پلتفرم اختصاصی

مهندسی کنترل

https://controlengineers.ir

https://t.me/controlengineers

https://www.instagram.com/controlengineers.ir

« سیستم های کنترل خطی »

تعداد واحد : ۳ واحد نظری

پیشنیاز : *ماشین الکتریکی ۱* و تجزیه و تحلیل سیستمها

سر فصل :

کاربرد فیدبک ، مدل سازی سیستم های فیدبک ، تعاریف پایداری ، تابع تبدیل F(s) ، صفرها و قطبهای تابع تبدیل و نمایش آنها در محورهای مختصات s، معیارهای کارآیی سیستم در حالت گذار و ماندگار ، نوع(Type) سیستمها، سرو مکانیسم و کنترل کننده های PD , P , PID , PI، بررسی پایداری به روش روث (Routh) هروتیز و کسرهای متوالی، روش بررسی مکان هندسی ریشه ها ، پاسخ فرکانسی و دیاگرام بود ، دیاگرام قطبی و روش نایکوئیست ، منحنی های M , N و کاربرد آنها، روش های تقریبی برای ساده کردن سیستمهای با مرتبهٔ بالا ، تجزیه و تحلیل سیستم در فضای حالت ، طراحی سیستم های کنترل و جبران کننده ها ، مدلسازی آنالوگ ، سیستم های گسسته و بررسی آنها .

مراجع :

۱- *"سیستم های کنترل خطی"*، تألیف دکتر علی خاکی صدیق، انتشارات دانشگاه پیام نور

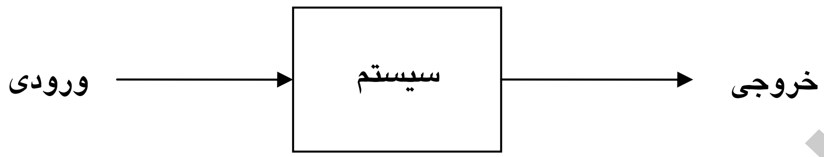
2- Modern Control Engineering, T.Ogata, Ptentice Hall

3- Automatic Control systems, B.C.Kuo, Ptentice Hall

4- Modern Control Systems, R.C. Dorf, Addison Wesley

مسئله اساسی کنترل:

سیستم زیر را در نظر بگیرید:



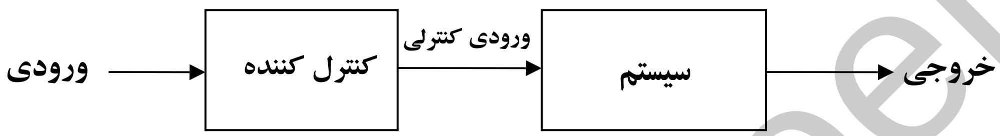
شکل ۱-۱: ساختار کلی یک سیستم

کار سیستم معمولاً″تبدیل انرژی است یعنی ورودی را که از یک نوع انرژی است به خروجی که نوع دیگری از انـرژی اسـت تبـدیل مـی کنـد.(مثـل موتورهـای الکتریکـی، ژنراتورهـا، موتورهای احتراقی و ...) هدف از کنترل سیستم عبارت اسـت از تعیـین مقـدار ورودی بـه نحوی که خروجی به مقدار مشخصی برسد. این مقـدار مشـخص، در اکثـر مسـائل کنتـرل مقدار ثابتی است. این مقدار ثابت را که خروجی مطلوب نامیده میشود، معمولاً″ بـه صـورت ورودی (فرمان) به سیستم اعمال میکنیم، در این صورت هدف ما ایـن اسـت کـه خروجـی منطبق بر ورودی گردد. هر چقدر خروجی به ورودی شبیه تر باشد، عمل کنترل بهتر انجام شده است. پس در حالت ایده آل بهترین سیستم کنترل، سیستمی استاتیک با بهرۀ واحـد است. اما سیستمهای مبدل انرژی دارای دینامیک بوده و معمولاً″ بهرۀ غیر واحد دارند. حال با توجه به این که خروجی حاصل عمل سیسـتم بـر روی ورودی اسـت. لـذا بـرای داشـتن خروجی مطلوب باید ساختار سیستم را طوری تغییر داد تا به سیستم ایده آل نزدیک شود. بدین منظور از یک ساختار کنترلی استفاده می کنیم .

انواع سیستمهای کنترل از نظر ساختار

۱- سیستم کنترل حلقه باز :

اولین ساختار جهت کنترل یک سیستم اضافه کردن یک سیستم کنترل کننده قبل از سیستم اصلی است که کار آن دریافت ورودی و تهیۀ ورودی اصلی سیستم به منظور رسیدن خروجی به مقدار مطلوب می باشد.



شکل ۲-۲: سیستم کنترل حلقه باز

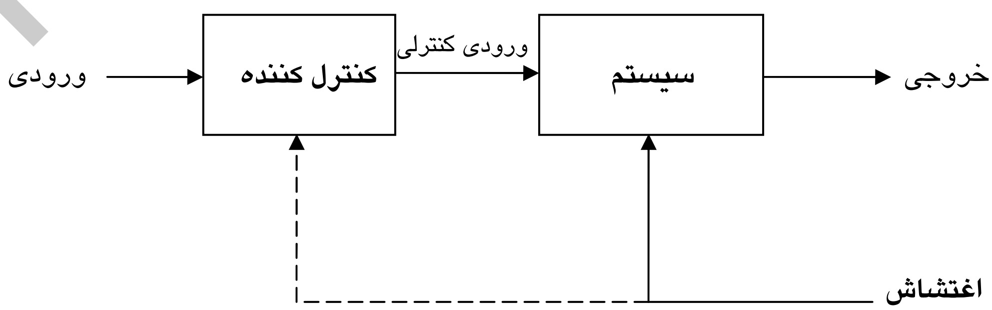
بنابراین هدف اصلی در کنترل این سیستم طراحی کنترل کننده است که نیاز به شناخت کامل سیستم دارد.

معایب سیستم فوق : در محیط های دارای اغتشاش ، خروجی مطلوب بدست نمی دهد .

کاربرد سیستم فوق : در جاهایی که اغتشاش در محیط وجود ندارد یا ناچیز است، به کار می رود .

۲- سیستم کنترل پیش خور (حلقه باز با پیش بینی اثر اغتشاش) :

برای جلو گیری از اثرات مخرب اغتشاش بر خروجی سیستم می توان آنرا به کنترل کننده نیز اعمال نمود تا با استفاده از تمهیداتی که در آن پیش بینی شده است ورودی لازم جهت



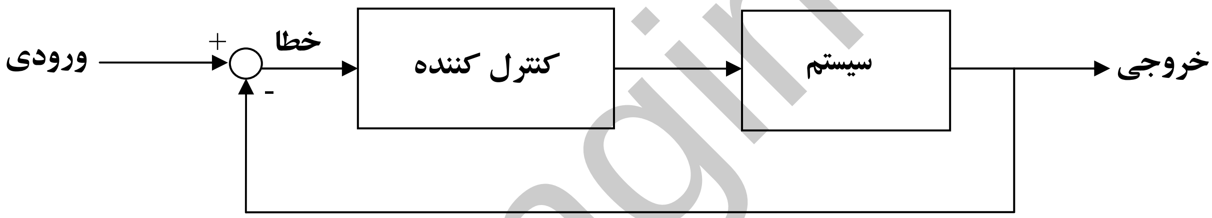
کنترل به سیستم اعمال شود.
اطلاعات اغتشاش ناگزیر به سیستم وارد می گردد . مانند اثر گذاری باد بر روی یـک آنـتن یـا دیش یا اثر گذاری فرسودگی سیستم گیر بکس و ..... . این اطلاعات باید کنتـرل کننـده ارائـه شود تا متناسب با این اغتشاشات خروجی مطلوب بدهد .

کاربرد : در جایی که تعداد اغتشاشات محدود و کاملا شناخته شده باشند به کار می رود .

معایب : برای هر نوع اغتشاش ، سنسور مخصوص لازم است .

۳- سیستم کنترل حلقه بسته :

به سیستم زیر دقت نمایید.



به کمک یک سنسور در خروجی می توان مقـدار خروجـی را بـا اطلاعـات مـد نظـر در ورودی مقایسه کرد و خطای حاصل را به کنترل کننده اعمال کرد .

مثال: نمودار تنظیم زاویه یک دیش بر اساس ولتاژ اعمالی :

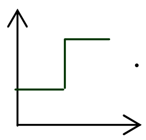
از زمان ارسال ورودی تا داشتن خطای صـفر (داشـتن خروجـی دلخـواه و مطلـوب) مقـداری تأخیر داریم . وجود قطب در سیستم باعث این اختلال و تأخیر می گردد (سیسـتم دینامیـک است) .

مزیت سیستم حلقه بسته : از یک سنسور برای خروجی استفاده مـی گـردد . مـثلا ممکـن است از چند سنسور حرارتی اسـتفاده گـردد . سیسـتم ترسـیم شـده بـالا تـک ورودی ـ تـک خروجی است . (SI – SO) .

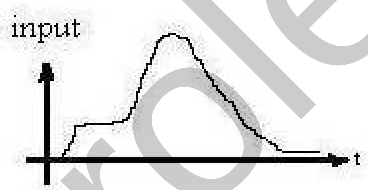
کاربرد ساختار فوق : در اکثر پروسه های صنعتی کـاربرد دارد و در برخـی از کاربردهـا مـی تواند چند ورودی ـ چند خروجی باشد (MI – MO) .

تقسیم بندی سیستم های کنترل از نقطه نظر ورودی :

۱- **سیستمهای کنترل نقطه تنظیم (Set Point) :** دارای ورودی ثابت هستند و هدف در آنها رسیدن خروجی به این مقدار ثابت است . شکل ورودی به صورت پله ای است .

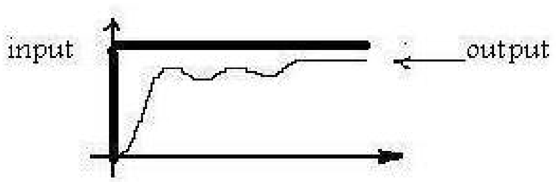


۲– **سیستم های کنترل ردیاب (Tracking) :** دارای ورودی متغیـر بـاز ماننـد و هـدف دنبال کردن خروجی از یک منحنی است .



تقسیم بندی سیستم های کنترل از نظر خطای خروجی :

۱– **سیستم های کنترل رگولاتور:** سیستم هایی که در آن ها خروجی به مقدار دلخواه نمـی رسد و دارای خطا است .

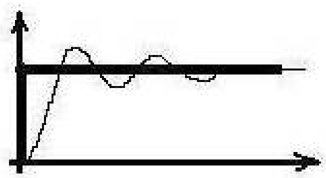


(ورودی ثابت است)

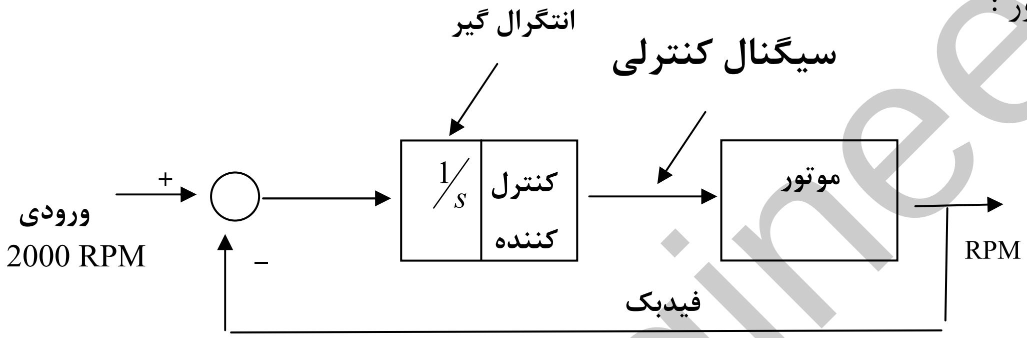
۲- سیستم های کنترل سرو

مکانیسم : سیستم هایی که خروجی حالت ماندگار برابر با مقدار دلخواه است .

(ورودی ثابت است)



کنترل دور موتور :



در حالت عادی خروجی نمی تواند به ۲۰۰۰ RPM برسد زیرا در حالت گفته شده خط صفر است پس ورودی نداریم پس موتور می ایستد .

پس برای کارکرد سیستم باید کاری کرد که با ورودی صفر ، خروجی داشته باشیم . این اُپراتور می تواند انتگرال باشد ؛ زیرا انتگرال صفر یک عدد ثابت است .

در سیستم دیش و آنتن ، انتگرال گیر ذاتا در سیستم وجود دارد . زیرا در آن می خواهیم سرعت محور را به موقعیت تبدیل کنیم . یعنی $\omega \to \theta$ در رابطه بین این دو کمیت به صورت زیر است :

$$\omega = \frac{d\theta^{\circ}}{dt} \Rightarrow \theta = \int \omega \, dt$$

تعاریف اولیه :

سیستم : (Plant – Process) مجموعه ای از قطعات و المان ها ست که با هم ترکیب شده اند که کار معینی را انجام دهند .

خروجی : پارامتری از سیستم است که می خواهیم آنرا کنترل کنیم .

ورودی مرجع (خروجی مطلوب) : مقداری است که می خواهیم خروجی به آن برسد .

خطا : اختلاف ورودی و خروجی است .

کنترل کننده : واحدی است که برای کاهش خطا از آن استفاده می گردد .

فیدبک : تأثیر دادن خروجی بر ورودی ، فیدبک نامیده می شود .

ورودی کنترلی (سیگنال کنترلی ، عمل کنترلی) : خروجی کنترل کننده است که به سیستم اعمال می گردد .

نویز (اغتشاش) : هر ورودی ناخواسته به سیستم را اطلاحا نویز می نامند .

انواع نویز الکتریکی :

۱. نویز خط : مربوط به خط انتقال انرژی الکتریکی است که توسط فیلتر نویز جبران می گردد . این نویز می تواند از یک سیستم به سیستم مجاور منتقل شده و باعث اختلال و Reset آن گردد .

۲. نویز رادیوئی : موج رادیوئی می تواند ناشی از خط انتقال انرژی الکتریکی باشد وسایلی مانند موبایل و تلفن بی سیم و ... تولید کننده آن هستند توسط شیلد کردن آن را کنترل می کنند .

۳. نویز القایی : باعث ایجاد ولتاژ در سیم ها می گردد و با ارت کردن کنترل می گردد .

۴. نویز داخلی : در اثر حرکت مولکول هاست . برخی از قطعات طوری طراحی می گردند که نویز کم تولید کنند مانند LNB (Low noise Block) سرما نیز این نویز را کاهش می دهد .

سیستم های خطی (Linear) : سیستم هایی هستند که دارای خواص جمع پذیری و همگنی باشند .

سیستم های تغییر ناپذیر با زمان (Linear Time Invarient) : دارای ساختاری ثابت با زمان اند .

$$X(t) \longrightarrow \boxed{L.T.I} \longrightarrow Y(t)$$

$$X(t-\tau) \longrightarrow \boxed{L.T.I} \longrightarrow y(t-\tau)$$

سیستم های پیوسته با زمان : با سیگنال های پیوسته با زمان کار می کنند . با نمونه برداری از سیگنال پیوسته ، سیگنال گسسته ایجاد می گردد .

« نمایش های سیستم های کنترل »

۱. **تابع تبدیل**

۲. **بلوک دیاگرام**

۳. **نمودار گذر سیگنال**

۴. **معادلات حالت**

- **تابع تبدیل : عبارتست از نسبت تبدیل لاپلاس خروجی به لاپلاس ورودی در شرایط اولیه صفر (I . C = 0)**

U (t) ⟶ [سیستم LTI] ⟶ Y (t)

$$G(t) = \frac{y(s)}{u(s)}\Big|_{I.C=0}$$ تابع تبدیل سیستم

خواص :

۱. **تابع تبدیل یکتاست (هر سیستم فقط یک تابع تبدیل دارد)**

۲. **دو یا چند سیستم می توانند توابع تبدیل یکسان داشته باشند (سیستم های هم ارز)**

۳. **تابع تبدیل مستقل از ورودی به خروجی است .** **U (s) .G (s) = Y(s)**

$$2 \times 5 = 10$$
$$3 \times 5 = 15$$
$$5 \times 5 = 25$$

۴. **تابع تبدیل ارتباط دهنده ورودی ـ خروجی است .**

۵. **تابع تبدیل تحت شرایط اولیه صفر بدست می آید .**

بدست آوردن تابع تبدیل :

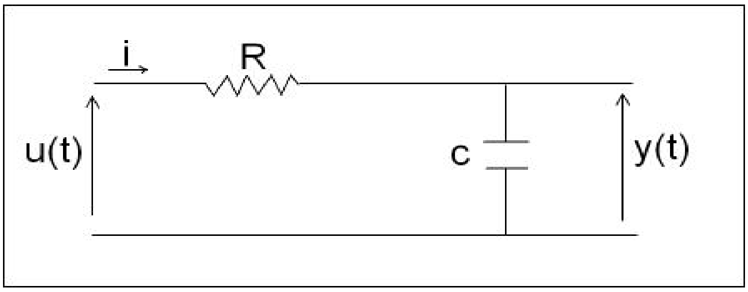
۱ ـ از خود سیستم می تواند به دست آید .
۲ ـ از روی شما تیک سیستم به دست می آید .
۳ ـ از روی معادله دیفرانسیل سیستم می تواند بدست آید .

بدست آوردن تابع تبدیل از شماتیک سیستم :

مراحل :

۱. **معادلات اجزاء سیستم را می نویسیم .**
۲. **معادلات ارتباط دهنده اجزاء را می نویسیم .**
۳. **از معادلات فوق در شرایط اولیه صفر لاپلاس گیری می کنیم .**
۴. **نسبت تبدیل لاپلاس خروجی به ورودی را حساب می کنیم .**

مثال ـ تابع تبدیل زیر را بدست آورید .



مرحله اول ـ نوشتن معادلات اجزاء سیستم :

$$V_R(t) = Ri(t)$$

$$V_c(t) = \frac{1}{c}\int_0^t i(t)\,dt$$

مرحله دوم ـ معادلات ارتباط دهنده اجزاء :

$$u(t) = V_R(t) + V_c(t)$$

$$y(t) = V_c(t)$$

مرحله سوم ـ لاپلاس گیری :

$$V_R(s) = RI(s)$$

$$V_c(s) = \frac{1}{cs} I(s)$$

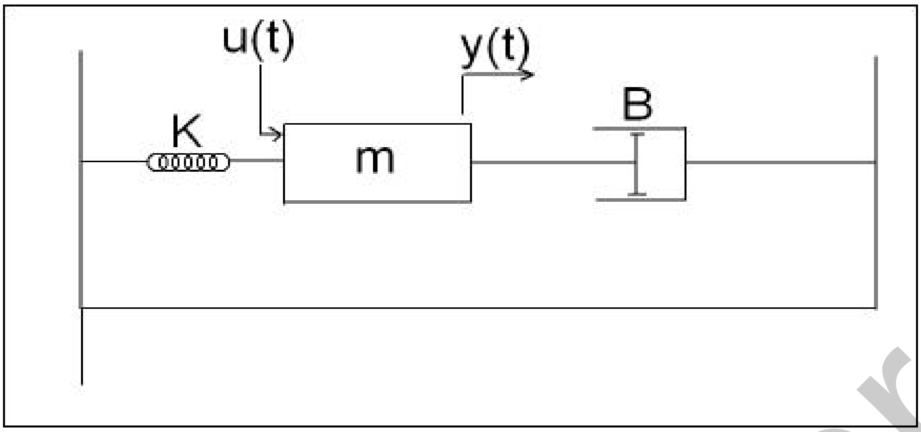
$$U(s) = V_R(s) + V_c(s)$$

$$y(s) = V_c(s)$$

مرحله چهارم :

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\frac{1}{cs} I(s)}{RI(s) + \frac{1}{cs} I(s)} = \frac{1}{1 + Rcs}$$

مثال : تابع تبدیل سیستم زیر را بدست آورید :



مرحله اول ـ معادلات اجزاء سیستم :

$$f_m = ma = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

جرم

$$f_k = ky(t),\quad f_B = B\frac{dy}{dt}$$

مقدار y در هر سه رابطه جابه جایی بوده و برای هر سه یکسان است . (برای جرم ، فنر ، امپر)

مرحله دوم :

$$u(t) = f_B + f_k + f_m$$

مرحله سوم : لاپلاس گیری :

$$F_m(s) = ms^2y(s)$$

$$F_k = ky(s), F_B = Bsy(s)$$

پس

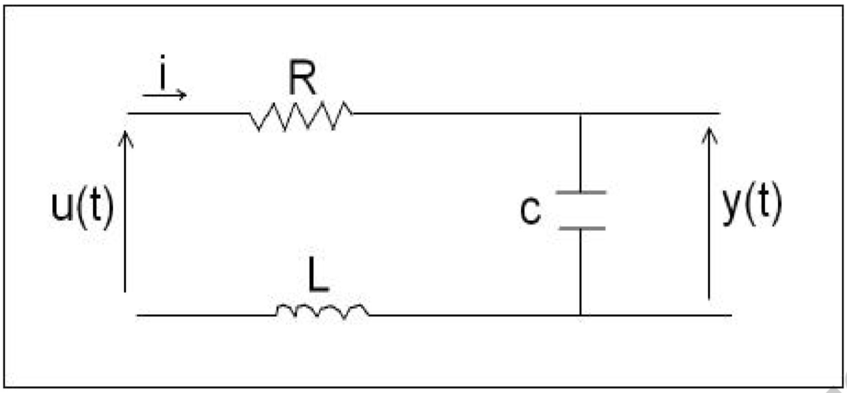
$$u(s) = F_m(s) + F_B(s) + F_k(s)$$

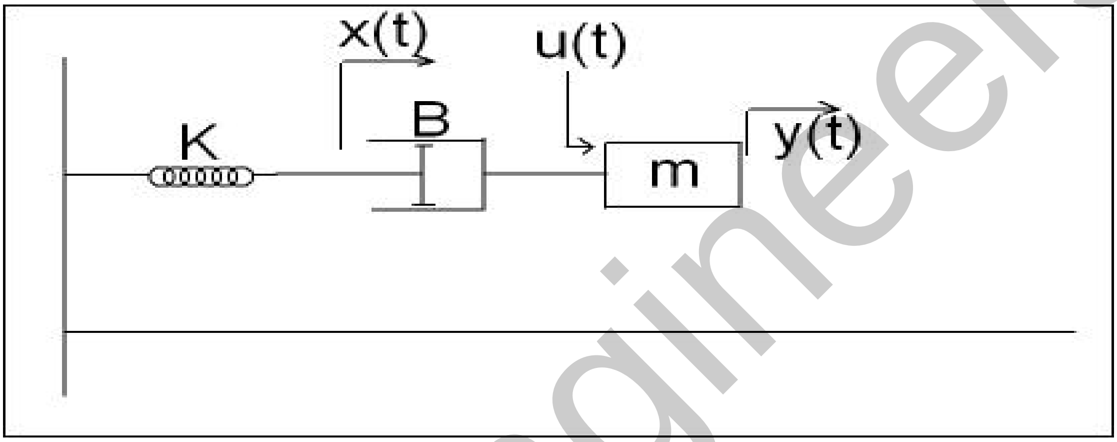
مرحله چهارم :

$$u(s) = ms^2y(s) + Bsy(s) + Ky = y(s)\left[ms^2 + Bs + k\right]$$

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{ms^2 + Bs + k}$$

تمرین ۱ :تابع تبدیل سیستم های زیر را بدست آورید .





جمع باز شدن فنر و دامپر برابر حرکت جرم **m** است .

راهنمایی :

مرحله I : $$f_k = k_x , f_B = B(y_1^{\bullet} - x^{\bullet}), f_m = my^{\bullet\bullet}(t)$$

مرحله II : $$u(t) - f_m(t) - f_B = 0 \qquad , \qquad f_B = f_k$$

<u>**بدست آوردن تابع تبدیل از معادله دیفرانسیل سیستم :**</u>

حالت کلی معادله دیفرانسیل سیستم های LTI :

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 y^{\bullet}(t) + a_0 y(t) =$$
$$b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \ldots + b_1 u^{\bullet}(t) + b_0 u(t)$$

$m \le n$ **در سیستم های علّی(بدون پیشگویی)**

در شرایط اولیه صفر ، لاپلاس گیری می کنیم :

$$a_n s^n y(s) + a_{n-1} s^{n-1} y(s) + \ldots + a_1 s y(s) + a_0 y(s) =$$
$$b_m s^m u(s) + b_{m-1} s^{m-1} u(s) + \ldots + b_1 s u(s) + b_0 u(s)$$

پس
$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + s_0}$$

چند جمله ای صفر

چند جمله ای قطب

تابع تبدیل کلی یک سیستم LII

(اگر علی باشد $m \le n$)

مثال :

تابع تبدیل سیستم با معادله دیفرانسل زیر را بدست آورید . آیا سیستم علی است یا غیر علی است ؟ چرا ؟

$$2y^{\bullet\bullet}(t) + 3y^{\bullet}(t) + y(t) = u^{\bullet}(t) + u(t)$$

لاپلاس گیری
$$2s^2 y(s) + 3sy(s) + y(s) = su(s) + u(s)$$

پس
$$G(s) = \frac{y(S)}{u(S)} = \frac{s+1}{2s^2 + 3s + 1}$$

سیستم علی است زیرا
$$m = 1, n = 2 :\Rightarrow m \prec n$$

که **m** حداکثر توان صورت و **n** حداکثر توان مخرج است .

- چرا یک سیستم با $m \succ n$، غیر علی است :

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0}$$

با انجام عمل تقسیم :
$$G(s) = \frac{b_m}{a_m} s^{m-n} + \frac{\text{باقیمانده}}{\text{مقسوم علیه}}$$

اگر ثابت کنیم G (s) = s غیر علّی است . کافی است .

$$G(s) = s \Rightarrow \frac{y(s)}{u(s)} = s \Rightarrow y(s) = su(s)$$

$$y(t) = u^{\bullet}(t) \Rightarrow y(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t}$$

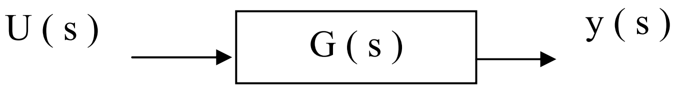
اگر $\Delta t \succ 0$ باشد سیستم غیر علّی است .

تمرین II : تابع تبدیل سیستم با معادله دیفرانسیل زیر را بدست آورید . آیا علّی است یا غیر علّی ؟

$$\dddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+2y(t)=\ddot{u}(t)+2u(t)$$

بلوک دیاگرام : بلوک دیاگرام یک روش نمایش گرافیکی است که ارتباط اجزاء سیستم را نشان می دهد.

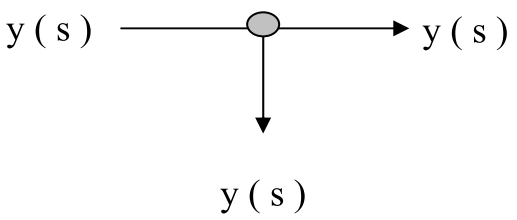
× اجزای تشکیل دهنده بلوک دیاگرام :



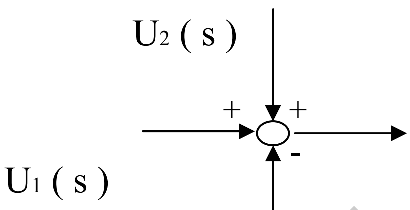
۱. **<u>بلوک یا سیستم</u>**

۲. **<u>انشعاب</u>**

انشعاب نباید روی خروجی تأثیر بگذارد .

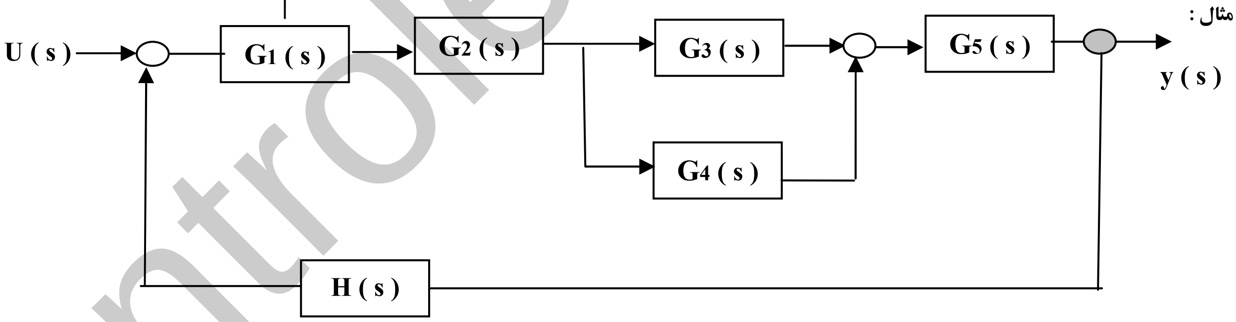


۳. **نقطه جمع : نقطه ای است که در آنجا ، چند سیگنال جمع جبری می شوند .**



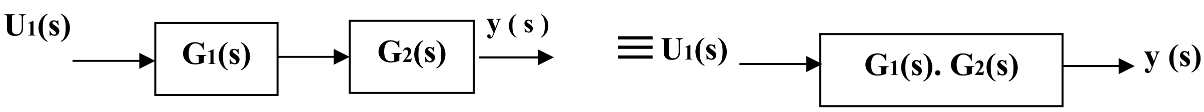
$$y(s)=u_1(s)+u_2(s)-u_3(s)$$

مثال :



<u>ساده کردن بلوک دیاگرام :</u>

۱.بلوک های سری :



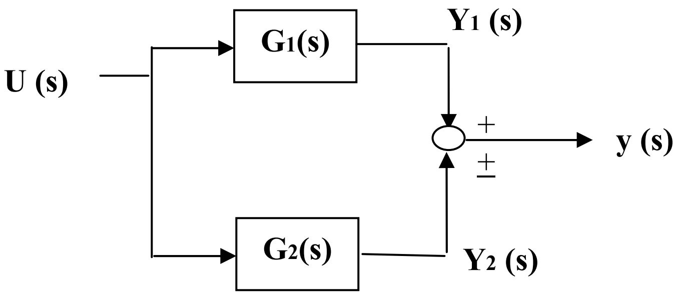
$$w(s) = u(s).G_1(s)$$

$$y(s) = w(s).G_2(s)$$

پس $y(s) = u(s).G_1(s).G_2(s) \Rightarrow \dfrac{y(s)}{u(s)} = G_1(s).G_2(s)$

۲. بلوک های موزای:

بلوکهای موازی ورودی یکسان داشته و خروجی آنها با هم جمع می گردد .

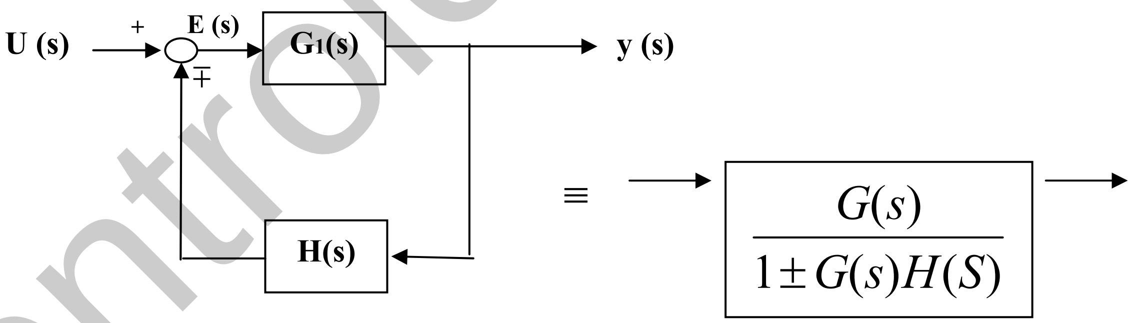


$$y(s) = y_1(s) \pm y_2(s), y_1(s) = u(s).G_1(s)$$

$$, y_2(s) = u(s).G_2(s)$$

پس $\dfrac{y(S)}{G(s)} = G_1(s) \pm G_2(s)$

۳. بلوک های فیزیکی:



$$\frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(S)}$$

$$y(s) = E(s).G(s) \text{I}$$

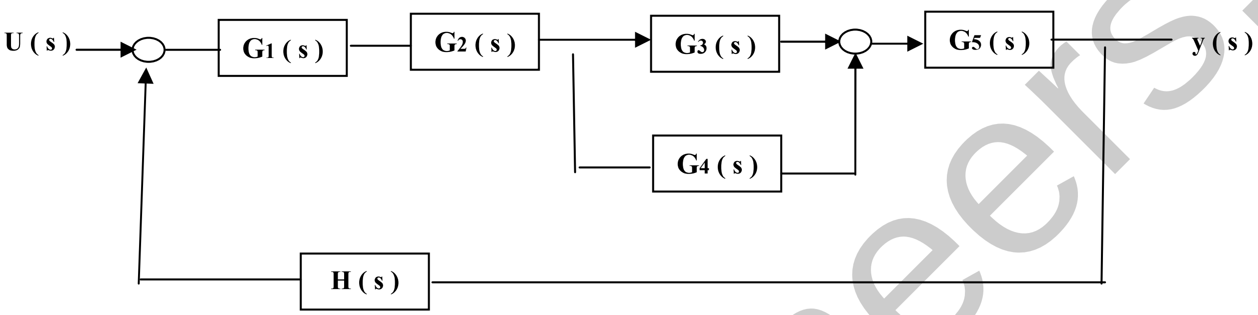
برای حذف E(s) ، آنرا پیدا می کنیم . $E(s) = u(s) \mp H(s).y(s) \text{II}$

$$y(s) = \left[u(s) \mp H(s)y(s)\right].G(s)$$

: با جاگذاری II در I

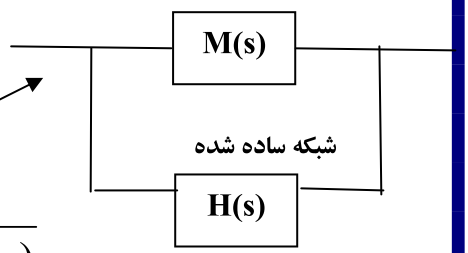
$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)}$$

مثال : ساده سازی شکل زیر :



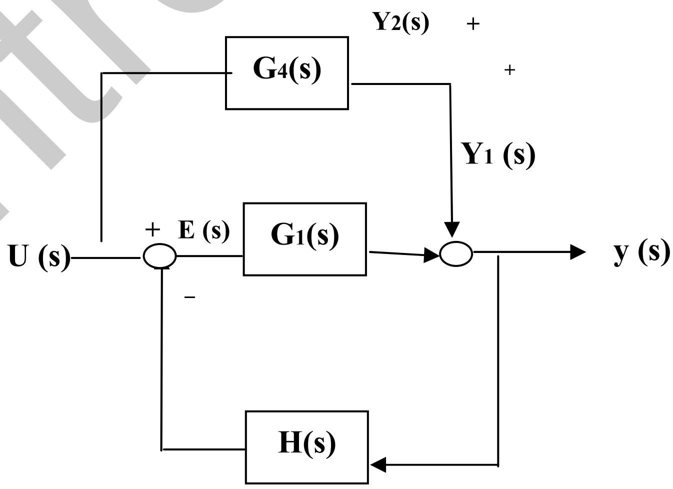
(G1 و G2 سری) و(G3 وG4 موازی)) و با G5 سری =M(s)

$$\left[G_1(s).G_2(s).\left[G_3(s)+G_4(s)\right].G_5(s)\right] = M(s)$$



با توجه به رابطه بلوک های فیدبک $G(s) = \dfrac{M(s)}{1+M(s)H(s)}$

مثال : سیستم زیر را ساده کنید :



G2, G1

G1,G2 موازی نیستند زیرا علی رغم جمع شدن خروجی آن ها ، ورودی یکسان ندارند .

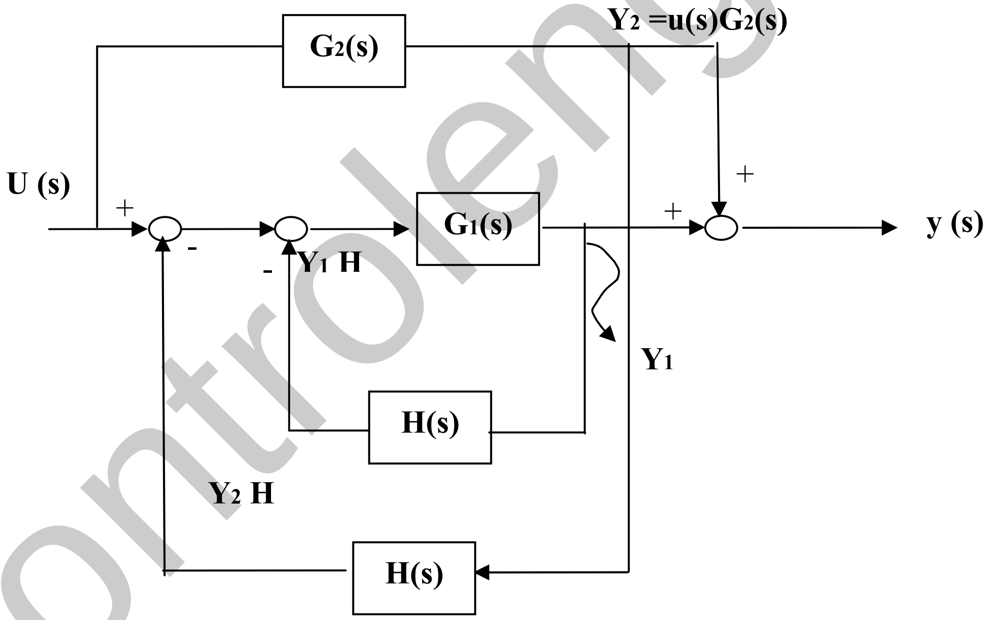
راه حل محاسباتی : بعداز نقاط جمع ، اسم گذاری می کنیم :

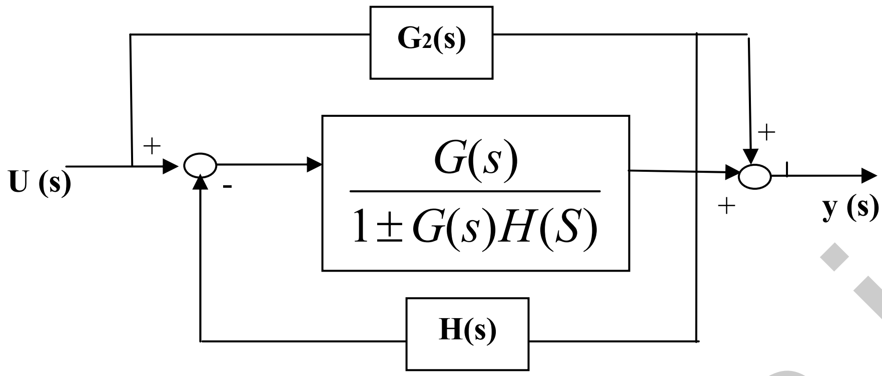
$$y(s) = E(s)G_1(S) + u(s)G_2(s)$$
$$E(s) = u(s) - y(s)H(s)$$

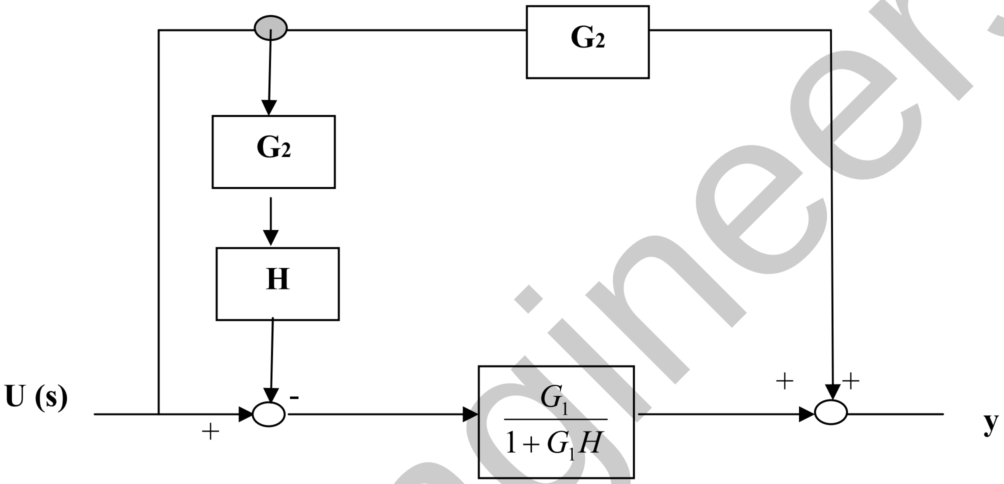
$$y(s) = \left[\overbrace{u(s) - y(s)H(s)}^{E(s)} \right] G_1(s) + u(s)G_2(s)$$

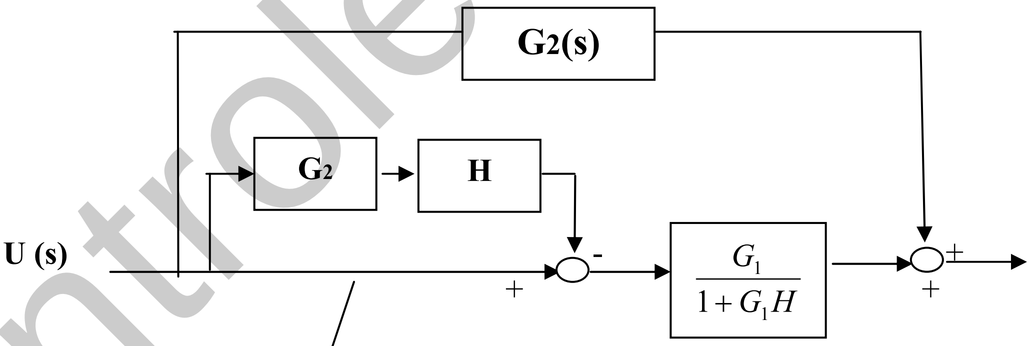
$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{G_1(s) + G_2(s)}{1 + G_1(s)H(s)}$$

راه حل دوم ـ گرافیکی :



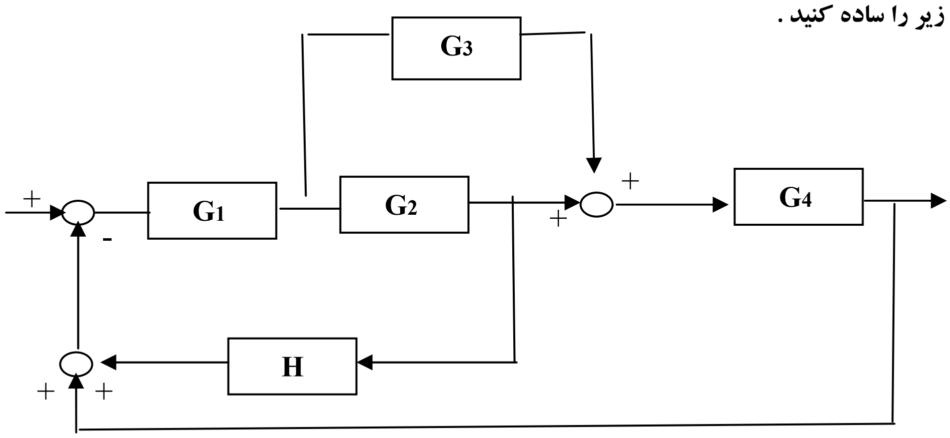






$$G(s) = G_2 + \left[\overbrace{1 - G_2 H} * \frac{G_1}{1 + G_1 H} \right]$$

تمرین **III** : سیستم زیر را ساده کنید .



بدست آوردن بلوک دیاگرام از شماتیک سیستم :

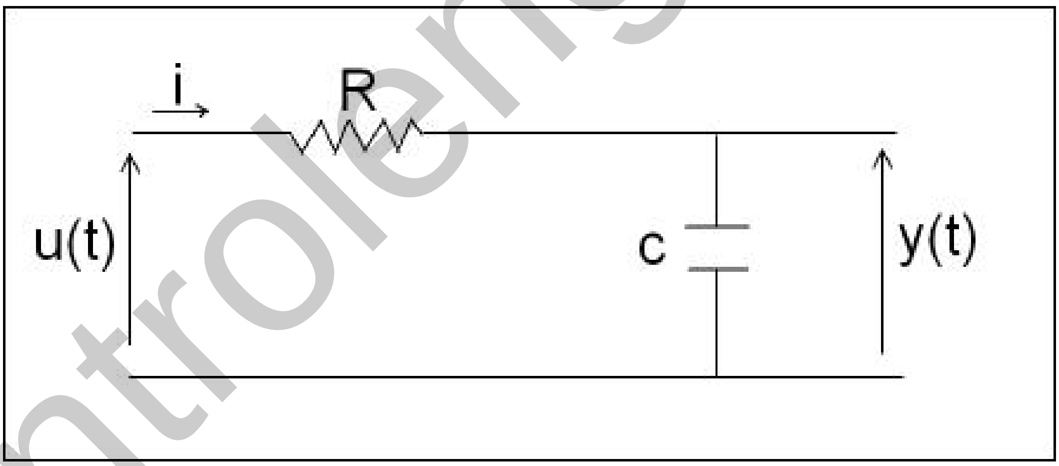
مراحل کار :

۱. معادلات اجزاء سیستم و ارتباط آنها را در حوزه **S** می نویسیم .

۲. بلوک های متناظر با هر جزء سیستم را رسم می کنیم .

۳. از خروجی به سمت ورودی بلوک دیاگرام را کامل می کنیم .

