^T$

- نکته: هر ماتریس مربعی را میتوان به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پاد متقارن نوشت. زیرا:

$$M = \frac{M + M^T}{2} + \frac{M - M^T}{2}$$

۳-۵: «آنالیز سیستم با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف»

- نکته: در یک ماتریس پاد متقارن عناصر قطر اصلی همگی صفرند. (چرا؟)
- نکته: تابع درجه دوم متناظر با یک ماتریس پاد متقارن صفر است. زیرا با فرض پاد متقارن بودن ماتریس مربعی M و بردار اختیاری x داریم:

$$x^T Mx = -x^T M^T x$$

- چون عبارات هر دو طرف تساوی اسکالر هستند، ترانهاده طرف دوم مساوی طرف دوم است. لذا:

$$x^T Mx = -x^T Mx \Rightarrow x^T Mx = 0 \quad \forall x$$

- خاصیت فوق شرط لازم و کافی برای آنست که یک ماتریس پاد متقارن باشد. زیرا با فرض آنکه رابطه فوق برای هر بردار درست باشد، میتوان از بردارهای پایه e_i و e_j به جای xاستفاده کرد. لذا داریم:

$$\forall i \quad , \quad e_i^T Me_i = 0 \Rightarrow \forall i \quad M_{ii} = 0$$

and

$$\forall (i,j) \quad , \quad (e_i + e_j)^T M(e_i + e_j) = 0 \Rightarrow \forall (i,j) \quad M_{ii} + M_{ij} + M_{ji} + M_{jj} = 0$$

this imply that

$$\forall (i,j) \ M_{ij} = -M_{ji}$$

۳-۵: «آنالیز سیستم با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف»

- نکته: از آنجا که هر ماتریس مربعی را می توان به صورت جمع دو ماتریس متقارن و پاد متقارن نوشت لذا داریم:

$$x^T Mx = x^T(\frac{M+M^T}{2})x + x^T(\frac{M-M^T}{2})x = x^T(\frac{M+M^T}{2})x$$

- یعنی بدون از دست دادن کلیت بحث، هر تابع درجه دوم به عنوان کاندیدای تابع لیاپانوف به صورت روابط فوق را می توان با فرض تقارن ماتریس M در نظر گرفت.

- تعریف ۳-۱۱: ماتریس مربعی $M_{n\times n}$ را مثبت معین میگویند اگر:

$$x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x^T Mx > 0$$

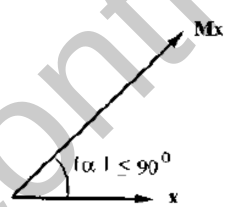
- به بیان دیگر ماتریس M مثبت معین است اگر تابع مربعی x^TMx مثبت معین باشد.

- نکته: برای هر ماتریس مثبت معین متناظر با یک تابع مثبت معین است. ولی عکس این مطلب صحیح نیست. یعنی توابع مثبت معین زیادی می توان یافت که نمی توان آنها را به فرم ماتریسی فوق نوشت.

67

۳-۵: «آنالیز سیستم با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف»

- تعبیر هندسی مثبت معین: میتوان گفت اگر x برداری در فضای برداری باشد و Mx به عنوان تصویر یا نگاشت این بردار تحت تبدیل M باشد، اگر زاویه بین این دو بردار کمتر از ۹۰ درجه باشد، آنگاه M مثبت معین است.



- شرط لازم برای آنکه ماتریس مربعی M مثبت معین باشد آن است که عناصر قطر اصلی آن اکیداً مثبت باشند. زیرا با اعمال خاصیت فوق در خصوص زوایای تبدیل یافته بردار های پایه میتوان این خاصیت را اثبات کرد.

68

۳-۵: «آنالیز سیستم با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف»

- قضیه سیلوستر:
- اگر ماتریس M متقارن باشد، شرط لازم و کافی برای مثبت معین بودن M آنست که هر یک از شرایط زیر برقرار باشند.
- ۱) تمامی کهادهای اصلی مقدم ماتریس M که به صورت زیر تعریف می شوند، اکیداً مثبت باشند.

$$\Delta_1 = m_{11}\,,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} \cdots \Delta_n = |M|$$

- ۲) تمامی مقادیر ویژه M اکیداً مثبت باشند.