مثال :



I

$$V_R(t) = RI(s)$$

$$V_c(s) = \frac{1}{cs} I(s)$$

$$u(s) = V_R(s) + V_c(s)$$

$$, y(s) = V_c(s)$$

II

: برای مقاومت دو حالت داریم

$$\begin{cases} I(s) \rightarrow \boxed{R} \rightarrow V_R(s) \\ V_R(s) \rightarrow \boxed{1/R} \rightarrow I(s) \end{cases}$$

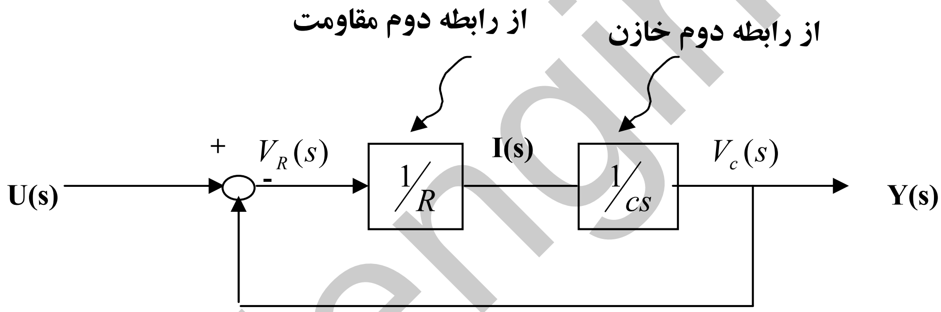
: و برای خازن نیز دو حالت داریم

$$\begin{cases} I(s) \rightarrow \boxed{1/cs} \rightarrow V_c(s) \\ V_c(s) \rightarrow \boxed{cs} \rightarrow I(s) \end{cases}$$

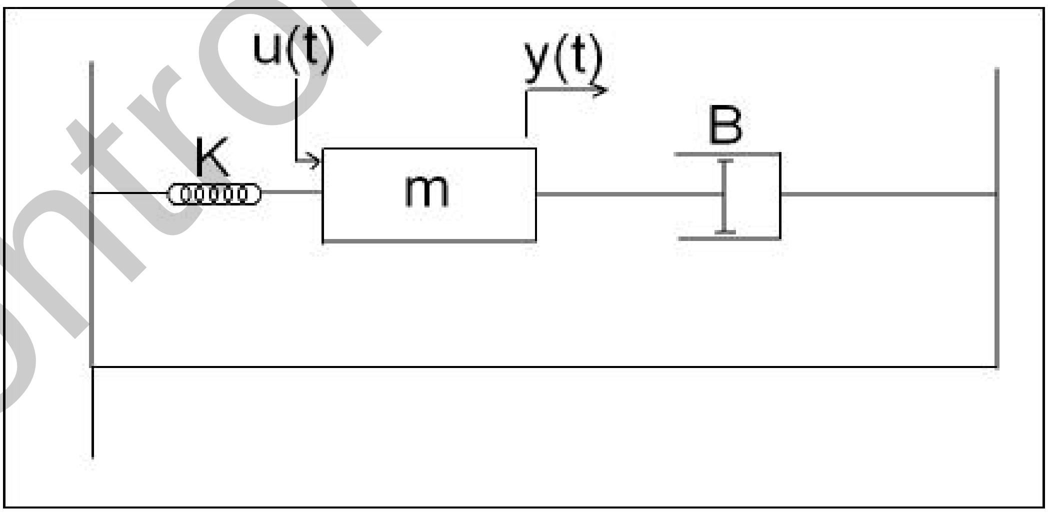
: و اگر سلف داشتیم

$$\begin{cases} I(s) \rightarrow \boxed{LS} \rightarrow V_c(s) \\ V_L(s) \rightarrow \boxed{1/Ls} \rightarrow I(s) \end{cases}$$

III



تمرین ۴ : بلوک دیاگرام سیستم زیر را رسم کنید .

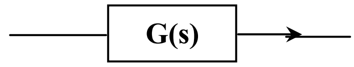


۳

نمودار گذر سیگنال S . F . G :

یک روش گرافیکی برای توصیف سیستم است :

اجزاء : ۱ - شاخه

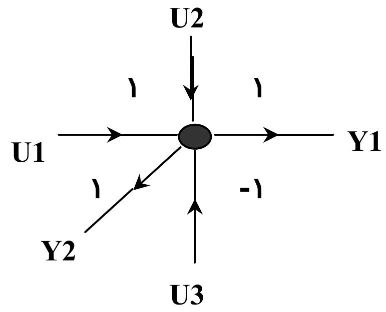


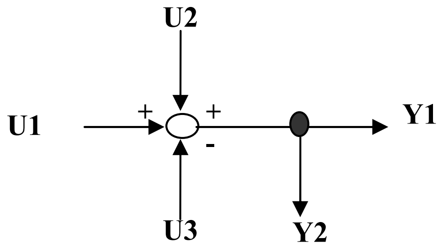
معادل

۲- گره هم جمع است و هم انشعاب است .

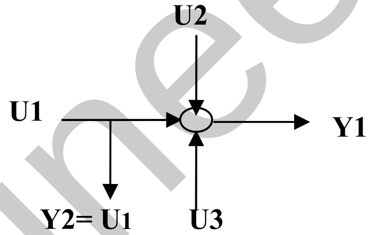
$$\underbrace{y_1 = y_2}_{\text{خروجی ها}} = u_1 + u_2 - u_3$$

معادل

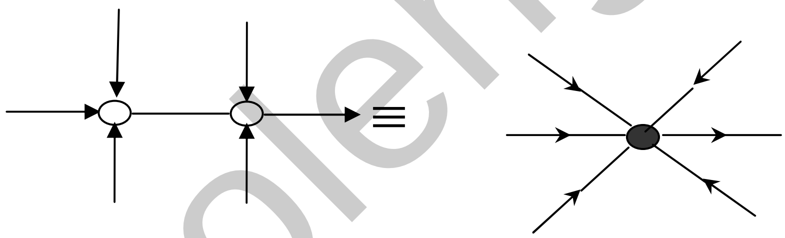


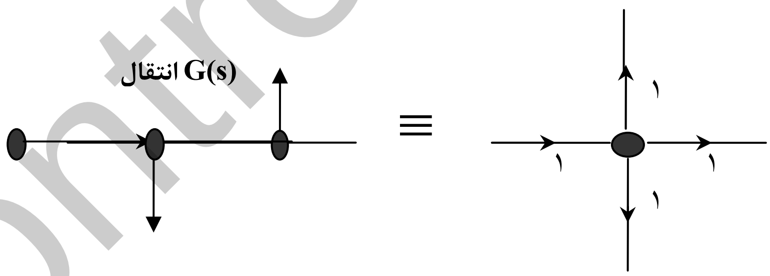


$\neq$



انشعاب قبل از جمع با جمع یکی نمی شود (یک گره نمی شود) و باید به صورت دو گره باقی مانده اما انشعاب بعد از جمع می تواند با آن یک گره شود .





تعاریف اولیه :

گره : هر سیگنال داخلی را می توان با یک گره نمایش داد مثل گره ورودی **(Source)** و گره خروجی **(Sink)**.

شاخه : عبارتست از یک پاره خط جهت دار با بهره ای بنام انتقال .

مسیر: پیمودن فاصله دو گره در جهت فلش ها مشروط به اینکه هر گره حداکثر یک بار طی گردد .

بهره مسیر : حاصلضرب انتقال های مسیر است .

مسیر پیشرو : مسیری است که از گره ورودی شروع و به گره خروجی ختم گردد .

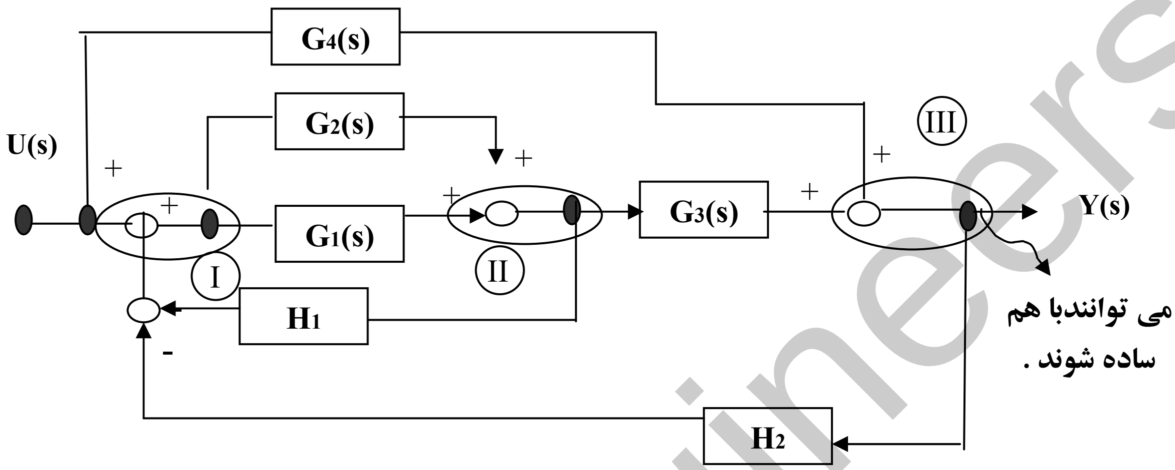
بهره مسیر پیشرو : حاصلضرب انتقال های مسیر پیشرو .

مسیر بسته (حلقه) : مسیری است که گره شروع و خاتمه آن یکی است .

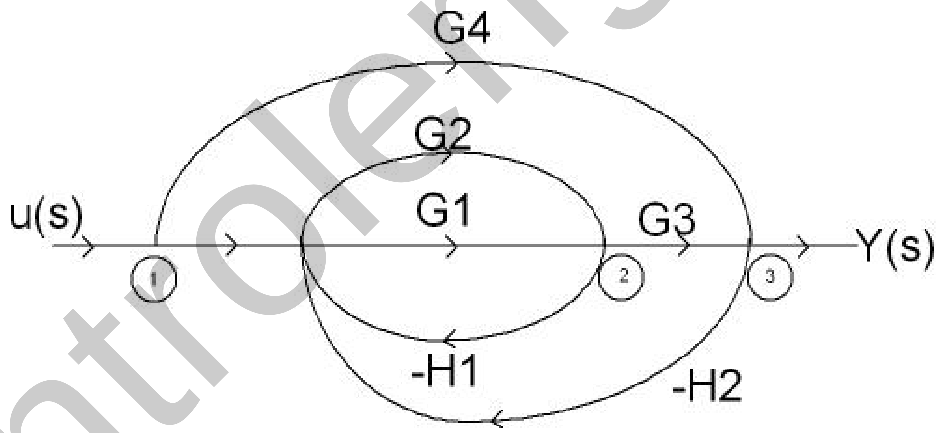
بهره حلقه : حاصلضرب انتقال های حلقه .

حلقه های مجزا : حلقه هایی که هیچ گره مشترکی ندارند .

مثال : SFG سیستم زیر را رسم کنید :



پس از ساده کردن :



۳ تا : تعداد مسیر پیشرو

تعداد حلقه ها : ۴ تا $\rightarrow (-G_2H_1),(-G_1H_1),(-G_1G_3H_2),(-G_2G_3H_2)$

ضمنا حلقه های مجزا نداریم .

فرمول بهره میسون :

بهره کلی گراف (تابع تبدیل سیستم)

$$P=\frac{\sum P_K\Delta_K}{\Delta}$$

P_K : بهره مسیر پیشرو **K** اُم .

Δ_K : دترمینان گراف حاصل از حذف مسیر پیشرو **K** اُم .

Δ : دترمینان گراف .

$\Delta=1$ ـ (مجموع بهره حلقه های گراف) + (مجموع حاصلضرب بهره دو حلقه های مجزا) ـ (مجموع حاصلضرب بهره سه حلقه های مجزا) + ...

توجه : در گرافی که حلقه وجود ندارد $\Delta=1$ می باشد .

مثال : بدست آوردن بهره کلی مثال اخیر :

مسیرهای

$$P_1=1\times1\times G_1\times G_3\times1=G_1G_3,\Delta_1=1$$

با حذف این مسیر تمام گره ها حذف می گردند .

$$P_2=1\times1\times G_2\times G_3\times1=G_2G_3,\Delta_2=1$$

$$P_3=1\times G_4\times1=G_4\rightarrow$$

با حذف این مسیر ، باقی می ماند .

پس $\Delta_3=1-(-G_1H_1-G_2H_1)=1+H_1(G_1+G_2)$

حلقه :

$$L_1=-G_1H_1$$
$$L_2=-G_2H_1$$
$$L_3=-G_1G_3H_2$$
$$L_4=-G_2G_3H_2$$

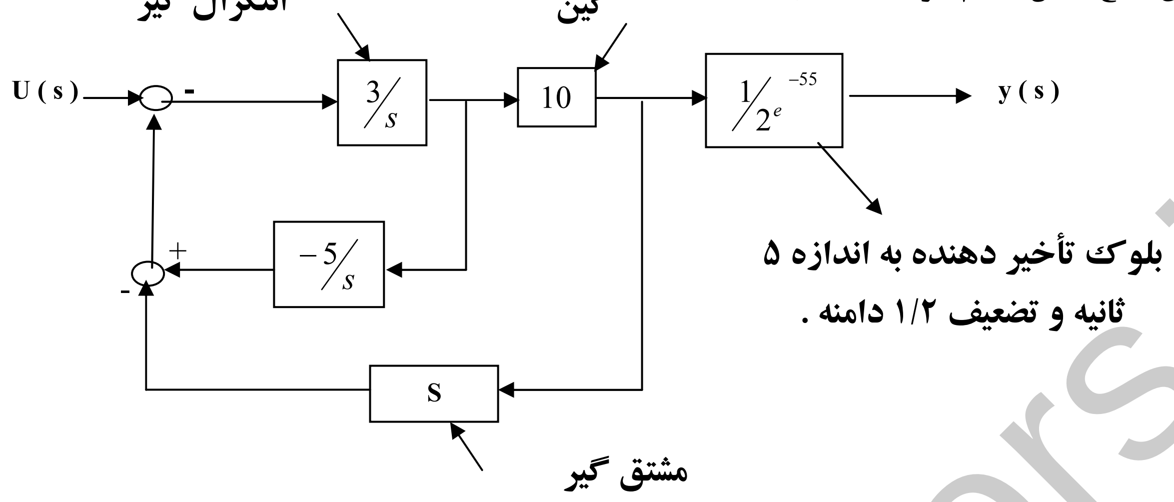
ضمنا ، دو حلقه های مجزا نداریم .

$\Delta:\quad \Delta=1-(L_1+L_2+L_3+L_4)$

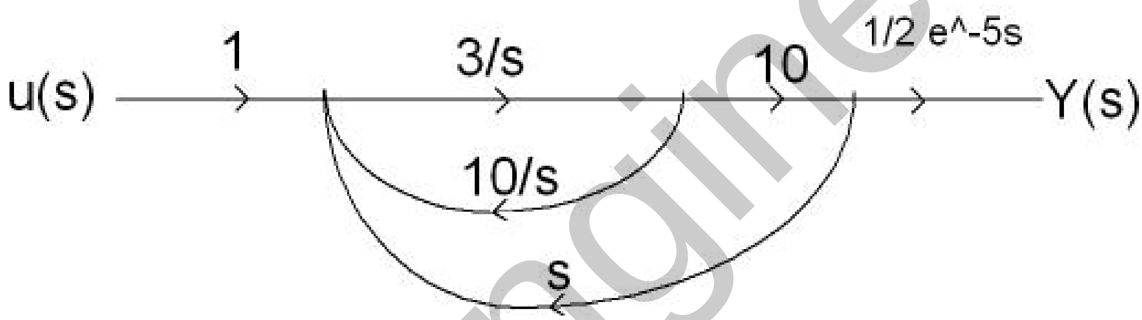
بنابراین $G(s)=\dfrac{y(s)}{u(s)}=\dfrac{P_1\Delta_1+P_2\Delta_2+P_3\Delta_3}{\Delta}$

که در نهایت مقادیر بدست آورده را در **G(s)** جای گذاری می کنیم .

مثال : تابع تبدیل سیستم زیر را بدست آورید :



S.F.G:



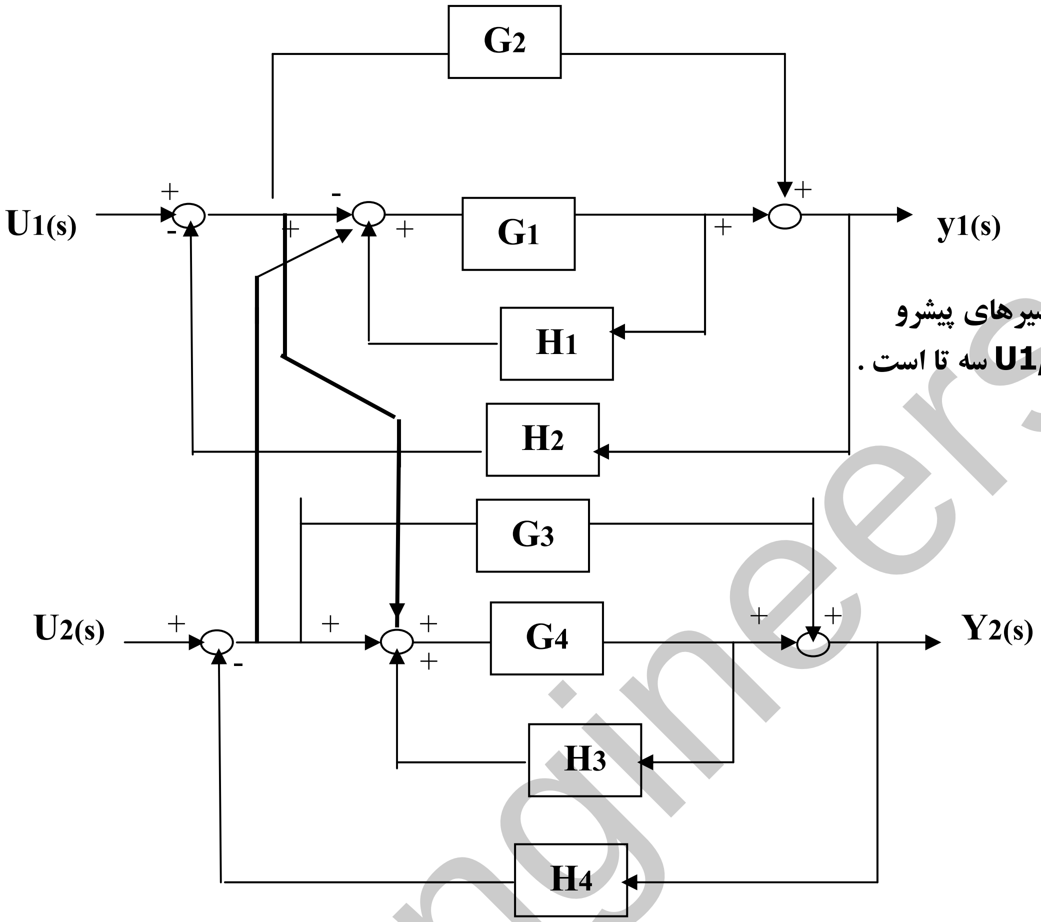
$$p_1 = \frac{3}{s} \times 10 \times \frac{1}{2} e^{-5s} = \frac{15}{s} e^{-5s} \qquad \Delta_1 = 1$$

حلقه ها $L_1 = \frac{3}{s} \times \frac{5}{s} = \frac{15}{s^2} \qquad L_2 = \frac{3}{s} \times s \times 10 = 30$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2) = 1 - \frac{15}{s^2} - 30$$

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{p_1 \Delta_1}{\Delta} = \dots$$

مثال :



مسیرهای پیشرو U1, Y1 سه تا است .

$$G_{12}(s)=\frac{y_1(s)}{u_2(s)}\Big|_{u_1(s)=0}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

$$y_1(s)=G_{11}(s)u_1(s)+G_{12}(s)u_2(s)\Rightarrow G_{12}(s)=\frac{y_1(s)}{u_2(s)}\Big|_{u_1(s)=0}$$

$$y_2(s)=G_{21}(s)u_1(s)+G_{22}u_2(s)$$

با حذف مسیر پیشرو تنها مسیر باقیمانده H_3G_3 است .

$$P_1=G_1 \qquad \Delta_1=1-(-G_3H_3)=1+G_3H_3$$

حلقه ها : $H_1 \to L_1 = -G_1 H_1$ $\qquad$ $H_2 \to \begin{cases} L_2 = -G_1 H_2 \\ L_3 = -G_2 H_2 \\ L_4 = -G_3 H_4 G_1 H_2 \end{cases}$

$$H_{31} \to L_5 = -G_3 H_3$$

$$H_4 \to \begin{cases} L_6 = -G_8 H_4 \\ L_7 = -G_4 H_4 \\ L_8 + G_1 H_2 G_3 H_4 \end{cases}$$

که حلقه های **L4,L8** تکرار هستند و **L8**را حذف می کنیم .

چون $L_2 = -G_1 H_2, L_1 = -G_1 H_1$ در **G1** مشترکند پس مجزا نمی باشند :

دوحلقه های مجزا : (L_1, L_3) (L_1, L_5) (L_1, L_6) (L_1, L_7)
(L_2, L_5) (L_2, L_6) (L_2, L_7)
(L_3, L_5) (L_3, L_6) (L_3, L_7)

$(L_4, -)$ حلقه **L4** با هیچ حلقه ای مجزا نمی باشد . $\qquad (L_5, L_7)$

سه حلقه ای مجزا :
از روی دو حلقه های مجزا نوشته می شوند .

(L_1, L_3, L_5) (L_1, L_3, L_6) (L_1, L_3, L_7)
(L_1, L_5, L_7)
(L_2, L_5, L_7)
(L_3, L_5, L_7)

چهارحلقه های مجزا :
(L_1, L_3, L_5, L_7)

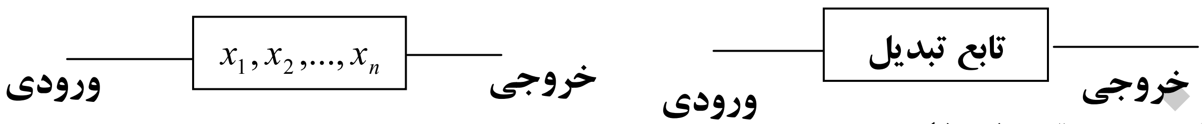
$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + \ldots + L_7) + (L_1 L_3 + L_1 L_5 + \ldots + L_5 L_7) - (L_1 L_3 L_5 + \ldots + L_3 L_5 L_7) + \\ + (L_1 L_3 L_5 L_7)$$

$$G_{12}(s) = \frac{y_1(s)}{u_2(s)} = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta}$$

تمرین ۵ : $G_{11}(s)$, $G_{21}(s)$, $G_{22}(s)$ **را بدست آورید .**

(Δ در آنها با مسئله فوق یکسان است زیرا گراف تغییر نکرده است .)

۴- معادلات حالت (فضای حالت) « State Space »



توصیف داخلی از سیستم — توصیف خارجی

تعاریف اولیه :

حالت : عبارتست از کوچکترین مجموعه متغیرهای حالت که اطلاع از آن ها بهمراه اطلاع از ورودی ، خروجی را در هر لحظه از زمان مشخص نماید. $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

- بردار حالت : برداری شامل متغیر حالت :

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

فضای حالت : فضای **n** بُعدی با محورهای متغیرهای حالت است .

<u>فُرم کلی معادلات حالت :</u>

سیستم یک ورودی ـ یک خروجی SISO

$$\begin{cases} x(A) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

$u(t)$	بردار	1×1
$x(A)$	ماتریس	$n \times 1$
A	ماتریس	$n \times n$
$x(A)$	ماتریس	$n \times 1$
B	بردار ورودی	$n \times 1$

ضمنا **D** اسکالر ارتباط دهنده ورودی ـ خروجی و **C** بردار خروجی است . **A** ماتریس حالت و**B** بردار ورودی است .

با p ورودی و q خروجی MIMO :

$$\begin{cases} x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

x(t) ماتریس $n \times 1$ و **A** ماتریس $n \times n$ و **x(t)** بردار $n \times 1$ و **B** ماتریس $n \times p$ و **u(t)** ماتریس $p \times 1$ است . ضمنا **y(t)** ماتریس $q \times 1$ و **C** ماتریس $q \times n$ و **x (t)** ماتریس $n \times 1$ و **D** ماتریس $q \times p$ و **u(t)** ماتریس $p \times 1$ می باشد .

بدست آوردن معادلات حالت

۱. از شماتیک سیستم

2.از تابع تبدیل یا معادله دیفرانسیل

۳. از بلوک دیاگرام یا S . F . G

- بدست آوردن معادلات حالت از تابع تبدیل یا معادله دیفرانسیل سیستم :

روش ۱ : سیستم صفر ندارد یا مشتق ورودی در معادله موجود نمی باشد : (m = 0):

نکته "$a_n = 1$" است .

$$G(s) = \frac{b_0}{1S^n + a_{n-1}S^{n-1} + \ldots + a_0}$$

$$\Rightarrow y^n(t) + a_{n-1}y^{n-1}(t) + \ldots + a_1 y^\bullet(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) \Rightarrow$$

$$y^{(n)}(t) = -a_0 y(t) - a_1 y^\bullet(t) - a_2 y^{\bullet\bullet}(t) - \ldots - a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + b_0 u(t)$$

$$x = Ax + Bu \quad , \quad y = Cx + Du$$

تعریف متغیر های حالت (روش ماتریس همبسته) می تواند به تعداد دلخواه تعریف گردد :

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = y^\bullet(t) \\ x_3(t) = y^{\bullet\bullet}(t) \\ \\ x_{n-1}(t) = y^{(n-2)}(t) \\ x_n(t) = y^{(n-1)}(t) \end{cases} \quad {}^{d}\!/_{dt} \Rightarrow \begin{cases} x^\bullet{}_1(t) = y^\bullet(t) = x_2(t) \to \mathrm{I} \\ x^\bullet{}_2\ (t) = y^{\bullet\bullet}(t) = x_3(t) \to II \\ x^\bullet{}_3\ (t) = y^{\bullet\bullet\bullet}(t) = x_4(t) \to III \\ \\ x^\bullet{}_{n-1}\ (t) = y^{(n-1)}(t) = x_n(t) \\ x^\bullet{}_n\ (t) = y^{(n)}(t) \end{cases}$$

$$x_n^\bullet(t) = y^{(n)}(t) = -a_0 y(t) - a_1 y^\bullet(t) - a_2 y^{\bullet\bullet}(t) - \ldots - a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + b_0 u(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_n^\bullet(t) = -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) - a_2 x_3(t) - \ldots - a_{n-1}x_n(t) + b_0 u(t)$$

پس فرم $x^\bullet = Ax + Bu$ تشکیل گردید .

معادله خروجی $y(t) = x_1(t)$

فرم ماتریسی :

I از روی معادله II

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & & & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t)$$

$-a_0, -a_1, \ldots, -a_{n-1}$ ضرائب مخرج با علامت منفی هستند .

$$\begin{cases} y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

مشکل سیستم فوق : این روش فقط در جایی مناسب است که سیستم صفر نداشته باشد .

روش ۲ ـ سیستم می تواند دارای صفر باشد ($m \prec n$ که **n** تعداد قطبها و **m** تعداد صفرها است)

حالت کلی : $G(t) = \dfrac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} = \dfrac{y(t)}{u(t)}$

باید $a_n = 1$ باشد اگر $a_n \neq 1$ باشد باید تمام ضرائب بر a_n تقسیم گردند . (a_n ضریب s^n می باشد)

$$y^{n}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_1 y^{\bullet}(t)+a_0 y\ (t)=$$
$$=b_m u^{(m)}(t)+\ldots+b_1 u^{\bullet}(t)+b_0 u\ (t)$$

تعریف اُپراتور D :

$$D^{i}=\frac{d^{i}}{dt^{i}} \quad , \quad D=\frac{d}{dt}$$

$$(D^{n}+a_{n-1}D^{n-1}+\ldots+a_1 D+a_0)y(t)=(b_m D^{m}+b_{m-1}D^{m-1}+\ldots+b_1 D+b_0)\quad u(t)$$

نام گذاری :

$$Z(t)=\frac{u(t)}{D^{n}+a_{n-1}D^{n-1}+\ldots+a_1 D+a_0}=\frac{y(t)}{b_m D^{m}+\ldots+b_1 D+b_0}$$

$$\Rightarrow Z^{(n)}(t)+a_{n-1}Z^{(n-1)}(t)+\ldots+a_1 Z(t)+a_0 Z(t)=u(t)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow Z^{(n)}(t)=-a_0 Z(t)-a_1 Z^{\bullet}(t)-\ldots-a_{n-1}Z^{(n-1)}(t)+u(t)$$

تغییر متغیر های حالت (روش ماتریس همبسته) :

$$\begin{cases} x_1(t)=Z(t) \\ x_2(t)=Z^{\bullet}(t) \\ x_3(t)=Z^{\bullet\bullet}(t) \\ \\ x_{n-1}(t)=Z^{(n-2)}(t) \\ x_n(t)=Z^{(n-1)}(t) \end{cases} \quad {}^{d}\!/_{dt}\Rightarrow \begin{cases} x^{\bullet}{}_1(t)=Z^{\bullet}(t)=x_2(t) \\ x^{\bullet}{}_2\ (t)=Z^{\bullet\bullet}(t)=x_3(t) \\ \quad\vdots \\ x^{\bullet}{}_{n-1}\ (t)=Z^{(n-1)}(t)=x_n(t) \\ x^{\bullet}{}_n\ (t)=Z^{(n)}(t)= \end{cases}$$

$$=-a_0 Z(t)-aZ^{\bullet}(t)-\ldots-a_{n-1}Z^{(n-1)}+u(t)$$
$$=-a_0 x_1(t)-a_1 x_2(t)-\ldots-a_{n-1}x_n(t)+u(t)$$

معادله خروجی : $y(t)=b_0 Z(t)+b_1 Z^{\bullet}(t)+\ldots+b_m Z^{(m)}(t)$

پس $\quad y(t)=b_0 x_1(t)+b_1 x_2(t)+\ldots+b_m x_{m+1}(t)$

فرم ماتریس :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & & & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \ldots & b_m & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{m+1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t)$$

مثال : معادلات حالت همبسته سیستم زیر را بنویسید :

$$G(s) = \frac{2}{s^3 + 4s^2 + 3}$$

حل ـ روش اول (m = ۰)

$$\dot{x}(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -4 \end{bmatrix}}^{A} x(t) + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}^{B} u(t)$$

$-a_0$

در مخرج s ضریب   ضریب s^2 منفی

۱ در روش دوم

$$y(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{C} x(t) + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}^{D} u(t)$$

۲ در روش دوم

مثال : $G(s)=\dfrac{s^2+3s}{s^3+4s^2+5s+6}$

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-5&-4\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}0&3&1\end{bmatrix}\qquad D=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$$

تمرین ۶ :معادلات حالت همبسته به سیستم زیر را بدست آورید :

$$G(s)=\frac{s+2}{s^3+3s^2+2s+1}$$

ـ حالت خاص m = n ⟵ برخلاف دو روش قبل $D\neq 0$ **است .**

$$G(t)=\frac{N(s)}{D(s)}=d+\frac{R(s)}{D(s)}$$

که از $\dfrac{R(s)}{D(s)}$ **مقادیر C,B,A بدست می آید و ضمنا** $D=[d]$ **می باشد .**

حتما درجه (R (s کوچکتر از مخرج است .

مثال : معادلات حالت همبسته سیستم زیر را بنویسید :

$$G(s)=\frac{s^2+3s+2}{s^2+1}$$

$s^2+2s+3 \qquad s^2+1$

$s^2+0+1 \qquad\qquad 1 \qquad \Rightarrow G(s)=1+\dfrac{2s+2}{s^2+1}$

$2s+2$

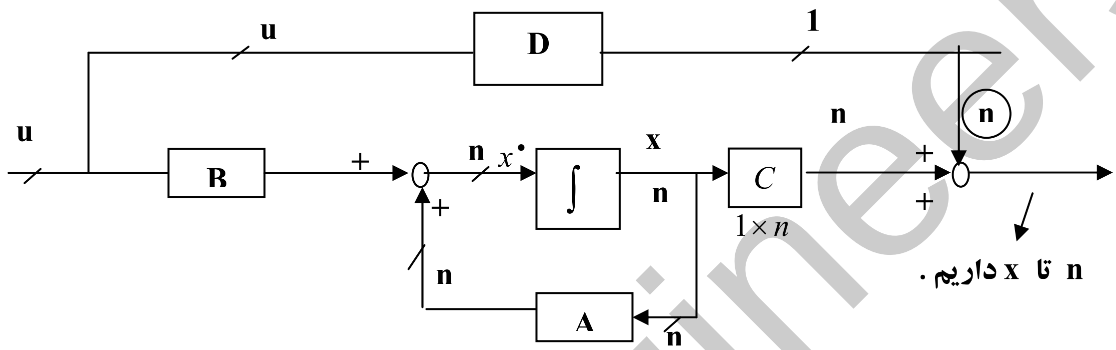
بنابراین : $A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}2&2\end{bmatrix}\qquad D=\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}$

تمرین ۷ : معادلات حالت همبسته سیستم زیر را بنویسید :

$$G(s)=\frac{s^3+3s^2+2s+4}{s^3+3s+1}$$

بلوک دیاگرام معادلات حالت :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$



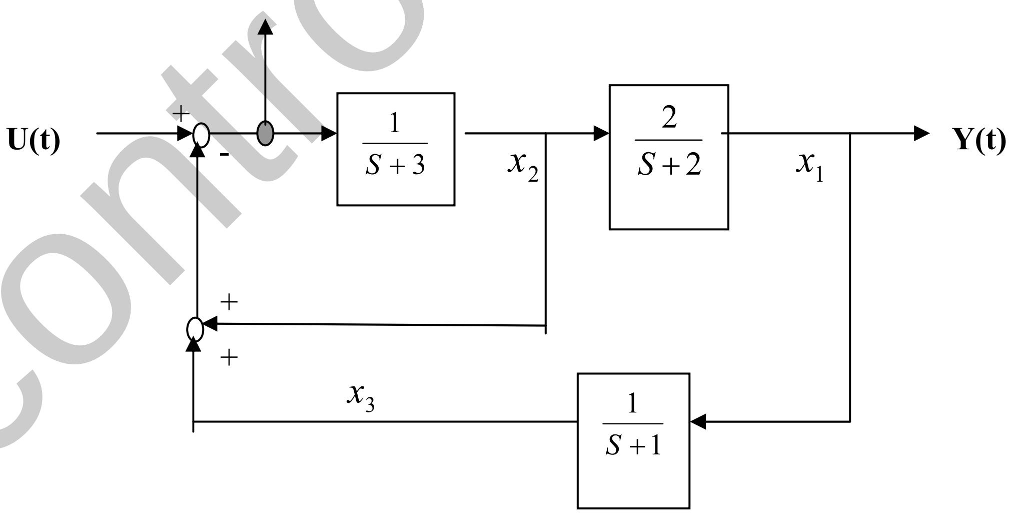
B , C با هم سری می باشند پس می توان ضرائب آنها را تعویض کرد .

B , C مبدل های $n\times 1$ و $1\times n$ می باشند .

بدست آوردن معادلات حالت از بلوک دیاگرام یا **S.F.G** :

مثال : معادلات حالت سیستم زیر را بدست آورید .

$$u(s)-(x_2+x_3)$$



$$x_1(s)=x_2(s)\frac{2}{s+2} \quad \Rightarrow x_1(s)(s+2)=2x_2(s) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow sx_1(s)+2x_1(s)=2x_2(s) \quad \xrightarrow{L^{-1}} \quad \dot{x}_1(t)+2x_1(t)=2x_2(t)$$

معادله اول : $\dot{x}_1(t)=-2x_1(t)+2x_2(t)$

$$x_2(s)=\left[u(s)-x_2(s)-x_3(s)\right]\frac{1}{s+3}$$

$$2x_2(s)+3x_2(s)=-x_2(s)-x_3(s)+u(s) \quad \xrightarrow{L^{-1}} \quad \dot{x}_2(t)=-4x_2(t)-x_3(t)+u(t)$$

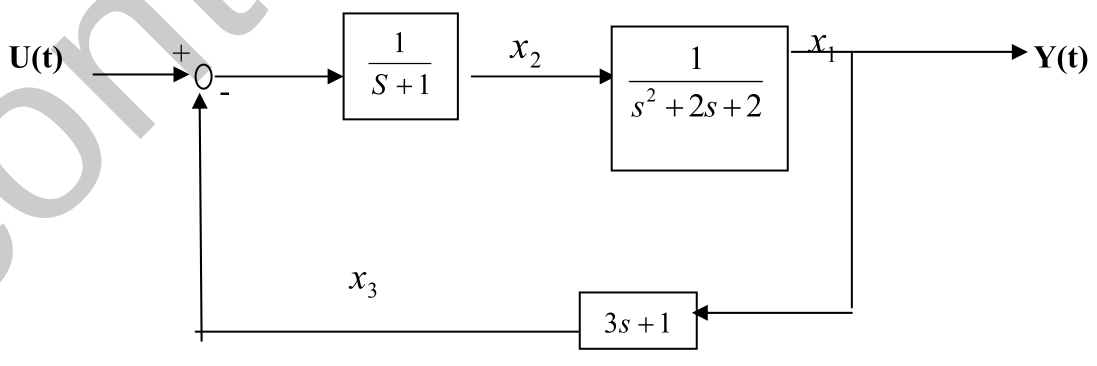
و همین طور : $x_3(s)=x_1(s)\frac{1}{s+1} \quad \xrightarrow{L^{-1}} \quad \dot{x}_3(t)=x_1(t)-x_3(t)$

معادله خروجی : $y(t)=x_1$

$$A=\begin{bmatrix} -2 & +2 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

تمرین ۸ :



بدست آوردن تابع تبدیل از معادلات حالت :

$$\begin{cases} x^{\bullet} = Ax + Bx \\ y = Cx + Dx \end{cases}$$

لاپلاس گیری :

$$\begin{cases} s\cancel{x}(s) - x_0 = A\cancel{x}(s) + Bu(s) \\ y(s) = c\cancel{x}(s) + Du(s) \end{cases}$$

که $x[0]$ بردار شرایط اولیه به صورت $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ [x_2(0)] \\ \vdots \\ [x_n(0)] \end{bmatrix}$ می باشد .

$$sI_{n\times n}\cancel{x}(s) = x(0) + Bu(s)$$

برای تبدیل عدد S به بردار ، آن را در ماتریس همانی $(I_{n\times n})$ ضرب می کنیم .

پس

$$\left[sI_{n\times n} - A\right]\cancel{x}(s) = x(0) + Bu(s)$$

پس

$$\cancel{x}(s) = (sI - A)^{-1}\left[x(0) + Bu(s)\right]$$

ماتریس

با فرض $\varphi_{n\times n}(s) = (sI - A)^{-1} \xrightarrow{L^{-1}} \varphi_{n\times n}(t)$

$$x(t) = \varphi(t)x(0) + \int_0^t \varphi(\lambda)Bu(t-\lambda)d\lambda$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$y(t) = \underbrace{C\varphi(t)x(0)}_{\text{پاسخ ورودی صفر}} + \int_0^t \underbrace{C\varphi(\lambda)Bu(t-\lambda)d\lambda}_{\text{پاسخ حالت صفر}}$$

$$y(t) = Cx(s) + Du(s)$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = C(sI-A)^{-1}x(0) + \left[c(sI-A)^{-1}B + D\right] \quad u(s)$$

پس $G(s) = c(sI-A)^{-1}x(0)B + D$

مثال : تابع تبدیل سیستم زیر را بدست آورید :

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(t) \qquad , \qquad x^{\bullet}(t)\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -2\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}u(t)$$ پس

$$G(s)=c(sI-A)^{-1}B+D=c(sI-A)^{-1}B+0$$

$$(sI-A)=s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+2\end{bmatrix}$$

دترمینال $\Delta=|sI-A|=s^2+2s+2$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}s+2 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{s+2}{s^2+2s+2} & \dfrac{1}{s^2+2s+2}\\[2ex] \dfrac{-2}{s^2+2s+2} & \dfrac{s}{s^2+2s+2}\end{bmatrix}$$

چون $G(s)=c(sI-A)^{-1}B=c\varphi(s)B$

$$G(s)=\left(\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\varphi(s)\right)\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}s+2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\frac{s+4}{s^2+2s+2}$$

تمرین : در مثال فوق $\varphi(t)$ را با توجه به رابط زیر بدست آورید :

$$\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2} \xrightarrow{L^{-1}} e^{-\alpha t}\sin\beta t$$

$$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2} \xrightarrow{L^{-1}} e^{-\alpha t}\cos\beta t$$

روشهای بدست آوردن $\varphi(t)$:

۱- روش اول : $\varphi(t)=L^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]$

از تک تک عناصر ماتریس $(sI-A)^{-1}$ لاپلاس معکوس می گیریم تا عناصر ماتریس $\varphi(t)$

بدست آید . کاربرد آن در ماتریس های 2×2 , 3×3 می باشد .

۲- روش دوم : استفاده از بسط e^{At}

$$(s-a)^{-1}=\frac{1}{s-a} \xrightarrow{L^{-1}} e^{at}=1+\frac{at}{1!}+\frac{(at)^2}{2!}+\cdots$$

$$(sI-A)^{-1}= \xrightarrow{L^{-1}} e^{At}=I+\frac{At}{1!}+\frac{(At)^2}{2!}+\cdots$$

$$\varphi(t)=e^{At}=I+\frac{At}{1!}+\frac{(At)^2}{2!}+\cdots$$

کاربرد : وقتی است که عناصر A اکثرا صفرند .

خواص $\varphi(t)$:

۱-

$$x^{\bullet}=Ax+Bu \xrightarrow[u=0]{} x^{\bullet}=Ax \qquad \varphi(t)+e^{At}\to\varphi^{\bullet}(t)=Ae^{At}$$

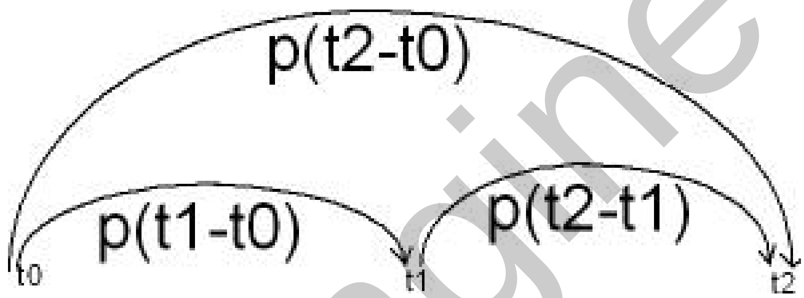
۲- از ضرب شرایط اولیه در $\varphi(t)$ می توان x (t) را یافت $x(t)=\varphi(t)x(0)$

۳-
$$x(t_1) = \varphi(t_1 - t_0)x(t_0)$$
$$\begin{cases} x(t_0) = \varphi(t_0 - t_1)x(t_1) \\ \varphi^{-1}(t_1 - t_0)x(t_1) = x(t_0) \end{cases}$$

۴-
$$\varphi^{-1}(t_1 - t_0) = \varphi(t_0 - t_1)$$

۵-
$$\varphi^{-1}(t) = \varphi(-t)$$

۶-
$$\varphi(t_2 - t_1)\varphi(t_1 - t_0) = \varphi(t_2 - t_0)$$



۷-
$$\varphi^k(t) = \varphi(kt)$$

مثال : e^{At} **را حساب کنید .**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(t) = e^{At} = L^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]$$

$$sI - A = s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ +2 & s+2 \end{bmatrix}$$

بنابراین : $(sI-A)=\frac{1}{|sI-A|}\begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}=$

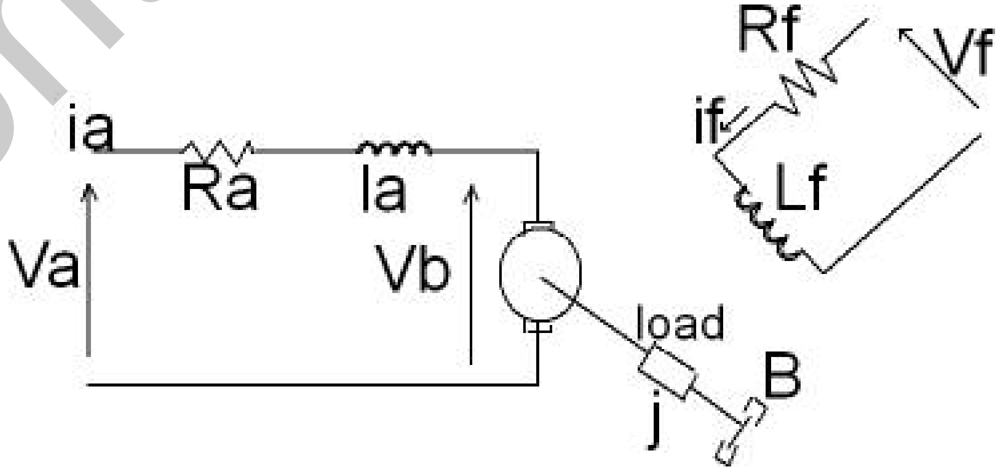
$$=\begin{bmatrix} \frac{s+2}{s^2+2s+2} & \frac{1}{s^2+2s+2} \\ \frac{-2}{s^2+2s+2} & \frac{s}{s^2+2s+2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{(s+1)+1}{(s+1)^2+1} & \frac{1}{(s+1)^2+1} \\ \frac{-2}{(s+1)^2+1} & \frac{s}{(s+1)^2+1} \end{bmatrix} \xrightarrow{L^{-1}}$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix} e^{-t}(\cos t+\sin t) & e^{-t}\sin t \\ -2e^{-t}\sin t & e^{-t}(\cos t-\sin t) \end{bmatrix}$$

تمرین ۱۰ : در مثال فوق با فرض $B=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $C=[1 \quad 0]$, $D=[0]$ شرایط اولیه صفر $x(0)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ و پله واحد = u (t) خروجی را بدست آورید .

$$y(t)=c\varphi(t)x(0)+\int_0^t c\varphi(\lambda)Bu(t-\lambda)d\lambda+Du(t)$$

مدل سازی موتورهای DC :



گشتاور مصرفی بار $T_l = j\dfrac{dw}{dt} + Bw$

دورانی	خطی
θ	x یی (موقعیت)
$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$	سرعت $V = \dfrac{dx}{dt}$
شتاب زاویه ای $\alpha = \dfrac{dw}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$	شتاب $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$
$T = j\alpha$ j ثابت مُمان اینرسی است .	$F_m = ma$
$T_B = Bw$	$F_B = BV$
فنر حلقوی $T_k = k\theta$	فنر خطی $F_k = kx$

یزان گشتاور موتور $T_m = ki_a i_f$ $\Rightarrow$ که معمولا $T_L = T_m$

و گشتاور مصرفی بار $T_L = j\alpha = Bw$

$$V_a = R_a i'_a + L_a \frac{di_a}{dt} + V_b$$

$$V_b = k'w$$

$$V_f = R_f i'_f + L_f \frac{di_f}{dt}$$

با افزایش سرعت ، افت ولتاژ روی جاروبک ها زیاد تر می شود .