- نکته: هر ماتریس مثبت معین معکوس پذیر است. (چرا؟)
- نکته: هر ماتریس مثبت معین را می توان به صورت زیر تجزیه کرد. $M = U^T \Lambda U$
- که در آن U ماتریس متشکل از بردارهای ویژه است که در رابطه زیر صدق کند و Λ ماتریس قطری که مقادیر قطر آن مقادیر ویژه ماتریس M است.

$$U^T U = I$$

69

۳-۵: «آنالیز سیستم با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف»

- نکته: رابطه زیر بین مقادیر ویژه ماتریس M و تابع مثبت معین متناظر آن برقرار است.

$$\lambda_{\min}(M)\|x\|^2 \le x^T M x \le \lambda_{\max}(M)\|x\|^2$$

- شرط لازم و کافی برای آنکه صورت مرتبه دوم $x^T M x$ مثبت نیمه معین باشد آنست که : اولاً ماتریس M ویژه بوده و ثانیاً کلیه کهاد های اصلی آن غیر منفی باشند.

- ماتریس M را منفی معین گوییم هر گاه تمامی کهادهای اصلی مقدم مرتبه زوج آن اکیداً مثبت و تمامی کهادهای اصلی مقدم مرتبه فرد آن اکیداً منفی باشند.

- ماتریس M را منفی نیمه معین گوییم هر گاه ماتریس M ویژه بوده و تمامی کهادهای اصلی مقدم مرتبه زوج آن غیر منفی و تمامی کهادهای اصلی مقدم مرتبه فرد آن غیر مثبت باشند.

- اگر هیچ یک از شرایط فوق بر قرار نباشد ماتریس M و متناظر با آن صورت مرتبه دوم آنرا نامعین می گویند.

70

۵-۳: «آنالیز سیستم با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف»

- مثال:

$$V(x) = 10x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 4x_1x_3$$

$$V(x) = [x_1, x_2, x_3]\begin{bmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$m_{11} = 10 > 0 \ , \ \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} > 0 \ , \ |M| > 0 \Rightarrow \mathrm{M\ \&\ V(x)\ are\ P.D.}$$

- مفهوم نابرابری ماتریسها:

$$M_1 > M_2 \Rightarrow M_1 - M_2 > 0 \quad \text{means} \quad (M_1 - M_2) \ \ is \ \ P.D.$$

- در فرم دیگر داریم:

$$M_1 \geq M_2 \Rightarrow M_1 - M_2 \geq 0 \quad \text{means} \quad (M_1 - M_2) \ \ is \ \ P.S.D.$$

71

۵-۳: «آنالیز سیستم با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف»

- مفهوم مثبت معین بودن و منفی معین بودن ماتریس های مربعی متغیر با زمان:
- ماتریس متغیر با زمان M(t) را بطور یکنواخت مثبت معین گویند اگر

$$\exists \alpha > 0, \ \forall \mathrm{t} \geq 0, M(t) \geq \alpha I$$

- ماتریس متغیر با زمان M(t) را بطور یکنواخت منفی معین گویند اگر

$$\exists \alpha < 0, \ \forall \mathrm{t} \geq 0, M(t) \leq \alpha I$$

72

۳-۵: «آنالیز سیستم با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف»

- تابع لیاپانوف برای سیستم های خطی ثابت با زمان
- سیستم LTI به فرم زیر مفروض است:

$$\dot{x} = Ax$$

- تابع مربعی به عنوان داوطلب تابع لیاپانوف را به فرم زیر تعریف می کنیم:

$$V = x^T P x$$

- که در آن P ماتریسی متقارن و مثبت معین است. با مشتق گیری از V در طول مسیر های سیستم داریم:

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (A^T P + PA) x = -x^T Q x$$

- که در آن:
- معادله لیاپانوف: $A^T P + PA = -Q$

- اگر ماتریس Q مثبت معین باشد، مبدا که نقطه تعادل سیستم است، پایدار خواهد بود. حال بایستی شرایطی را بررسی کنیم که تحت آن Q مثبت معین شود.

73

۳-۵: «آنالیز سیستم با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف»

- مثال: سیستمی با معادلات حالت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -8 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- اگر $P=I$ بگیریم داریم:

$$-Q = PA + A^T P = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -24 \end{bmatrix} \Rightarrow Q \ \text{ is not P.D.}$$

- لذا راجع به پایداری نقطه تعادل این سیستم نمی توان چیزی گفت.

- راه مناسب برای اثبات پایداری سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان تعیین ماتریس مثبت معین Q و سپس بدست آوردن ماتریس متناظر و مثبت معین P است که در معادله لیاپانوف صدق کند.
- مراحل کار:
- ۱- انتخاب ماتریس مثبت معین Q
- ۲- حل معادله لیاپانوف برای رسیدن به ماتریس P
- ۳- بررسی مثبت معین بودن ماتریس P

74

۳-۵: «آنالیز سیستم با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف»

- قضیه ۳-۶: شرط لازم و کافی برای آنکه سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان زیر:

$$\dot{x} = Ax$$

- اکیداً پایدار باشد، آنست که برای هر ماتریس مثبت معین متقارن Q پاسخ منحصر بفرد P که از معادله لیاپانوف بدست می آید، متقارن و مثبت معین باشد.

- نکته مهم: چون هر ماتریس مثبت معین Q می تواند برای تست پایداری سیستم استفاده شود بهتر است از ماتریس همانی I استفاده کرد.

- مثال:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -8 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- با فرض $Q=I$ و نیز P به فرم کلی زیر داریم:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

- با توجه به تقارن P میتوان نوشت:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

75

۳-۵: «آنالیز سیستم با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف»

- لذا معادله لیاپانوف را میتوان به فرم زیر نوشت:

$$PA + A^T P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -8 & -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 4 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- لذا خواهیم داشت:

$$p_{11} = 5/16 \quad , \quad p_{12} = p_{22} = 1/16$$

$$P = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- که مثبت معین است. لذا سیستم مذکور که در مثال قبل نتوانستیم راجع به پایداری آن اظهار نظری کنیم با این روش اثبات شد پایدار مجانبی فراگیر است.

76

۳-۵: «آنالیز سیستم با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف»

- ۳-۵-۲ روش کراسوفسکی
- در این روش که توسط دانشمندی به همین نام ابداع شد، فرم ساده ای از کاندیدای تابع لیاپانوف به فرم $V = f^T f$ انتخاب می شود و بررسی می شود که آیا این انتخاب خاص به یک تابع لیاپانوف منجر خواهد شد یا خیر.
- قضیه ۳-۷(کراسوفسکی): سیستم خود مختار به فرم زیر مفروض است:

$$\dot{x} = f(x) \qquad (3.2)$$

- بهتر است نقطه تعادل سیستم در مبدأ واقع باشد. اگر A(x) ژاکوبین سیستم به فرم زیر باشد،

$$A(x) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

- اگر ماتریس $F=A+A^T$ در همسایگی Ω منفی معین باشد، آنگاه نقطه تعادل مبدأ پایدار مجانبی خواهد بود. یک تابع لیاپانوف برای این سیستم عبارت است از:

$$V(x) = f^T(x) f(x)$$

- بعلاوه اگر Ω کل فضای حالت را شامل شود، و داشته باشیم: $\|V(x)\| \to \infty \quad as \quad \|x\| \to \infty$
- نقطه تعادل سیستم پایدار مجانبی فراگیر خواهد بود.

۳-۵: «آنالیز سیستم با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف»

- مثال: سیستم غیر خطی:

$$\dot{x}_1 = -6x_1 + 2x_2$$
$$\dot{x}_2 = 2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3$$

- ژاکوبین سیستم:

$$A(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -6-6x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$F = A + A^T = \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -12-12x_2^2 \end{bmatrix}$$

- ماتریس F در تمامی فضای حالت منفی معین است. بنابراین مبدأ پایدار مجانبی است. و تابع لیاپانوف کاندیدا عبارت است از:

$$V(x) = f^T(x) f(x) = (-6x_1 + 2x_2)^2 + (2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3)^2$$

77

78

۳-۵: «آنالیز سیستم با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف»

- از آنجا که

$$\|V(x)\| \to \infty \quad as \quad \|x\| \to \infty$$

- حالت تعادل سیستم در مبدأ پایدار مجانبی فراگیر است.
- اشکالات این روش:
- ۱) ژاکوبین بسیاری از سیستم ها شرط منفی معین بودن F را برآورده نمی کند.
- ۲) برای سیستم های مرتبه بالا چک کردن منفی معین بودن ماتریسF به ازای تمامی مقادیر x مشکل است.