۱- موتور dc با کنترل آرمیچر :

$$W(t) \xleftrightarrow{l} \Omega(s) \qquad (I_f = cte)$$

رابطه V_f در این روش به درد نمی خورد.

$$G_a(s) = \frac{\Omega(s)}{V_a(s)} \qquad T_m = k'' i_a$$

۲- موتور DC با کنترل میدان :

$$i_f = cte$$

$$(i_a = cte)$$

رابطه V_b در این روش به درد نمی خورد .

$$G_f(s) = \frac{\Omega(s)}{V_f(s)}$$

فصل سوم :

بررسی پاسخ گذار و ماندگار سیستم های کنترلی

۱ . ورودی های استاندارد

۲. بررسی سیستم های مرتبه اول

۳. بررسی سیستم های مرتبه دوم

۴. اثر اضافه کردن صفر و قطب به سیستم های مرتبه دوم

۵. نوع سیستم و خطای ماندگار

۶. اثرات فیدبک

۷. پایداری

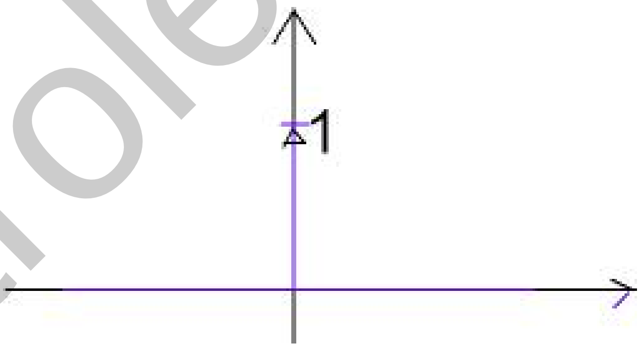
ورودی های استاندارد :

۱. توابع ویژه : ضربه - پله – شیب - شتاب - حالت کلی

2. چند جمله

3. سینوسی

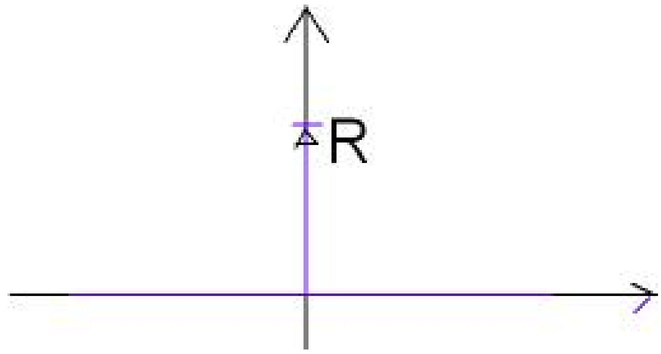
ضربه واحد :



$$\delta(t) = u_0(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt = 1 \end{cases}$$

$$\delta(t) \xrightarrow{L} R$$

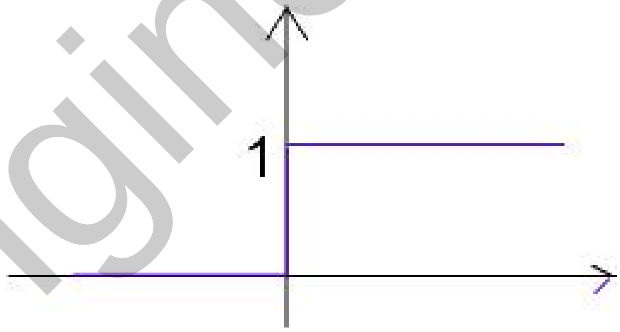
ضربه غیر واحد :



$$R\delta(t) = Ru_0(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \int_{0^-}^{0^+} R\delta(t)dt = R \end{cases}$$

$$R\delta(t) \xrightarrow{L} R$$

پله واحد :



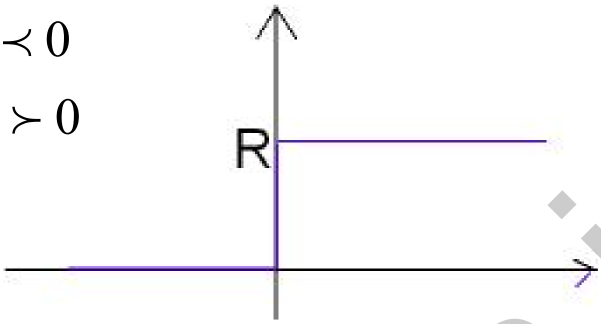
$$u(t) = u_{-1}(t) = \begin{cases} 0 & t \prec 0 \\ 1 & t \succ 0 \end{cases}$$

$$u(t) \xrightarrow{L} 1/s$$

$1/s$ **اگر سیگنال باشد « پله » است اما اگر داخل سیستم (تابع تبدیل) باشد ؛ آنوقت انتگرال گیر است .**

پله غیرواحد :

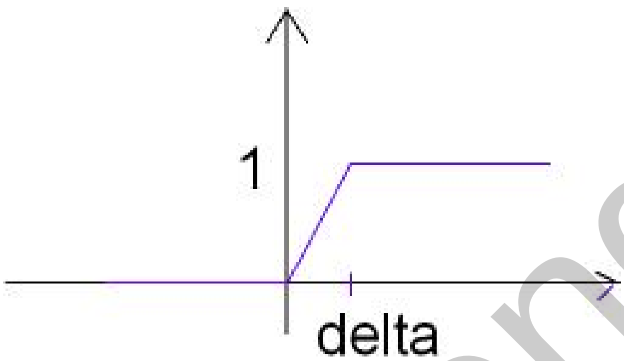
$$u(t)=u_{-1}(t)=\begin{cases}0 & t\prec 0\\ R & t\succ 0\end{cases}$$



$$Ru(t)\xrightarrow{L} R/s$$

پله واقعی:

$$u_{\Delta}(t)$$

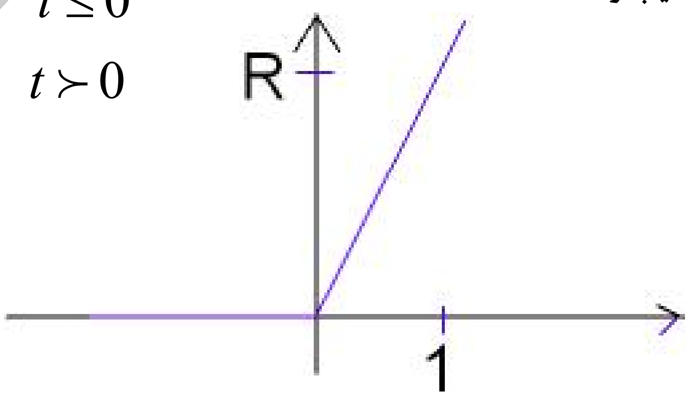


$$u(t)=\lim_{\Delta\to 0} u_{\Delta}(t)$$

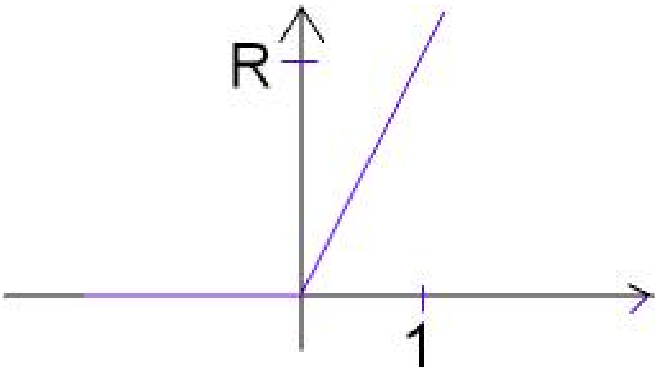
شیب واحد :

$$r(t)=u_{-2}(t)=\begin{cases}0 & t\le 0\\ t & t\succ 0\end{cases}$$

$$r(t)\xrightarrow{L} 1/s^{2}$$



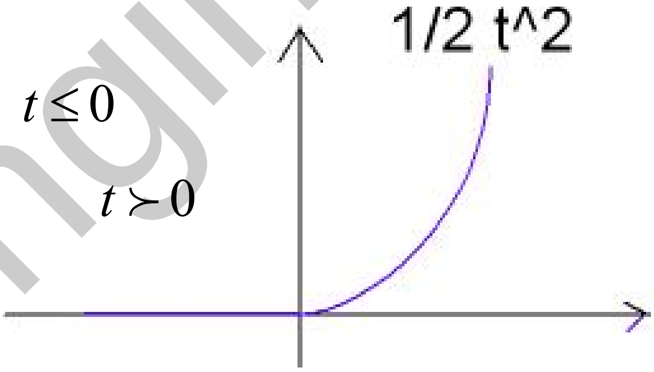
شیب غیر واحد :



$$Rr(t) \xrightarrow{L} R/s^2$$

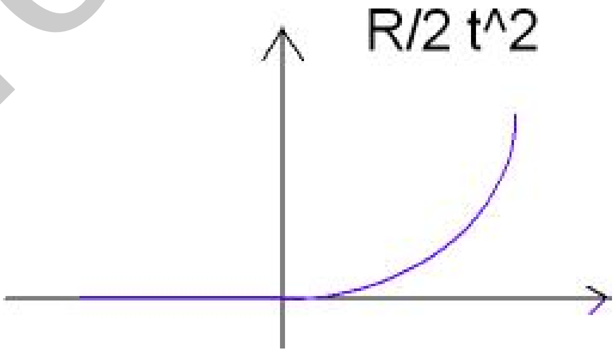
$$Rr(t) = Ru_{-2}(t) = \begin{cases} 0 & t \prec 0 \\ Rt & t \succ 0 \end{cases}$$

شتاب واحد :



$$a(t) = u_{-3}(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ \frac{1}{2}t^2 & t \succ 0 \end{cases}$$

شتاب غیر واحد :



$$Ra(t) = Ru_{-3}(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ \frac{R}{2}t^2 & t \succ 0 \end{cases}$$

ورودی های چند جمله ای :

$$u(t)=\left(R_0+R_1t+R_2t^2+\ldots+R_nt^n+\ldots\right)u_{-1}(t)$$

$$\frac{1}{n!}t^n\rightarrow\frac{1}{s^{n+1}}$$

لاپلاس گیری : $u(s)=\frac{R_0}{s}+\frac{R_1}{s^2}+\frac{2R_2}{s^3}+\ldots+\frac{n!R_n}{s^{n+1}}+\ldots$

کاربرد : در برازش منحنی استفاده می گردد .

وقتی عبارت $u_{-1}(t)$ نیاید یعنی سیستم در حال حاضر در وضعیت ماندگار است .

پاسخ حالت دائمی سیستم LTI به ورودی های چند جمله ای :

ورودی چند جمله ای → سیستم LTI → خروجی چند جمله ای (با درجه مناسب)

مثال : پاسخ سیستم زیر را به ورودی u (t) بدست آورید .

$$y^{\bullet\bullet}(t)+a_1y^{\bullet}(t)+a_0y(t)=b_1u^{\bullet}(t)+b_0u(t)$$

$$u(t)=R_0+R_1t+R_2t^2$$

حل : $u^{\bullet\bullet}=R_1+2R_2t$

طرف دوم معادله $=b_1(R_1+2R_2t)+b_0(R_0+R_1t+R_2t^2)$

طرف دوم معادله $=(b_1R_1+b_0R_0)+(2b_1R_2+b_0R_1)t+(b_0R_2)t^2$

طرف دوم معادله چند جمله ای از درجه ۲ است . پس طرف اول نیز باید از درجه ۲ باشد .

بنابراین y (t) از درجه ۲ است .

$$y(t)=C_0+C_1t+C_2t^2$$

که C_2,C_1,C_0 مقادیر مجهول می باشند .

$$y^{\bullet}(t)=C_1+2C_2t \quad , \quad y^{\bullet\bullet}(t)=2C_2$$

طرف اول معادله $=2C_2+a_1(C_1+2C_2t)+a_0(C_0+C_1t+C_2t^2$

$$=(2C_2+a_1C_1+a_0C_0)+(2a_1C_2+a_0C_1)t+(a_0C_2)t^2$$

$$\begin{cases} a_0C_2=b_0R_2 \rightarrow C_2 & \text{بدست می آید} \\ 2a_1C_2+a_0C_1=2b_1R_2+b_0R_1 \rightarrow C_1 & \text{بدست می آید} \\ 2C_2+a_1C_1+a_0C_0=b_1R_1+b_0R_0 \rightarrow C_0 & \text{بدست می آید} \end{cases}$$

ورودی سینوسی :

$$u(t)=A\cos w_\circ t \xrightarrow{L} \frac{As}{s^2+w_\circ^2}$$

$$u(t)=A\sin w_\circ t \xrightarrow{L} \frac{Aw_\circ}{s^2+w_\circ^2}$$

تمرین ۱ :

$$u(t)=A\cos(w_\circ t-\theta_\circ) \xrightarrow{L} \qquad e^{-st_\circ}$$ به فرم

$$u(t)=A\sin(w_\circ t-\theta_\circ)$$

بررسی سیستم های مرتبه اول :

فرم صفر و قطب $G(t)=\dfrac{b}{s+a}$ $\qquad$ $s=-a$ قطب

فرم ثابت زمانی $G(t)=\dfrac{k}{1+\tau s}$ $\qquad$ $k:DC$ گین $\qquad$ ثابت زمانی : τ

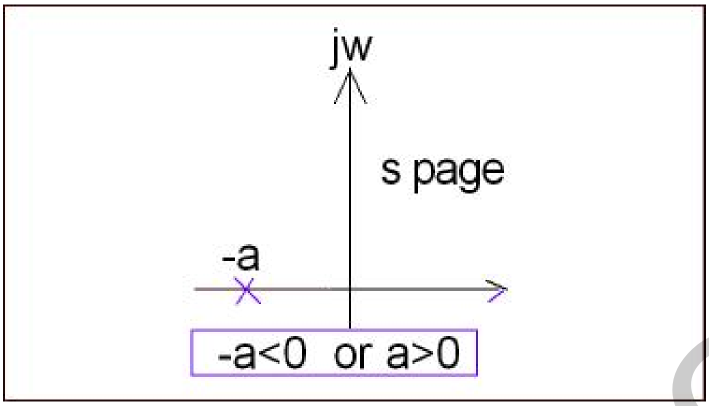
تبدیل فرم های فوق یکدیگر :

$$\begin{cases} k=b/a \\ \tau=1/a \end{cases} \quad \text{و یا} \quad \begin{cases} b=k/\tau \\ a=1/\tau \end{cases}$$

یافتن پاسخ پله :

$$\frac{1}{s} \longrightarrow \boxed{\frac{b}{s+a}} \longrightarrow Y(s)$$

حالت پایدار :



$$a \succ 0 \qquad -a \prec 0$$

$$\frac{1}{s} \longrightarrow \boxed{\frac{b}{s+a}} \longrightarrow \boxed{{}^{1}\!/_{s} \times {}^{b}\!/_{s+a}}$$

این رابطه مقدارهایی را نیز می دهد

$$y(s) = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+a} \quad \text{که} \quad k_1 = \lim_{s \to 0} sy(s) = {}^{b}\!/_{a}$$

$$, \quad k_2 = \lim_{s \to -a} (s+a) y(s) = -{}^{b}\!/_{a}$$

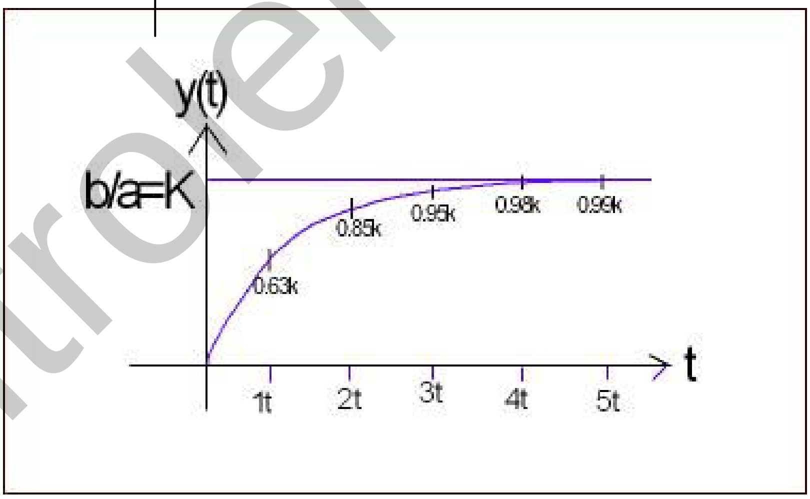
بنابراین :

$$y(s) = \frac{{}^{b}\!/_{a}}{s} + \frac{-{}^{b}\!/_{a}}{s+a} \quad \Rightarrow \quad y(s) = {}^{b}\!/_{a}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right)$$

$$y(s)=\frac{b}{a}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+a}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y(s)=\frac{b}{a}(1-e^{-at})u_{-1}(t) \quad \longrightarrow \quad y(s)=k(1-e^{-t/\tau})u_{-1}(t)$$

t	$y(t)$
0	0
τ	$k(1-e^{-1})=0.63k$
2τ	$k(1-e^{-2})=0.85k$
3τ	$k(1-e^{-3})=0.95k$
4τ	$k(1-e^{-4})=0.98k$
5τ	$k(1-e^{-5})=0.99k$
$\vdots$	$\vdots$
∞	$k(1-e^{-\infty})=k$



بهتر است مقادیر را در 1τ (**0.63k**) بدست آوریم زیرا خطای آن نسبت به حالت های نزدیک به ۱۰۰ ٪ کمتر است .

قضیه مقدار نهایی : (در صورت وجود حد ها)

$$y(\infty)=\lim_{t\to\infty} y(t)=\lim_{s\to 0} sy(s)$$

$$y(\infty)=\lim_{s\to 0} sy(s)=b/a=k$$

مثال : در مورد سیستم مرتبه اول پایدار

قضیه مقدار اولیه: $y(0^+) = \lim_{t\to 0^+} y(t) = \lim_{s\to\infty} sy(s)$

در مورد سیستم مرتبه اول پایدار ـ مثال

$$y(0^+) = \lim_{s\to\infty} sy(s) = 0$$

شیب اولیه :

$$y^\bullet(0^+) = \lim_{t\to 0^+} y^\bullet(t) = \lim_{s\to\infty} s\left[sy(s) - y(0^+)\right]$$

$y(0^+) = \lim_{s\to\infty} s^2 y(s)$ **اگر** $y(0^-) = 0$ **باشد .**

شیب نهایی:

$$y(0^+) = \lim_{t\to\infty} y^\bullet(t) = \lim_{s\to 0} s\left[sy(s) - y(0^+)\right]$$

اگر $y(0^+) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(0^+) = \lim_{s\to 0} s^2 y(s)$

شتاب اولیه :

$$y^{\bullet\bullet}(0^+) = \lim_{t\to 0^+} y^{\bullet\bullet}(t) = \lim s\left[s^2 y(s) - sy(0^-) - y^\bullet(0^-)\right]$$

$$y^\bullet(0^-) = 0 \quad , \quad y(0^-) = 0 \Rightarrow y^{\bullet\bullet}(0^+) = \lim_{s\to\infty} s^3 y(s)$$

شتاب نهایی:

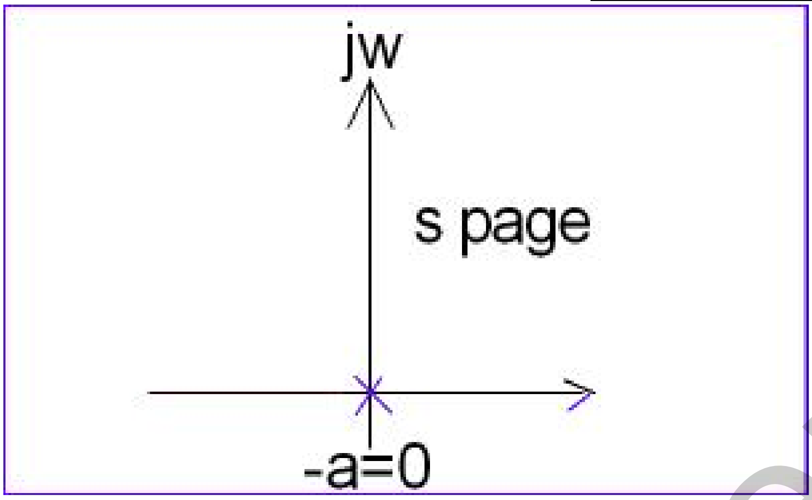
$$y^{\bullet\bullet}(\infty) = \lim_{s\to 0} s^3 y(s)$$

تمرین ۲: شیب اولیه و نهایی پاسخ پله سیستم مرتبه اول پایدار را بدست آورید .

شتاب اولیه و نهایی پاسخ پله سیستم مرتبه اول پایدار را بدست آورید .

$$y^\bullet(0^+) \quad , \quad y^\bullet(\infty) \quad , \quad y^{\bullet\bullet}(0^+) \quad , \quad y^{\bullet\bullet}(\infty)$$

حالت های ناپایدار سیستم مرتبه اول :

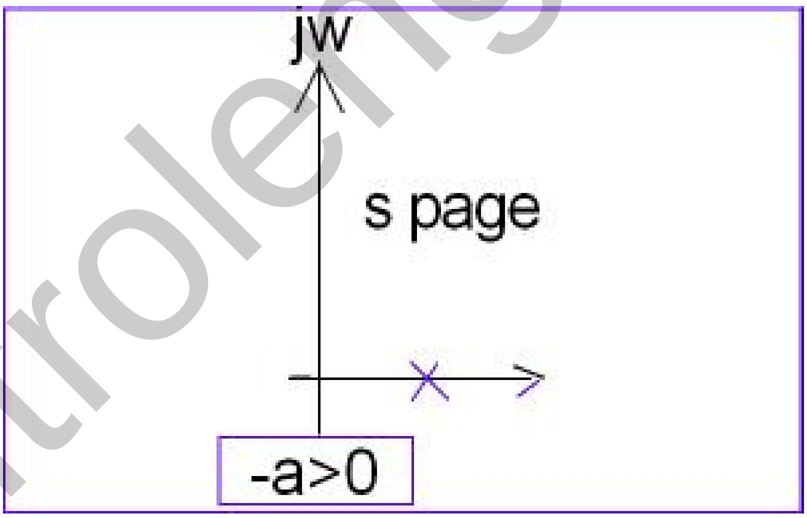


A) –a = 0

$$\frac{1}{s} \longrightarrow \boxed{\frac{b}{s}} \longrightarrow \frac{b}{s^{2}} \longrightarrow y(t)=btu_{-1}(t)$$

وقوع حالت ناپایدار : زیرا با وجود ورودی محدود ، خروجی نامحدود شده است .

B) - a >0



$$y(t)=\frac{b}{a}(1-e^{-at})u_{-1}(t)$$

سیستم ناپایدار است .

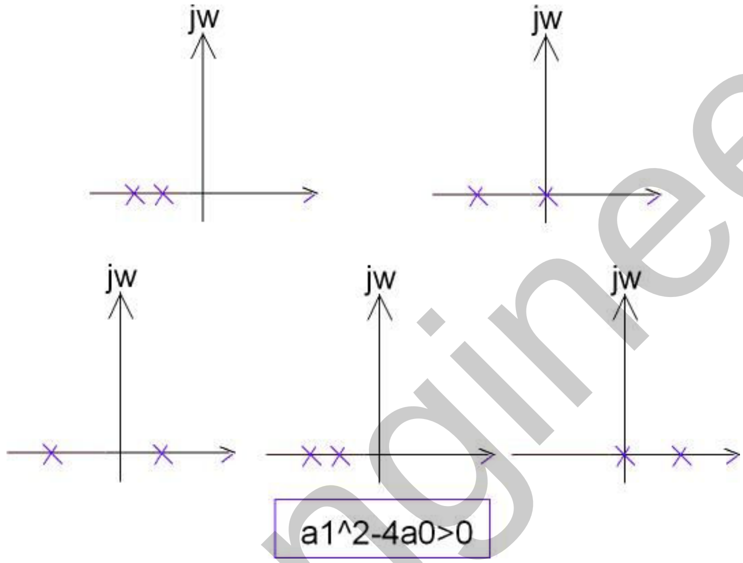
$$\frac{1}{s} \longrightarrow \boxed{\frac{b}{s+a}} \longrightarrow y(s)$$

بررسی سیستم های مرتبه دوم :

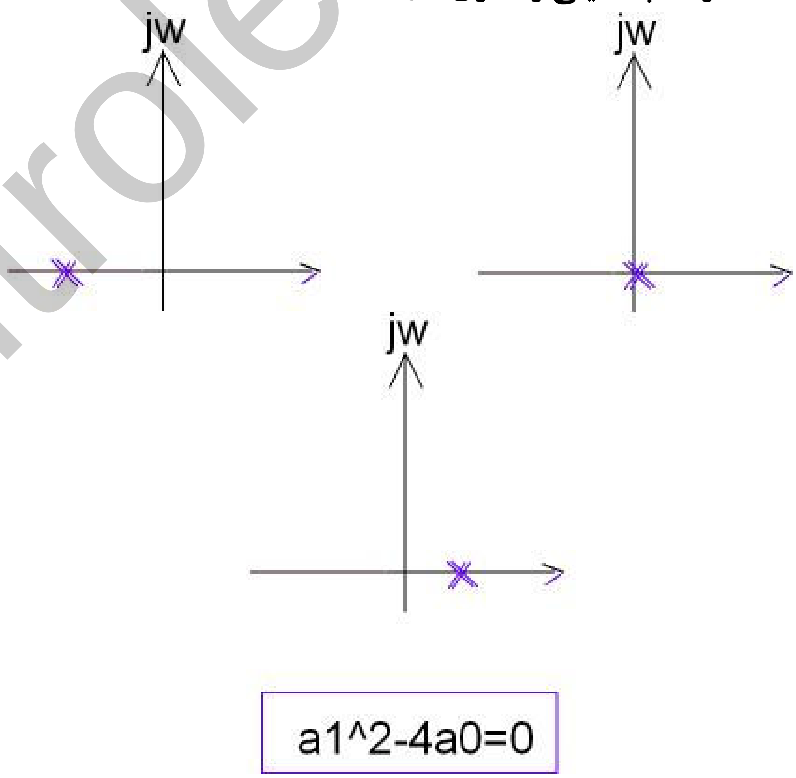
$$G(s) = \frac{b}{s^2 + a_1 s} + a_0$$

پس
$$s_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}$$

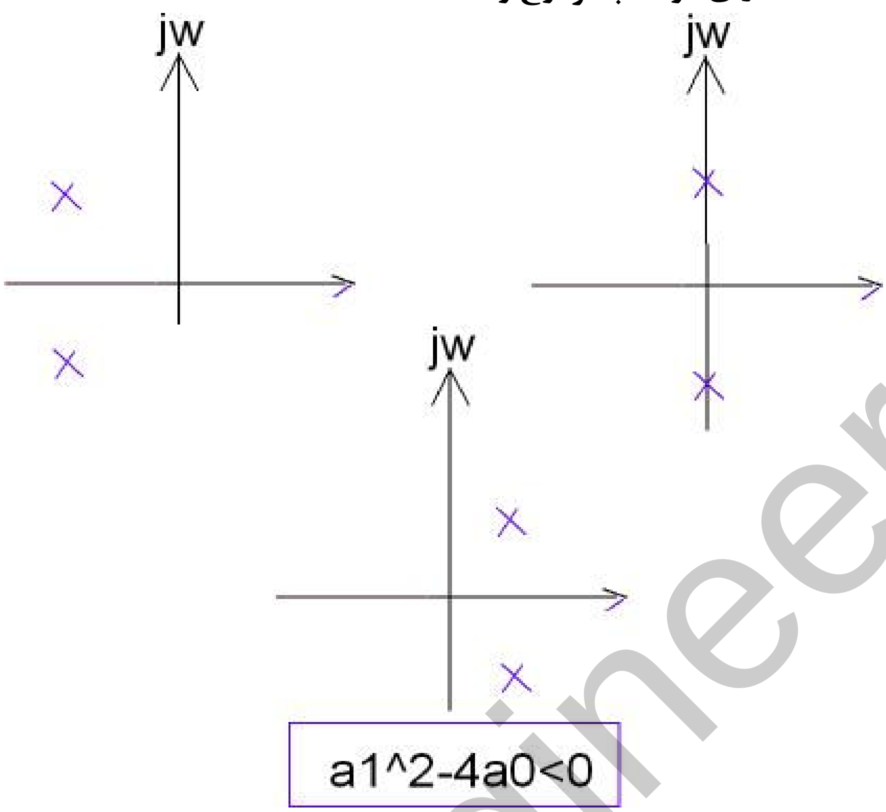
حالت اول : $\Delta = a_1^2 - 4a_0 \succ 0$ **که دو قطب حقیقی مجزا دارد با حالت های مختلف زیر**



حالت دوم : $\Delta = 0$ **دو قطب حقیقی و مساوی دارد .**



حالت سوم : $\Delta \prec 0$ دارای دو قطب مزدوج و مختلط است .



$$s_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} = -\alpha, -\beta$$

حالت اول : $\Delta \succ 0$ $\leftarrow$ **وجود دو قطب حقیقی مجزا**

حالت پایدار : هر دو قطب سمت چپ محور j w واقع باشند .

$$G(s)=\frac{b}{(s+\alpha)(s+\beta)}$$

پاسخ پله $$y(s)=\frac{1}{s}\times\frac{b}{(s+\alpha)(s+\beta)}$$

$$y(s)=\frac{k_1}{s}+\frac{k_2}{(s+\alpha)}+\frac{k_3}{s+\beta}$$

که $$k_1=\lim_{s\to 0} sy(s)=\frac{b}{\alpha\beta}$$

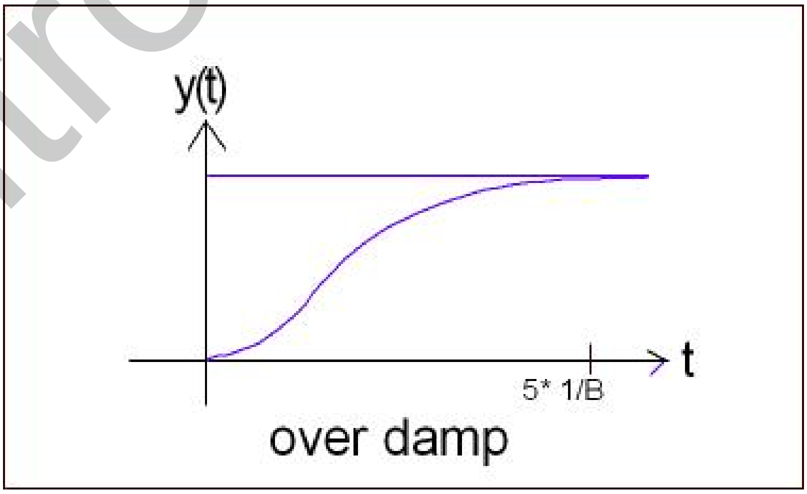
$$k_2=\lim_{s\to-\alpha}(s+\alpha)y(s)=\frac{b}{\alpha(\alpha-\beta)}$$

$$k_3=\lim(s+\beta)y(s)=\frac{-b}{\beta(\alpha-\beta)}$$

$$y(s)=\frac{b}{\alpha\beta}\left(\frac{1}{s}+\frac{\frac{\beta}{\alpha-\beta}}{(s+\alpha)}-\frac{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}{(s+\beta)}\right)$$

$$y(t)=\frac{b}{\alpha\beta}\left(1+\frac{1}{\alpha-\beta}(\beta e^{-\alpha t}-\alpha e^{-\beta t})u_{-1}(t)\right)$$

عوامل میرا کننده از بین $-\beta,-\alpha$ هر کدام منفی تر است زودتر از بین می رود .



ثابت زمانی $1/\beta$ دیرتر از $1/\alpha$ صفر می گردد .

حالت ناپایدار:

A)

$$-\alpha \prec 0 \qquad -\beta = 0$$

$$1/s \rightarrow \boxed{\frac{b}{s(s+a)}} \rightarrow y(s) = \frac{b}{s^2(s+a)}$$

با استفاده از کسرهای جزئی $\qquad y(s) = \frac{k_1}{s^2} + \frac{k_2}{s} + \frac{k_3}{s+\alpha}$

که

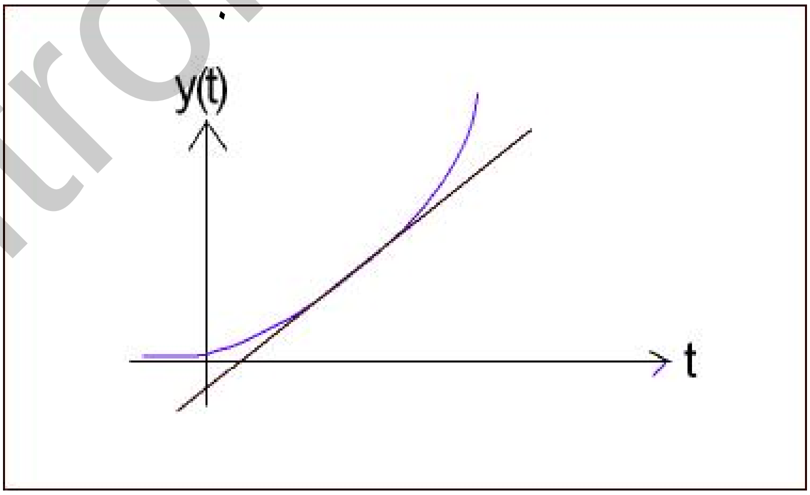
$$k_1 = \lim_{s\to 0} s^2 y(s) = b/\alpha$$

$$k_2 = \lim_{s\to 0} d/ds\; s^2 y(s) = -b/\alpha^2$$

$$k_3 = \lim_{s\to -\alpha} (s+\alpha) y(s) = b/\alpha^2$$

$$y(s) = b/\alpha^2 \left(\frac{\alpha}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+\alpha}\right)$$

$$y(t) = b/\alpha^2 \left(\alpha t - 1 + e^{-\alpha t}\right) u_{-1}(t)$$



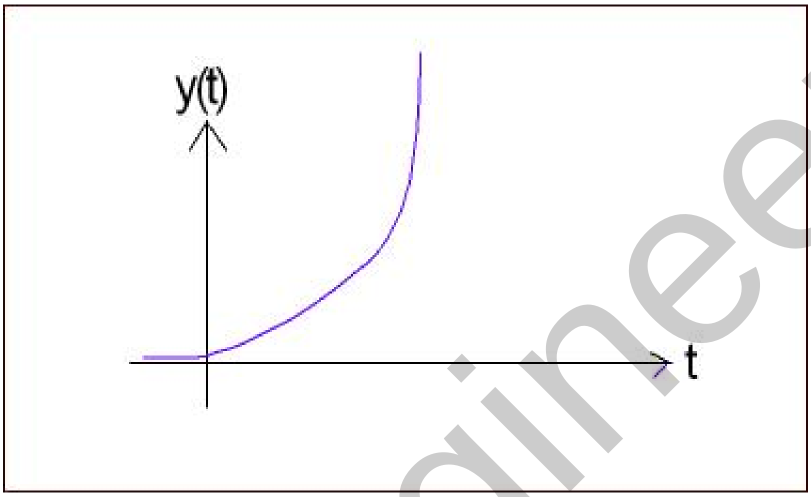
B)

$$-\alpha \prec 0 \qquad -\beta \succ 0$$

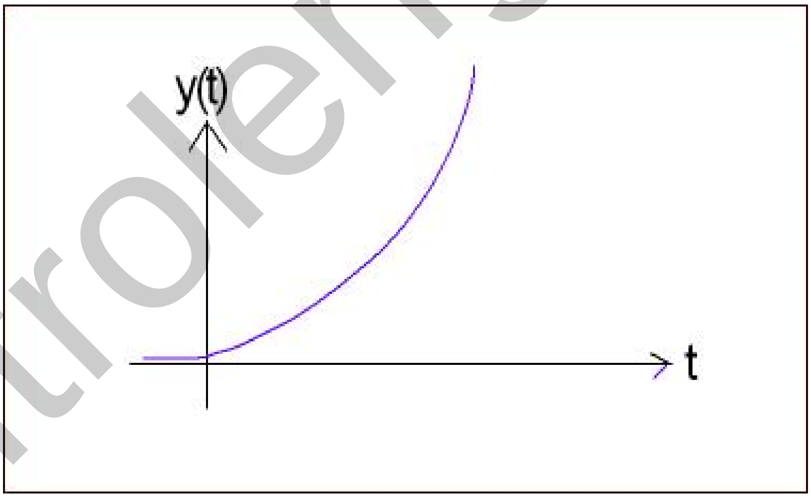
$$G(s)=\frac{b}{(s+\alpha)(s+\beta)}$$

همانند حالت پایدار $y(t)=\frac{b}{\alpha\beta}\left(1+\frac{b}{\alpha-\beta}(\beta \cancel{e^{-\alpha t}} - \alpha \cancel{e^{-\beta t}})\right)u_{-1}(t)$

$0 \qquad \infty$



c)

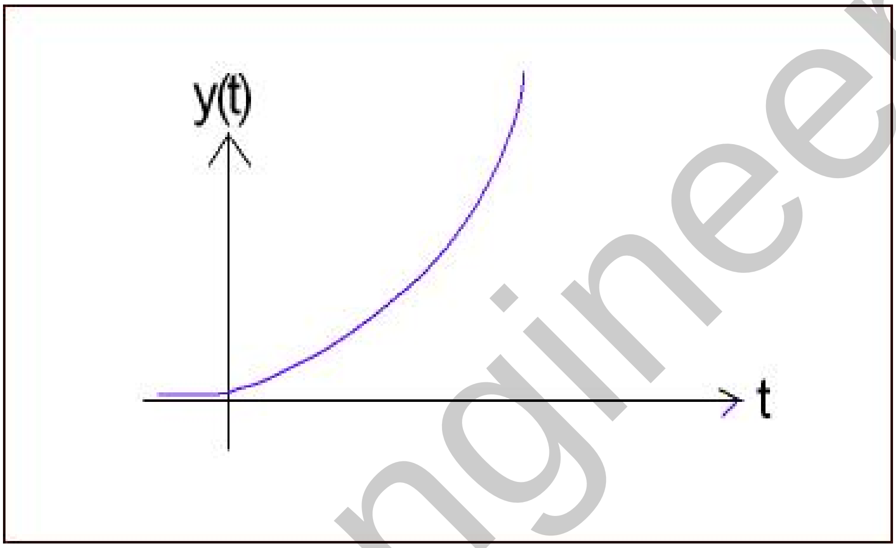


$$\frac{1}{s} \rightarrow \boxed{\frac{b}{s(s+\beta)}} \rightarrow y(s)$$

$$y(t) = \frac{b}{\beta^2}(\beta t - 1 + e^{-\beta t})u_{-1}(t)$$

∞ D

(D



$$-\alpha \succ 0 \qquad -\beta \succ 0$$

$$G(t) = \frac{b}{(s+\alpha)(s+\beta)}$$

$$y(t) = \frac{b}{\alpha\beta}(1 + \frac{1}{\alpha - \beta}(\beta e^{-\alpha t} - \alpha e^{-\beta t}))u_{-1}(t)$$

∞ ∞

نا پایدار

حالت دوم : $\Delta = 0$ دو قطب حقیقی مساوی

$$s_{1,2} = \frac{-a_1}{2} = -\alpha$$

$$G(s) = \frac{b}{(s+\alpha)^2}$$

حالت پایدار $\quad -\alpha \prec 0 \rightarrow$ α مثبت است .

پاسخ پله : $\quad y(s) = \frac{1}{s}.\frac{b}{(s+\alpha)^2} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{(s+\alpha)^2} + \frac{k_3}{(s+\alpha)}$

که

$$k_1 = \lim_{s\to 0} sy(s) = b/\alpha^2$$

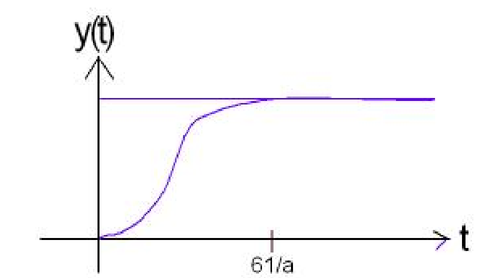
$$k_2 = \lim_{s\to -\alpha} (s+\alpha)^2 y(s) = -b/\alpha$$

$$k_3 = \lim_{s\to -\alpha} d/ds\,(s+\alpha)^2 y(s) = -b/\alpha^2$$

$$y(s) = \frac{b}{\alpha^2}\left(\frac{1}{s} - \frac{\alpha}{(s+\alpha)^2} - \frac{1}{s+\alpha}\right)$$

پس $\quad y(t) = \frac{b}{\alpha^2}(1-(\alpha t-1)e^{\alpha t})u_{-1}(t)$

نهایی (حالت ماندگار) $\quad y_{ss} = \frac{b}{\alpha^2}$



critical damp

این وضعیت به نام میرائی بحرانی نامیده می شود .

۶ ثابت زمان برای رسیدن به پایداری لازم است .

حالت سوم : $\Delta \prec 0$ **دو قطب مزدوج مختلط**

$$s_{1,2}=\frac{-a_1 \pm \sqrt{4a_0-a_1^2}}{2}=-\alpha \pm j\beta$$

$$G(t)=\frac{b}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$$

نمودار قطبها

$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

حالت پایدار :

$-\alpha \prec 0$

پاسخ پله سیستم

$$y(s)=\frac{1}{s}\times\frac{b}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$$

پس

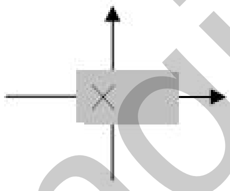
$$y(s)=\frac{k_1}{s}+\frac{k_2(s+\alpha)+k_3\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$$

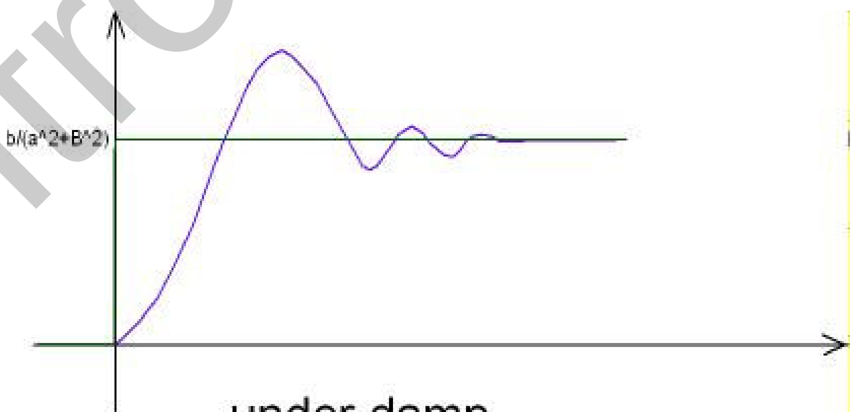
$$y(s)=\frac{k_1\left[(s+\alpha)^2+\beta^2\right]+k_2 s(s+\alpha)+k_3\beta s}{s\left[(s+\alpha)^2+\beta^2\right]} \qquad \text{II}$$

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ 2\alpha k_1 + \alpha k_2 + k_3\beta = 0 \\ k_1(\alpha^2+\beta^2) = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = \dfrac{b}{\alpha^2+\beta^2} \\ k_2 = \dfrac{-b}{\alpha^2+\beta^2} \end{cases}$$

$$k_3 = \frac{-\alpha}{\beta}\cdot\frac{b}{\alpha^2+\beta^2}$$





under damp

$$y(s)=\frac{b}{\alpha^2+\beta^2}(\frac{1}{s}-\frac{(s+\alpha)+\alpha/\beta\times\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$$

که $\frac{(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2+\beta^2}=e^{-\alpha t}\cos\beta t$, $\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}=e^{-\alpha t}\sin\beta t$ می باشد

$$y(t)=\frac{b}{\alpha^2+\beta^2}\left(1-e^{-\alpha t}(\cos\beta t+\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta t)\right)u_{-1}(t)$$

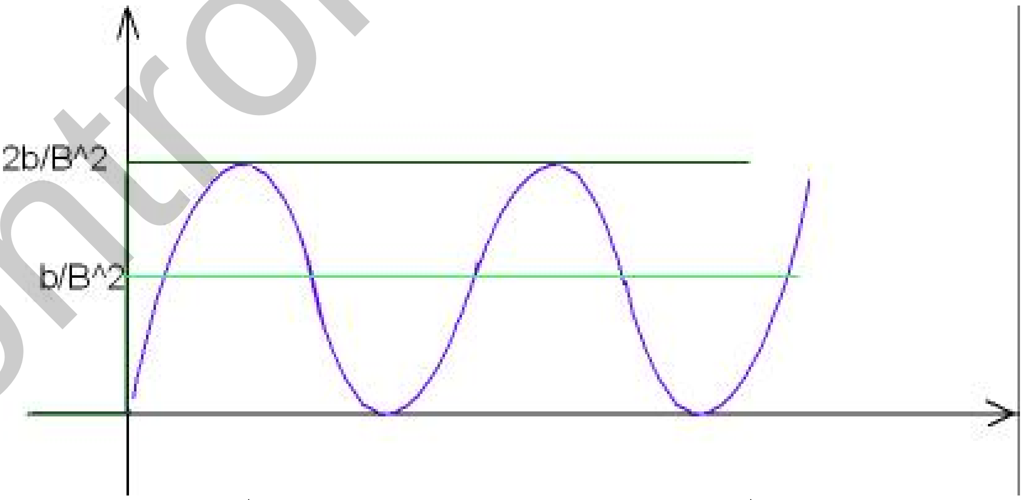
پس $y_{ss}(t)=\frac{b}{\alpha^2+\beta^2}$

سیستم های ناپایدار :

A)

$$-\alpha=0$$

$$y(t)=\frac{b}{\beta^2(1-\cos\beta t)u_{-1}(t)}$$

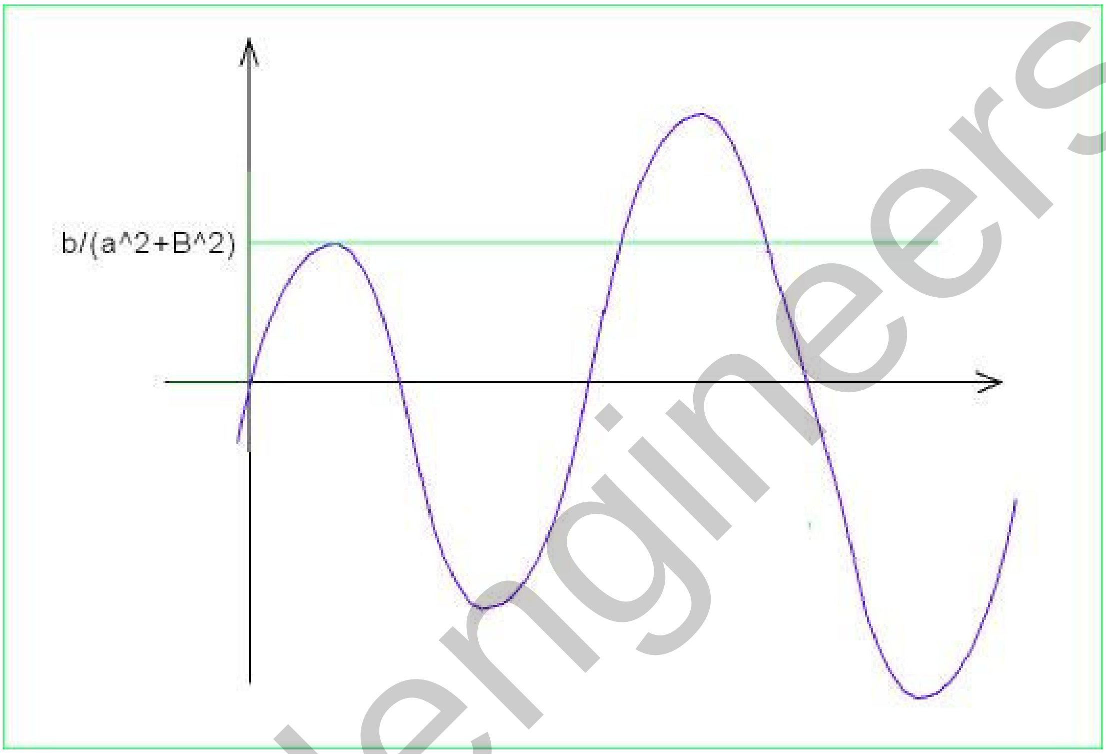


نوسانی دائم (در نوسان سازها به کار می روند .)