79

۳-۵: «آنالیز سیستم با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف»

- قضیه ۳-۸ (قضیه کراسوفسکی تعمیم یافته)
- سیستم خود مختار به فرم زیر مفروض است:

$$\dot{x} = f(x) \qquad (3.2)$$

- بهتر است نقطه تعادل سیستم در مبدأ واقع باشد. اگر A(x) ژاکوبین سیستم به فرم زیر باشد،

$$A(x) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

- آنگاه یک شرط کافی برای پایداری مجانبی مبدأ آنست که دو ماتریس متقارن مثبت معینP و Q موجود باشند به قسمی که ماتریس:

$$F(x) = A^T P + PA + Q$$

- در همسایگی Ω منفی نیمه معین باشد. در ضمن تابع :

$$V(x) = f^T(x) P f(x)$$

- تابع لیاپانوفی برای سیستم خواهد بود. بعلاوه اگر Ω کل فضای حالت را شامل شود، و داشته باشیم:
- نقطه تعادل سیستم پایدار مجانبی فراگیر خواهد بود.

$$\|V(x)\| \to \infty \quad as \quad \|x\| \to \infty$$

80

۳-۵: «آنالیز سیستم با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف»

- ۳-۵-۳ روش گرادیان متغیر
- روش گرادیان متغیر روشی مرسوم جهت ساخت توابع لیاپانوف است.
- در این روش فرض بر این است که گرادیان تابع لیاپانوف نامعلوم، فرم خاصی دارد.
- با انتگرال گیری از گرادیان مذکور به تابع لیاپانوف می رسیم.
- این روش در بعضی مواقع که مرتبه سیستم پایین باشد به کشف تابع لیاپانوف می انجامد

- روابط مهم:
- ۱- بردار گرادیان:

$$\nabla V = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

81

۳-۵: «آنالیز سیستم با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف»

- ۲- رابطه گرادیان یک تابع و انتگرال آن:

$$V(x) = \int_0^x \nabla V dx$$

- ۳- شرایط کرل (Curl) برای بدست آوردن تابع یکتا برای V :

$$\frac{\partial \nabla V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \nabla V_j}{\partial x_i} \quad (i, j = 1,2,\dots,n)$$

- که در آن:

$$\nabla V_i = \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (i = 1,2,\dots,n)$$

- بازنویسی شرط کرل:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i} \quad (i, j = 1,2,\dots,n)$$

82

۳-۵: «آنالیز سیستم با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف»

- فرض: تابع گرادیان به فرم کلی زیر است:

$$\nabla V_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (i=1,2,\ldots,n) \qquad (3.21)$$

- که a_{ij} ضرایبی (مقادیر ثابت یا توابعی از x) هستند که بایستی محاسبه شوند.

- روش یافتن تابع لیاپانوف V:
- ۱- فرض میکنیم گرادیان تابع لیاپانوف به فرم رابطه (3.21) موجود باشد.
- ۲- با فرض برقراری شرط کرل رابطه فوق را برای یافتن ضرایب a_{ij} حل می کنیم.
- ۳- ضرایب رابطه (3.21) را به نحوی محدود می کنیم که مشتق زمانی V منفی نیمه معین باشد. (حتی به صورت محلی)
- ۴- با انتگرال گیری از گرادیان به تابع لیاپانوف می رسیم.
- ۵- بررسی می کنیم آیا تابع V مثبت معین است یا خیر.

83

۳-۵: «آنالیز سیستم با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف»

- نکته مهم: با توجه به شرط کرل انتگرال گیری مرحله ۴ مستقل از مسیر می باشد لذا می توان نوشت:

$$V(x) = \int_0^x \nabla V dx = \int_0^{x_1} \nabla V_1(x_1,0,\ldots,0)dx_1 +$$

$$\int_0^{x_2} \nabla V_2(x_1,x_2,0,\ldots,0)dx_1 + \cdots + \int_0^{x_n} \nabla V_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_n$$

84

۳-۵: «آنالیز سیستم با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف»

- مثال: یافتن تابع لیاپانوف سیستم زیر:

$$\dot{x}_1 = -2x_1$$
$$\dot{x}_2 = -2x_2 + 2x_1 x_2^{\,2}$$

- حل: فرض کنید فرم گرادیان تابع لیاپانوف مورد نظر به شکل زیر باشد:

$$\nabla V_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$
$$\nabla V_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

- رابطه کرل :

$$\frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \nabla V_2}{\partial x_1} \Rightarrow a_{12} + x_2\frac{\partial a_{12}}{\partial x_2} = a_{21} + x_1\frac{\partial a_{21}}{\partial x_1}$$

- با انتخاب مقادیر ثابت زیر برای ضرایب:

$$a_{11} = a_{22} = 1 \;,\quad a_{12} = a_{21} = 0$$

85

۳-۵: «آنالیز سیستم با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف»

- داریم:

$$\nabla V_1 = x_1$$
$$\nabla V_2 = x_2$$

- لذا می توان نوشت:

$$\dot{V} = \nabla V\,\dot{x} = -2x_1^{\,2} - 2x_2^{\,2}(1 - x_1x_2)$$

- که در ناحیه $(1-x_1x_2)>0$ منفی معین است.

- تابع V را از انتگرال گیری زیر بدست می آوریم:

$$V(x) = \int_0^{x_1} x_1 dx_1 + \int_0^{x_2} x_2 dx_2 = \frac{x_1^{\,2} + x_2^{\,2}}{2}$$

- همانطور که دیده می شود این تابع مثبت معین است. لذا پایداری مجانبی محلی این سیستم در نقطه تعادل مبدأ اثبات می شود.

86

۳-۵: «آنالیز سیستم با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف»

- در همین مثال با فرض ضرایب به صورت زیر:

$$a_{11} = 1, a_{12} = x_1^{\ 2}$$
$$a_{21} = 3x_2^{\ 2}, a_{12} = 3$$

- با محاسبه تابع لیاپانوف به روش قبل خواهیم داشت:

$$V(x) = \frac{x_1^{\ 2}}{2} + \frac{3}{2}x_2^{\ 2} + x_1x_2^{\ 3}$$

- مشتق زمانی تابع فوق:

$$\dot{V} = -2x_1^{\ 2} - 6x_2^{\ 2} - 2x_2^{\ 2}(x_1x_2 - 3x_1^{\ 2}x_2^{\ 2})$$

- که نشاندهنده منفی معین بودن آن در نزدیکی مبدأ است. لذا V تابع لیاپانوف دیگری برای سیستم قبل است.

87

۳-۵: «آنالیز سیستم با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف»

- فرم کلی دینامیک یک ربات n لینکی

$$H(q)\ddot{q} + b(q,\dot{q}) + g(q) = \tau$$

- H(q) : ماتریس اینرسی n×n
- b : بردار n بعدی کوریولیس و نیروهای گریز از مرکز
- g : بردار n بعدی گشتاورهای گرانشی

- فرض کنید کنترل کننده ای به فرم زیر به سیستم اعمال کنیم:

$$\tau = -K_D\dot{q} - K_P q + g(q)$$

- که ضرایب K_D و K_P ماتریسهای n×n مثبت معین هستند.

- یافتن تابع لیاپانوف برای سیستم فوق با کنترل کننده مفروض از راه سعی و خطا بسیار مشکل است زیرا رابطه سیستم برای یک ربات ۵ یا ۶ لینکی متشکل از صدها عبارت غیر خطی است.