B)

$$y(t)=\frac{b}{\alpha^2+\beta^2}\left(1-e^{-\alpha t}(\cos\ \beta t+\frac{\alpha}{\beta}\sin\ \beta t)\right)u_{-1}(t)$$

از نظر ریاضی ، تحلیلی مانند پایدار دارد .



صورت استاندارد سیستم های مرتبه دوم :

فرم استاندارد کانونیکال غیر نرمالیزه

$$G(s)=\frac{K=k\omega_n^{\ 2}}{s^2+2\eta\omega_n s+\omega_n^{\ 2}}$$

در $S = 0$ (حالت DC) مقدار $k/\omega_n^{\ 2}$ بدست می آید . (عدد ثابت صورت و مخرج نابرابر است)

فرم استاندار کانونیکال نرمالیزه

$$G(s)=\frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2+2\eta\omega_n s+\omega_n^{\ 2}}$$

در $S = 0$ (حالت DC) مقدار

$\frac{\omega_n^{\ 2}}{\omega_n^{\ 2}}=1$ (نرمالیزه) خواهد بود . (عدد ثابت صورت و مخرج برابر است) .

برای آنکه حالت غیر نرمالیزه نیز مانند نرمالیزه شود می توان تعریف کرد $K=k\omega_n^{\ 2}$ که به ازاء k=1 عبارت نرمالیزه می شود .

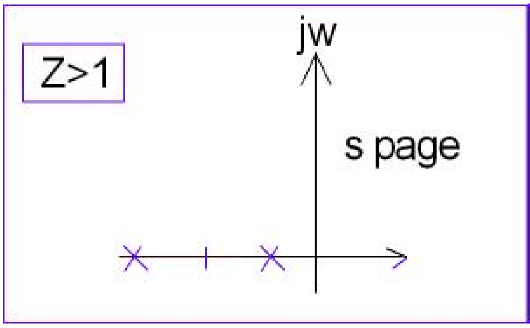
ضریب میرایی : $\eta\omega_n$ نسبت میرایی : η

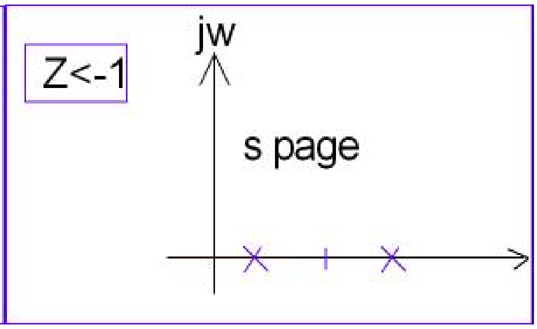
فرکانس طبیعی (میرا شده) $\omega_n \succ 0$

حالت اول : $s_{1,2}=-\eta\omega_n\sqrt{\eta^2-1}$: از معادله نرمالیزه

$$\Delta \succ 0 \quad \Leftarrow \quad \eta \succ 1 \quad \text{یا} \quad \eta \prec -1$$

اگر $\eta \succ 1$ باشد : $s_{1,2}=-\eta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\eta^2-1}$





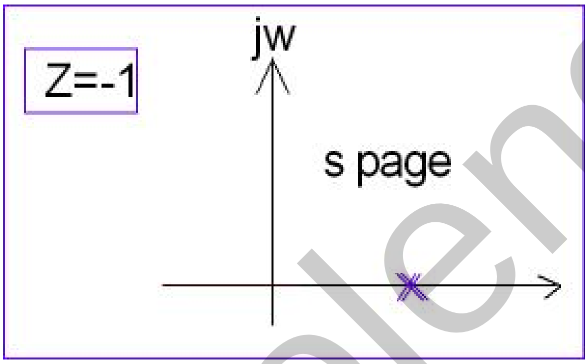
میرایی شدید

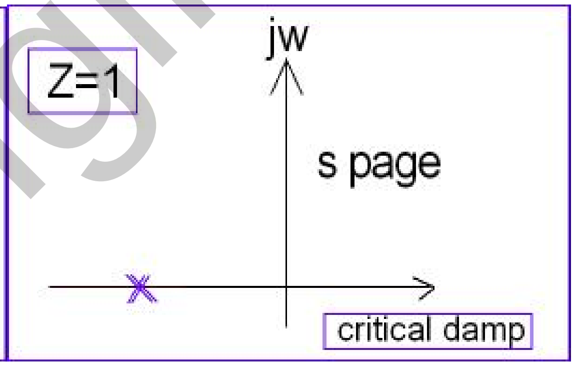
حالت دوم :

$\Delta = 0$ $\qquad \eta = 1$ یا $\eta = -1$

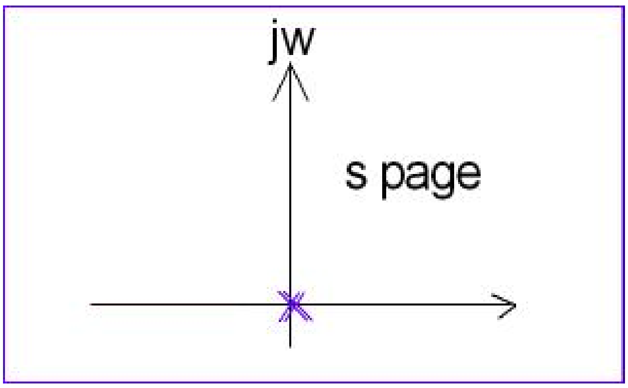
$$\begin{cases} s_{1,2} = -\eta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\eta^2 - 1} \\ \eta = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad s_{1,2} = -\omega$$

نا پایدار $\qquad -\eta\omega_n$



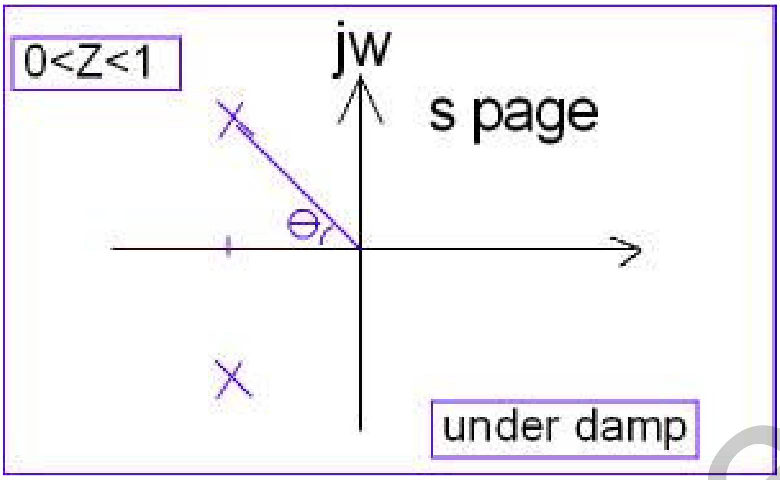


اگر $\quad \omega_n = 0 :$ هر چه باشد $\quad s_{1,2} = 0$



$$\eta = -1 : \qquad s_{1,2} = +\omega_n$$

حالت سوم :



$\Delta \prec 0$ باشد $0 \prec \eta \prec 1$ یا $\eta = 0$ یا $-1 \prec \eta \prec 0$

اگر $0 \prec \eta \prec 1$:

$$s_{1,2} = -\eta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\eta^2}$$

$$\alpha = \eta\omega_n$$

$$\beta = \omega_n\sqrt{1-\eta^2}$$

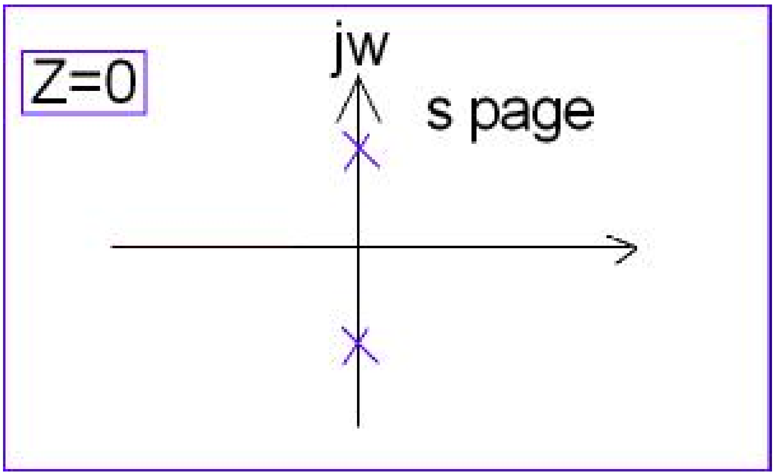
$$\cos = \frac{\eta\omega_n}{\omega_n} = \eta \quad \Rightarrow \quad \theta = \cos^{-1}\eta$$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\eta^2}$$

$$\cot\theta = \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}$$

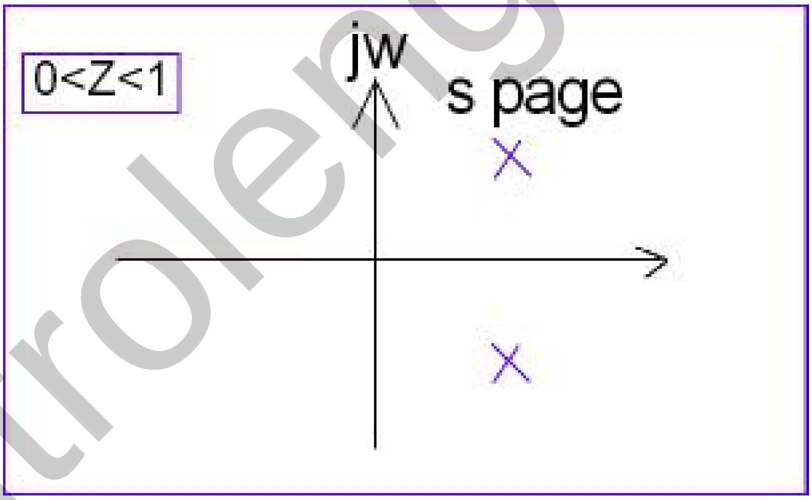
$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\eta^2}$$

فرکانس طبیعی میرا شده



اگر $\eta = 0:$ $s_{1,2} = \pm j\omega_n$ نوسان دائم

اگر $-1 \prec \eta \prec 0$: $s_{1,2} = -\eta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\eta^2}$



پاسخ پله سیستم با میرایی ضعیف $0 \le \eta \le 1$

$$y(t) = \frac{b}{\alpha^2 + \beta^2}\left(1 - \frac{e^{-\alpha t}}{\sin\theta}(\beta t + \theta)\right)u_{-1}(t)$$

با تغییراتی که دادیم :

$$b = k\omega_n^2$$

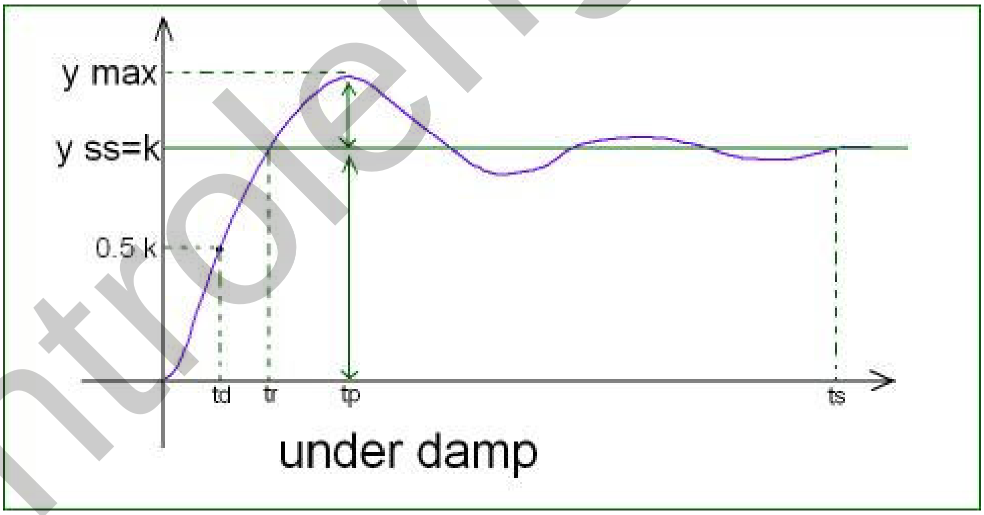
$$\alpha^2 + \beta^2 = \omega_n^2 \qquad , \qquad \alpha = \eta\omega_n$$

$$\beta = \omega_n\sqrt{1-\eta^2}$$

$$y(t) = k\left(1 - \frac{e^{-\eta\omega_n t}}{\sqrt{1-\eta^2}}\sin(\omega_n\sqrt{1-\eta^2}\,t + \cos^{-1}\eta)\right)u_{-1}(t)$$

$$y(t) = k\left(1 - \frac{e^{-\eta\omega_n t}}{\sin\theta}\sin(\omega_d t + \theta)\right)u_{-1}(t)$$

محاسبه پارامترهای پاسخ میرایی ضعیف :



t_s زمان نشست یا استقرار

t_p زمان اوج یا (ستیغ)

t_r زمان خیز یا صعود

تعاریف :

۱ . t_p : زمان اوج یا ستیغ (**Peak time**) : زمانی است که خروجی به حداکثر مقدار خود برسد .

$$y^{\bullet}(t)=0 \quad \Rightarrow \quad \sin(\omega_d t)=0$$

$$\omega_d t = k\pi$$

پس
$$t_{p_k}=\frac{k\pi}{\omega_d}=\frac{k\pi}{\omega_n\sqrt{1-\eta^2}}=\frac{k\pi}{\omega_n \sin\theta}$$

$$k=1 \quad : \quad t_p=t_{p_1}=\frac{\pi}{\omega_d}=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\eta^2}}=\frac{\pi}{\omega_n\sin\theta}$$

۲ . حداکثر فرارفت (**max overshoot**)

$$=y_{\max}-y_{ss}$$

نسبت فرا جهش حداکثر
$$M_p=\frac{y_{\max}-y_{ss}}{y_{ss}}$$

برحسب درصد
$$\%M_p=\frac{y_{\max}-y_{ss}}{y_{ss}}\times 100$$

$$\frac{\pi}{\omega_d}$$

$$y_{\max}=y(t_p)$$

چون
$$y(t)=k\left(1-\frac{e^{-\eta\omega_n t}}{\sin\theta}\sin(\omega_d t+\theta)\right)$$

بنابراین
$$y_{\max}=y(t_p)=k\left(1+e^{-\pi\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}}\right)$$
فرم جبری

فرم مثلثاتی
$$y_{\max}=k\left(1+e^{-\pi\cot\theta}\right)$$

$$y_{ss}=k$$

حداکثر فرا جهش $= y_{\max} - y_{ss} = ke^{-\pi\cot\theta} = ke^{-\pi\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}}$

نسبت فرا جهش حداکثر $= \dfrac{y_{\max} - y_{ss}}{y_{ss}} = e^{-\pi\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}} = e^{-\pi\cot\theta}$

درصد فرا جهش حداکثر $= 100e^{-\pi\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}} = 100e^{-\pi\cot\theta}$

۳. t_p زمان صعود (خیز) **Rise time** : زمانی است که خروجی به y_{ss} برسد .

$$y(t) = k \quad \Rightarrow \quad \sin(\omega_d t + \theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{k\pi - \theta}{\omega_d}$$

۳،۱۴ بر حسب رادیان

$$k = 1 \quad \Rightarrow \quad t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} = \frac{\pi - \theta}{\omega_n\sqrt{1-\eta^2}} = \frac{\pi - \theta}{\omega_n \sin\theta}$$

تعاریف دیگر زمان صعود :

- **زمانی است که خروجی از ۵ ٪ مقدار نهایی به ۹۵ ٪ مقدار نهایی برسد .**
- **زمانی است که خروجی از ۱۰ ٪ مقدار نهایی به ۹۰ ٪ مقدار نهایی برسد .**

۴. t_s زمان نشست یا استقرار (**Setteling time**) : زمانی است که محدوده نوسانات خروجی ۲ ٪ یا ۵ ٪ مقدار ماندگار باشد .

$$t_s(\%\,2) = 4\left(\frac{1}{\eta\omega_n}\right) = \frac{4}{\eta\omega_n}$$

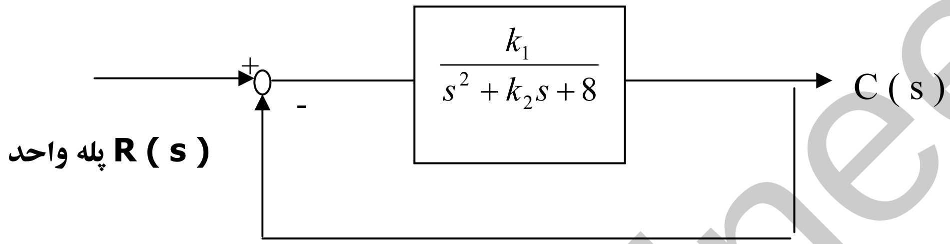
$$t_s(\%\,5) = 3\left(\frac{1}{\eta\omega_n}\right) = \frac{3}{\eta\omega_n}$$

۵. t_d زمان تأخیر (**delay time**) : زمانی است که خروجی به ۵ ٪ مقدار ماندگار برسد .

$$y(t) = 0.5k \frac{e^{-j\omega_n t}}{\sin}$$ بسط
بسط

رابطه تقریبی $t_d = \dfrac{1+0.7\eta}{\omega_n}$ برای $0 \prec \eta \prec 0.7$

مثال : مقادیر k_2 , k_1 را طوری تعیین کنید که $C_{ss} = 0.6 \,, t_s(\%2) = 2^{\sec}$ باشد .



$$G_{cl}(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{k_1}{s^2 + k_2 s + 8 + k_1}$$

Close loop

$$G(s) = \frac{1}{s} \times G_{cl}(s) = \frac{1}{s} \times \frac{k_1}{s^2 + k_2 s + 8 + k_1} = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\eta\omega_n s + \omega_n^2}$$

ضریب S = ضریب S

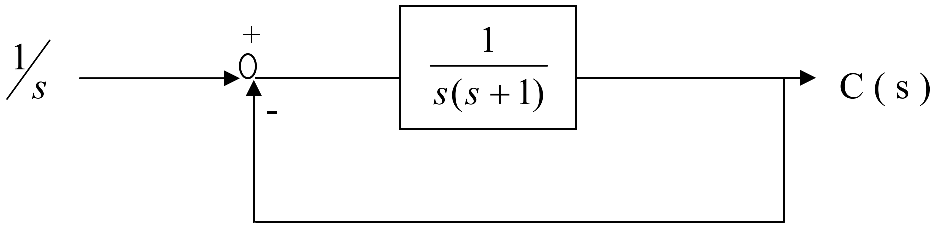
$$\begin{cases} C_{ss} = \lim_{s \to 0} s \times c(s) = G_{cl}(0) = \dfrac{k_1}{8+k_1} = 0.6 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 12 \\ y(\infty) = \lim_{s \to 0} sy(s) \end{cases}$$

قضیه مقدار نهایی

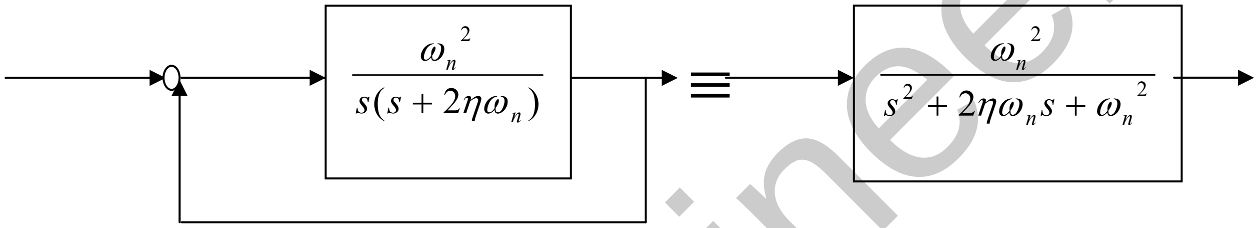
$$t_s(\%2) = \frac{4}{\eta\omega_n}$$ که $$k_2 = 2\eta\omega_n \quad \Rightarrow \quad \eta\omega_n = \frac{k_2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad t_s(\%2) = \frac{4}{\frac{k_2}{2}} = \frac{8}{k_2} = 2 \quad \Rightarrow \quad k_2 = 4$$

مثال : در سیستم زیر ، مقادیر $t_s(\%2), t_d, t_r, \%M_p, t_p, \theta, \omega_d, \omega_n, \eta$ **را بدست آورید .**



حالت کلی سیستم مرتبه دوم استاندارد نرمالیزه



$$\omega_n^{\,2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_n = 1$$

$$2\eta\omega_n = 1 \quad \Rightarrow \quad \eta = {}^{1}\!/_{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \cos^{-1}\eta = {}^{\pi}\!/_{3}$$

$$\omega_d = \omega_n \sin\theta = 1 \times {}^{\sqrt{3}}\!/_{2} = {}^{\sqrt{3}}\!/_{2}$$

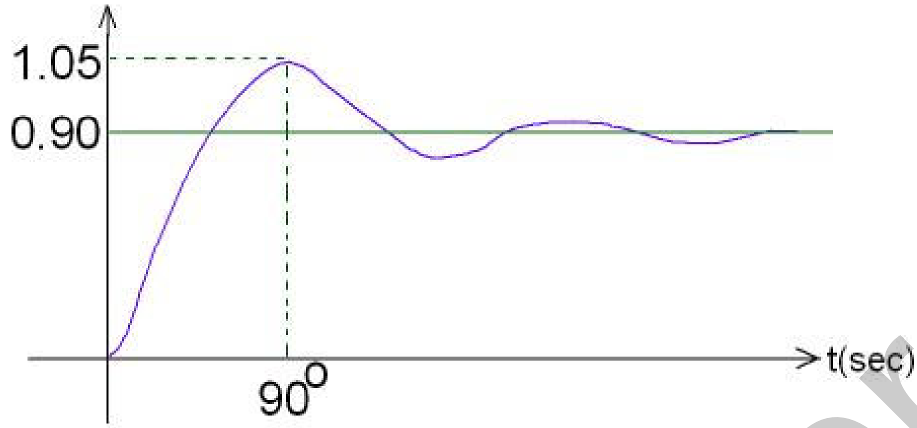
$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\sqrt{3}/2} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$$

$$\%M_p = 100e^{-\pi\cot\theta} = 100e^{-\pi\sqrt{3}/2}$$

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} = \frac{\pi - \pi/3}{\sqrt{3}/2} =$$ **بدست می آید**

$$t_d = \frac{1 + 0.7\eta}{\omega_n} = 103s \qquad t_s(\%2) = \frac{4}{\eta\omega_n} = 8\sec$$

تمرین ۴ : سیستمی با پاسخ پله زیر مفروض است . تابع تبدیل آن را بدست آورید . (سیستم مرتبه دو است).



under damp

تمرین ۵ : معادله مشخصه سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد عبارتست از

$$s(2+4k)+2+s^2(1+k)=0$$

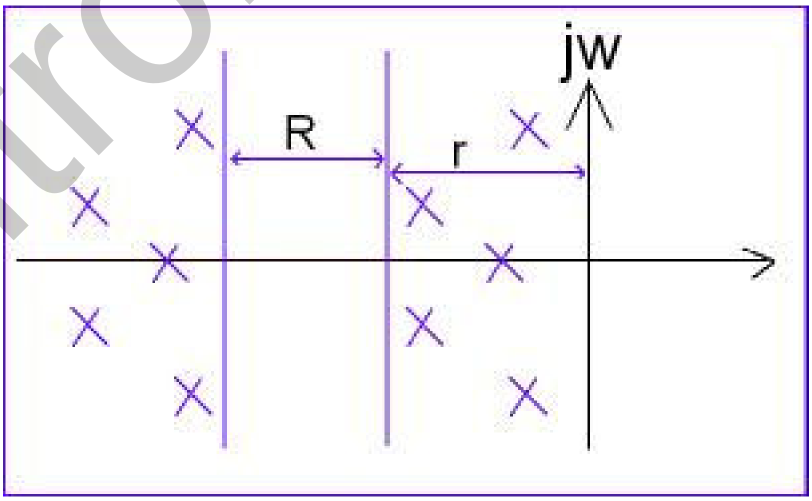
اگر $j = \frac{1}{2}$ باشد $t_s(\%2)$ را بدست آورید .

باید ضریب s^2 حتما یک باشد پس همه را بر (k + 1) باید تقسیم کرد .

معادله مشخصه سیستم معادله ای است که از صفر قرار دادن مخرج تابع تبدیل بدست می آید .

$$G_{cl}(s)=\frac{N(s)}{D(s)} \qquad \text{معادله مشخصه} \quad =\Delta(s)=D(s)=0$$

<u>ایده قطبهای غالب :</u>

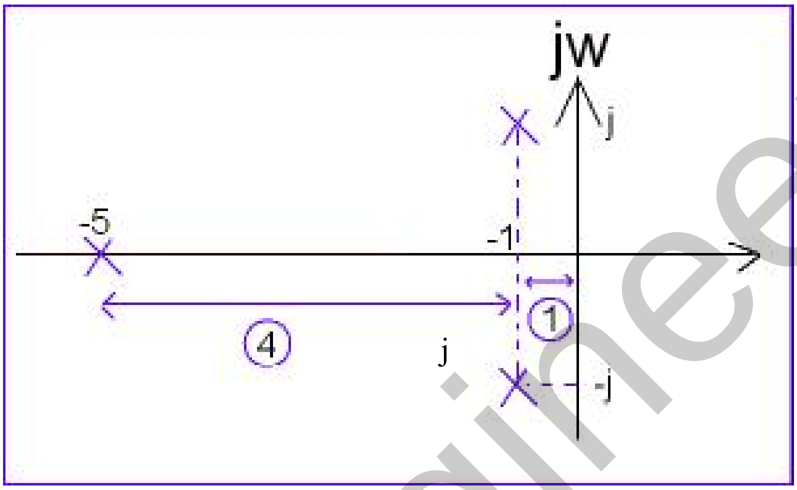


اگر $R \geq 4r$ **باشد می توان از قطبهای غیر غالب صرف نظر کرد .**

مثال : سیستم مرتبه " ۳ " زیر را به یک سیستم مرتبه " ۲ " تقریب بزنید .

$$G(s) = \frac{10}{(s+5)(s^2+2s+2)}$$

$$s_{1,2} = -1 \pm j \qquad , \qquad s_3 = -5$$



گین $G(0) = \frac{10}{(5)(2)} = 10/10 = 1$ **گین DC**

باید گین مرتبه دوم نیز زیادی نسبت به ۱ نداشته باشد برای این کار :

$$G(s) = \frac{10}{(s+5)(s^2+2s+2)} = \frac{10}{5(\cancel{\frac{s}{5}}+1)(s^2+2s+2)} \cong \underbrace{\frac{10}{(5)(s^2+2s+2)}}_{\tilde{G}(s)}$$

عددثابت بیرون بیاید **حذف**

$$= \frac{2}{(s^2+2s+2)} \quad \rightarrow \quad \tilde{G}(0) = 1$$

اثر اضافه کردن قطب به سیستم مرتبه دوم :

$$G(s)\frac{k}{\left(s^2+2\eta\omega_n s+\omega_n^2\right)\left(1+\frac{s}{p_3}\right)}$$

چون

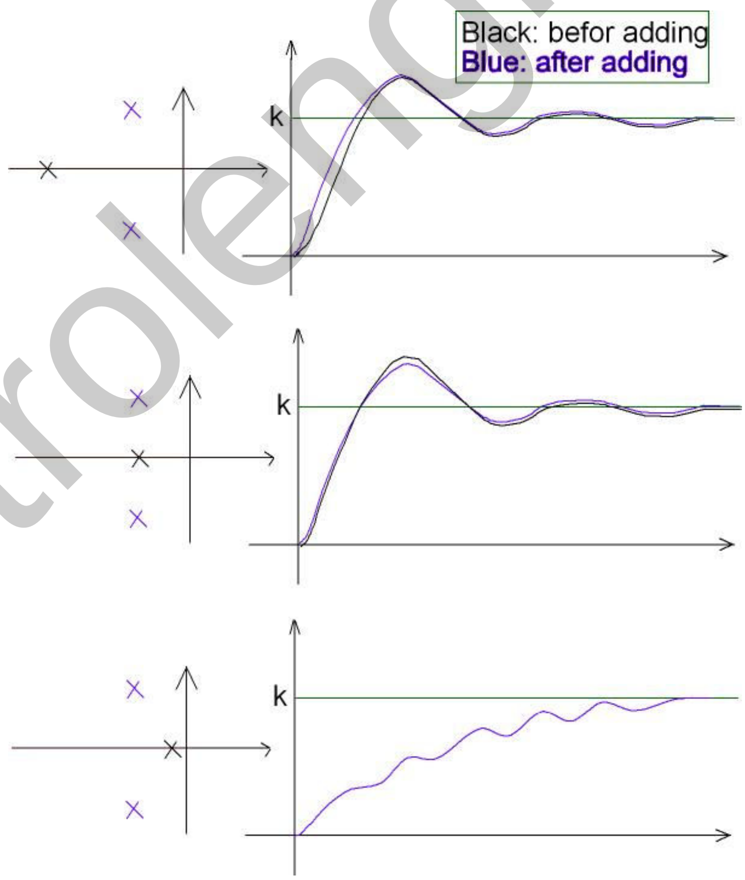
$$y(s)=\frac{1}{s}.G(s)$$

پاسخ پله

$$y(s)=\frac{k}{s\left(s^2+2\eta\omega_n s+\omega_n^2\right)\left(1+\frac{s}{p_3}\right)}$$

$$y(s)=k\left(1-\frac{e^{-\eta\omega_n t}}{\sin\theta}\sin(\omega_d t+\theta)\right)+k_1 e^{-p_3 t}$$

می توان ثابت کرد $k_1 \prec 0$ پس عامل میرایی $k_1 e^{-p_3 t}$ از کل عبارت کم می شود .



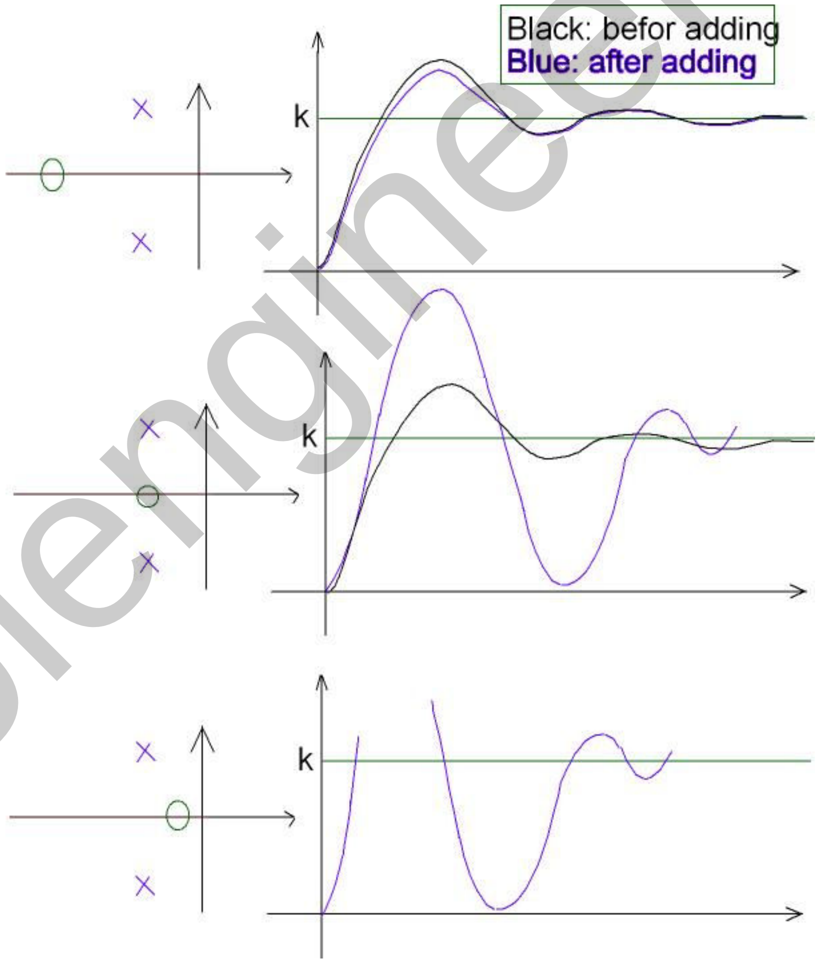
افزایش قطب از دو به سه

اثر اضافه کردن صفر به سیستم مرتبه دوم :

s در صورت علامت مشتق است

$$G(s)=\frac{k(1+\frac{s}{z})}{s^2+2\eta\omega_n s+\omega_n^2}+\frac{\frac{k}{z}(s)}{s^2+2\eta\omega_n s+\omega_n^2}$$

پاسخ پله $\quad y(s)=$ پاسخ پله مرتبه دوم $+\frac{1}{z}$ (پاسخ ضربه مرتبه دوم)



تمرین " ۶ " : در صد اورشوت سیستم زیر را بدست آورید (ورودی پله واحد)

$$G(s)=\frac{2(s+1)}{s^2+2s+2}$$

راهنمایی :

$$y(s)={}^{1}\!/_{s}\,.G(s)$$

$$\vdots$$

$$y(t)=\dots$$

$$y^{\bullet}(t)=0 \quad \dots \quad t_p=\dots$$

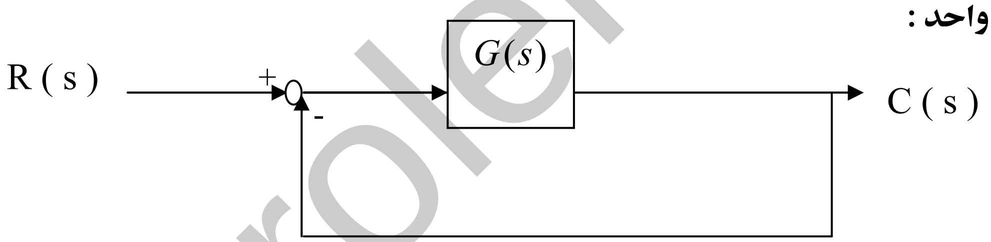
$$y_{\max}=y(t_p)=\dots$$

$$y_{ss}=1 \qquad \%M_p=100\frac{y_{\max}-y_{ss}}{y_{ss}}$$

نوع سیستم و خطای حالت ماندگار:

خطا : اختلاف بین ورودی مرجع (خروجی مطلوب) و خروجی سیستم است .

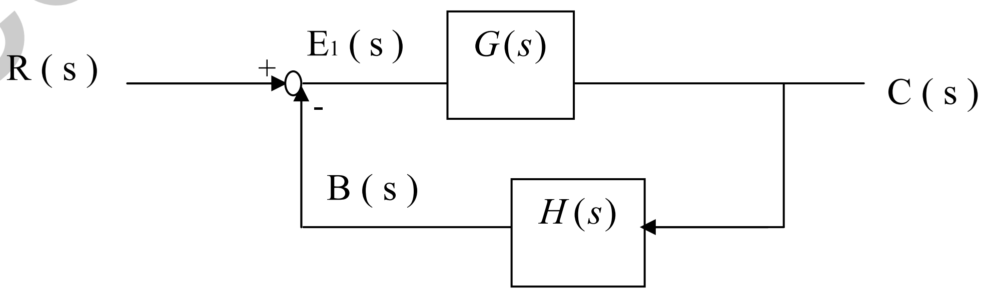
حالت الف) فیدبک واحد :



$$E(s)=R(s)-C(s) \qquad \text{خطای لحظه ای} \qquad e(t)=r(t)-c(t)$$

خطای حالت ماندگار: $e_{ss}=E_{ss}=\lim_{t\to\infty} e(t)=\lim_{s\to 0} SE(s)$

حالت ب) فیدبک غیر واحد



تعریف اول خطا : $E_1(s) = R(s) - B(s)$

خطای لحظه ای : $e_1(t) = r(t) - b(t)$

خطای ماندگار : $e_{1ss} = E_{1ss} = \lim_{t\to\infty} e_1(t) = \lim_{s\to 0} SE_1(s)$

تعریف دوم خطا : $E_2(s) = R(s) - C(s)$

$$e_2(t) = r(t) - b(t)$$

$$e_{2ss} = E_{2ss} = \lim_{t\to\infty} e_2(t) = \lim_{s\to 0} SE_2(s)$$

تعریف دوم را مشروط به شرایط زیر استفاده می کنیم :

۱) **c (t) , r (t)** از یک جنس باشند .
۲) **c (t) , r (t)** از یک مقیاس باشند . (یعنی **H (0) = 1**)

محاسبه خطای ماندگار :

الف – فیدبک واحد :

$$E(s) = R(s) - C(s)$$

که

$$C(s) = E(s).G(s)$$

$$\Rightarrow \quad E(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)}$$

$$E_{ss} = \lim_{s\to 0} s\frac{R(s)}{1+G(s)}$$

ب) فیدبک غیر واحد :

تعریف اول خطا :

از فرمول میسون

$$E_1(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)H(s)}$$

$$E_{ss} = \lim_{s\to 0} s\frac{R(s)}{1+G(s)H(s)}$$

تعریف دوم خطا :

$$E_2(s) = R(s) - C(s)$$

$$C(s) = R(s).\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

$$\Rightarrow \quad E_2(s) = R(s)\left[1 - \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}\right] \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad E_2(s) = R(s)\left[\frac{1+G(s)H(s)-G(s)}{1+G(s)H(s)}\right] \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad E_2(s) = R(s)\left[\frac{1}{\dfrac{1+G(s)H(s)-G(s)+G(s)}{1+G(s)H(s)-G(s)}}\right]$$

$$\Rightarrow \qquad E_2(s) = \frac{R(s)}{1+\dfrac{G(s)}{1+G(s)\left[H(s)-1\right]}}$$

$$, \qquad E_{2ss} = \lim_{s\to 0} s.\frac{R(s)}{1+\dfrac{G(s)}{1+G(s)\left[H(s)-1\right]}}$$

در حالت کلی ، خطای ماندگار :

$$E(s) = \frac{R(s)}{1+G'(s)}$$

$$E_{ss} = \lim_{s\to 0} s\frac{R(s)}{1+G'(s)}$$

تعریف نوع یا **type** سیستم :

که در دو رابطه فوق :

$$G'(s) = \begin{cases} G(s) \\ G(s)H(s) \\ \dfrac{G(s)}{1+G(s)\left[H(s)-1\right]} \end{cases}$$

تعریف اول

فیدبک غیر واحد

تعریف دوم

فرض کنید (با توجه به تعریف خطا)

$$G'(s) = \frac{k(s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1s+b_0}{s^q(s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1s+a_0}$$

که $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$ بوده و در این صورت **q** را نوع سیستم می نامیم :

- اگر **q = 0** باشد ، سیستم نوع صفر است .
- اگر **q = 1** باشد ، سیستم نوع یک است .
- اگر **q = 2** باشد ، سیستم نوع دو است .

و **q** تعداد انتگرال گیری های $G'(s)$ است . و همین طور **q** تعداد قطبهای در مبدأ $G'(s)$ است

مرتبه سیستم : $q+n$

مرتبه نسبی سیستم : $[(q+n)-m]$

محاسبه خطای حالت ماندگار :

۱) ورودی پله واحد

$$R(s)=\frac{1}{s}$$

$$E_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{R(s)}{1+G'(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{1+G'(s)} \Rightarrow E_{ss}=\frac{1}{1+\lim_{s\to 0}G'(s)}$$

ثابت خطای پله (استاتیکی) : با تعریف $k_s=\lim_{s\to 0}G'(s)$

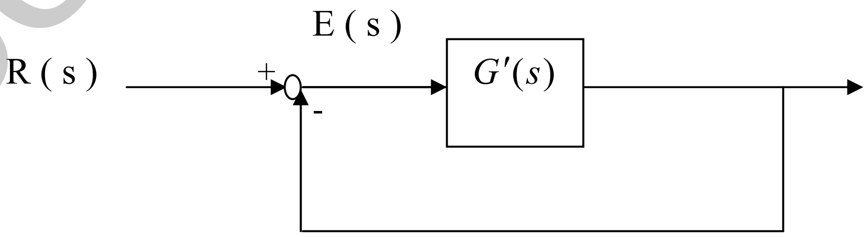
$$\Rightarrow E_{ss}=\frac{1}{1+k_s}$$

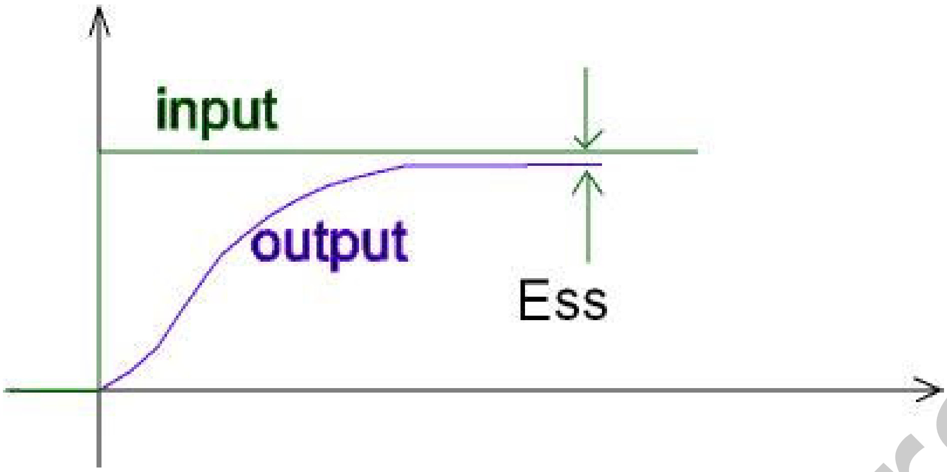
A´) با فرض q = 0 داریم (سیستم نوع صفر)

$$k_s = k\frac{b_0}{a_0}$$

$$E_{ss}=\frac{1}{1+\dfrac{kb_0}{a_0}}$$

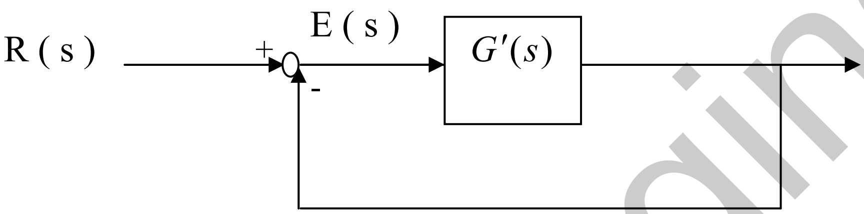
با افزایش **k** خطای ماندگار کم می شود ولی صفر نمی شود .

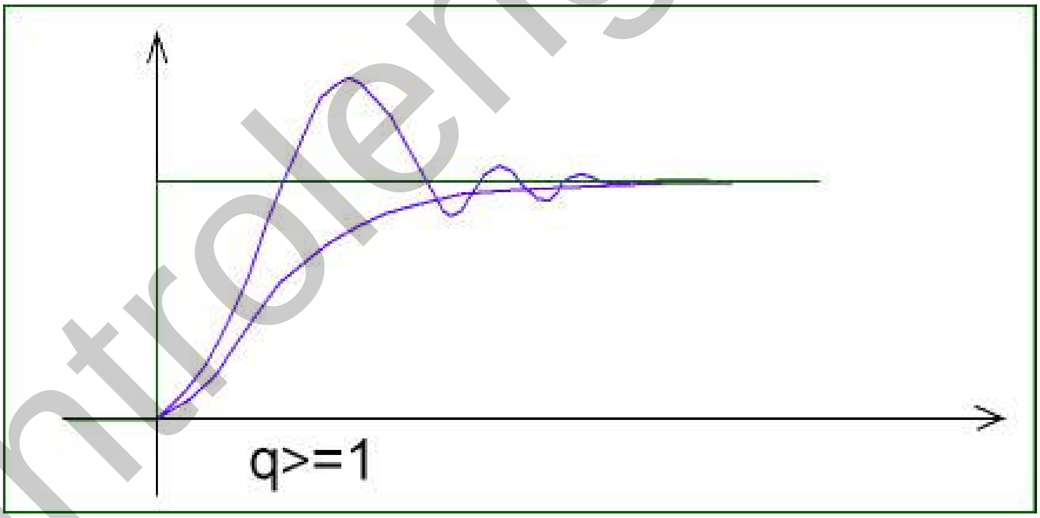




B) اگر $q \ge 1$ باشد

$$E_{ss} = \frac{1}{1+k_s} = 0$$ که $$k_s = \lim_{s\to 0} G'(s) = \infty$$





۲- ورودی شیب واحد

$$R(s)=\frac{1}{s^2}$$

$$E(s)=\frac{R(s)}{1+G'(s)} \quad , \quad E_{ss}=\lim_{s\to 0} s\,\frac{R(s)=1/s^2}{1+G'(s)}$$

$$E_{ss}=\frac{1}{\underbrace{\lim_{s\to 0} s}_{0}+\lim_{s\to 0} sG'(s)} \Rightarrow E_{ss}=\frac{1}{\lim_{s\to 0} sG'(s)}$$

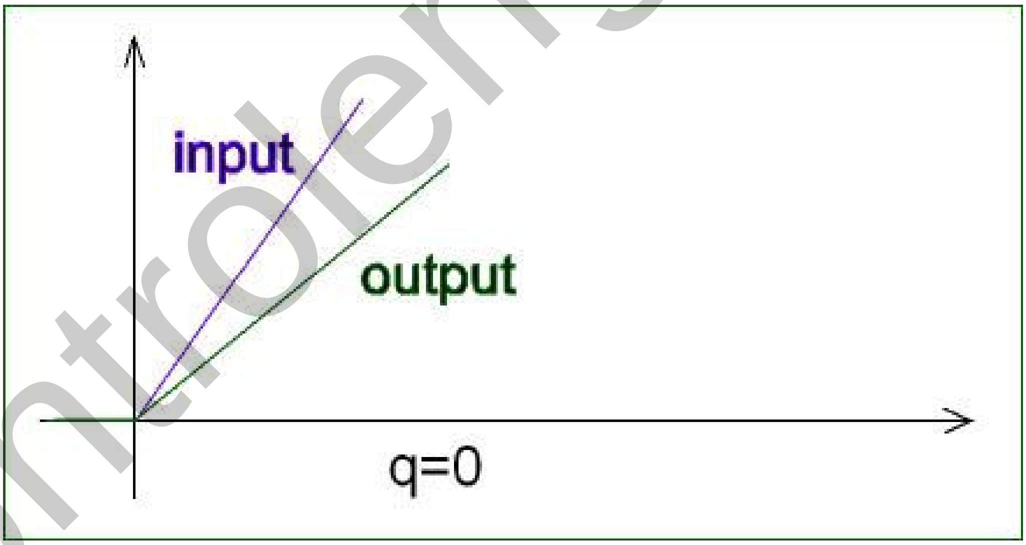
با تعریف :

ثابت خطای شیب $k_r=k_v=\lim_{s\to 0} sG'(s)$

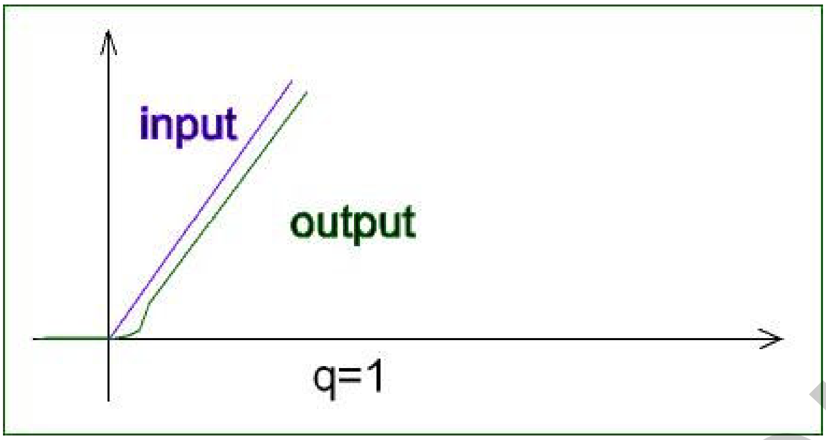
A)اگر $q=0$ باشد

$$E_{ss}=\frac{1}{k_r}$$

ثابت خطای سرعت $k_v=0 \Rightarrow E_{ss}=\infty$



B)اگر 1 = q باشد

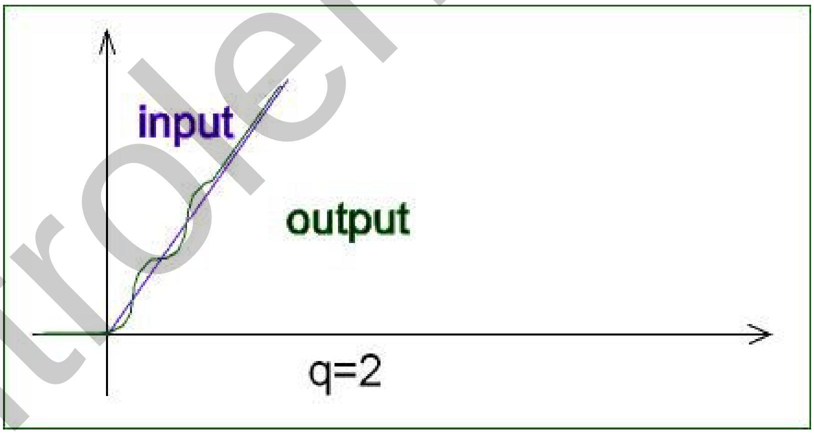


$$k_r = \frac{kb_0}{a_0} \quad \Rightarrow \quad E_{ss} = \frac{1}{\frac{kb_0}{a_0}}$$

یعنی با افزایش k ، خطا کم می شود .

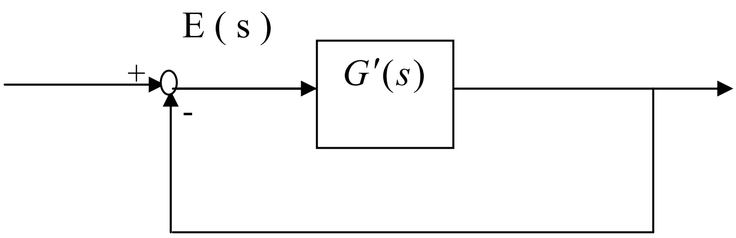
اگر 1< = q باشد

$$k_r = \infty \quad \Rightarrow \quad E_{ss} = 0$$



وجود دو انتگرال گیر نیاز می باشد.

3. ورودی شتاب واحد



$$R(s)=\frac{1}{s^3}$$

$$E(s)=\frac{R(s)}{1+G'(s)}$$

$$E_{ss}=\lim_{s\to 0} s\frac{\frac{1}{s^3}}{1+G'(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{\frac{1}{s^2}}{1+G'(s)}=\frac{1}{\lim_{s\to 0} s^2G'(s)}$$

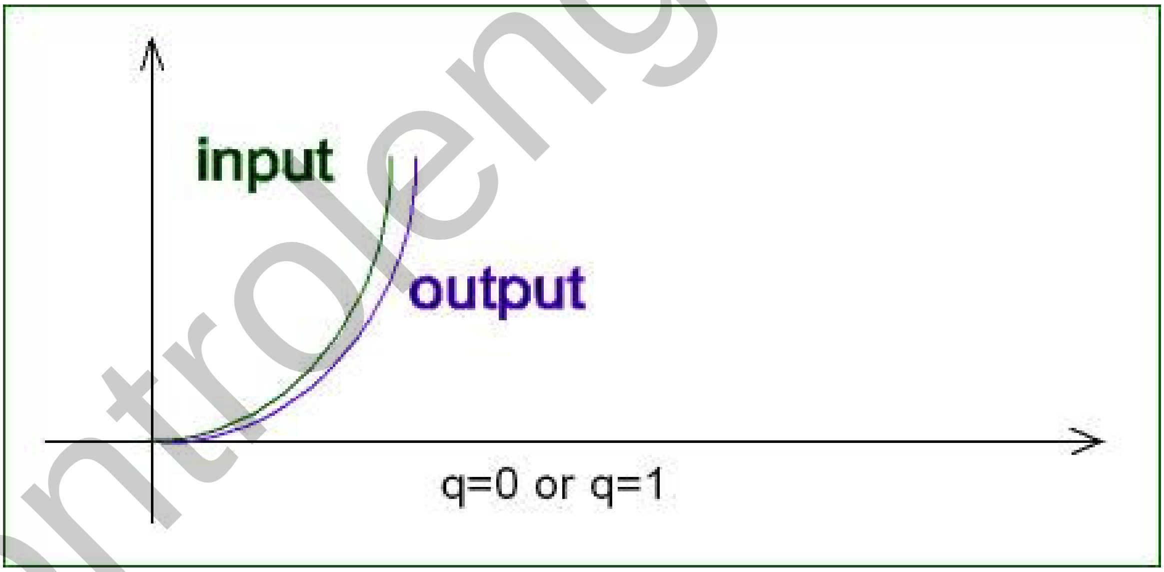
با تعریف :

$$k_a=\lim_{s\to 0} s^2G'(s)$$

$$E_{ss}=\frac{1}{k_a}$$ ثابت خطای شتاب (سهموی)

اگر q = 0 یا q = 1 باشد

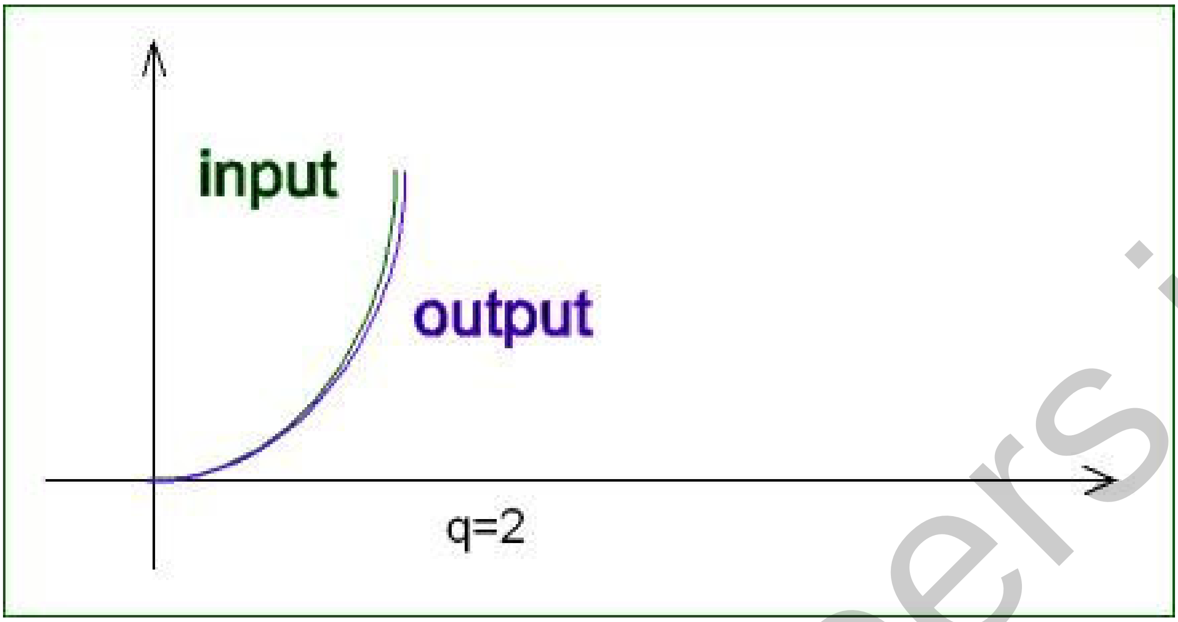
$$k_a=0 \quad\Rightarrow\quad E_{ss}=\frac{1}{k_a}=\infty$$



اگر q = 2 باشد

با افزایش k خطای ماندگاری کاهش می یابد .

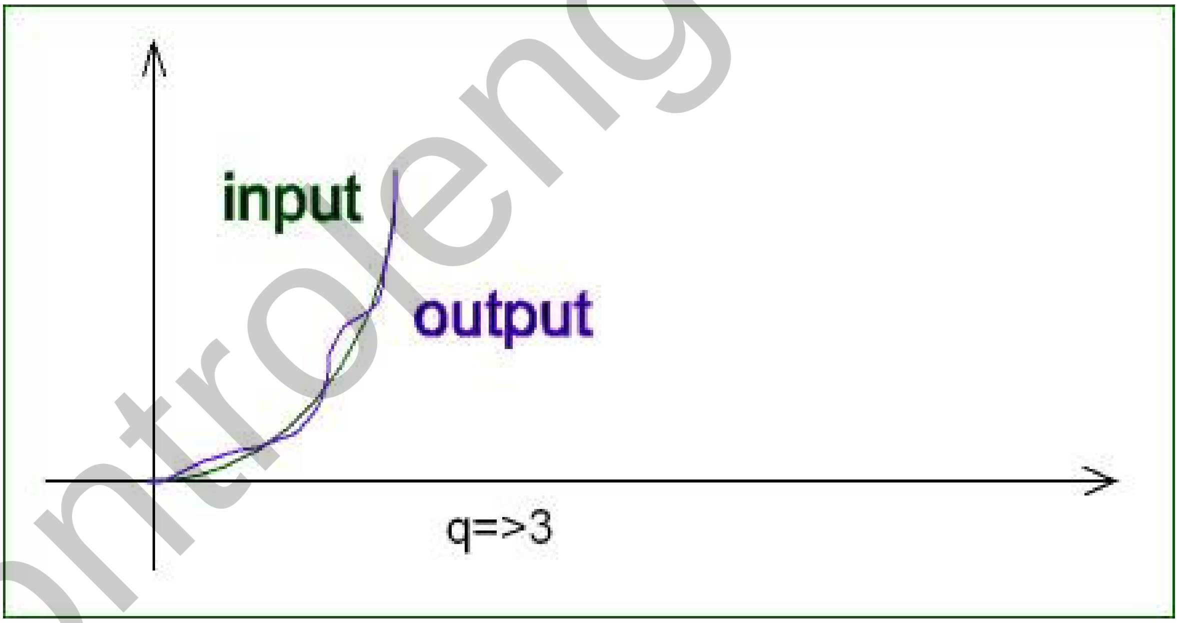
$$k_r=\frac{kb_0}{a_0} \quad\Rightarrow\quad E_{ss}=\frac{1}{\frac{kb_0}{a_0}}$$



اگر $q \geq 3$ باشد :

$$k_a = \infty \quad \Rightarrow$$

$$E_{ss} = \frac{1}{k_a} = 0$$



جدول خطای ماندگار :

ورودی / نوع	پله واحد $1/s$	شیب واحد $1/s^2$	شتاب واحد $1/s^3$	$1/s^4$	.....
صفر	$\frac{1}{1+k_s}$	∞	∞		∞
یک	0	$\frac{1}{k_r}$	∞		∞
دو	0	0	$\frac{1}{k_a}$		∞
سه	0	0	0		$\frac{1}{k_x}$
چهار	0	0	0		0

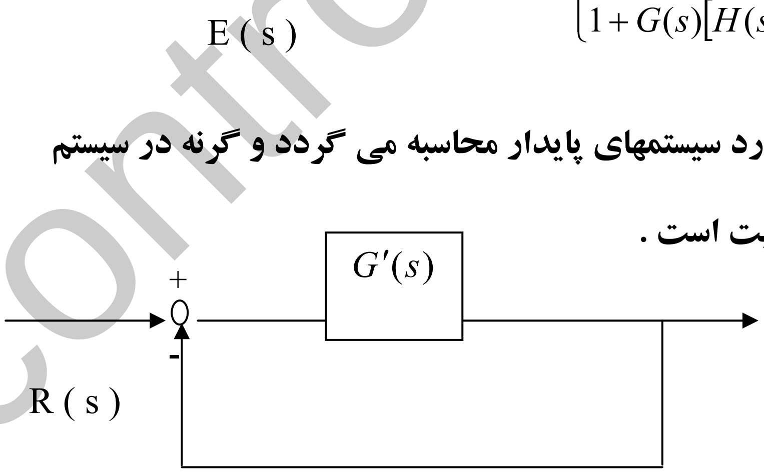
فیدبک غیر واحد

$$k_s = \lim_{s\to 0} G'(s) \qquad k_r = \lim_{s\to 0} sG'(s) \qquad k_a = \lim_{s\to 0} s^2G'(s)$$

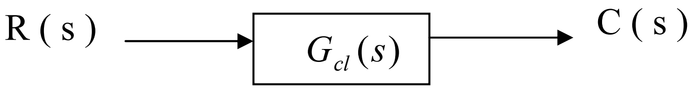
$$k_x = \lim_{s\to 0} s^3G'(s)$$

$$G'(s) = \begin{cases} G(s) & \text{فیدبک واحد} \\ G(s)H(s) & \text{تعریف اول} \\ \dfrac{G(s)}{1+G(s)[H(s)-1]} & \text{تعریف دوم} \end{cases}$$

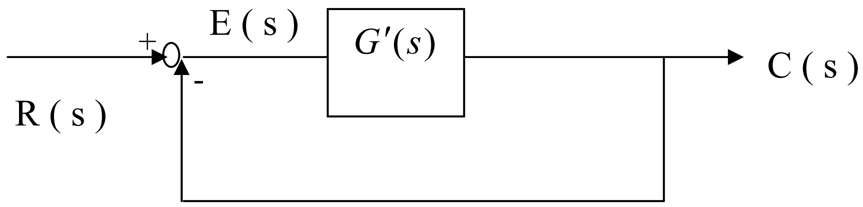
نکته ۱ : خطای حالت ماندگار در مورد سیستمهای پایدار محاسبه می گردد و گرنه در سیستم ناپایدار همواره خطا ماندگار بی نهایت است .



نکته ۲ : محاسبه خطای ماندگار برای سیستم حلقه بسته :



سیستم فوق معادل سیستم زیر است :



مثال : سیستم زیر مفروض است :

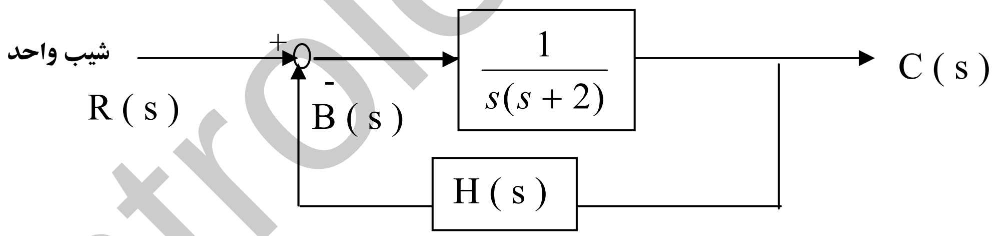
الف) با فرض H (s) = 1 خطا ی ماندگار چقدر است ؟

ب) با فرض $H(s)=\dfrac{1}{s+2}$ **خطای ماندگار را محاسبه کنید .**

$$E(s)=R(s)-B(s)$$

تمرین ۷ ج : با فرض $H(s)=\dfrac{1}{s+2}$ **خطای ماندگار چقدر است ؟**

$$E(s)=R(s)-C(s)$$



الف) چون $H(s)=1$ $\quad G'(s)=G(s)=\dfrac{1}{s(s+2)}$

$$k_r=\lim_{s\to 0} sG'(s)=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad E_{ss}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

حل ب

$$G'(s)=G(s)H(s)=\frac{1}{s(s+2)}$$

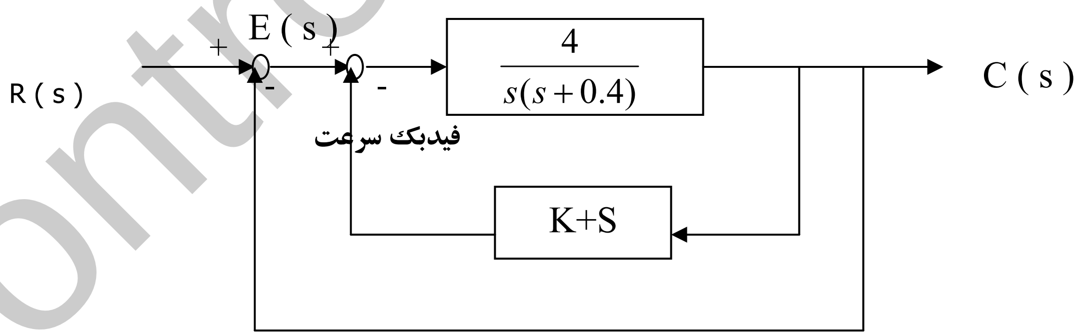
$$k_r=\lim_{s\to 0} sG'(s)=\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad E_{ss}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4$$

راهنمایی ج : $G'(s)=\dfrac{G(s)}{1+G(s)\left[H(s)-1\right]}$

تمرین ۸ : در سیستم زیر :

- **با فرض عدم فیدبک سرعت خطا چقدر است ؟**
- **Kt را طوری تعیین کنید که حداکثر فراجهش سیستم کمتر از ۲ ٪ باشد .**

در این صورت خطای ماندگار چقدر است . با حالت الف مقایسه گردد .



تمرین ۹) نوع سیستم زیر را تشخیص دهید .

$$R(s) \longrightarrow \boxed{\frac{s+2}{s^3+3s^2+s+2}} \longrightarrow C(s)$$

شیب واحد

....

پایداری :

- پایداری **BIBO** یا ورودی محدود – خروجی محدود : سیستمی پایدار **BIBO** است که به ازاء هر ورودی محدود یک خروجی محدود بدهد .

قضیه : در یک سیستم **LTI** با پاسخ ضربه **g(t)** ، شرط لازم و کافی برای پایداری **BIBO** آن است که :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\,dt \prec \infty$$

پایدار **BIBO** است.

در مورد سیستم های علی سیستم

$$g(t)=0 \qquad t \prec 0$$

تابع تبدیل کلی سیستم

$$\int_{0}^{\infty} |g(t)|\,dt \prec \infty \qquad \Leftrightarrow$$

در یک سیستم **LTI** :

$$G(s)=\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0}$$

$$\left|k_i e^{-p_i t}\right| = \left|k_i\right|\left|e^{-p_i t}\right| = \left|k_i\right|\left|e^{-\delta_i t}\right|$$

$$\Rightarrow \quad G(s)=\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)} \quad \rightarrow \quad R_e\left[-p_i\right] = -\delta_i \prec 0$$

$$p_i = \delta_i + j\omega_i$$

pها قطبهای سیستم هستند .

$$\left|e^{\pm j\omega t}\right| = 1$$

پس باید قسمت حقیقی همه قطبهای سیستم منفی باشد .

روش دستی تحلیل پایداری یا ناپایداری :

قضیه : شرط لازم برای پایداری سیستم آن است که تمامی ظرائب معادله مشخصه سیستم هم علامت باشند .

معادله مشخصه سیستم عبارتست از معادله ای که از صفر قرار دادن مخرج تابع تبدیل کلی سیستم بدست می اید .

شرط اول :

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

$$\Delta = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$$

معادله مشخصه

ضرائب متحدالعلامه باشند $\Rightarrow$ **سیستم پایدار است**

ضرائب مختلف العلامه باشند $\Rightarrow$ **سیستم ناپایدار است**

شرط دوم :

قضیه روث Routh :شرط کافی برای پایداری یک سیستم آن که عناصر ستون اول جدول آرایه های روث هم علامت باشند .

$$\Delta(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$$

تمامی ضرائب نوشته شده اند

$$C_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

که طبق تعریف و اثبات :

$$C_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$C_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

$$\vdots$$

$$d_1 = \frac{c_1 a_{n-3} - a_{n-1} c_3}{C_1}$$

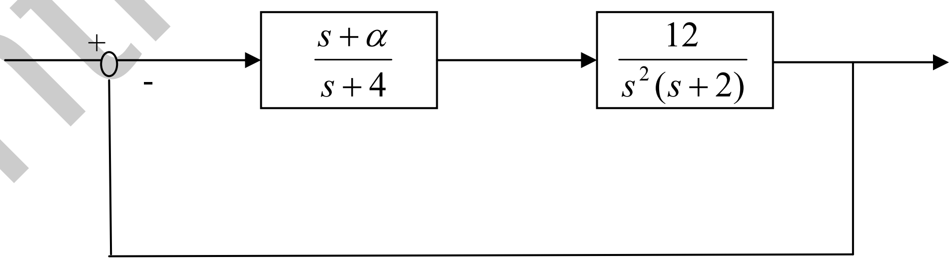
$$d_2 = \frac{c_1 a_{n-5} - a_{n-1} c_3}{C_1}$$

نکته ۱ : به ازاء هر تغییر علامت در ستون اول جدول ، قطب ناپایدار داریم .

نکته ۲ : هر سطر از جدول روث را می توان در یک عدد مثبت ضرب یا بر یک عدد مثب تقسیم کرد .

نکته ۳ : اگر سطر شامل a_0 در عددی ضرب شود ، دیگر ضریب s^0 در سطر آخر، a_0 نخواهد بود .

<u>مثال</u> : در سیستم زیر α را طوری تعیین کنید که سیستم حلقه بسته پایدار گردد .



نوع سیستم درجه ۲ است زیرا s^2 دارد .

تابع تبدیل حلقه بسته سیستم :

$$G_{cl}(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{12(s+\alpha)}{s^2(s+4)(s+2)+12(s+\alpha)}$$

$$\Delta(s)=s^4+6s^3+8s^2+12s+12\alpha=0$$

شرط لازم : $\alpha \succ 0$

شرط کافی : برای شرط کافی باید جدول تشکیل داد .

s^4	1	8	12α
s^3	6	12	0
s^2	$\frac{48-12}{6}=6$	$12-\alpha$	
s^1	$12-12\alpha$	0	
s^0	12α		

$$\left.\begin{array}{l} 12-12\alpha\succ 0\Rightarrow 12\alpha\succ 12 \\ 12\alpha\succ 0\Rightarrow \end{array}\right\} 0\prec\alpha\prec 1$$

مثال : معادله مشخصه سیستمی عبارتست از

$$2\tau s^3+(\tau+2)s^2+2s+k=0$$

ناحیه پایداری سیستم را در صفحه (k,τ) **تعیین کنید .**

حل – شرط لازم :

$$\left.\begin{array}{l} 2\tau\succ 0 \\ , \\ \tau+2\succ 0 \\ , \\ k\succ 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \tau\succ 0 \\ , \\ k\succ 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

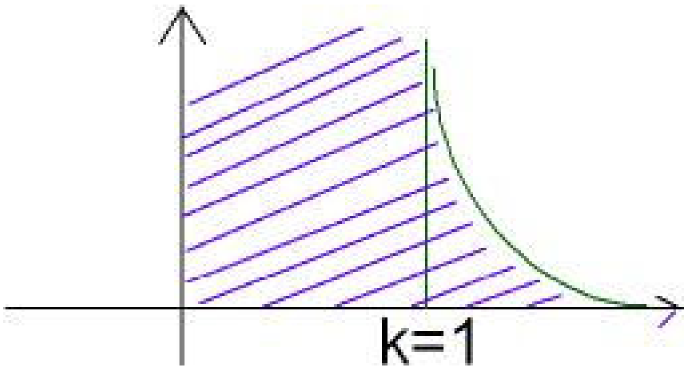
ربع اول

شرط كافي :

s^3	$\cancel{2}\tau$	$\cancel{2}1$
s^2	$\tau+2$	k
s^1	$\frac{\tau+2-\tau k}{\tau+2}$	0
s^0	k	

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \tau\succ 0 \\ \tau+2\succ 0 \\ \tau+2-\tau k\succ 0 \\ k\succ 0 \end{array}$$

$\tau(k-1)\prec 2\Rightarrow \tau(k-1)=2$ را رسم می کنیم $\Rightarrow$ $\quad y(x_{new})=2$



حالت های خاص :

× **حالت خاص ۱) عنصر اول یک سطر غیر صفر ، صفر باشد . سطر غیر صفر ، سطر ی است که حداقل یک عنصر غیر صفر دارد .**

راه حل ۱) به جای عنصر صفر ، در ستون اول ، $E \succ 0$ قرار می دهیم و جدول را ادامه می دهیم و با فرض

$E \to 0$ **ستون اول را تعیین علامت می کنیم .**

راه حل ۲) به جای $\Delta(s)$, $\Delta(1/s)$ **را تشکیل داده و بر توان های نزولی S مرتب می کنیم . (با تغییر**

$\Delta(s)$ به $\Delta(1/s)$ **علامت تغییری نمی کند .)**

راه حل ۳) به جای $\Delta(s)$ **، جدول** $\Delta_n(s) = (s+1)\Delta(s)$ **را تشکیل می دهیم .**

مثال :

$$s^4 + s^3 + 3s^2 + 6 = 0$$

شرط لازم برقرار است .

اما شرط کافی نیست .

$\frac{3\varepsilon-6}{\varepsilon} \approx \frac{-6}{\varepsilon} \prec 0$	s^4	1	3	6
	s^3	1	3	0
	s^2	$0\ \varepsilon \succ 0$	6	
	s^1	$\frac{3\varepsilon-6}{\varepsilon} \prec 0$		
	s^0	6		

دوبار تغییر علامت داریم .

دو قطب ناپایدار　　　دو تغییر علامت

دو قطب پایدار ۲=۲-۴

تمرین ۱۰) مثال فوق را از روش های ۲و۳ حل کنید .

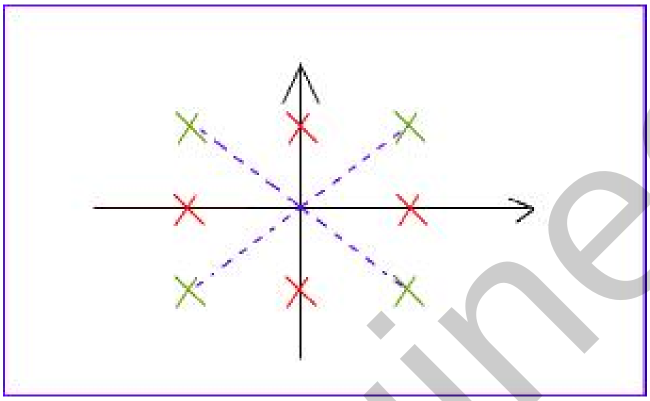
....

حالت خاص ۲ : عناصر یک سطر همگی صفر شوند (ایجاد سطر صفر)

راه حل : معادلهکمکی سطر بالای سطر صفر را تشکیل داده و از آن برحسب S مشتق گیری کرده و ضرائب حاصل را به جای عناصر صفر قرار می دهیم .

نکته : در این این حالت سیستم دارای جفت قطب های قرینه است .

اگر فقط دو قطب روی محور عمودی داشته باشیم ، سیستم نوسانی است .



نکته ۲ : در این حالت سیستم نوسانی است یا ناپایدار .

نکته ۳ : معادله مشخصه سیستم بر معادله کمکی بخش پذیر است . (برای بدست آوردن بعضی از قطب ها)

نکته ۴ : اگر بخواهیم سیستمی نوسانی شود باید یک سطر جدول روث را خودمان صفر کنیم .

که معمولا این سطر ، سطر S' است .

مثال :

$$\Delta(s) = s^4 + s^3 + 11s^2 + 9s + 18 = 0$$

s^4	1	11	18
s^3	1	9	0
s^2	$\cancel{3}$ ۱	$\cancel{18}$ ۹	
s^1	0	0	
s^0	9		

معادله کمکی

$$s^2 + 9 = 0$$

$$\downarrow \frac{d}{dt}$$

$$2s = 0$$

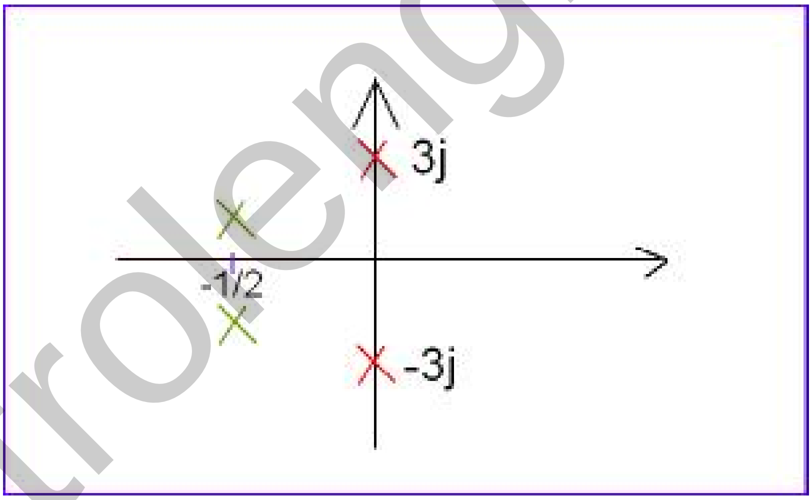
سیستم نوسانی است .

این ستون بعد از حل مشکل ! ، هم علامت شد پس نوسانی است .

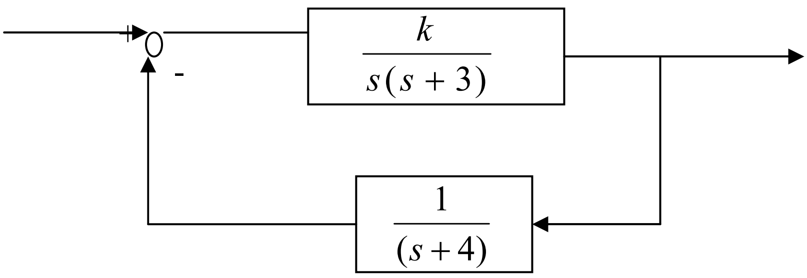
$$
\begin{array}{r|l}
s^4+s^3+11s^2+9s+18 & s^2+q \\ \cline{2-2}
s^4+0+qs^2+0+0 & s^2+s+2 \\ \cline{1-1}
s^3+2s^2+qs+18 & \\
s^3+0+9s+0 & \\ \cline{1-1}
2s^2+18 & \\
2s^2+18 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

$$\Delta(s)=(s^2+q)(s^2+s+2)$$

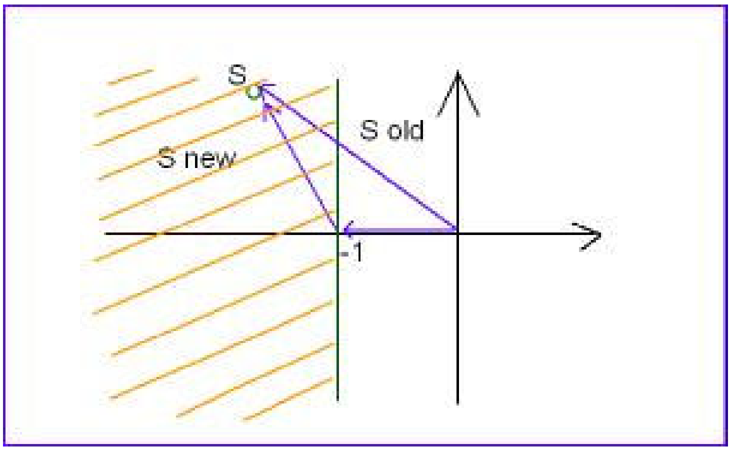
پس $\quad s_{1,2}=\pm 3j \qquad s_{3,4}=-\frac{1}{2}\pm j\sqrt{\frac{3}{2}}$



مثال : محدوده k را در سیستم زیر طوری تعیین کنید که سیستم پایدار بوده و میرائی آن بیشتر از یک باشد .



تشکیل $\Delta(S)$ از روی سیستم :



$$\Delta(s) = 1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{k}{s(s+3)(s+4)}$$

$$s^3 + 7s^2 + 12s + k = 0$$

پایداری :

شرط لازم : $k \succ 0$

شرط کافی : $12 \times 7 \succ k \times 1$

پایدار : $0 \prec k \prec 84$

میرایی بیشتر از یک :

$$S_{old} = S_{new} - 1$$

$$\Delta(s) = \Delta(s_{n-1})$$

$$\Delta(s) = \Delta(s_{n-1}) = (s_{n-1})^3 + 7(s_{n-1})^2 + 12(s_{n-1}) + k = 0$$

$$s_n^{\ 3} - 3s_n^{\ 2} + 3s_{n-1} + 7(s_n^{\ 2} - 2s_n + 1) + 12s_n - 12 + k = 0$$

$$s_n^{\ 3} - 3s_n^{\ 2} + 3s_n + k - 6 = 0$$

s^3	1	1
s^2	4	$k-6$
s^1	$\frac{4-(k-6)}{4}$	
s^0	$k-6$	

شرط لازم : $k \succ 0$

شرط کافی : $4 \times 1 \succ k - 6$

پس : $6 \prec k \prec 10$

تمرین ۱۱ : ثابت کنید در یک سیستم مرتبه ۳ شرط کافی برای پایداری آن است که :

$$a_2 a_1 \succ a_3 a_0 \qquad \Delta(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

$$\begin{array}{l|ll}
s^3 & a_3 & a_1 \\
s^2 & a_2 & a_0 \\
s^1 & \dfrac{a_2 a_1 - a_3 a_0}{a_2} & \\
s^0 & a_0 &
\end{array}$$

تمرین ۱۲ : در مثال قبل k را طوری تعیین کنید که زمان نشست ۲ ٪ سیستم کمتر از ۴ ثانیه باشد .

حل :

راهنمایی $t_s(\%2) = \dfrac{4}{\text{فاصله نزدیکترین قطب به محور } j\omega}$

جواب همانند مثال قبل $t_s(\%2) \prec 4 \quad \Rightarrow \quad$ فاصله نزدیکترطن قطب $\succ 1$

$6 \prec k \prec 10$

اثرات فیدبک بر عملکرد سیستم کنترل :

موارد بررسی :

۱. اثر فیدبک برسرعت سیستم
۲. اثر فیدبک برگین DC سیستم
۳. اثر فیدبک بر اغتشاش وارد بر سیستم
۴. اثر فیدبک بر حساسیت سیستم

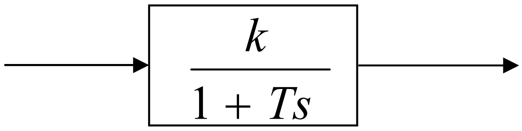
۱و۲) اثر فیدبک بر سرعت و گین DC سیستم :

فیدبک باعث تغییر در سرعت و گین DC سیستم می شود .

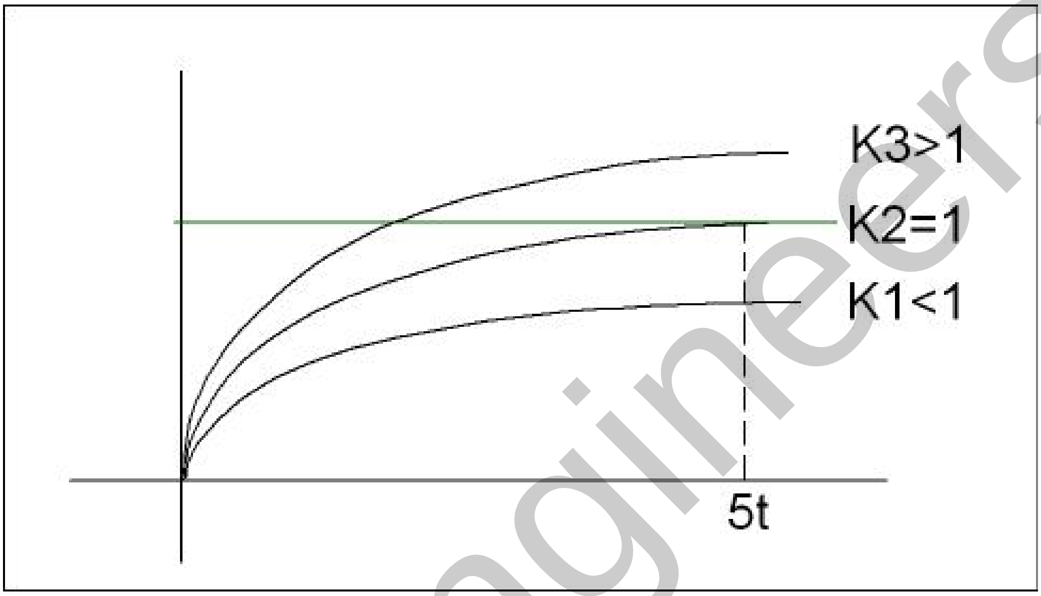
مثال :

K : گین **DC** سیستم

T : ثابت زمانی سیستم

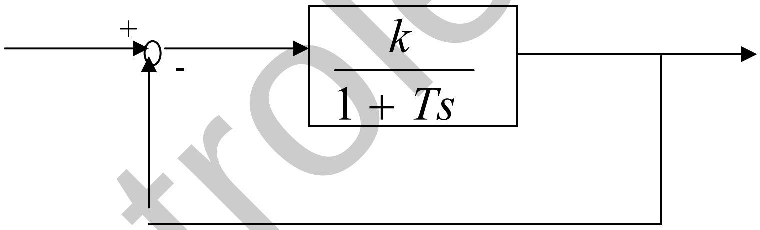


به ازاء هر **k** بعد از 5τ به مقدار ماندگار می رسیم .



سیستم حلقه بسته :

توجه : $k \succ 0$



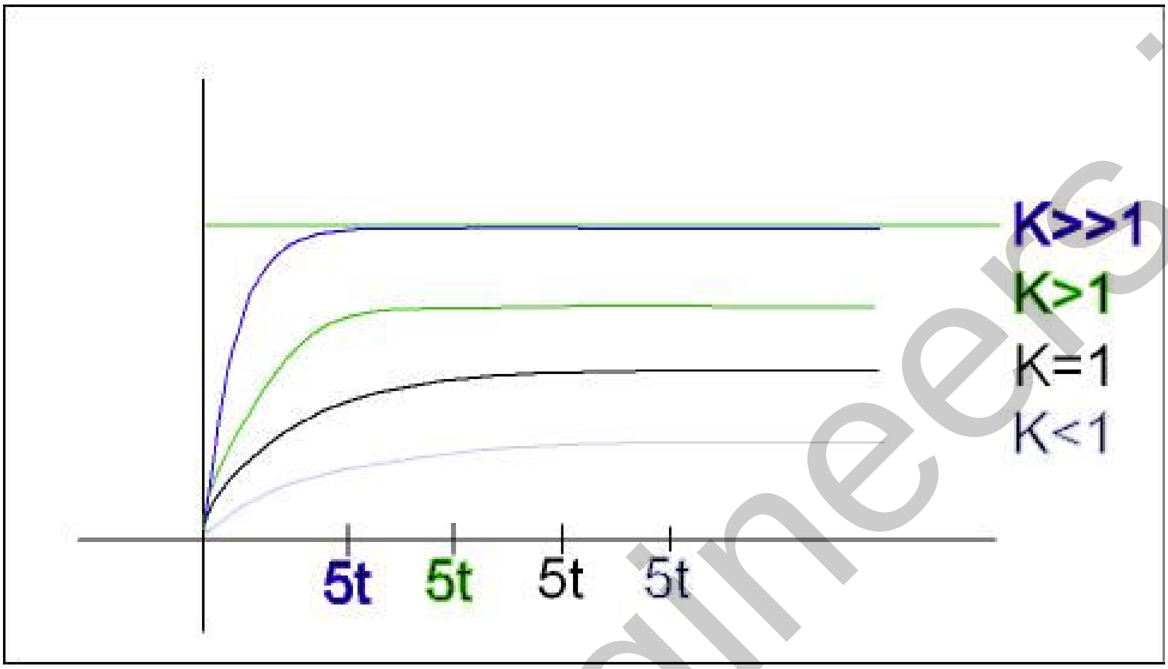
$$G_{cl}(s) = \frac{k}{1 + k + Ts} = \frac{\frac{k}{1+k}}{1 + \frac{T}{1+k}s} = \frac{k_{cl}}{1 + T_{cl}s}$$

$$K_{cl} = \frac{k}{1+k} \qquad T_{cl} = \frac{T}{1+k} \prec T$$

در رابطه K_{cl} ، با افزایش **K** ، K_{cl} به یک نزدیک می شود اما T_{cl} به صفر نزدیک می شود .

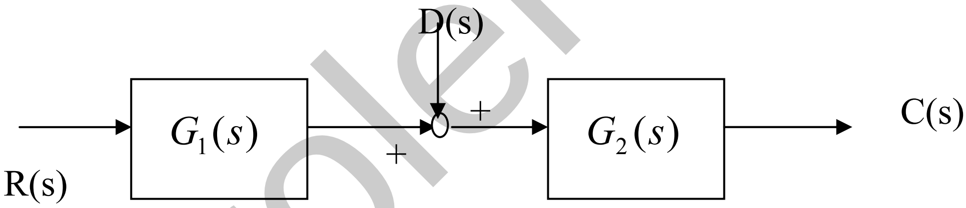
هر قدر **K** بزرگتر گردد، سرعت بالا رفتن بیشتر می گردد .

با افزایش **K** ، خروجی حالت ماندگار به یک نزدیک می شود و این مطلب برای همه سیستم ها صادق است و سرعت سیستم بیشتر می شود (این مطلب در بعضی از سیستم ها درست است) .



۳) اثر فیدبک بر اغتشاشات وارد بر سیستم :

هر دو روی ناخواسته ، اغتشاش محسوب می گردد .



خروجی از دو بخش ورودی (**R**) و اغتشاش (**D**) تشکیل می گردد .

$$C(s) = C_R(s) + C_D(s)$$

$$C_R(s) = R(s).G_1(s).a_2(s)$$

$$C_D(s) = D(s).G_2(s)$$

$$\frac{C_R(s)}{C_D(s)} = G_1(s)$$

$$R(s) = D(s)$$

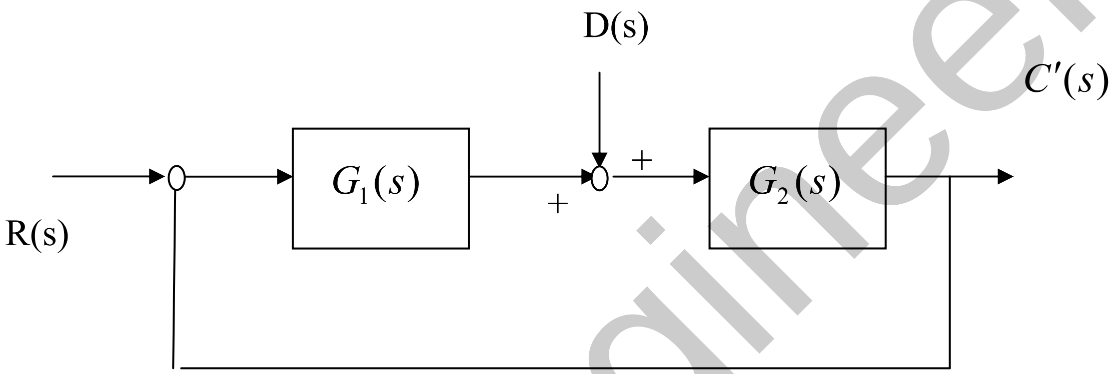
برای افزایش قدرت نسبت سیگنال به نویز $\left(\frac{S}{N}\right)$ باید گین DC در $G_1(s)$ افزایش یابد

محدودیت :

۱- **اشباع خروجی** $G_1(s)$

۲- **محدوده ورودی و** $G_2(s)$

در حالت حلقه بسته:



$$C'(s) = C'_R(s) + C'_D(s)$$

$$C'_R(s) = R(s).\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}$$

$$, \quad C'_D(s) = D(s).\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}$$

$$\frac{C'_R(s)}{C'_D(s)} = G_1(s)$$

$$R(s) = D(s)$$

با افزایش گین DC ،

$G_1(s)$ **نسبت** $\left(\frac{S}{N}\right)$ **افزایش می یابد .**

محدودیت : ناپایداری سیستم است . معمولا این محدوده از حالت حلقه باز ، محدوده بازتری دارد .