88

۳-۵: «آنالیز سیستم با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف»

- برای چنین سیستمی با کمک دید فیزیکی، تابع لیاپانوف مناسبی میتوان یافت. لازم به ذکر است ماتریس H در مورد سیستم های رباتیکی برای هر مقدار q مثبت معین است.
- تابع لیاپانوف پیشنهادی:

$$V = \frac{1}{2}\left[\dot{q}^T H \dot{q} + q^T K_P q\right]$$

- قسمت اول عبارت فوق انرژی جنبشی ربات و قسمت دوم انرژی پتانسیل مجازی مرتبط با فنر مجازی ناشی از اعمال کنترل کننده تناسبی است.
- با توجه به اینکه سیستم های مکانیکی نرخ تغییرات انرژی جنبشی برابر است با توان تولید شده از مجموع نیروهای خارجی داریم:

$$\dot{V} = \dot{q}^T(\tau - g) + \dot{q}^T K_P q$$

- با استفاده از قانون کنترل خواهیم داشت:

$$\tau = -K_D\dot{q} - K_P q + g(q) \Rightarrow \dot{q}^T(\tau - g) = -\dot{q}^T K_D \dot{q} - \dot{q}^T K_P q$$

- لذا داریم:

$$\dot{V} = -\dot{q}^T K_D \dot{q}$$

- که با توجه به مثبت معین بودن ماتریس K_D مشتق V منفی معین است.

89

۳-۵: «آنالیز سیستم با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف»

- با توجه به قضیه مجموعه ثابت میتوان ثابت کرد مبدأ پایدار مجانبی فراگیر است.

- درسهایی از این مثال عملی:
- ۱- برای آنالیز رفتار سیستم های فیزیکی بایستی از تمامی خواص فیزیکی ممکن استفاده نماییم.

- ۲- مفاهیم فیزیکی از قبیل انرژی ممکن است منجر به انتخاب قدرتمند و منحصر بفرد توابع لیاپانوف شود.

- نکته مهم: مشتق زمانی انرژی (توان) حاصل ضرب نیرو در سرعت (مشتق زمانی جابجایی) است. مثال:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \dot{E} = P = m\dot{v}v = mav = fv$$

$$E = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \dot{E} = P = kx\dot{x} = fv$$

$$E = mgh \Rightarrow \dot{E} = P = mg\dot{h} = fv$$

90

۳-۵: «آنالیز سیستم با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف»

- ***۳-۵-۵ آنالیز کارایی***

- در قسمت های قبل هدف ما بررسی پایداری سیستم با استفاده از توابع لیاپانوف بود.

- بعضی مواقع توابع لیاپانوف قادرند علاوه بر پایداری، مشخصات گذرای سیستم پایدار را تخمین بزنند.

- به طور خاص این توابع به ما این امکان را می دهند که نرخ همگرایی سیستم های خطی یا غیر خطی را تخمین بزنیم.

- در این قسمت ابتدا به ارائه یک لم روی نامساوی های دیفرانسیل می پردازیم. سپس نشان می دهیم چگونه با استفاده از آنالیز لیاپانوف میتوان برای محاسبه نرخ همگرایی سیستم های خطی و غیر خطی استفاده کرد.

91

۳-۵: «آنالیز سیستم با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف»

- لم: اگر تابع حقیقی *W(t)* در نامساوی زیر صدق کند،

$$\dot{W}(t)+\alpha W(t)\leq 0$$

- که در آن α عددی حقیقی است. آنگاه میتوان نوشت:

$$W(t)\leq W(0)e^{-\alpha t}$$

- لم فوق بیان می دارد که اگر W تابعی غیر منفی باشد، شرط فوق همگرایی نمایی W را تضمین می کند.

- در استفاده از تابع لیاپانوف در بعضی مواقع می توان V را طوری تعیین کرد که در شرط فوق صدق کرده و براساس آن نرخ همگرایی V(t) را تعیین کرد.

92

۳-۵: «آنالیز سیستم با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف»

- تخمین نرخ همگرایی سیستم های خطی
- در سیستم های خطی به فرم زیر:

$$\dot{x} = Ax$$

- تابع لیاپانوف به فرم زیر بدست آمد:

$$V = x^T P x$$

- لذا :

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (A^T P + PA) x = -x^T Q x$$

- که در آن:

$$A^T P + PA = -Q$$

- با فرض بزرگترین مقدار ویژه ماتریس P و کوچکترین مقدار ویژه Q و نسبت آنها با نمادهای زیر:

$$\lambda_{\max}(P) \quad , \quad \lambda_{\min}(Q) \quad , \quad \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} = \gamma$$

- و با فرض مثبت معین بودن P و Q، واضح است که هر سه مقدار فوق اکیداً مثبت هستند.