۴) اثر فیدبک بر حساسیت سیستم :

حساسیت : حساسیت α نسبت به β عبارتست از نسبت درصد تغییرات α به درصد تغییرات β :

$$S_{\beta}^{\alpha} = \frac{100\dfrac{d_{\alpha}}{\alpha}}{100\dfrac{d_{\beta}}{\beta}}$$

خواص حساسیت :

$$S_{\beta}^{\alpha} = \frac{\dfrac{d_{\alpha}}{\alpha}}{\dfrac{d_{\beta}}{\beta}} = \frac{d_{\alpha}}{d_{\beta}} \times \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \times \frac{\beta}{\alpha}$$

$$S_{\beta}^{\alpha} = \frac{1}{S_{\beta}^{\alpha}}$$

$$S_{\alpha}^{\alpha} = 0$$

$$S_{\alpha}^{K} = 0$$

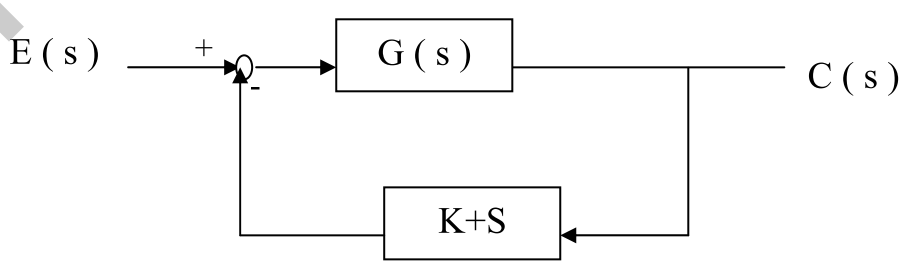
$$S_{\beta}^{Kd} = S_{\beta}^{\alpha} \qquad = 0$$

$$d_{\alpha}/\alpha = S_{\alpha}^{K}\frac{dk}{k} = 0$$

$$S_{\beta}^{\alpha} = S_{\partial}^{\alpha} S_{\beta}^{\partial}$$

$$S_{\beta}^{\alpha} = S_{\partial_1}^{\alpha} S_{r_2}^{\partial_1} \ldots S_{\partial_n}^{\partial_{n-1}} S_{\beta}^{\partial_n}$$

حساسیت سیستم : عبارتست از حساسیت سیستم حلقه بسته نسبت به گین مسیر پیشرو .



$$G_{cl}(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

$$S_{G(s)}^{G_{cl}(s)}=\frac{\partial G_{cl}(s)}{\partial G(s)}\bullet\frac{G(s)}{G_{cl}(s)}$$

$$\frac{1(1+G(s)H(s))-H(s)G(s)}{[1+G(s)H(s)]^{2}}\bullet\frac{G(s)}{\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}}$$

$$S_{G(s)}^{G_{cl}(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

با افزایش گین DC , G (s) H (s) حساسیت کم می شود .

مثال – حساسیت سیستم حلقه بسته فوق را نسبت به H(s) بدست آورید .

$$S_{H(s)}^{G_{cl}(s)}=\frac{\partial G_{cl}(s)}{\partial H(s)}\bullet\frac{H(s)}{G_{cl}(s)}$$

$$=\frac{-G^{2}(s)}{[1+G(s)H(s)]^{2}}\bullet\frac{\frac{H(s)}{G(s)}}{1+G(s)H(s)}$$

$$\Rightarrow\quad S_{H(s)}^{G_{cl}(s)}=\frac{-G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)}$$

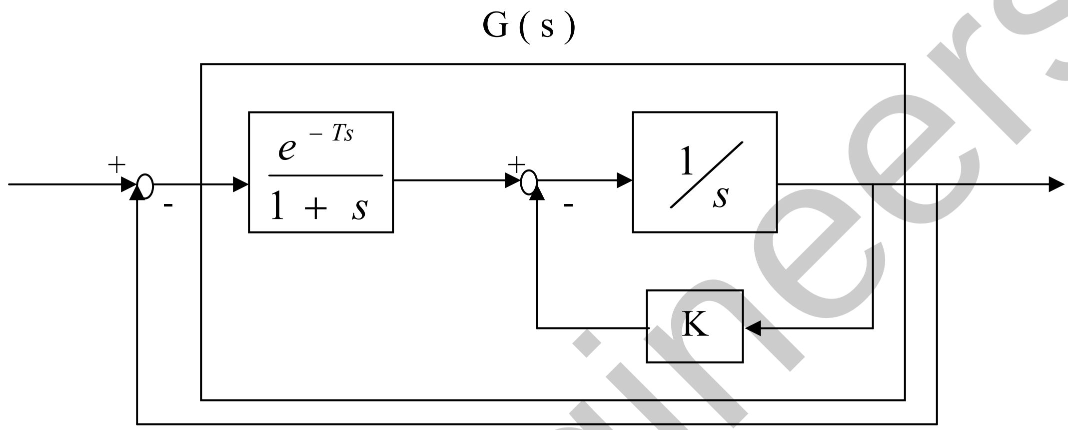
با افزایش گین DC , G (s) H (s) داریم : $S_{H}^{G_{cl}}\rightarrow -1$ که یک وضع نامطلوب است برای حل مشکل فوق ، H(s) را از المان های ثابت یا کم تغییر مانند مقاومت ۱ ٪ طراحی می کنند .

$$\frac{dG_{cl}(s)}{G_{cl}(s)} = S_{H(s)}^{G_{cl}(s)} \bullet \frac{dH(s)}{H(s)} \approx 0$$

وضعیت مطلوب

$$S_{H(s)}^{G_{cl}(s)} \to 0$$

مثال : حساسیت سیستم زیر را نسبت به زمان تأخیر بدست آورید .



$$S_T^{G_{cl}(s)} = S_{G(s)}^{G_{cl}(s)} \bullet S_T^{G(s)} = \frac{1}{1+G(s)H(s)} S_T^{k_1(s)e^{-Ts}} \quad *$$

$$G(s) = \frac{e^{-Ts}}{1+s} \times \frac{1}{s+k} = k_1(s).e^{-Ts}$$

$$* = \frac{1}{1+G(s)} S_T^{(s)e^{-Ts}} = \frac{-sT}{1+G(s)} = \dots$$

$$S_T^{(s)e^{-Ts}} = \frac{\partial e^{-Ts}}{\partial T} \bullet \frac{T}{e^{-Ts}} = -se^{-Ts} \bullet \frac{T}{e^{-Ts}} = -sT$$

S موجود در صورت علامت مشتق در حوزه زمان است ، پس اگر $\frac{dT}{T}$ ثابت باشد پس $\frac{dG_{cl}}{G_{cl}}$ صفر خواهد بود .

فصل چهارم :

« مکان هندسی ریشه ها »

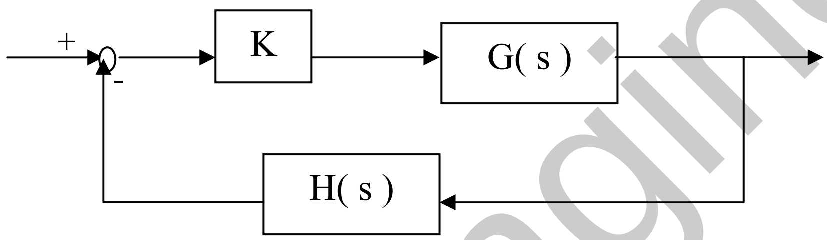
مکان هندسی ریشه ها :

مکان هندسی قطبهای حلقه بسته است وقتی متغیری در سیستم از صفر تا بی نهایت (یا از صفر تا $-\infty$) تغیر می نماید .

قطب ها   پایداری یا ناپایداری سیستم

در حالت پایدار : بررسی پاسخ گذاری سیستم

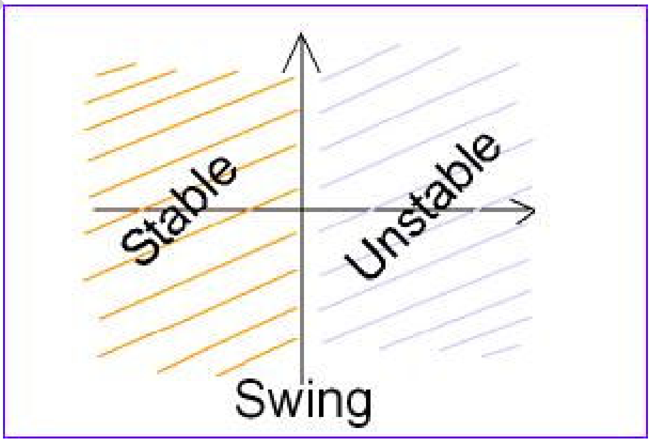
صفرها   در حالت پایدار : بررسی پاسخ گذاری سیستم



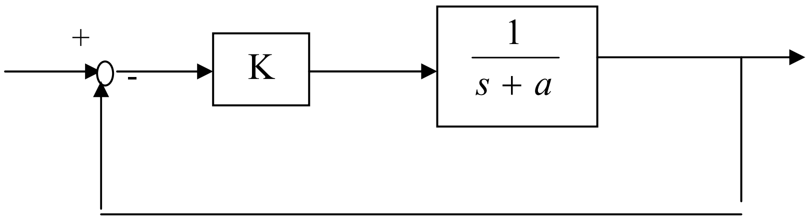
$$G_{cl}(s) = \frac{k}{1+kG(s)H(s)}$$

$$\Delta(s) = 1+kG(s)H(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad s =$$

در اثر تغییر K محل قطب ها در صفحه S تغییر می کند .



مثال : مکان هندسی قطبها ی (ریشه ها) سیستم زیر را رسم کنید .



$a \succ 0$

الف) $\infty \succ k \succ 0$

ب) $-\infty \prec k \prec 0$

سیستم حلقه باز

$$G_{ol}(s) = \frac{k}{s+a}$$

$S = -a$ **قطب حلقه باز**

$$G_{cl}(s) = \frac{k}{s+a+k}$$

$S = -a - k$

$k \succ 0$

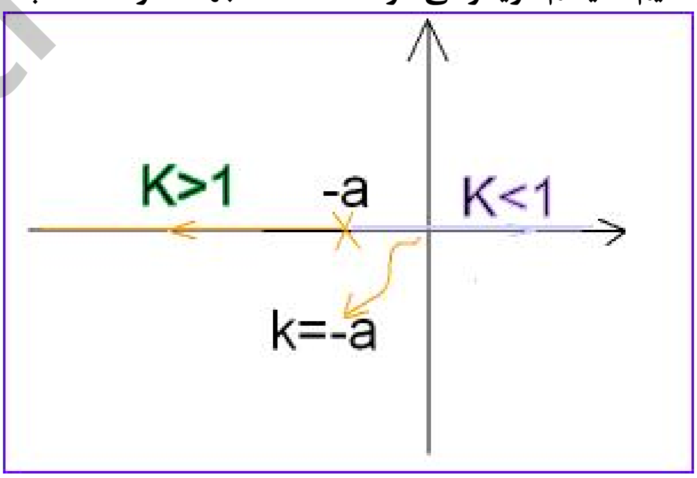
قطب حلقه بسته

K	S
0^+	$-a$
$1/2$	$-a - 1/2$
-1	$-a - 1$
2	$-a - 2$

K	S
0^+	$-a$
$1/2$	$-a + 1/2$
-1	$-a + 1$
2	$-a + 2$

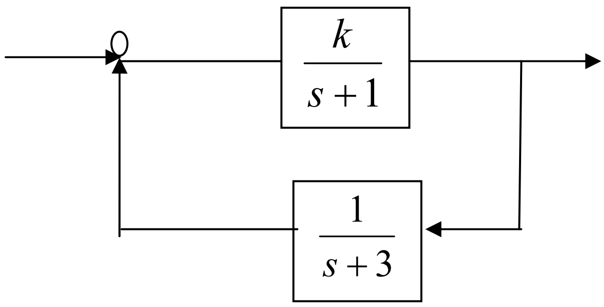
هر قدر قطب را دورتر کنیم ، سیستم سریعتر می گردد .

جهت حرکت قطب که دور می شود



با افزایش K سیستم سریعتر می شود . با کاهش K تا $k \succ -a$ سیستم پایدار و برای $k \le -a$ سیستم ناپایدار می گردد .

مثال : مکان هندسی قطبهای سیستم زیر را رسم کنید . $(0 \prec k \prec \infty)$



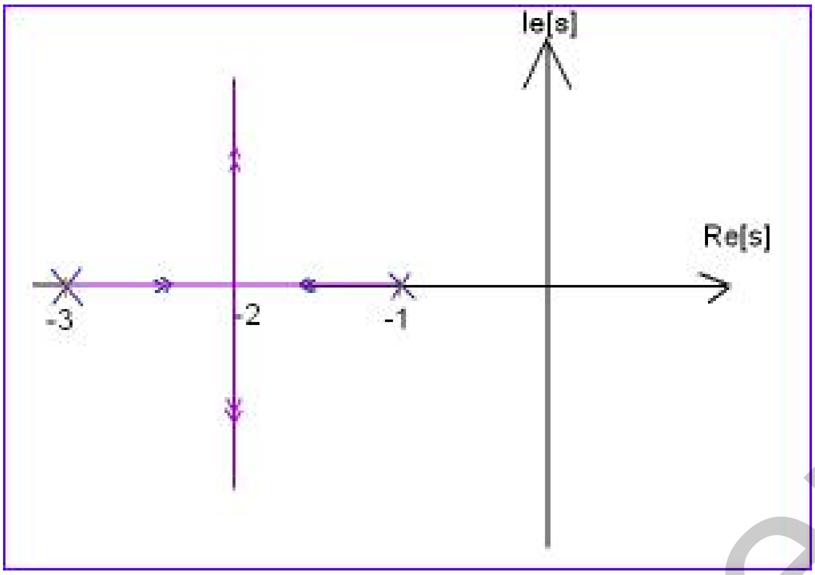
$$\Delta(s) = 1 + \frac{k}{(s+1)(s+3)} = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 + 4s + 3 + k = 0$$

$$s_{1,2} = -2 \pm \sqrt{1-k}$$

حال باید در محدوده ۰ تا ۵ عدد دهیم :

	K	S_1	S_2
$1 \rightarrow$	0^+	$-2+1=-1$	$-2-1=-3$
$2 \rightarrow$	$1/4$	$-2+\sqrt{3}/2$	$-2-\sqrt{3}/2$
$3 \rightarrow$	$1/2$	$-2+\sqrt{2}/2$	$-2-\sqrt{2}/2$
$4 \rightarrow$	1	$-2+0$	$-2-0$
	2	$-2+j$	$-2-j$
	3	$-2+j\sqrt{2}$	$-2-j\sqrt{2}$
	4	$-2+j\sqrt{3}$	$-2-j\sqrt{3}$
	5	$-2+j\sqrt{4}$	$-2-j\sqrt{4}$

در این سیستم ، با افزایش K ناپایداری نداریم .



نتایج :

۱- سیستم به ازاء $0 \prec k \prec 1$ میرایی شدید است .

۲- سیستم به ازاء **k=1** میرایی بحرانی است (سریعترین پاسخ بدون اورشوت)

۳- سیستم به ازاء $k \succ 1$ میرایی ضعیف است .

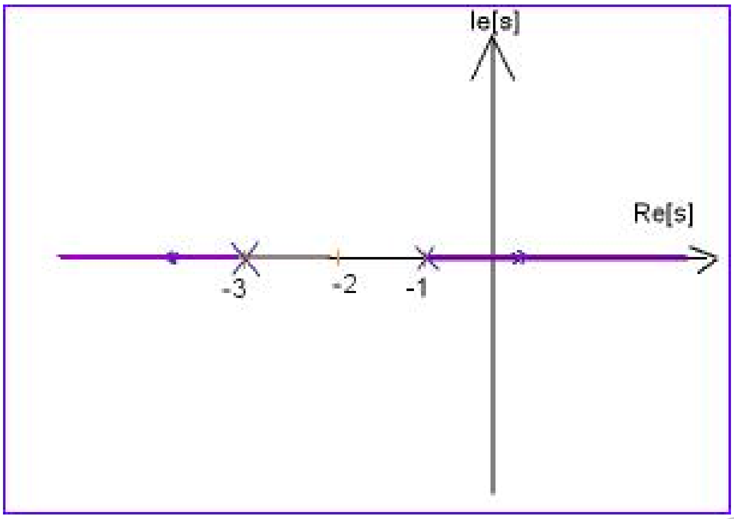
۴- سیستم به ازای **k=5** دارای $\xi = \sqrt{2}/2$ است . چون $\theta = \frac{\pi}{4}$ است و $\xi = \cos\theta$ است .

۵- با افزایش **k** (از مقدار **k=1**) در صد اورشوت بیشتر می گردد و ξ کوچکتر می شود .

: توجه $\quad K\uparrow \quad \Rightarrow \quad \xi\downarrow$

حال برای **k** های منفی :

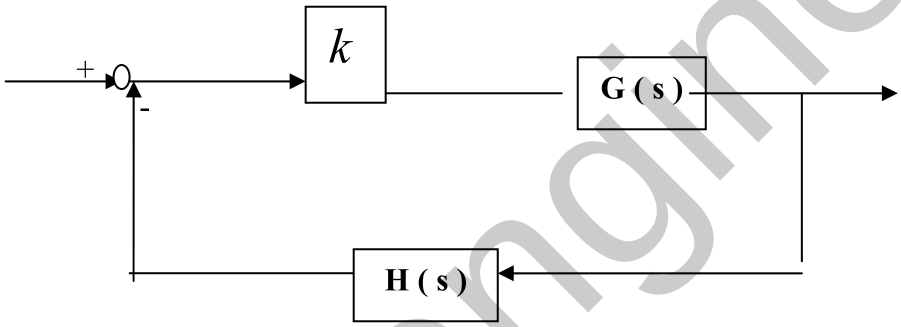
K	S_1	S_2
$\rightarrow 0^-$	$-2+1=-1$	$-2-1=-3$
$\rightarrow -1$	$-2+\sqrt{2}$	$-2-\sqrt{2}$
$\rightarrow -2$	$-2+\sqrt{3}$	$-2-\sqrt{3}$
$\rightarrow -3$	$-2+\sqrt{4}$	$-2-\sqrt{4}$
$\vdots$		



سیستم به ازای $-3 \prec k \prec 0$ پایدار است ← میرایی شدید

سیستم به ازاء $k \le -3$ ناپایدار است .

حالت کلی :



توجه : – فیدبک باید حتما منفی باشد بود از منفی فاکتور گرفته تا فیدبک شود .

از حل این معادله قطب بدست می آید . $\rightarrow \quad \Delta(s) = 1 + KG(s)H(s) = 0$

-K ضریب G(s)

مقدار مختلط

$\Rightarrow \quad G(s)H(s) = \dfrac{-1}{k}$ **عدد حقیقی**

عدد حقیقی با عدد مختلط زمانی برابر است که دامنه برابر و زاویه آن ها ۰ یا ۱۸۰ باشد .

معادلات حاصل :

$$\begin{cases} |G(s)H(s)| = \dfrac{1}{|k|} \\ \angle G(s)H(s) = \begin{cases} (2k+1)\pi & k \succ 0 \\ 2k\pi & k \prec 0 \end{cases} \end{cases}$$

با فرض :

فرم استاندارد مکان ریشه

$$G(s)H(s)=\frac{(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_n)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)}$$

$$\left|G(s)H(s)\right|=\frac{(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_n)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)}=\frac{1}{k}$$

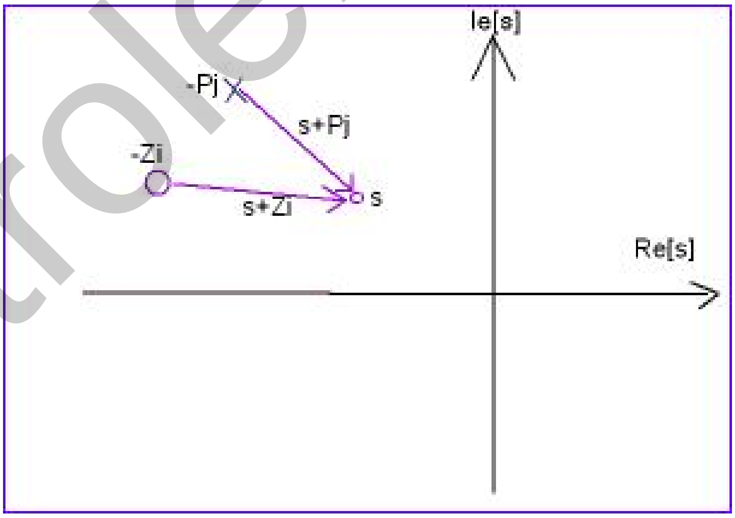
$$\angle G(s)H(s)=\angle(s+z_1)+\angle(s+z_2)+\ldots+\angle(s+z_n)+$$
$$-\angle(s+p_1)-\angle(s+p_2)+\ldots-\angle(s+p_n)=\begin{cases}(2k+1)\pi & k\succ 0\\ 2k\pi & k\prec 0\end{cases}$$

شرط فازیا دامنه

اگر s به صورتی انتخاب گردد که در هر دو شرط صدق کند ، آن s قطب سیستم است .

(s نقطه ای است که می خواهیم بدانیم قطب سیستم است یا خیر ؟)

اگر از همه قطبها و صفرها بردارهایی را به s رسم کنیم و بردارهای حاصل را در شرط اندازه و زاویه قرار داده و شروط فوق را بررسی نمائیم ، اگر هر دو شرط صادق بود ، s جزء مکان هندسی قطبهای سیستم است .



قواعد رسم مکان هندسی ریشه ها :

۱. تعداد شاخه های مکان هندسی ریشه ها برابر است با تعداد قطب ها

تعداد شاخه ها $=n$

$$\Delta(s)=1+KG(s)H(s)=0$$

$$\Rightarrow \quad (s+P_1)(s+P_2)\ldots(s+P_n)+K(s+Z_1)\ldots(s+Z_m)=0$$

که مرتبه n ایجاد می گردد (S^n) پس n ریشه داریم .

۲. شاخه ها به ازاء $K=0^+$ از قطبهای $G(s)H(s)$ شروع و به ازاء $K\to\pm\infty$ به سمت صفرهای $G(s)H(s)$ به بی نهایت می روند .

$$K=\frac{-1}{G(s)H(s)}\Rightarrow\frac{-1}{\dfrac{(s+Z_1)(s+Z_2)\ldots(s+Z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)}}$$

$$K=\frac{-(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)}{(s+Z_1)(s+Z_2)\ldots(s+Z_m)}$$

کل شاخه ها = n

شاخه های محدود به صفر =m

شاخه های نامحدود =n-m

$$K=0 \quad\Rightarrow\quad S=-P_j$$

تمام n جواب را می دهد .

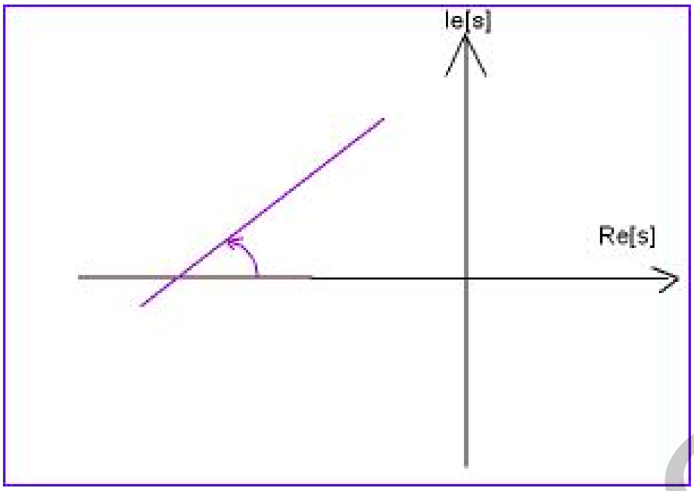
$$K=\pm\infty \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} S=-Z_j \\ |S|\to\infty \end{cases}$$

m جواب را می دهد .

n-m جواب را می دهد .

معمولا : صفرها جاذب شاخه ها یا قطبها دافع شاخه ها هستند .

۳. مجانب شاخه های نا محدود :



اطلاعات مجانب : زاویه و محل برخورد با محور حقیقی

$$\delta_{\circ} = \frac{\text{مجموع صفرها} - \text{مجموع قطبها}}{n-m} = \frac{\sum -P_j - \sum -Z_i}{n-m}$$ محل برخورد با محور حقیقی

$$\begin{cases} \partial_{\circ} = \dfrac{(2k+1)\pi}{n-m} & K \succ 0 \\ \partial_{\circ} = \dfrac{2k\pi}{n-m} & K \prec 0 \end{cases}$$ زاویه مجانب با محور حقیقی

$\partial_{\circ}$ زاویه فرار شاخه هایی که به سمت بی نهایت می روند می باشد .

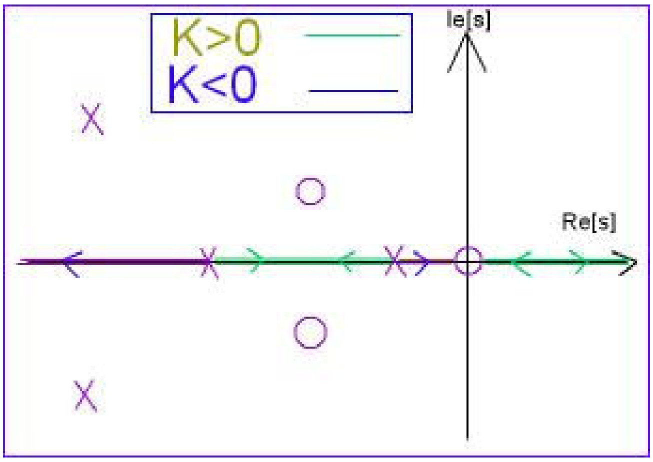
K را n-m بار عدد گذاری می کنیم . مثلا :

$$k = 0 \quad \Rightarrow \quad n-m-1$$

۴. نقاطی از محور حقیقی که سمت راست آن نقاط تعداد فردی صفر و یا قطب باشد ، جزء مکان هندسی ریشه ها به ازاء $k \succ 0$ است .

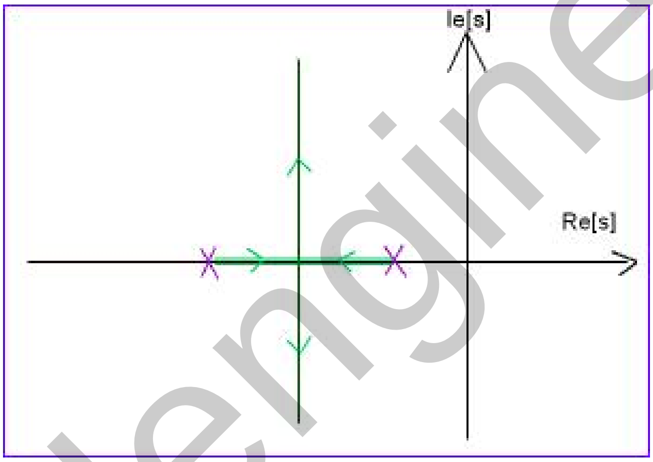
نقاطی از محور حقیقی که سمت راست آن نقاط تعداد زوجی صفر و یا قطب باشد ، جزء مکان هندسی ریشه ها به ازاء $k \prec 0$ است .

قطب صادر کننده شاخه است .

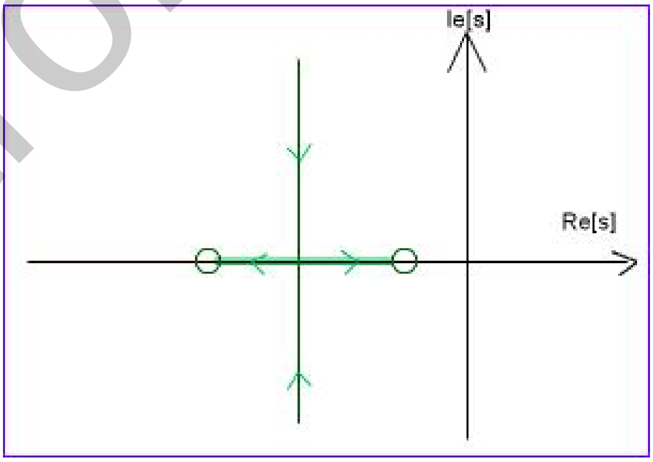


۵. نقاط شکست : نقاطی هستند که در آنها شاخه ها با هم برخورد می کنند و سرنوعند :

۱. __نقطه در شکست :__ در شکست : شاخه ها بهم می خورند و در می روند !!

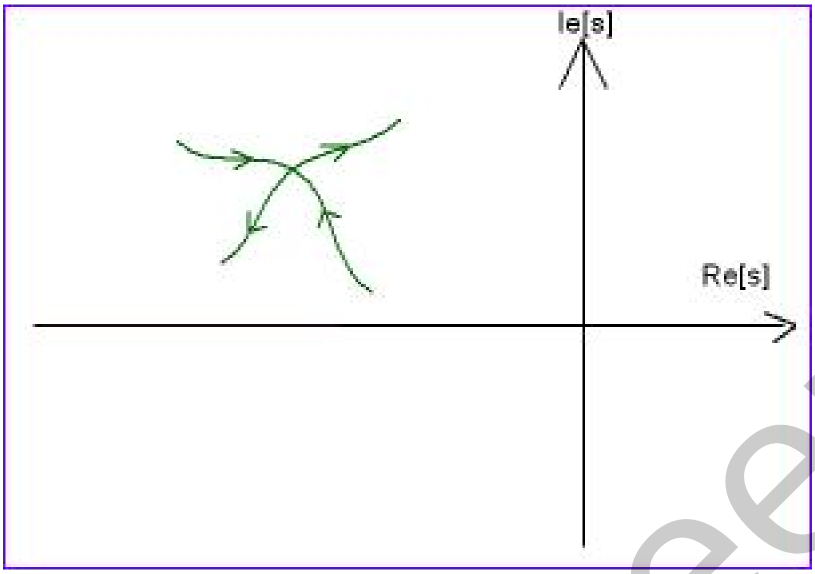


۲. __نقطه بر شکست :__



زاویه ی بین برخورد و خروج یک برابر 90° است .

۳. نقطه شکست (خارج از محور حقیقی) :



نقاط فوق از حل معادله $\frac{dk}{ds}=0$ بدست می آیند .

$$k=\frac{-1}{G(s)H(s)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dk}{ds}=\frac{d\left(\frac{-1}{G(s)H(s)}\right)}{ds}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\left(\frac{1}{G(s)H(s)}\right)}{ds}=0$$

جواب های معادله فوق ، اگر حقیقی باشند ، نقاط در شکست و بر شکستند (به ازاء $k \prec 0, k \succ 0$)

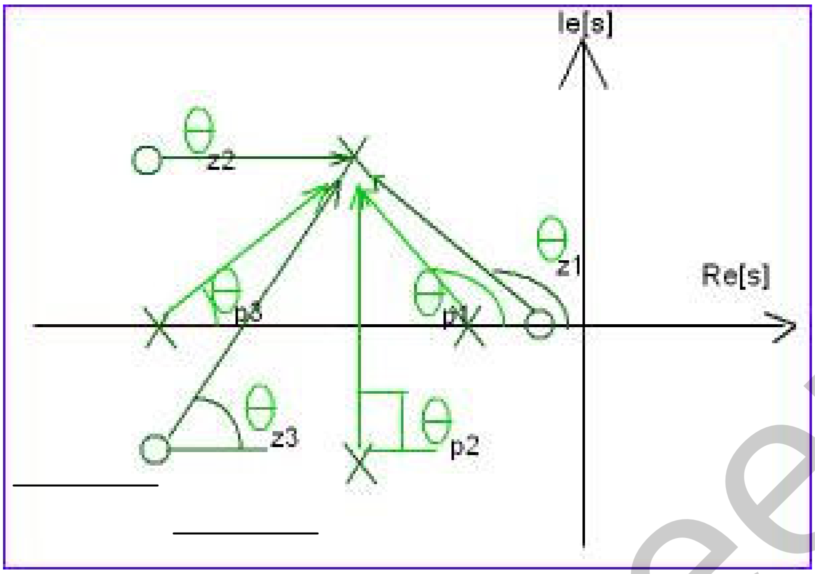
اگر جواب هایی از معادله فوق حقیقی نباشند به شرطی که $k=\frac{-1}{G(s)H(s)}$ حقیقی شود ، نقاط شکست (خارج از محور حقیقی) هستند .

۶. زاویه خروج از قطب مختلط که از شرط فاز بدست می آید .

$$\theta_p=(2k+1)\pi-\sum\theta P_j+\sum\theta Z_i \qquad k \succ 0$$

$$\theta_p=2k\pi-\sum\theta P_j+\sum\theta Z_i \qquad k \succ 0$$

روش محاسبه :



$$\sum \theta P_j = \theta P_1 + \theta P_2 + \theta P_3$$

$$, \sum \theta Z_i = \theta Z_1 + \theta Z_2 + \theta Z_3$$

نکته : اگر هر کدام از قطبها یا صفرها مکرر باشند ، θ مربوط به آن ها به تعداد تکرار محاسبه می گردد

ولی اگر خود قطب مختلط مکرر بود (مثلا به تعداد p بار) داریم :

$$P\theta_p = (2k+1)\pi - \sum \theta P_j + \sum \theta Z_i \qquad k \succ 0$$

$$P\theta_p = (2k\pi) - \sum \theta P_j + \sum \theta Z_i \qquad k \prec 0$$

در دو رابطه اخیر ، k را از صفر تا p-1 عدد گذاری کنید .

اگر بخواهیم محاسبات بر حسب درجه باشد باید در روابط اخیر به جای π رادیان از 180° استفاده کنیم

۷. زاویه ورود به صفر مختلط :

$$\theta_z = (2k+1)\pi - \sum \theta z_i + \sum \theta p_j \qquad k \succ 0$$

$$\theta_z = 2k\pi - \sum \theta z_i + \sum \theta p_j \qquad k \prec 0$$

اگر z مکرر باشد (z تعداد تکرار است)

$$Z\theta_z = (2k+1)\pi - \sum \theta z_i + \sum \theta p_j \qquad k \succ 0$$

$$Z\theta_z = 2k\pi - \sum \theta z_i + \sum \theta p_j \qquad k \prec 0$$

$$k = 0 \quad \rightarrow \quad z-1$$

۸. محل تقاطع شاخه ها با محور $j\omega$:

با تشکیل جدول آرایه های روث برای $\Delta(s) = 1 + KG(s)H(s)$ و صفر قرار دادن سطر S^1 (یک سطر مانده به آخر) از حل معادله کمکی سطر بالای سطر صفر ، جواب های محل تقاطع با محور موهومی بدست می آیند .

S^2	$k_1 \quad k_2 \quad \rightarrow \quad k_1 s^2 + k_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \pm\sqrt{\dfrac{k_2}{k_1}}$
S^1	$I(K) = 0 \quad \Rightarrow \quad K$ بدست می آید .
S^0	

۹. تعیین مقدار k برای نقطه خاصی از مکان :

از شرط اندازه بدست می آید :

$$|K| = \frac{|s+p_1||s+p_2|\ldots|s+p_n|}{|s+z_1||s+z_2|\cdots|s+z_m|}$$

و یا

$$|K| = \frac{\text{حاصلضرب طول بردارهای رسم شده از قطبها به نقطه مورد نظر}}{\text{حاصلضرب طول بردارهای رسم شده ازصفرها به نقطه مورد نظر}}$$

تمام موارد فوق طبق رابطه $1 + KG(s)H(s)$ صادق است . اما اگر $K^{\bullet}$ به صورت یک ضریب برای $G(s)H(s)$ نباشد از قاعده زیر استفاده می گردد .

۱۰. رسم مکان ریشه ها وقتی **k** ضریب $G(s)H(s)$ نباشد :

۱. تشکیل $\Delta(s)=0$

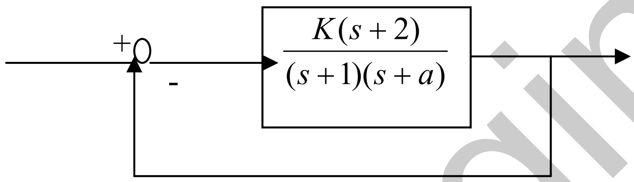
۲. معادله مشخصه به صورت $A(s)+KB(s)=0$ تبدیل می کنیم .

۳. $1+K\dfrac{B(s)}{A(s)}=0$

۴. $G_n(s)H_n(s)=\dfrac{B(s)}{A(s)}$ که تابع تبدیل حلقه باز جدید است .

مثال :

مطلوب است رسم مکان هندسی قطبها یا ریشه های سیستم زیر به ازاء $k=1$, $0\prec a\prec\infty$



$\Delta(s)$ $\quad\Delta(s)=1+\dfrac{K(s+2)}{(s+1)(s+a)}=0 \Rightarrow S^2+S+aS+a+Ks+2K=0$

$K=1 \quad , \Rightarrow \quad (S^2+2S+2)+a(s+1)=0$

$$\Rightarrow \quad 1+a\frac{S+1}{(S^2+2S+2)}=0$$

$$G_n(s)H_n(s)=\frac{S+1}{(S^2+2S+2)}$$

$S=-1 \qquad S_{1,2}=-1Ij$

مراحل :

۱. تعداد شاخه ها = ۲

۲. تعداد شاخه ها محدود = ۱ ، تعداد شاخه ها نامحدود = ۱

۳. نقاط روی محور حقیقی

۴. مجانب ها که چون مسیر روی محور حقیقی است ، خود به خود بدست آمده است .

۵. نقاط شکست :

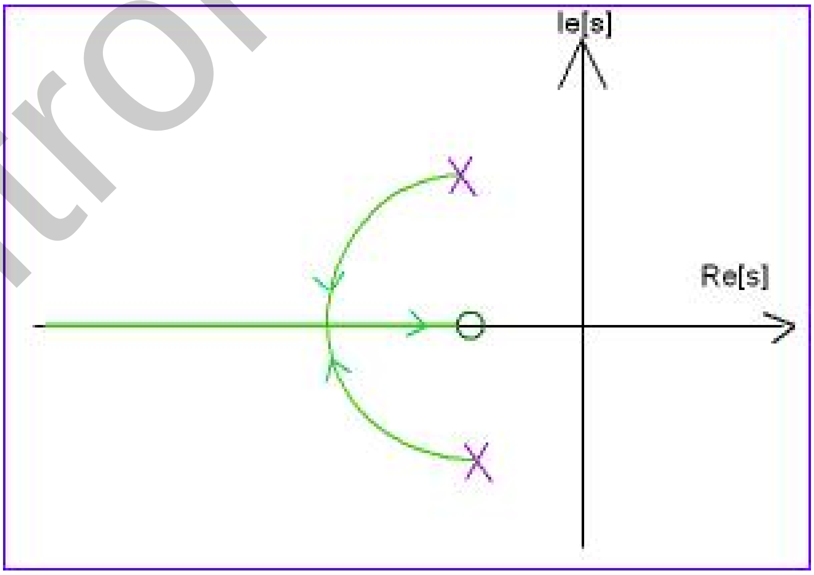
$$da/ds = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\dfrac{1}{(G_n(s)H_n(s))}}{ds} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\left(\dfrac{S^2+2S+2}{S+1}\right)}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad (2S+2)(S+1)-(S^2+2S+2)=0$$

$$\Rightarrow \quad S^2+2S=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} S=0 & a \prec 0 \\ S=-2 \leftarrow a \succ 0 \end{cases}$$

چون S = -2 در مکان هندسی است پس قابل قبول است . (مکان از ۱- تا $-\infty$ است)

۶. زاویه خروج از قطب مختلط :



$$\theta p = (2k+1)\pi - \sum_j \theta p_j - \sum_i \theta z_i$$

$$k = 0$$

$$\theta p = \pi - \pi/2 + (\pi/2) = \pi \quad rad$$

$$\theta p = 180^\circ - (90^\circ) + (90^\circ) = 180^\circ$$

۷) نیاز به بررسی آن نداریم .

۸) نقاط قطع با محور موهومی :

$$\Delta(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad S^2 + 2S + 2 + a(S+1) = 0$$

$$S^2 + (2+a)S + (2+a) = 0$$

$$a + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{حالت نوسانی} \quad \Rightarrow \quad a = -2$$

می خواهیم مقدار a ی نقطه ای را که سیستم میرای بحرانی است بدست آورید .

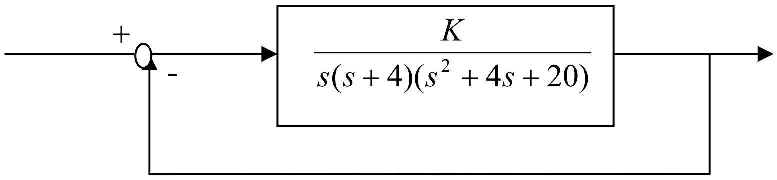
$$|a| = \frac{\text{صفرها}}{\text{طول بردارهای مرسوم از قطبها به نقطه مورد نظر}} = \frac{\sqrt{2}.\sqrt{2}}{1} = 2$$

به ازاء چه مقداری از a سیستم میرای بحرانی است :

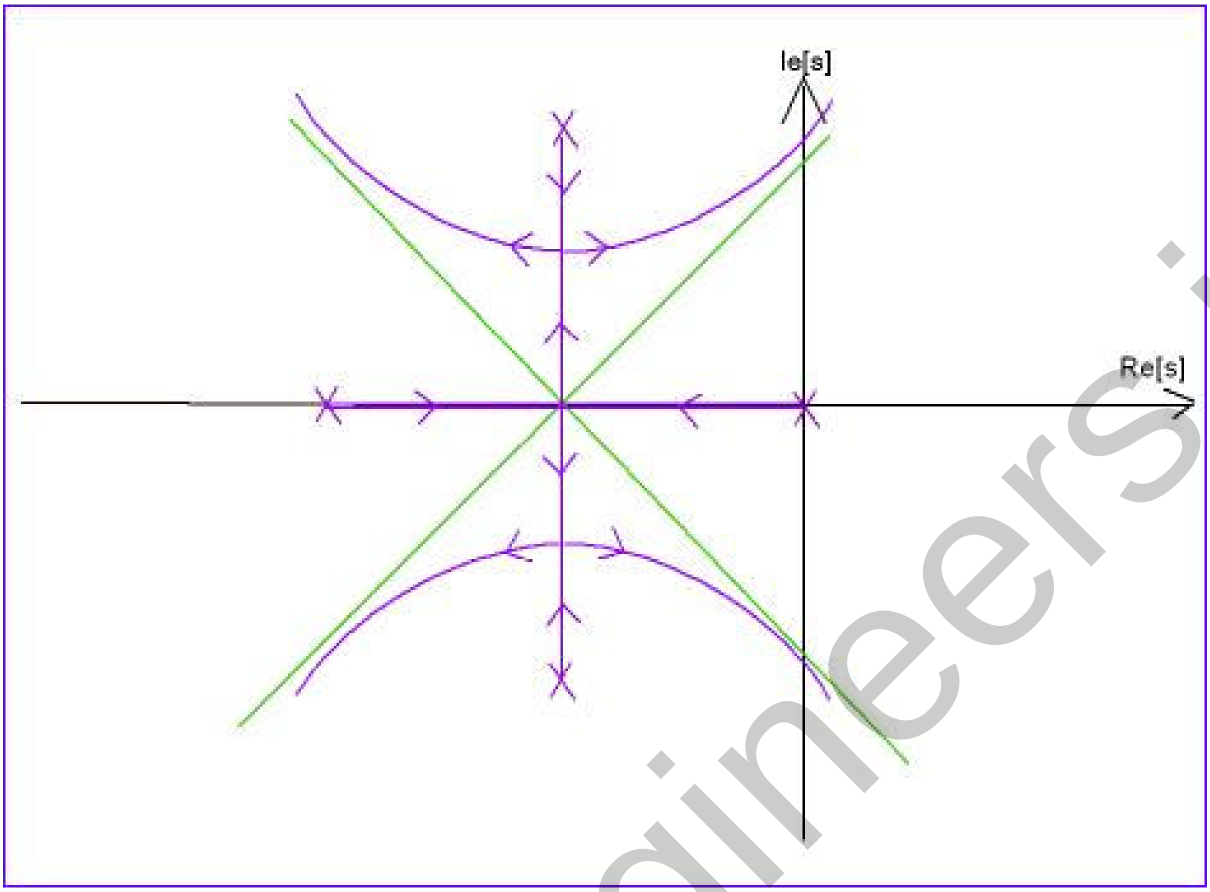
میرای ضعیف	$0 \prec a \prec 2$
میرای بحرانی	$a = 2$
میرای شدید	$a \succ 2$

تمرین : به ازاء $-\infty \prec a \prec 0$ مثال فوق را تکرار کنید .

مثال : مطلوب است مکان هندسی ریشه های سیستم حلقه بسته زیر به ازاء $K \succ 0$.



$$KG(s) = K\frac{1}{s(s+4)(s^2+4s+20)}$$



چون ۴ قطب دارد پس ۴ شاخه دارد و صفر ندارد . پس چهار شاخه به سمت ∞ دارد . (شاخه نامحدود)

نقطه های در شکست $\dfrac{dk}{ds}=0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d\left(\dfrac{1}{G(s)Hs)}\right)}{ds}=0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d(s(s+4)(s^2+4s+20)}{ds}=0$

$$\Rightarrow \quad \frac{d(s^4+8s^2+36s^2+80s)}{ds}=0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 4s^3+24s^2+72s+80=0$$

چون دو قطب بین ۰ و ۴- داریم پس مقدار وسط آن s = -2 را می توان بعنوان ریشه (به طور حدسی) در نظر گرفت .

$$s=-2 \quad , \qquad 4(-2)^3+24(-2)^2+72(-2)+80=0$$

چون تساوی فوق برقرار است پس قطعا s = -2 جواب در ریشه است .

$$
\begin{array}{r|l}
4s^3+24s^2+72s+80 & s+2 \\ \cline{2-2}
4s^3+8s^2 & 4s^2+16s+40 \\ \cline{1-1}
16s^2+72s & \\
16s^2+32s & \\ \cline{1-1}
40s+80 & \\
40s+80 & \\ \cline{1-1}
0 \quad 0 &
\end{array}
$$

خارج قسمت $4s^2+16s+40=0 \quad \Rightarrow \quad s^2 4s+10=0 \quad \Rightarrow \quad -2\pm j\sqrt{6}$ **ریشه**

$$K=\frac{-1}{G(s)H(s)}=-\left[s(s+4)(s^2+4s+20)\right]=-10\times 10 \quad \Rightarrow \quad k=100$$

$$\begin{cases} s^2+4s=-10 \\ s^2+4s=10=0 \quad \Rightarrow \quad s^2+4s=-10 \end{cases}$$

زاویه خروج از قطب مختلط :

$$\theta p=(2k+1)180^\circ-\sum\theta p_j+\sum\theta z_i$$

$$\theta p_1=90^\circ$$

$$\theta p_2=Tg^{-1}\frac{4}{2}$$

$$\theta p_3=Tg^{-1}\frac{4}{2}$$

$$\theta p=180^\circ-(90^\circ+180^\circ+Tg^{-1}2-Tg^{-1}2)+(0)=90^\circ$$

مجانبها :

$$\delta_\circ=\frac{\text{مجموع صفرها}-\text{مجموع قطبها}}{n-m}=\frac{-8}{4}=-2$$

$$\partial_\circ=\frac{(2k+1)180^\circ}{n-m}=\begin{cases} 45 & k=0 \\ -45 & k=-1 \\ 135 & k=1 \\ -135 & k=-2 \end{cases}$$

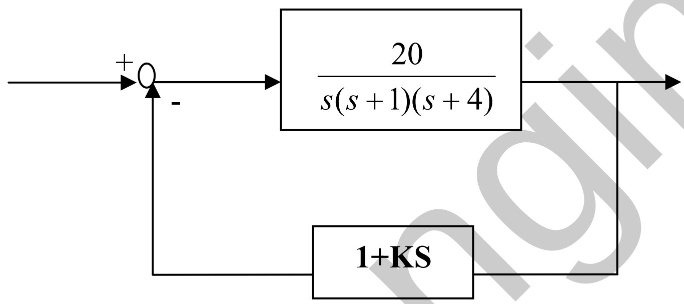
نقاط قطع با محور $j\omega$:

$$\Delta(s)=0 \quad \Rightarrow \quad s^4+8s^3+36s^2+80s+K=0$$

S^4	1	36	k
S^3	$\cancel{8}\ ^{1}$	$\cancel{80}\ ^{10}$	
S^2	26	$k \Rightarrow 26s^2+260=0 \Rightarrow s^2+10=0 \Rightarrow s=\pm j\sqrt{10}$	
S^1	$\dfrac{260-k}{26} \xrightarrow{=0} k=260$		
S^0	k		

تمرین ۲ : مکان ریشه سیستم های زیر را به ازاء $k \succ 0$ رسم کنید .

الف)



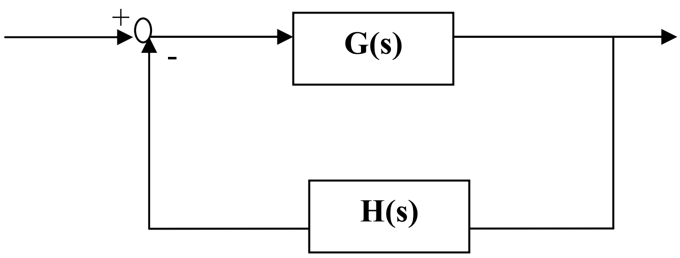
ب)

ج)

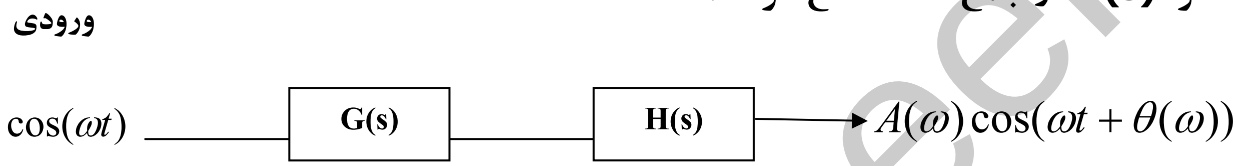
$$G(s)=\frac{K(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)}$$

$$G(s)=\frac{K}{s(s-1)(s^2+4s+8)} \quad , \quad H(s)=1$$

« پاسخ فرکانسی سیستم های کنترل »



اگر **H(s)** از جمع کننده قطع گردد :



ورودی و خروجی هم فرکانس اند اما از جهت دامنه و فاز با هم تفاوت دارند .

$$A(\omega) = \left|G(j\omega)H(j\omega)\right|$$

$$\theta(\omega) = \angle G(j\omega)H(j\omega)$$

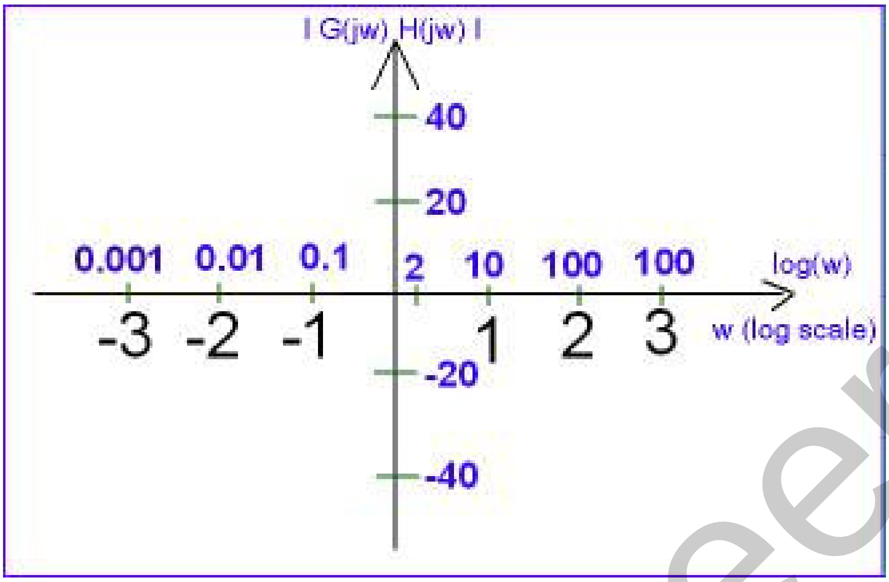
فرکانس ω را از صفر تا بی نهایت تغییر می دهیم و $A(\omega)$, $\theta(\omega)$ را رسم می کنیم .

(شناسایی سیستم)

روش های رسم $A(\omega)$, $\theta(\omega)$:

1. **دیاگرام بود**
2. **نمودار قطبی (نایکونیست)**
3. **نموادر نیکونر**

دیاگرام بود (Bode diagram)

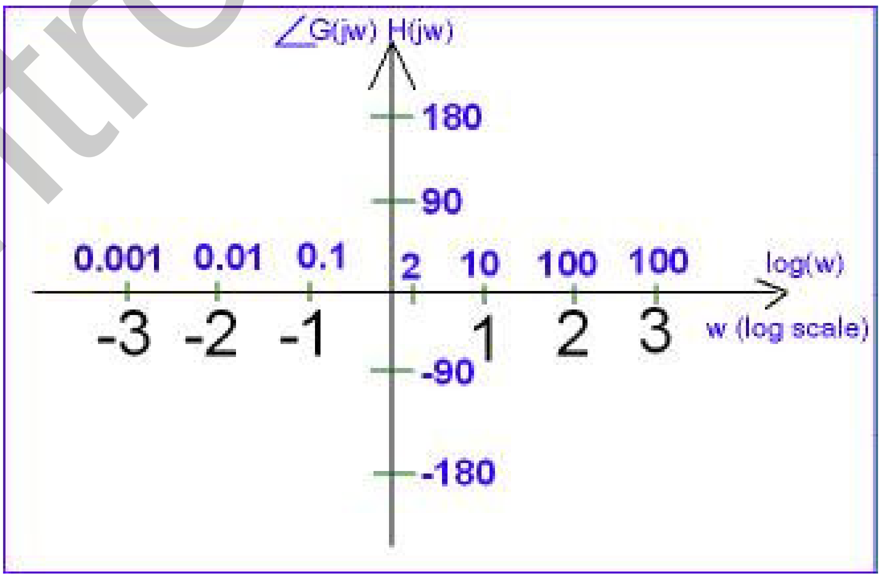


$$X_{dB} = 20 \log_{10} |x|$$

$$|x| = 10 \log^{\frac{X_{dB}}{20}}$$

به فاصله هر فرکانس تا دو برابر آن فرکانس Octave (اکتاو) نام دارد .

<u>نمودار فاز بر حسب فرکانس :</u>



حالت کلی :

$$G(s)H(s)=\frac{K(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)\dots(1+\frac{2\xi}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2})}{S^{\pm q}(1+\tau_1' s)(1+\tau_2' s)\dots(1+\frac{2\xi'}{\omega_n'}s+\frac{s^2}{\omega_n'^2})}$$

نکته :

در فرم کلی دیاگرام بود ، همه اعداد ثابت یک هستند . $0\le\xi \quad , \quad \xi'\le 1$

اجزاء :

$$K$$

$$S^{\pm q}$$

$$(1+\tau s)^{\pm 1}$$

$$(1+\frac{2\xi}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2})$$

فرض کنید:

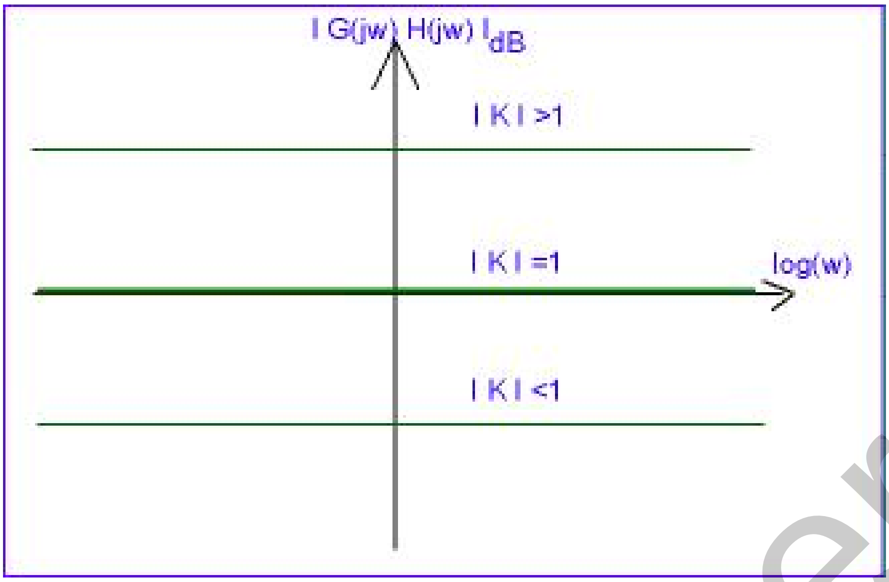
$$G(s)H(s)=\frac{kS^q(1+\tau s)\dots(1+\frac{2\xi}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2})}{S^{q'}(1+\tau' s)\dots(1+\frac{2\xi'}{\omega_n'}s+\frac{s^2}{\omega_n'^2})}$$

نمودار بود $(G)=K$

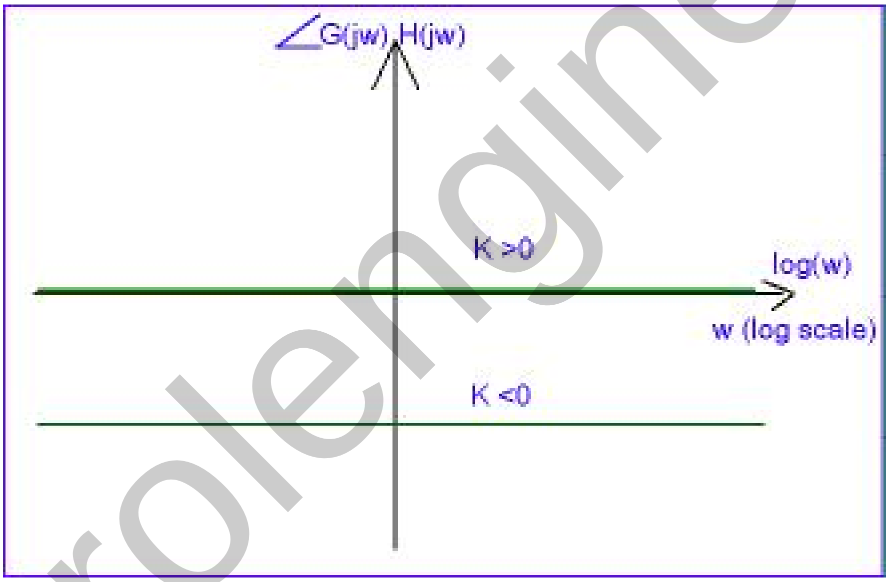
$$G(j\omega)=K \quad\Rightarrow\quad |G(j\omega)|=|K|$$

و برحسب دسی بل $$|G(j\omega)|_{dB}=20\log|K|=\begin{cases}\prec 0 & |K|\prec 1\\ =0 & |K|=1\\ \succ 0 & |K|\succ 1\end{cases}$$

$$\angle G(j\omega)=\begin{cases}0 & k\succ 0\\ -\pi & k\prec 0\end{cases}$$



علامت منفی برای π ، تأخیر خروجی نسبت به ورودی را نشان می دهد



اثر **k** در نمودار دامنه ، شیفت کل نمودار دامنه بود به اندازه $20\log|K|$ است .

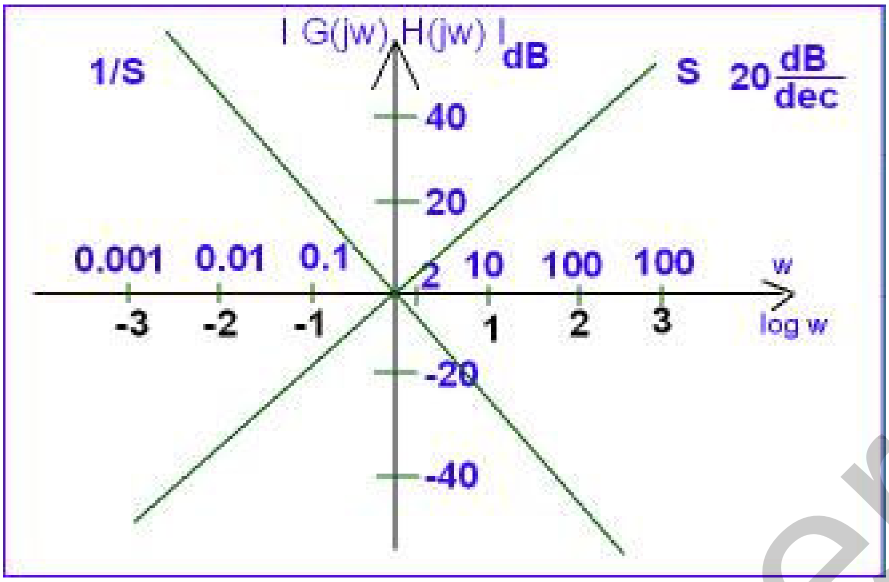
نتیجه : اگر $k \succ 0$ باشد ، در نمودار فاز بی تأثیر است . اما اگر $k \prec 0$ باشد ، باعث شیفت نمودار به اندازه $-\pi$ می گردد .

نمودار بود $G(s) = S$

$$G(j\omega) = j\omega \quad \Rightarrow \quad |G(j\omega)| = \omega$$

$$, \quad |G(j\omega)|_{dB} = 20\log\omega$$

$$\angle G(j\omega) = \pi/2$$

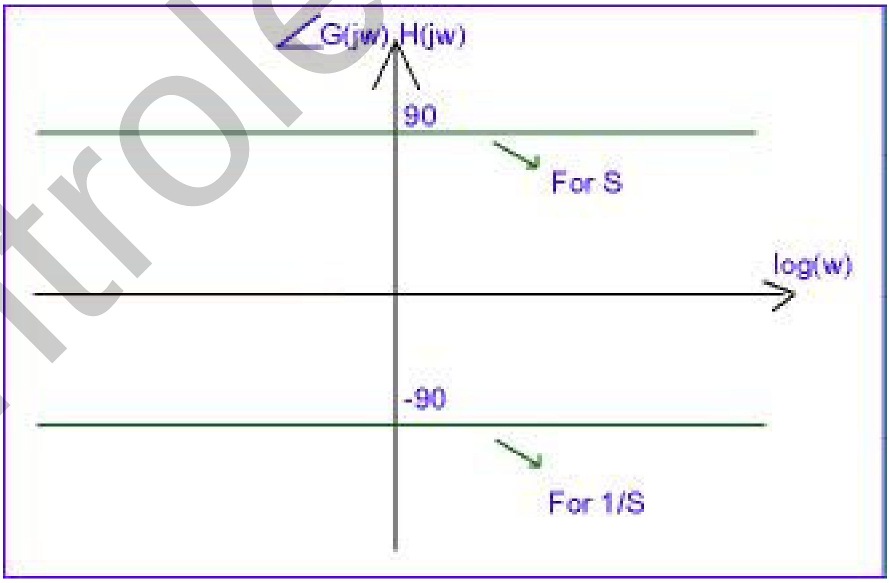


$$G(s) = {}^{1}\!/_{s} \qquad G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \quad \Rightarrow \quad |G(j\omega)| = \frac{1}{\omega}$$

$$, \quad |G(j\omega)|_{dB} = 20\log 1 - 20\log\omega = -20\log\omega$$

$$, \quad \angle G(j\omega) = \frac{-\pi}{2}$$

نمودارهای این حالت قرینه حالت قبل هستند.



نمودار بود

$G(s) = S^2$

$G(j\omega) = (j\omega)^2$

$|G(j\omega)|_{dB} = 40\log\omega$

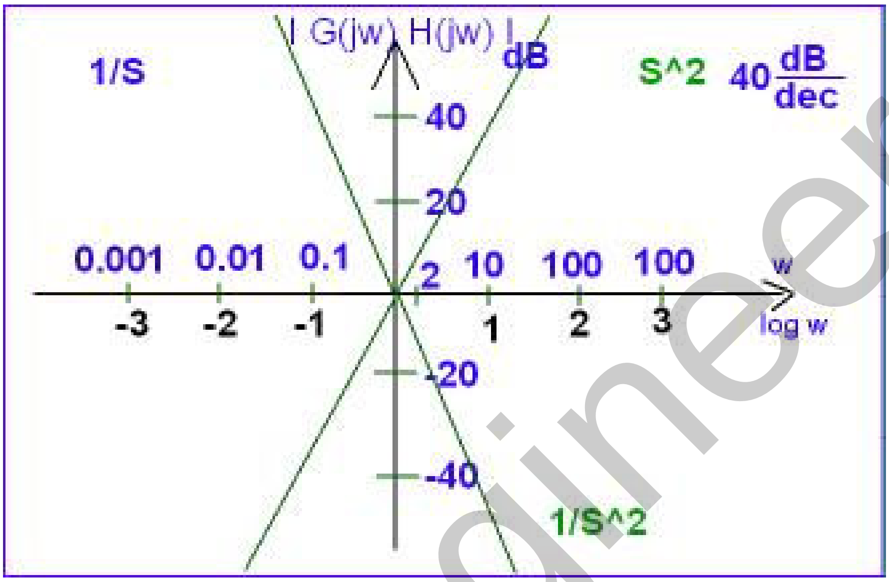
$\angle G(j\omega) = \pi$

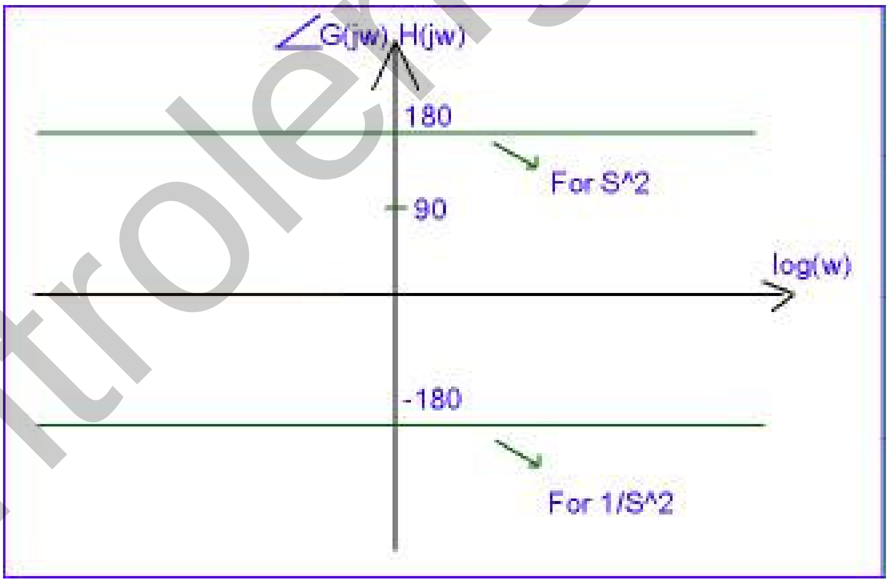
نمودار بود

$G(s) = \frac{1}{S^2}$

$|G(j\omega)|_{dB} = -40\log\omega$

$\angle G(j\omega) = -\pi$





توضیح :

$G(s)=S^2$ برای حالت $G(j\omega)=(j\omega)^2=(j\omega)(j\omega) \quad \Rightarrow \quad \angle G(j\omega)=\pi/2+\pi/2=\pi=180^\circ$

$G(s)=\dfrac{1}{S^2}$ برای حالت $G(j\omega)=\dfrac{1}{(j\omega)^2}=\dfrac{1}{(j\omega)(j\omega)}$

$$|G(j\omega)|=20\log\omega^{-2}=-40\log\omega$$

با تعمیم روابط قبل برای حالت کلی داریم :

نمودار $G(s)=S^q$

$G(j\omega)=(j\omega)^q$

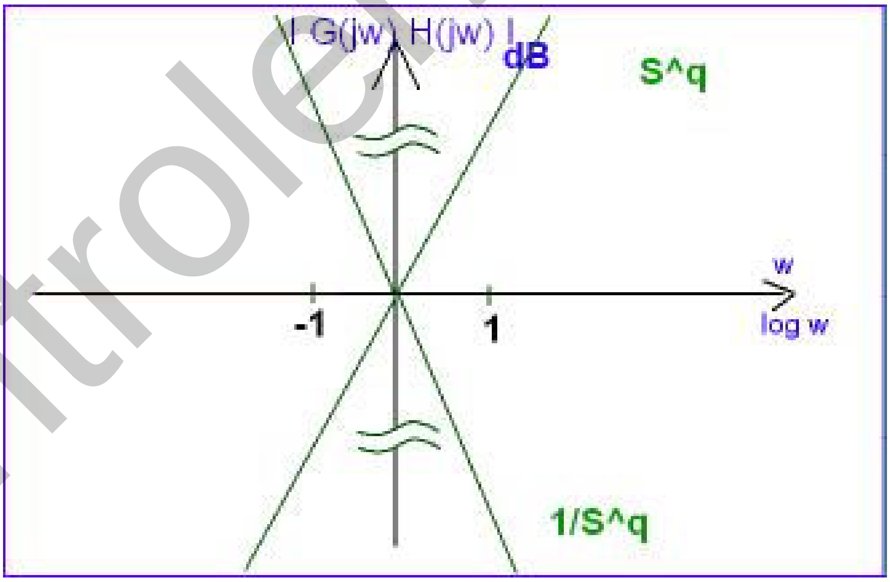
$|G(j\omega)|_{dB}=20q\log\omega$

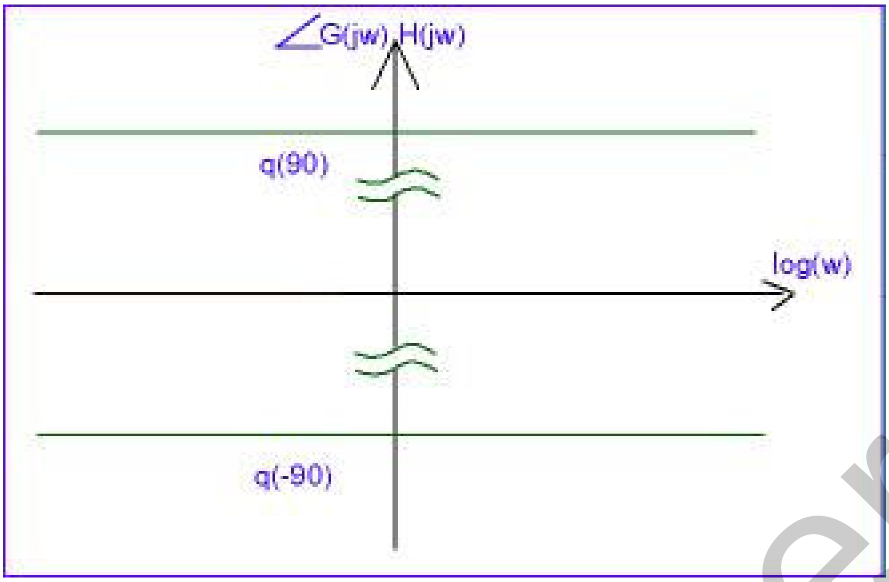
$\angle G(j\omega)=q(\pi/2)$

نمودار $G(s)=\dfrac{1}{S^q}$

$|G(j\omega)|_{dB}=-20q\log\omega$

$\angle G(j\omega)=q(-\pi/2)$





$$G(s)=(1+\tau s)$$

$$S=-1/\tau \quad \Rightarrow \quad G(-1/\tau)=(1+(\tau\times -1/\tau))=(1-1)=0 \quad \Rightarrow \quad \omega_z=\frac{1}{|\tau|}$$

بنابراین $G(s)=(1+\dfrac{S}{\omega_z})$

$$G(s)=(1+\tau s) \quad \Rightarrow \quad G(j\omega)=1+j\tau\omega$$

$$|G(j\omega)|=\sqrt{1+\tau^2\omega^2}$$

$$|G(j\omega)|_{dB}=20\log\sqrt{1+\tau^2\omega^2}$$

$$,\quad \angle G(j\omega)=Tg^{-1}(\frac{\tau\omega}{1})=Tg^{-1}(\tau\omega)$$

حالت اول : $\omega \prec\prec \dfrac{1}{\tau}=\omega_z$ **یا به عبارت دیگر** $(\omega\tau \prec\prec 1)$

از فرکانس های پایین ، اندازه و فاز صفر است .

$$|G(j\omega)|_{dB}\approx 20\log\sqrt{1}\approx 0 \quad , \quad \angle G(j\omega)=0$$

<u>یعنی در فرکانس های پایین ، اندازه و فاز صفر است .</u>

حالت دوم : $\omega = \dfrac{1}{\tau}$, $\omega\tau = 1$

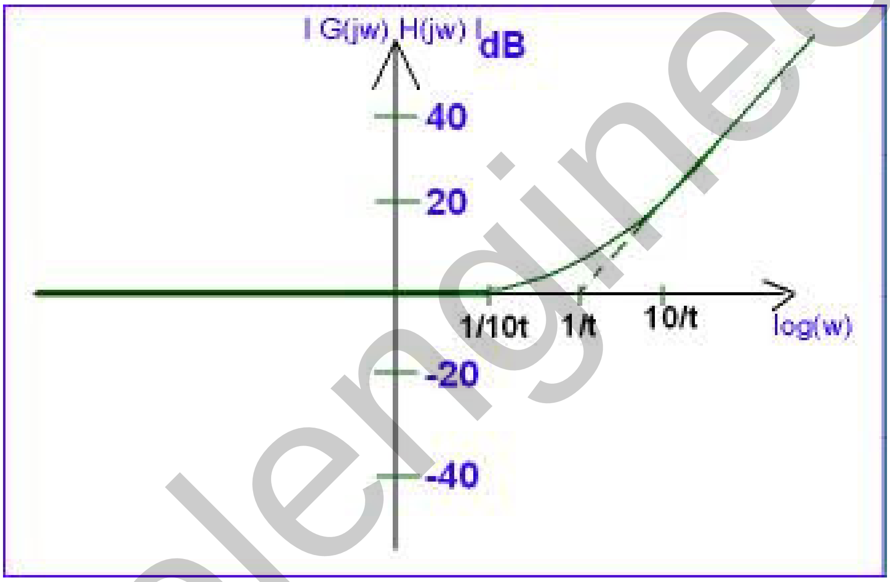
$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log\sqrt{2} = 3dB$$

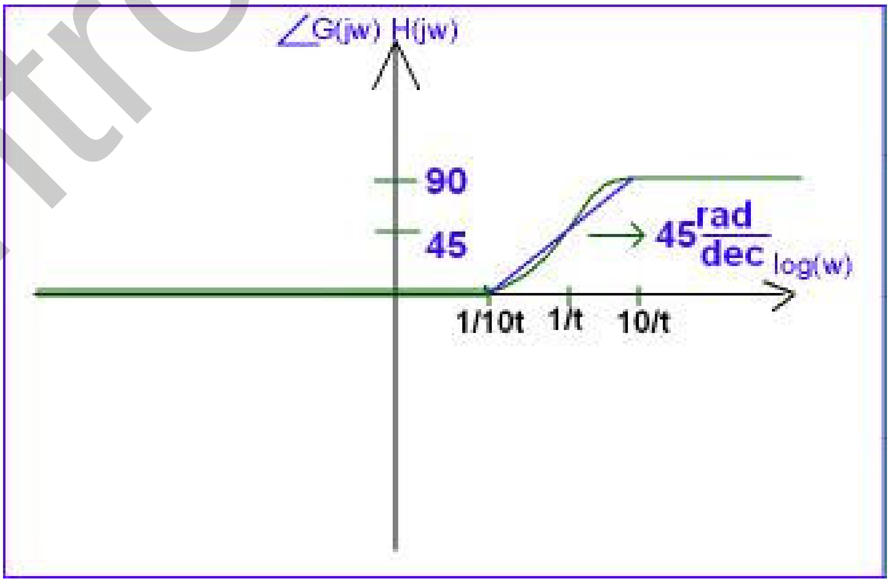
$$\angle G(j\omega) = Tg^{-1}1 = \pi/4 = 45^\circ$$

حالت سوم : $\omega \succ\succ \dfrac{1}{\tau} = \omega_z$, $\omega\tau \succ\succ 1$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log\tau\omega = 20\log\tau + 20\log\omega \quad \rightarrow \quad y = b + 20\omega$$

$$\angle G(j\omega) \approx \pi/2 \approx 90^\circ$$





رسم نمودار بود $G(s)=\dfrac{1}{1+\tau s}$

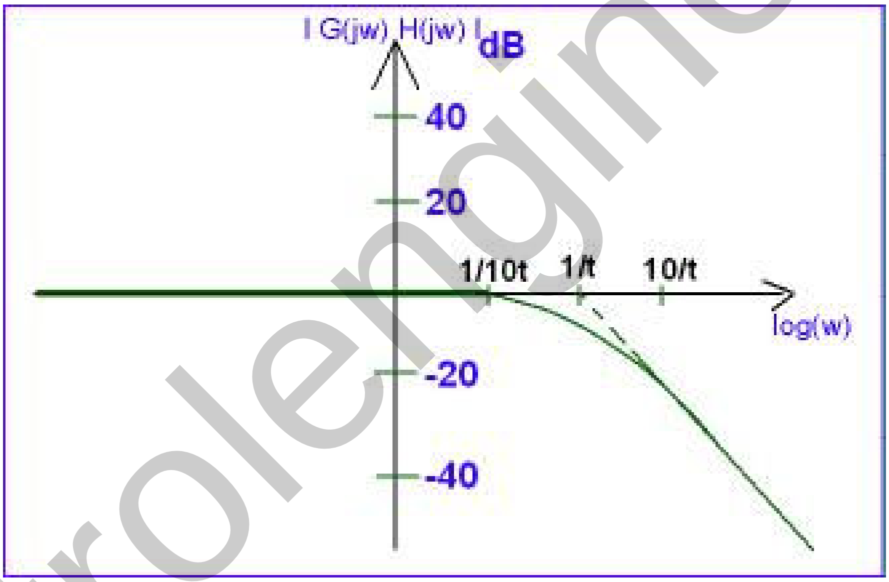
قطب $S=\dfrac{-1}{\tau}$

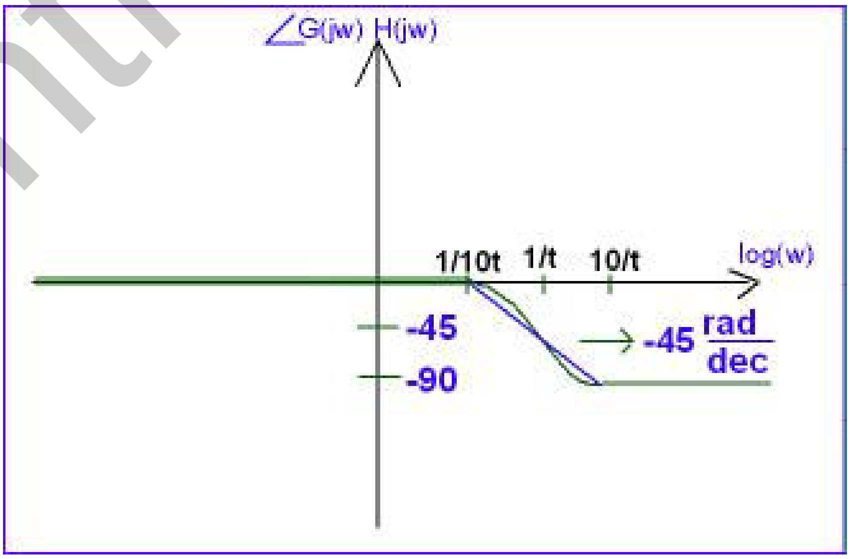
فرکانس قطب $\omega=\dfrac{1}{|\tau|}$

$$G(s)=\frac{1}{1+\tau s}=\frac{1}{\left(1+\dfrac{S}{\omega}\right)}$$

$$|G(j\omega)|_{dB}=-20\log\sqrt{1+\tau^2\omega^2}$$

$$\angle G(j\omega)=-Tg^{-1}\tau\omega$$





۴- نمودار بود

$$\left(0 \le \xi \le 1\right) \qquad G(s) = (1 + \frac{2\xi}{\omega_n} S + \frac{S^2}{\omega_n^{\ 2}})$$

$$G(j\omega) = 1 + \frac{2\xi(j\omega)}{\omega_n} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^{\ 2}}$$

$$G(j\omega) = (1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^{\ 2}}) + j(\frac{2\xi}{\omega_n})$$

$$\left|G(j\omega)\right| = \sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^{\ 2}})^2 + (\frac{2\xi}{\omega_n})^2}$$

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20 \log \sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^{\ 2}})^2 + (\frac{2\xi}{\omega_n})^2}$$

$$\angle G(j\omega) = Tg^{-1}\left(\frac{2\xi \dfrac{\omega}{\omega_n}}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^{\ 2}}}\right)$$

حالت اول : $\omega \ll \omega_n$ $\qquad \dfrac{\omega}{\omega_n} \ll 1$

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} \approx 20 \log \sqrt{1} \approx 0$$

$$\angle G(j\omega) \approx 0$$

حالت دوم :

$$\omega = \omega_n \qquad \frac{\omega}{\omega_n} = 1$$

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20\log 2\xi = \begin{cases} 6dB & \xi = 1 \\ 3dB & \xi = \sqrt{2}/2 \\ 0 & \xi = 1/2 \\ -14 & \xi = 1/10 \\ -\infty & \xi = 0 \end{cases}$$

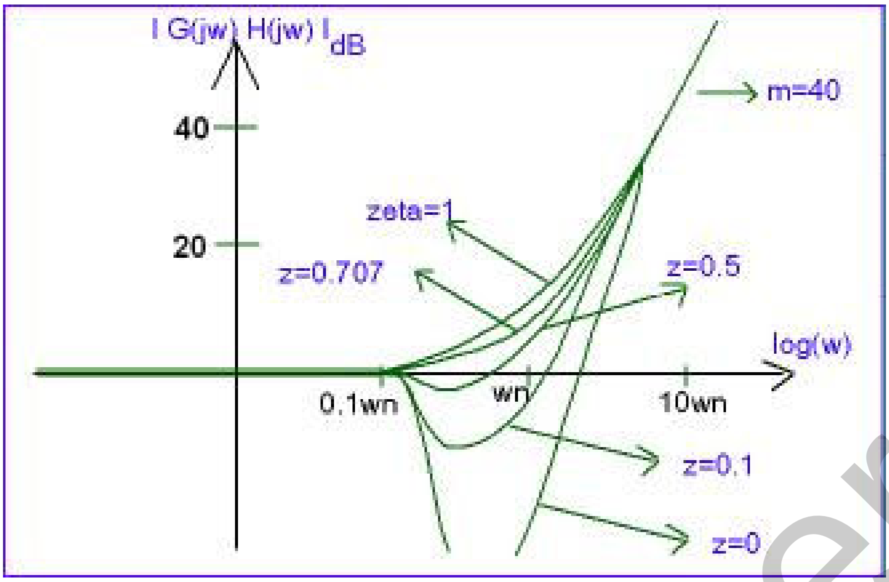
$$\angle G(j\omega) = Tg^{-1}\infty = \pi/2$$

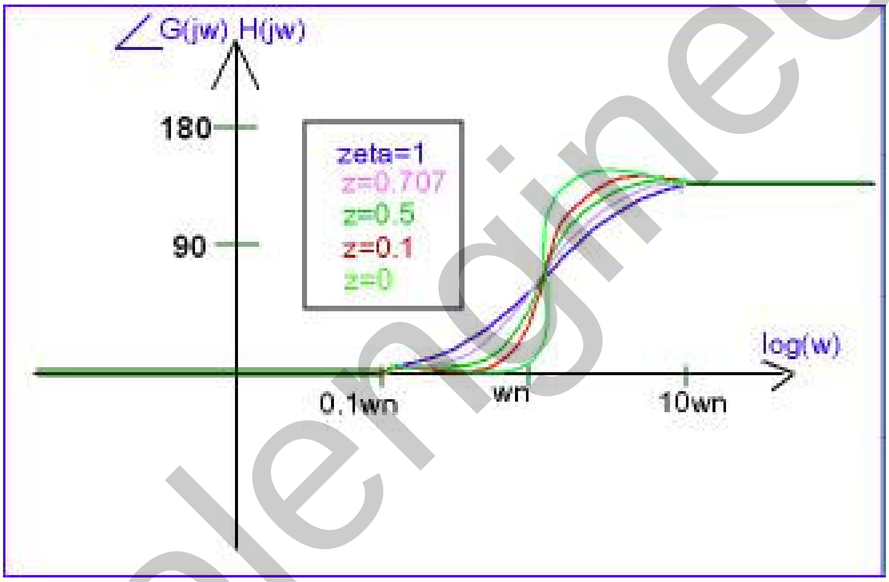
حالت سوم :

$$\text{عدد} \quad \omega \succ\succ \omega_n \qquad \frac{\omega}{\omega_n} \succ\succ 1$$

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20\log\frac{\omega^2}{\omega_n^{\,2}} = 40\log\frac{\omega}{\omega_n} = 40\log\omega - \overbrace{40\log\omega_n}$$

$$\angle G(j\omega) = \pi \qquad Tg^{-1}\left(\frac{2\xi}{\frac{\omega}{\omega_n} \succ\succ 1}\right) = Tg^{-1}\left(\frac{2\xi}{\infty}\right) = \pi$$





نمودار مجانب $0.4 \prec \xi \prec 1$ **استفاده می گردد و**

بهتر است در مجانب $\xi = 1$ **باشد .**

($\xi = 1$ **در نظر گرفته شود .)**

تمرین : نمودار بود $G(s) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{2\xi}{\omega_n} s + \dfrac{S^2}{\omega_n^{\,2}}}$ **را رسم کنید .**

تمرین : فرکانسی که در آن حداقل یا حداکثر می شود را پیدا کنید ؟

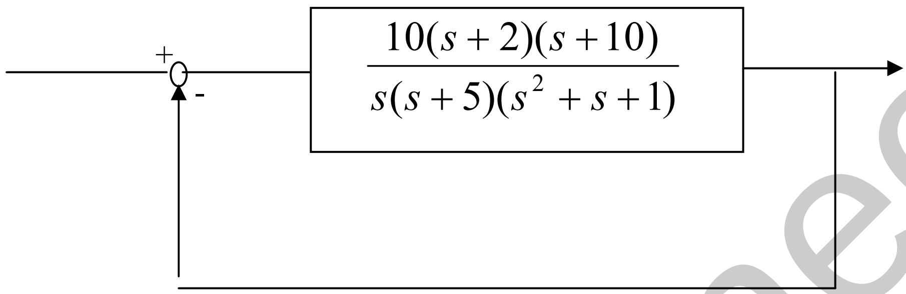
$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \qquad 0 \le \xi \le \sqrt{2}/2$$

تمرین : مقدار حداقل دامنه چقدر است ؟

صفر $$M_r = 2\xi\sqrt{1-\xi^2} = \sin 2\theta$$

قطب $$= \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

مثال : نمودار بود سیستم زیر را رسم کنید .



$$G(s)H(s) = G(s) = \frac{10(s+2)(s+10)}{s(s+5)(s^2+s+1)}$$

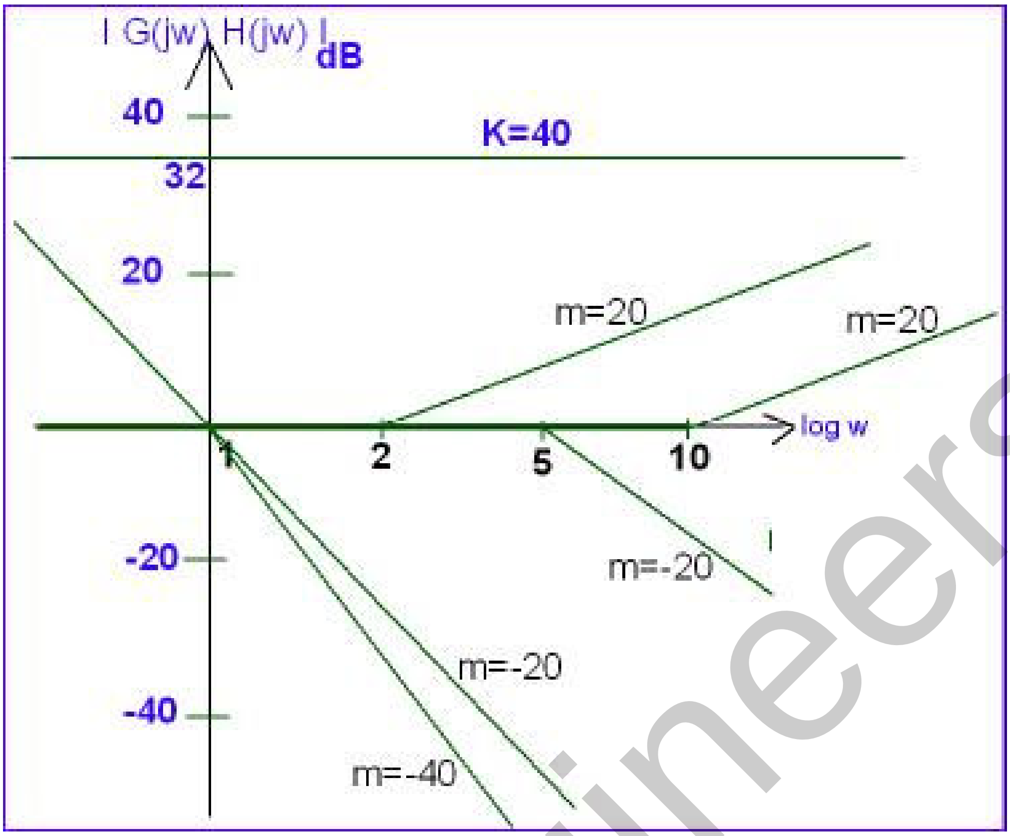
$$G(s) = \frac{10 \times 2 \times 10(1+\frac{s}{2})(1+\frac{s}{10})}{5s(1+\frac{s}{5})(1+s+s^2)} = \frac{40(1+0.5s)(1+0.1s)}{s(1+0.2s)(1+s+s^2)}$$

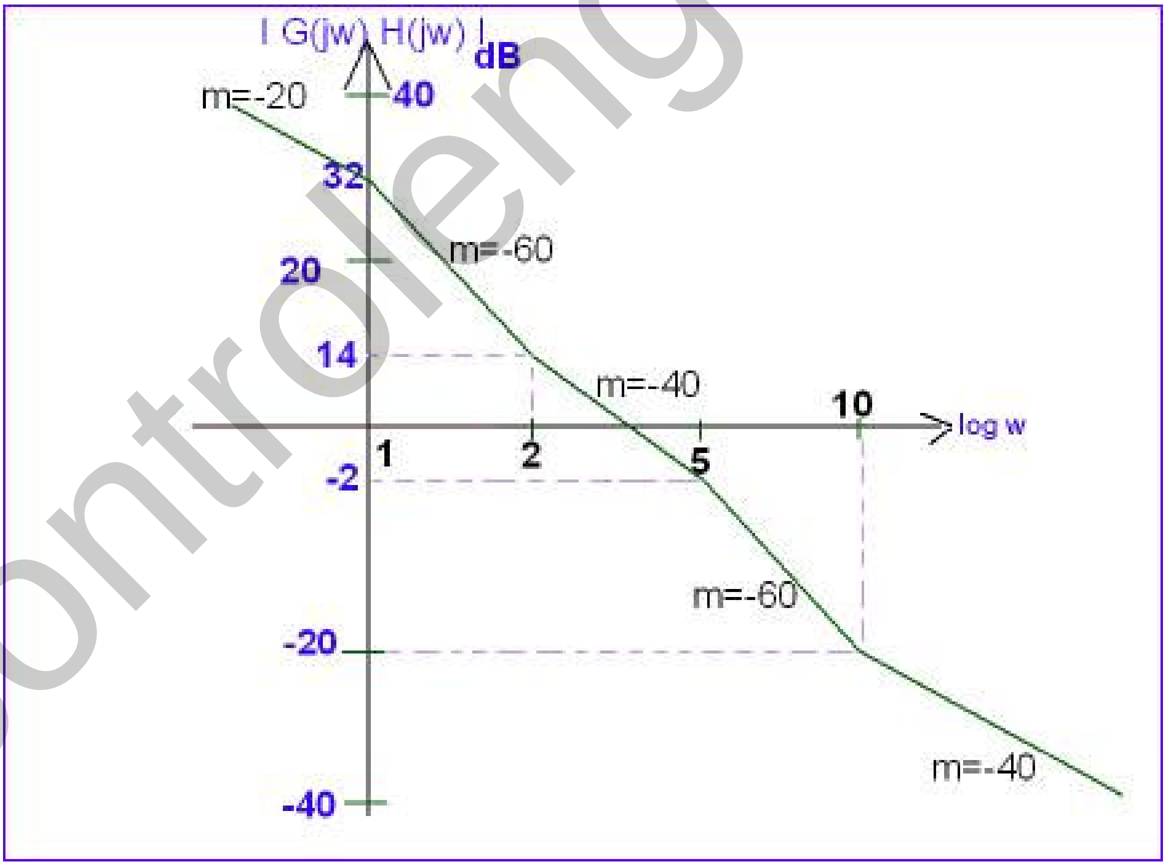
صفرها : از صورت G(s)

$$S=-2 \quad \Rightarrow \quad \omega_{z_1}=2$$
$$S=-10 \quad \Rightarrow \quad \omega_z=10$$

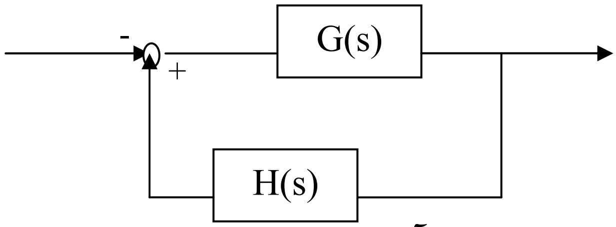
قطب ها

$$\begin{cases} S=0 \quad \Rightarrow \quad \omega_{p_1}=0 \\ S=-5 \quad \Rightarrow \quad \omega_{p_2}=5 \\ \xi = 1/2 \\ \omega_n = 1 \end{cases}$$

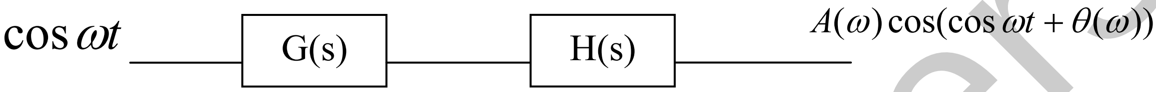

I G(jw) H(jw) I dB
40
K=40
32
20
m=20
m=20
log w
1
2
5
10
-20
m=-20
m=-20
-40
m=-40


I G(jw) H(jw) I dB
m=-20
40
32
m=-60
20
14
m=-40
10
log w
1
2
5
-2
m=-60
-20
m=-40
-40

نمودار قطبی (نایکویست)



$1+G(s)H(s)=0$ پایدار از رابطه روبرو بدست می آید .