93

۳-۵: «آنالیز سیستم با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف»

- از طرف دیگر با توجه به روابط زیر (از تئوری ماتریس ها):

$$P \le \lambda_{\max}(P) I \quad , \quad \lambda_{\min}(Q) I \le Q$$

- داریم:

$$x^T Q x \ge \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} x^T [\lambda_{\max}(P) I] x \ge \gamma V$$

- این رابطه به همراه رابطه:

$$\dot{V} = -x^T Q x$$

- نتیجه خواهد داد:

$$\dot{V} \le -\gamma V \Rightarrow \dot{V} + \gamma V \le 0$$

- پس بر اساس لم فوق خواهیم داشت:

$$V(t) = x^T P x \le V(0) e^{-\gamma t}$$

- از طرف دیگر داریم:

$$V(t) = x^T P x \ge \lambda_{\min}(P) \|x(t)\|^2$$

- لذا حالت x با نرخ حداقل γ/2 به سمت مبدأ می رود.

94

۳-۵: «آنالیز سیستم با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف»

- نکته۱: میتوان ثابت کرد که با انتخاب $Q=I$ بالاترین مقدار تخمین نرخ همگرایی بدست می آید.
- نکته۲: اگر ماتریس پایدار A متقارن باشد، تمامی مقادیر ویژه A حقیقی هستند.
- نکته ۳: اگر ماتریس پایدار A متقارن باشد، این ماتریس قابل قطری سازی است.
- نکته۴: اگر ماتریس پایدار A متقارن باشد، می توان ثابت کرد اگر Q=I باشد ،
- آنگاه $P=-1/2A^{-1}$
- نکته۵: اگر ماتریس پایدار A متقارن باشد، مقدار $\gamma/2$ برابر با قدر مطلق قطب غالب سیستم است. لذا مستقل از انتخاب متغیرهای حالت است.

95

۳-۵: «آنالیز سیستم با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف»

- تخمین نرخ همگرایی سیستم های غیرخطی
- تخمین نرخ همگرایی سیستم های غیر خطی مستلزم تبدیل ماهرانه مشتق V است بطوری که به تخمین مناسبی برای V منجر گردد.
- اختلاف سیستم های غیر خطی و خطی آن است که در سیستم های غیر خطی لزوماً تابع لیاپانوف مربعی نیست.
- مثال: در سیستم زیر :

$$\dot{x}_1 = x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) - 4x_1x_2^2$$
$$\dot{x}_2 = 4x_1^2x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

- تابع لیاپانوف به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$V = \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$$

- داریم:

$$\dot{V} = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 2V(V-1)$$

96

۳-۵: «آنالیز سیستم با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف»

- بنابراین:

$$\frac{dV}{V(V-1)} = -2dt$$

- با حل معادله دیفرانسیل فوق خواهیم داشت:

$$V(x) = \frac{\alpha e^{-2t}}{1+\alpha e^{-2t}}$$

- که در آن:

$$\alpha = \frac{V(0)}{1-V(0)}$$

- اگر مسیر ها از درون دایره واحد شروع شوند، داریم:

$$V(0) = \|x(0)\|^2 < 1 \Rightarrow \alpha > 0 \Rightarrow V(t) < \alpha e^{-2t}$$

- که نشان می دهد نرم x (بردار حالت سیستم) به صورت نمایی با نرخ واحد به سمت صفر می رود

97

۳-۵: «آنالیز سیستم با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف»

- در صورتی که مسیر از بیرون دایره واحد شروع شود، داریم:

$$V(0) = \|x(0)\|^2 > 1 \Rightarrow \alpha < 0 \Rightarrow V(t) \to \infty \quad \text{as} \quad t = -\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{|\alpha|})$$

- که نشاندهنده رفتار انفجار گونه سیستم است.

98

۳-۶: «طراحی کنترل بر اساس روش مستقیم لیاپانوف»

- در بخشهای قبل از روش مستقیم لیاپانوف برای آنالیز سیستم هایی استفاده نمودیم که قانون کنترل برای آنها از پیش طراحی شده بود.

- در بسیاری از مسایل کنترل، هدف طراح انتخاب قانون کنترل مناسب برای یک سیستم خاص که منجر به پایداری و عملکرد مناسب سیستم تحت کنترل گردد، می باشد

- در این بخش به اختصار چگونگی استفاده از روش مستقیم لیاپانوف برای طراحی سیستم های کنترل پایدار توضیح داده شده است.

- در فصول ۶ تا ۹ کتاب این روش ها که همگی مبتنی بر مفاهیم لیاپانوف هستند بسط یافته اند.

99

۳-۶: «طراحی کنترل بر اساس روش مستقیم لیاپانوف»

- دو روش موجود جهت استفاده از روش مستقیم لیاپانوف که هر دو مبتنی بر سعی و خطا هستند:

- ۱- در روش اول ابتدا یک فرم از قانون کنترل فرض شده سپس به یافتن تابع لیاپانوف برای اثبات پایداری می پردازیم. (مانند مثال ربات با کنترل کننده PD)

- ۲- در روش دوم برعکس روش اول با فرض یک تابع لیاپانوف کاندیدا و سپس یافتن یک قانون کنترل، سعی خواهیم کرد با تعیین مناسب قانون کنترل، تابع لیاپانوف کاندیدا به یک تابع لیاپانوف واقعی برای سیستم تحت کنترل تبدیل شود. (مثال بعد)

100

۳-۶: «طراحی کنترل بر اساس روش مستقیم لیاپانوف»

- مثال (استفاده از روش دوم برای طراحی سیستم کنترل):
- سیستم زیر مفروض است:

$$\ddot{x}-\dot{x}^{3}+x^{2}=u$$

- هدف طراحی پایدار ساز سیستم است بطوری که تمامی مسیرهای سیستم را به نقطه تعادل سیستم که مبدأ است، بیاورد.
- براساس مثال ۳-۱۴ (اسلاید شماره ۵۹) کافی است قانون کنترلی به صورت زیر داشته باشیم:

$$u=u_{1}(\dot{x})+u_{2}(x)$$

- که در آن روابط زیر حاکم باشند:

$$\dot{x}(\dot{x}^{3}+u_{1}(\dot{x}))<0 \quad \text{for} \quad \dot{x}\neq 0$$

$$x(x^{2}-u_{2}(x))>0 \quad \text{for} \quad x\neq 0$$

- به طور مثال رابطه زیر میتواند سیستم را پایدار کند. (چرا؟)

$$u=-2\dot{x}^{3}-5x|x|$$

101

۳-۶: «طراحی aکنترل بر اساس روش مستقیم لیاپانوف»

- همچنین این کنترل کننده قادر است هر سیستم به فرم :

$$\ddot{x}+\alpha_{1}\dot{x}^{3}+\alpha_{2}x^{2}=u$$

را که در آن

$$\alpha_{1}>-2$$

$$|\alpha_{2}|<5$$

باشد را پایدار کند.(چرا؟)

102

۳-۶: «طراحی کنترل بر اساس روش مستقیم لیاپانوف»

- در برخی از سیستم های غیر خطی رویه های طراحی منظمی مبتنی بر دو روش قبل توسعه یافته اند که در فصل ۷ روش مد لغزشی ،فصل ۸ روش کنترل تطبیقی و فصل ۹ روش مبتنی بر طراحی های فیزیکی دیده می شوند.

- نکته: همانطور که یک سیستم غیر خطی ممکن است پایدار مجانبی فراگیر بوده ولی خطی شده آن تنها پایدار حاشیه ای باشد، یک سیستم غیر خطی نیز ممکن است کنترل پذیر بوده ولی سیستم خطی شده آن کنترل ناپذیر باشد.

- مثال: سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\ddot{x} + \dot{x}^5 = x^2 u$$

- با اعمال کنترل کننده زیر این سیستم پایدار مجانبی فراگیر است.

$$u = -x$$

- در صورتی که تقریب خطی آن در مبدأ (x=0 , u=0) برابر است با:

$$\ddot{x} = 0$$

- که کنترل ناپذیر است.

"پایان فصل ۳"

103