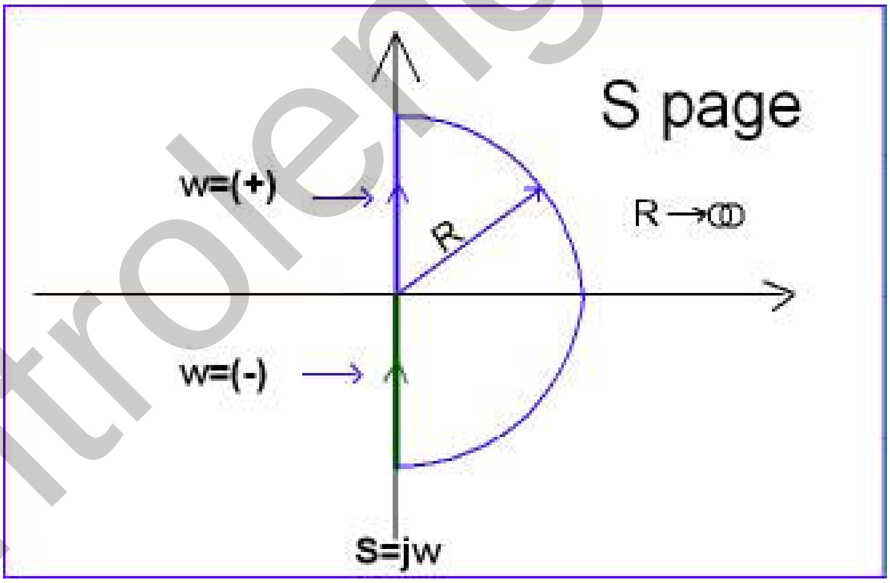


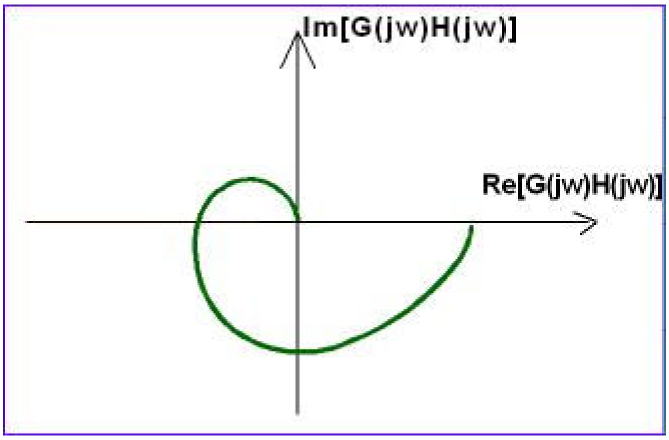
$$A(\omega)=|G(j\omega)H(j\omega)|$$

$$\theta(\omega)=\angle G(j\omega)H(j\omega)$$

صفحه s را که شامل قطبها و صفرهای حلقه باز $G(s)H(s)$ می باشد ، در نظر بگیریم :

سمت راست محور را انتخاب می کنیم و یک نیم دایره به شعاع $R\to\infty$ می زنیم . جهت این نیم دایره در جهت افزایش فرکانس است .



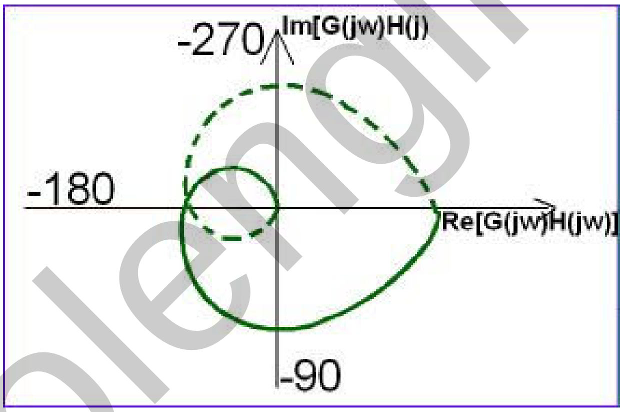


اما قسمت منفی رسم نمی گردد زیرا :

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = |G(-j\omega)H(-j\omega)|$$

$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = -\angle G(-j\omega)H(-j\omega)$$

نمودار به ازاء $\omega \prec 0, \omega \succ 0$ " نسبت به محور افقی " قرینه اند .



قسمت مثبت سرناحیه را طی

کرده است و در نهایت به $3\pi/2$ می رسد .

کارنایکوئیست : توانایی رسم نمودار و بررسی لز روی نمودار ترسیم شده .

1. رسم نمودار نایکوئیست :

الف) اثر قطب ها بر نمودار

ب) اثر صفرها

ج) اثر نوع سیستم

2. روش ناپایداری نایکوئیست .

رسم نمودار نایکویست برای $G(s)H(s)=\dfrac{k}{1+\tau\omega}$

مراحل رسم :

الف) **s** به $j\omega$ تبدیل گردد $S\rightarrow j\omega$

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{k}{1+j\omega}$$

ب) محاسبه اندازه و زاویه

$$\left|G(j\omega)H(j\omega)\right|=\frac{k}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}$$

$$\angle G(j\omega)H(j\omega)=-Tg^{-1}\tau\omega$$

ج) محاسبه مقدار حقیقی و موهومی که نباید از روی اندازه و زاویه بدست آید بلکه باید از رابطه قسمت الف بدست آید :

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{k(1-j\tau\omega)}{1+\tau^2\omega^2}$$
$$=\frac{k}{1+\tau^2\omega^2}+j\frac{-k\tau\omega}{1+\tau^2\omega^2}$$

به ازاء $\omega\succ 0$ چون قسمت حقیقی مثبت و قسمت موهومی منفی است ، در ربع چهارم خواهیم بود . اگر فرکانس $\omega\prec 0$ باشد در ربع اول خواهیم بود . زیرا در آنصورت هر دو عبارت حقیقیو موهومی مثبت اند .

د) افزایش فرکانس از $\omega=0^+$ به $\omega=\infty$ و رسم نمودار به ازاء $\omega\succ 0$

ه) قرینه کردن نمودار نسبت به محور افقی

توجه : در رسم نمودار نایکویست از محل و نقاط تقاطع با محورهای حقیقی و موهومی و همچنین مجانب نمودار در بی نهایت استفاده می گردد .

$$R_e\left[G(j\omega)H(j\omega)\right]=0\qquad\Rightarrow\qquad\omega=\omega_0$$

$I_m\left[G(j\omega)H(j\omega)\right]=$ **تقاطع با محور موهومی**

$$\omega=\infty$$

$$\omega=0$$

$$G(s)H(s) = \left.\frac{k}{1+\tau s}\right|_{S=j\omega}$$

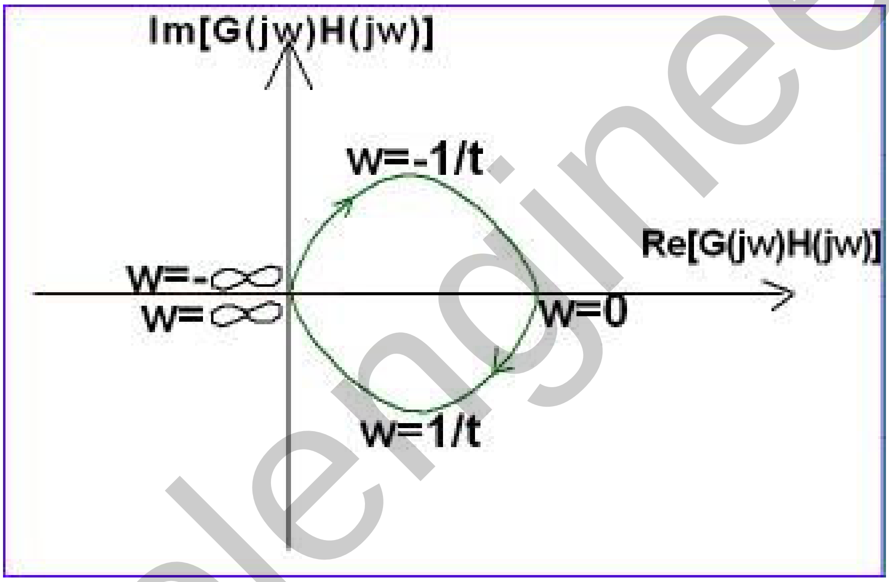
$$G(s)H(s) = \left|\frac{k}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}\right| e^{j\angle Tg^{-1}\tau\omega} = \frac{k}{1+\tau^2\omega^2} + j\frac{-k\tau\omega}{1+\tau^2\omega^2}$$

$\to 0$ حقیقی $\Rightarrow$ $\omega\uparrow$ حقیقی همیشه مثبت است $\downarrow$ اندازه $\Rightarrow$ $\omega\uparrow$

$\to 0$ موهومی $\Rightarrow$ $\omega\uparrow$ موهومی منفی است $\to -\pi/2$ زاویه $\Rightarrow$ $\omega\uparrow$

$\omega = 0^+$

$$G(j0^+)H(j0^+) = Ke^{jo} = K - jo = K\angle 0$$



در روی نمودار بالا رسم می گردد .

$\omega = 1/\tau$

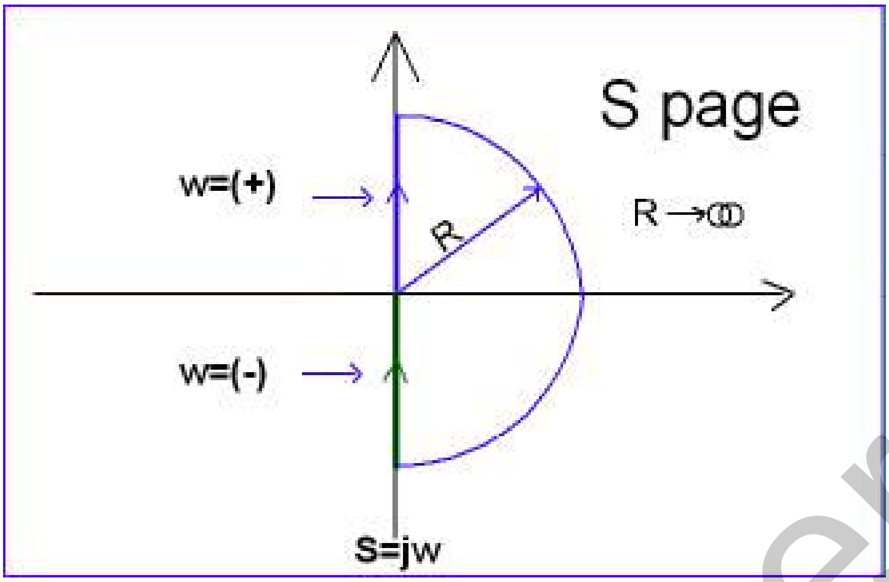
$$G(j\,1/\tau)H(j\,1/\tau) = K/\sqrt{2}\angle -\pi/4 = K/2 - jK/2$$

$$\omega = \infty$$

$$G(j\omega)H(j\omega) = 0\angle -\pi/2 = 0 - jo$$

مقصد ما مبدأ است اما با زاویه $\pi/2$ به آن می رویم .

جهت فلش نیم دایره ، در جهت افزایش فرکانس ω است . برای فرکانس های منفی قرینه نیم دایره ای که در ربع چهارم است را نسبت به محور افقی رسم می کنیم و مقادیر را قرینه می کنیم .



مثال : تحت تبدیل $G(s)H(s)=\dfrac{K}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$ نگاشت را رسم می کنیم :

$$G(s)H(s)=\frac{K}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}\bigg|_{S=j\omega}$$

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{K}{(1+j\tau_1\omega)(1+j\tau_2\omega)}$$

اندازه $$\left|G(j\omega)H(j\omega)\right|=\frac{K}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}$$

$$\angle G(j\omega)H(j\omega)=e^{-j(Tg^{-1}\tau_1\omega+Tg^{-1}\tau_2\omega)}$$

یافتن قسمت حقیقی موهومی :

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{K(1-j\tau_1\omega)(1-j\tau_2\omega)}{(1+\tau_1^2\omega^2)(1+\tau_2^2\omega^2)}=\frac{K(1-\tau_1\tau_2\omega^2)}{(1+\tau_1^2\omega^2)(1+\tau_2^2\omega^2)}+j\frac{-K(\tau_1\tau_2)\ \omega}{(1+\tau_1^2\omega^2)(1+\tau_2^2\omega^2)}$$

با صفر شدن قسمت حقیقی ، تقاطع با محور موهومی بدست می آید :

$$R_e=0\quad\Rightarrow\quad\frac{K(1-\tau_1\tau_2\omega^2)}{(1+\tau_1^2\omega^2)(1+\tau_2^2\omega^2)}=0\quad\Rightarrow\quad\omega=\frac{1}{\sqrt{\tau_1\tau_2}}$$

حال این ω را در قسمت موهومی قرار می دهیم تا تقاطع بدست آید :

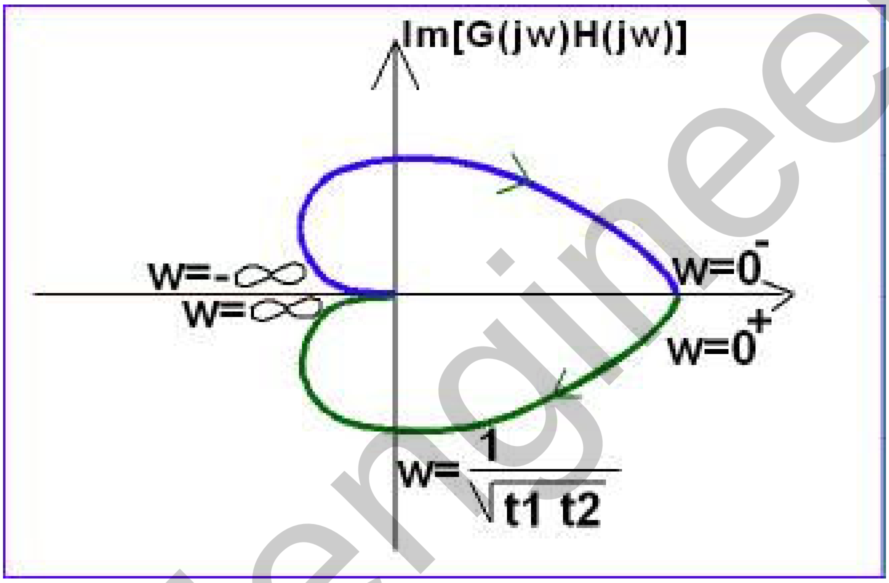
محل تقاطع با محور موهومی در فرکانس ω

$$I_m\left(G(j\omega)H(j\omega)\right)=\frac{-K\left(\tau_1+\tau_2\right)\frac{1}{\sqrt{\tau_1\tau_2}}}{\left(1+\frac{\tau_1^{\ 2}}{\tau_1\tau_2}\right)\left(1+\frac{\tau_2^{\ 2}}{\tau_1\tau_2}\right)}=\frac{-K\sqrt{\tau_1\tau_2}}{\left(\tau_1+\tau_2\right)}$$

$$\omega=0^+$$

$$G(j0^+)H(j0^+)=K\angle 0=K-jo$$

عددگذاری (افزایش فرکانس از $\omega=0^+$ تا $\omega=\infty$) :



تمرین : برای $\omega=\frac{1}{\tau_1}$, $\omega=\frac{1}{\tau_2}$ محاسبات را انجام دهید .

$\omega\to\infty$

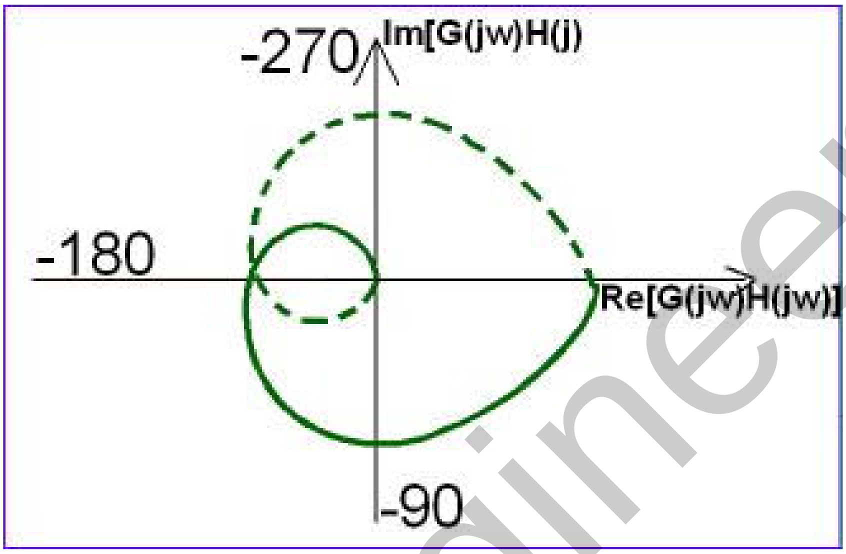
از ربع سوم وارد می شود .

$$G(j\infty)H(j\infty)=0\angle-\pi=-o-jo$$

توجه شود نگاشت در ∞ , $-\infty$ بهم می رسد . اما می تواند در غیر از نقطه مبدأ نیز بهم اتصال یابد .

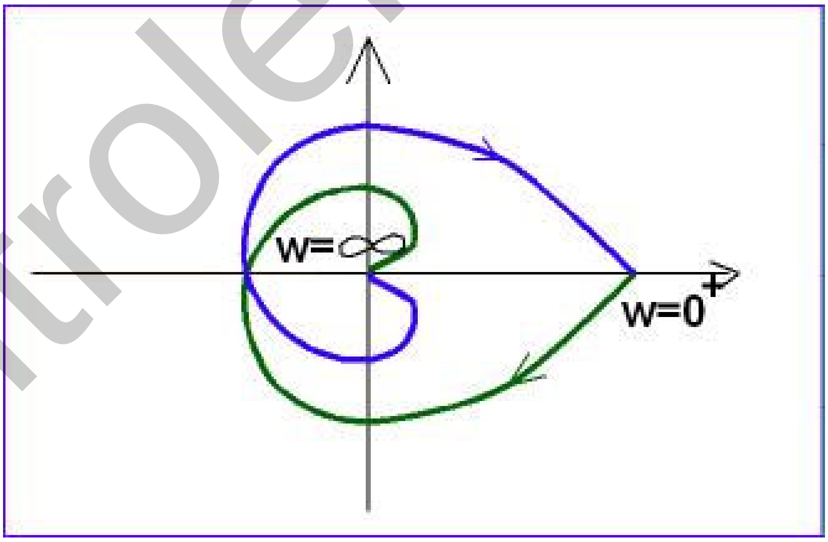
مثال :
$$G(s)=\frac{K}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)(1+\tau_3 s)}$$

چون سر قطب داریم پس $3\times\frac{\pi}{2}$ گردش کرده و وارد مبدأ می شود . جهت نیز چون زاویه قطب منفی و ساعتگرد است ، در شکل از راست به چپ زده شده است . (برای فرکانس های مثبت)

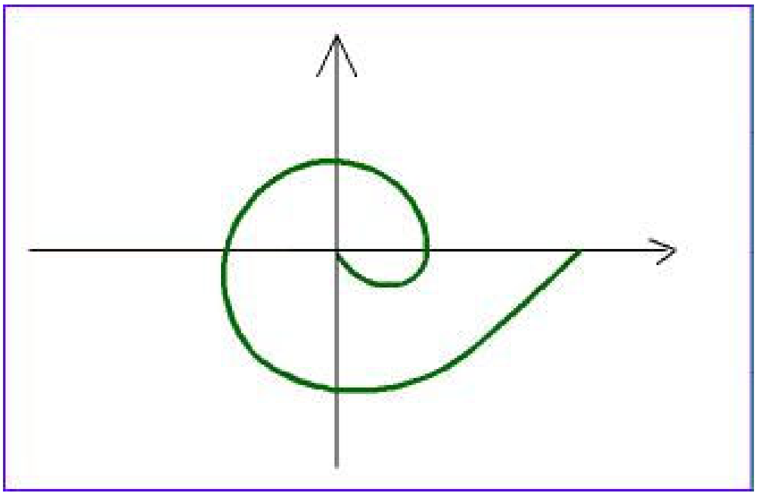


مثال :
$$G(s)=\frac{K}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)(1+\tau_3 s)(1+\tau_4 s)}$$

چرخش چهار ربع کامل است .



اثر قطب پایدار در نمودار نایکویست ، کاهش اندازه و کاهش فاز (حداکثر به اندازه $-\pi/2$ نسبت به موقعیت قبلی) خواهد بود .



« اثر صفر بر نمودار »

مثال :

$$G(s)=\frac{K(1+\tau\ s)}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)} \qquad H(s)=1$$

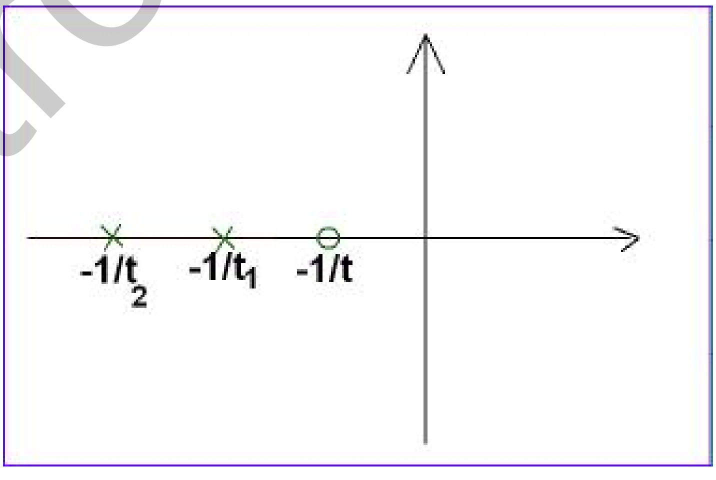
$$G(j\omega)H(j\omega)=G(j\omega)=\frac{K(1+j\tau\omega)}{(1+j\tau_1\omega)(1+j\tau_2\omega)}=\frac{K\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}{\sqrt{1+\tau_1{}^2\omega^2}\sqrt{1+\tau_2{}^2\omega^2}}$$

$$\angle Tg^{-1}\tau\omega-Tg^{-1}\tau_1\omega-Tg^{-1}\tau_2\omega$$

اثر صفر ، افزایش دامنه و افزایش فاز می باشد .

حالت اول :

$$\frac{1}{\tau}\prec\frac{1}{\tau_1}\prec\frac{1}{\tau_2}$$



ابتدا اثر صفر را می بینیم یعنی افزایش دامنه و افزایش فاز را در نظر می گیریم ، سپس قطبها تأثیر می گذارد .

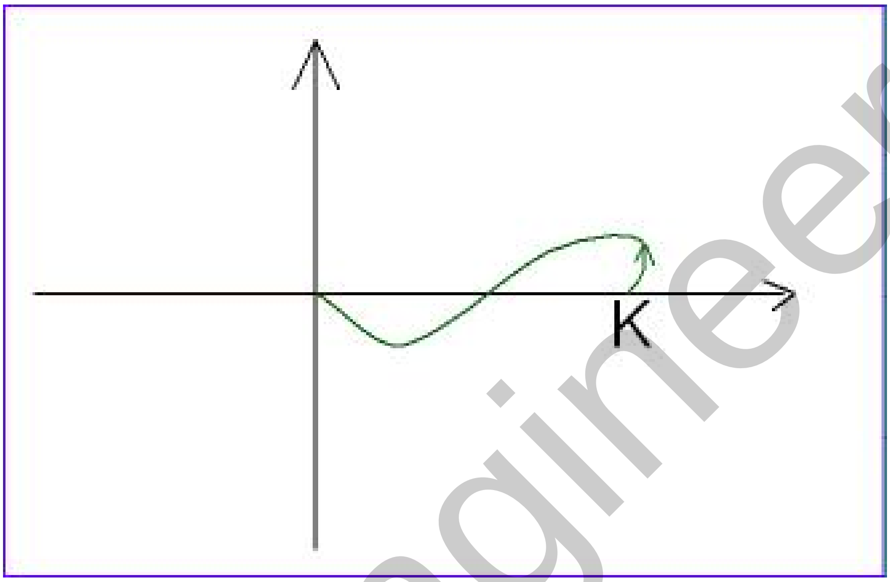
$\omega = 0$

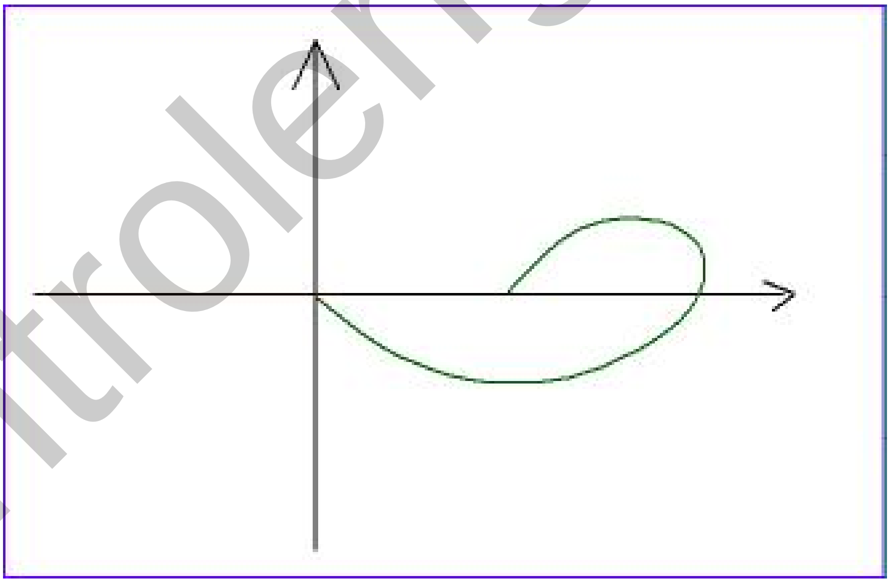
$$|G(j0)| = K \qquad , \qquad \angle G(j0) = 0$$

بازاویه $-\pi/2$ وارد مبدأ می گردد .

$\omega \to \infty$

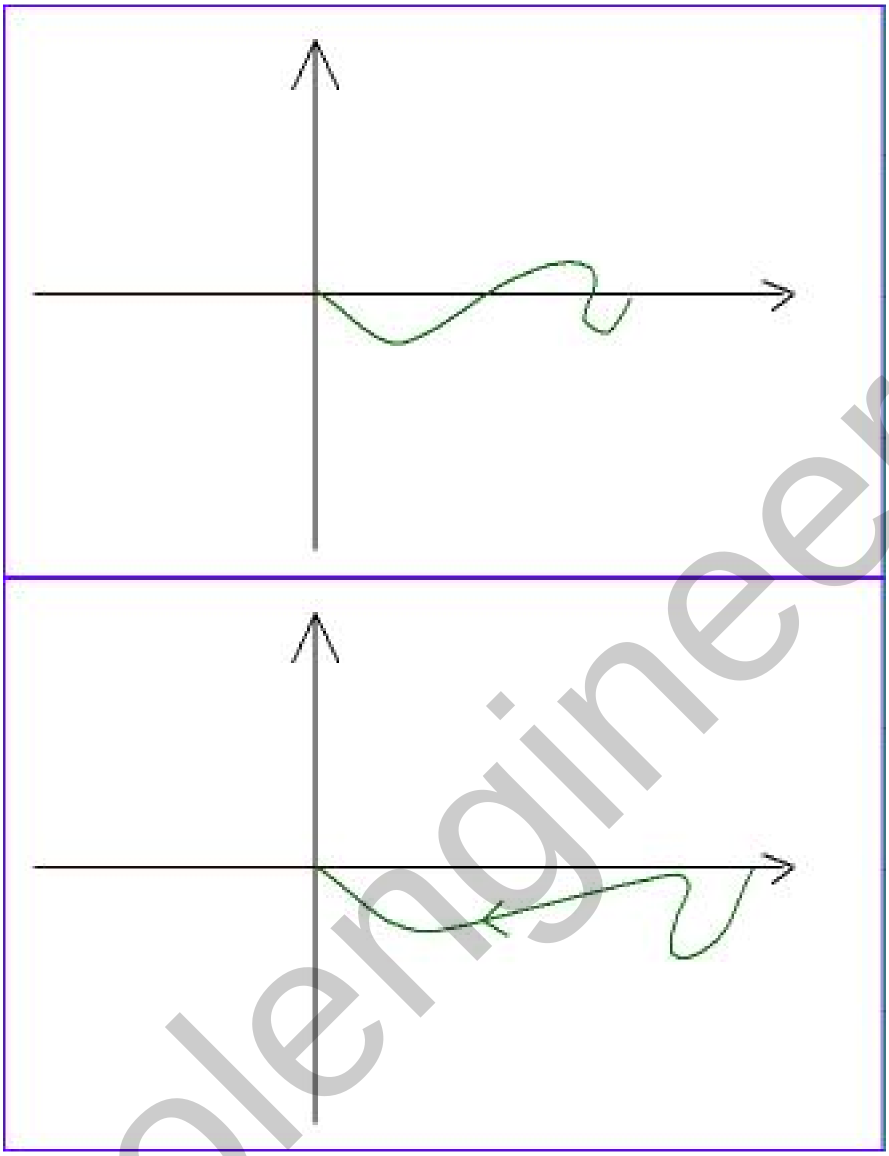
$$|G(j\infty)| = 0 \qquad , \qquad \angle G(j0) = \pi/2 - \pi/2 - \pi/2 = -\pi/2$$





حالت دوم : $\frac{1}{\tau_1} \prec \frac{1}{\tau} \prec \frac{1}{\tau_2}$

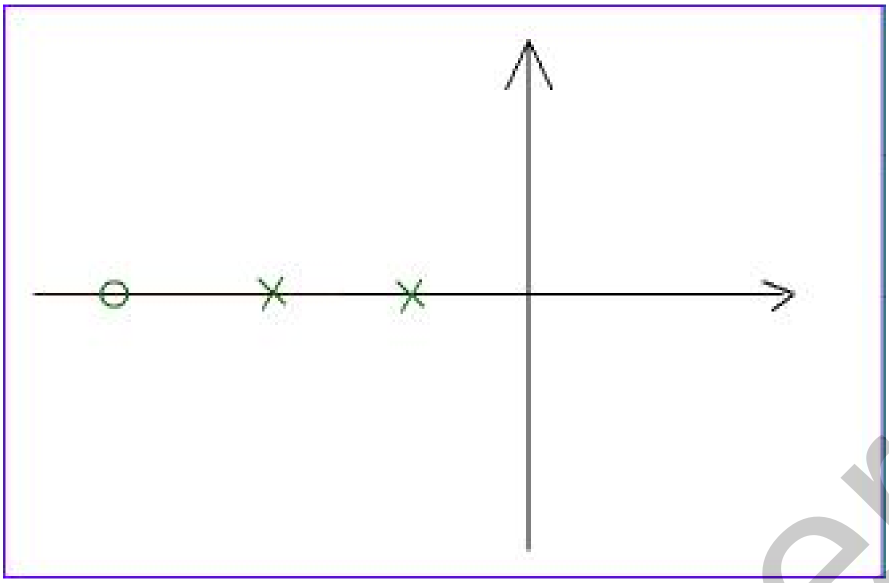
ابتدا کاهش دامنه و فاز را داریم :



در حوالی فرکانس صفر ، فاز پادساعتگرد می چرخد .

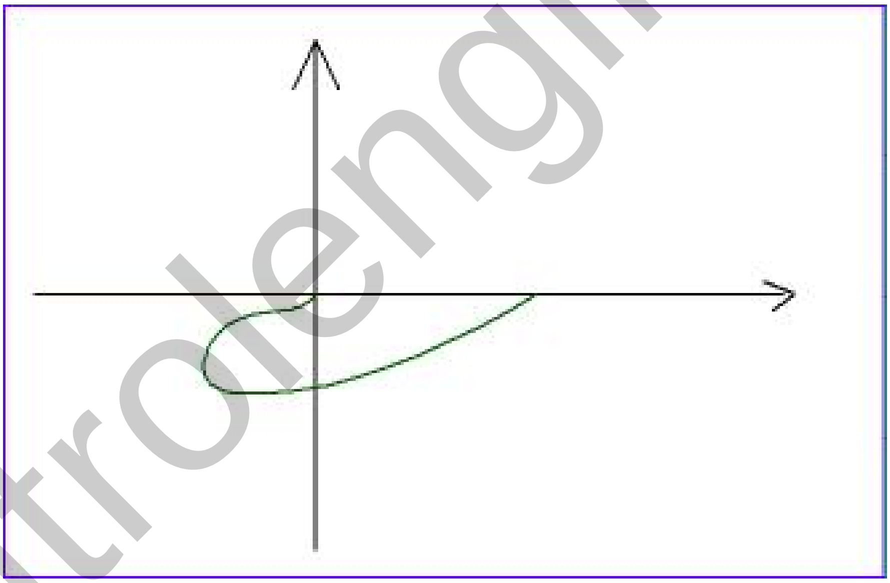
اگر صفرو قطب خیلی نزدیک باشند ، ممکن است نتوانیم اثر صفر را مشاهده کنیم . پس ، همیشه حداقل تعداد صفر و قطب ها را می بینیم .

حالت سوم : $\frac{1}{\tau_1} \prec \frac{1}{\tau_2} \prec \frac{1}{\tau}$



در اثر عملکرد در قطب ، $2\pi/2$ کاهش داریم . ضمنا صفر نهایتا اثر خود را می گذارد .

تعداد تغییر چرخش نمودار ، از ساعتگرد به پادساعتگرد ، حداقل تعداد صفر است .

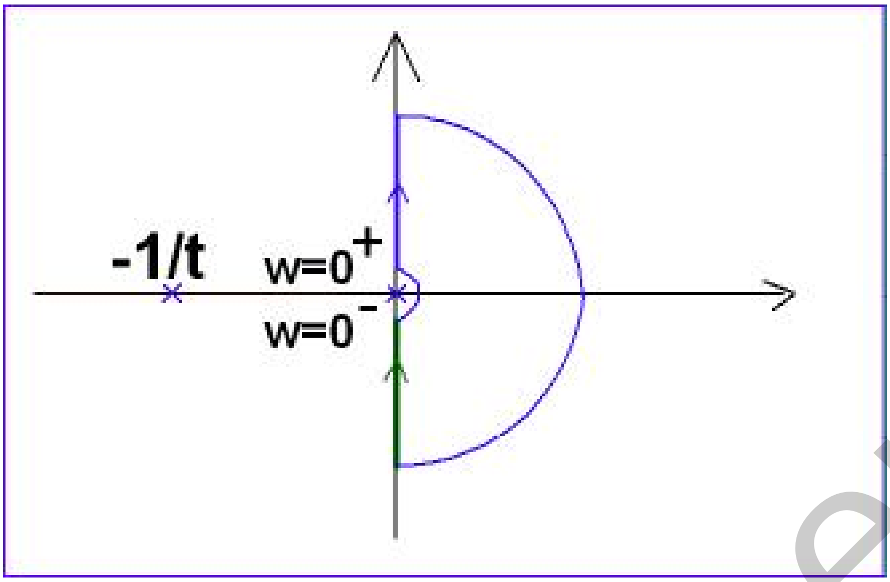


اثر نوع سیستم بر نمودار نایکویست :

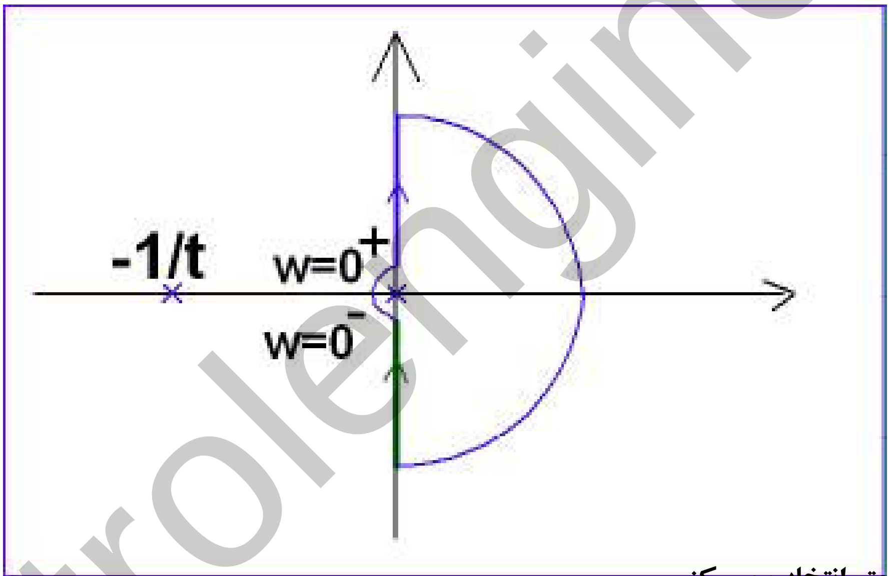
$$H(s) = 1 \qquad , \qquad G(s) = \frac{K}{S(1+\tau s)}$$

مثال :

$$G(j\omega)H(j\omega) = G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+j\tau\omega)}$$



منفی نایکویست باید از روی قطب رد نشود پس پل می زنیم (قطبها را دور می زنیم) و یا :



که این مسیر را کمتر انتخاب می کنیم .

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{K}{\omega\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}\angle 0-\pi/2-Tg^{-1}\tau\omega$$

اندازه در حال کاهش است .

چون اندازه ∞ شده ، مجانب لازم داریم .

$$\omega=0^+ \quad\Rightarrow\quad G(j0^+)=\infty\angle-\pi/2$$

$$\omega\to\infty \quad\Rightarrow\quad G(j\infty)=0\angle-\pi$$

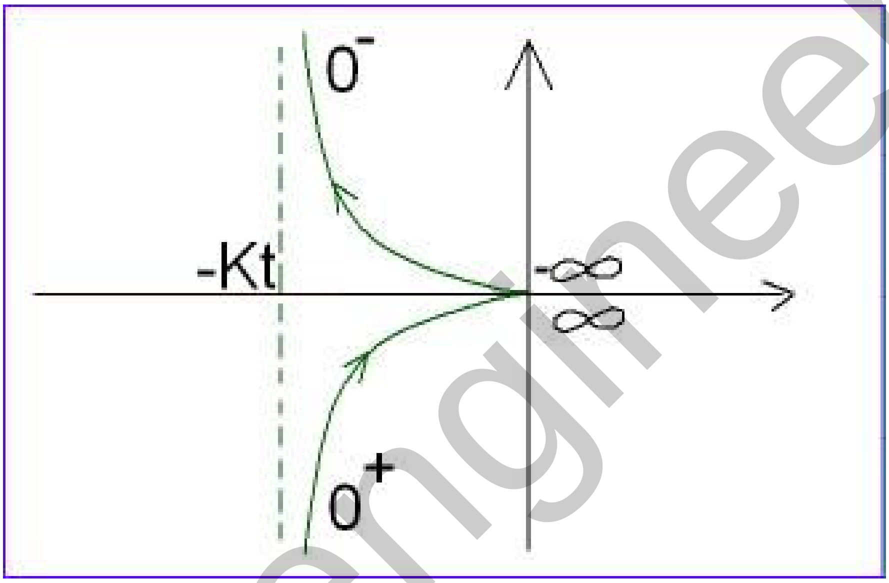
مجانب:

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{-K\left(\tau\omega^{2}+j\omega\right)}{\omega^{2}\left(1+\tau^{2}\omega^{2}\right)}$$

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{-K\tau}{1+\tau^{2}\omega^{2}}+j\frac{-K}{\omega\left(1+\tau^{2}\omega^{2}\right)}$$

پس

$$\omega=0^{+}\Rightarrow -K\tau-j\infty$$

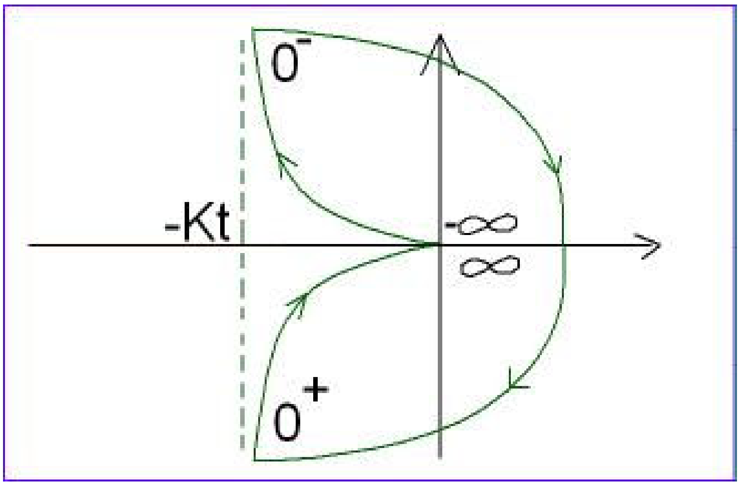


نگاشت C_1 **نیم دایره** C_1 :

$$G(s)=\frac{K}{S(1+\tau s)}$$

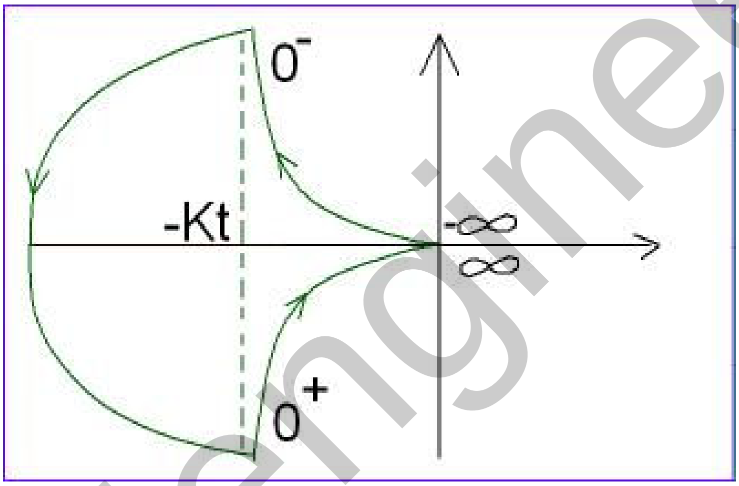
$$s=\varepsilon e^{j\theta}\Rightarrow G(s)=\frac{k}{\varepsilon e^{j\theta}\left(1+\tau\varepsilon e^{j\theta}\right)}\Rightarrow G\left(\varepsilon e^{j\theta}\right)=K/_{\varepsilon}\,e^{-j\theta}$$

نیم دایره ای به شعاع $R=\frac{K}{\varepsilon}\to\infty$**، از** $\theta=\frac{\pi}{2}$ **تا** $\theta=-\frac{\pi}{2}$ **در جهت خلاف** C_1 **و در جهت افزایش فرکانس**



اما برای $C_1^{'}$:

فقط جهت چرخش $C_1^{'}$ با C_1 تفاوت دارد.



نگاشت $C_1^{'}$:

$$G\left(\varepsilon e^{j\theta}\right)=K/_{\varepsilon}\, e^{-j\theta}$$

شعاع دایره بی نهایت است.

نمودار از $\left\{\theta=\frac{\pi}{2}, \omega=0^{-}\right.$ شروع و به $\left\{\theta=\frac{3\pi}{2}, \omega=0^{+}\right.$ ختم می گردد.

مثال ـ اگر نوع، 2 باشد.

$$G(s)=\frac{K}{S^2(1+\tau s)}, H(s)=1$$

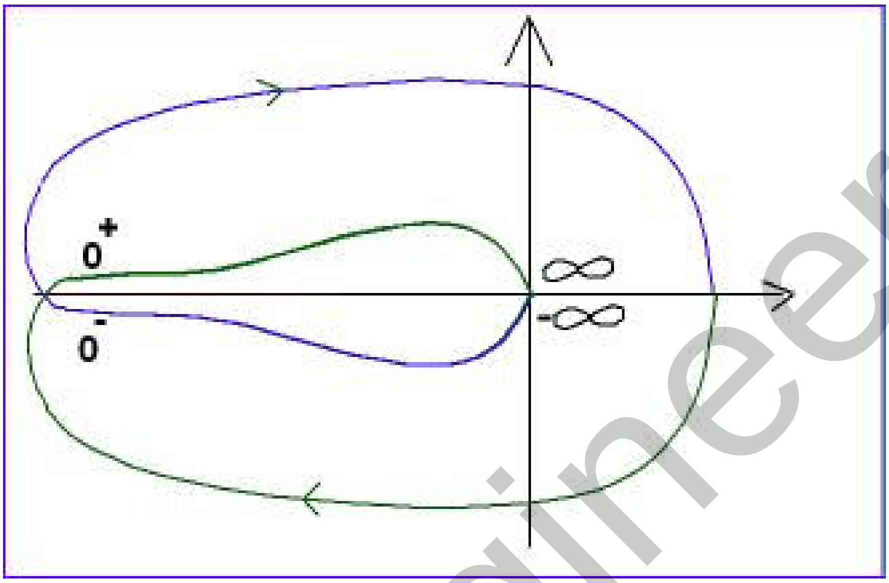
$$G(j\omega)=\frac{K}{(j\omega)^2(1+j\tau\omega)}$$

$$G(j\omega)=\frac{K}{\omega^2\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}\angle-\pi-Tg^{-1}\tau\omega$$

چون اندازه ∞ است، پس نیاز به مجانب داریم.

$$\omega = 0^+ \Rightarrow G\left(j0^+\right) = \infty\angle -\pi$$

$$\omega = \infty \Rightarrow G\left(j\infty\right) = 0\angle -\frac{3\pi}{2}$$



به ازاء فرکانس های کم، شروع از $-\pi$ **بوده با دامنه ∞، و به** $0\angle -\frac{3\pi}{2}$ **ختم می گردد.**

نگاشت

دایره C_1

$$C_1 : s = \varepsilon e^{j\theta}$$

$$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le +\frac{\pi}{2}$$

$$G\left(s\right) = \frac{\mathrm{K}}{\left(\varepsilon e^{j\theta}\right)^2\left(1 + \tau\varepsilon e^{j\theta}\right)} \approx \frac{\mathrm{K}}{\varepsilon^2} e^{-j2\theta}$$

شعاع $\frac{\mathrm{K}}{\varepsilon^2}$ **بدلیل کوچکی** ε**، به ∞ میل می کند. ضمناً زاویه** C_1 **برابر** θ **بود اما زاویه نگاشت** 2θ **بدست آمده است.**

مثال:

$$H(S)=1 \qquad G(s)=\frac{K}{S^{3}(1+\tau s)}$$

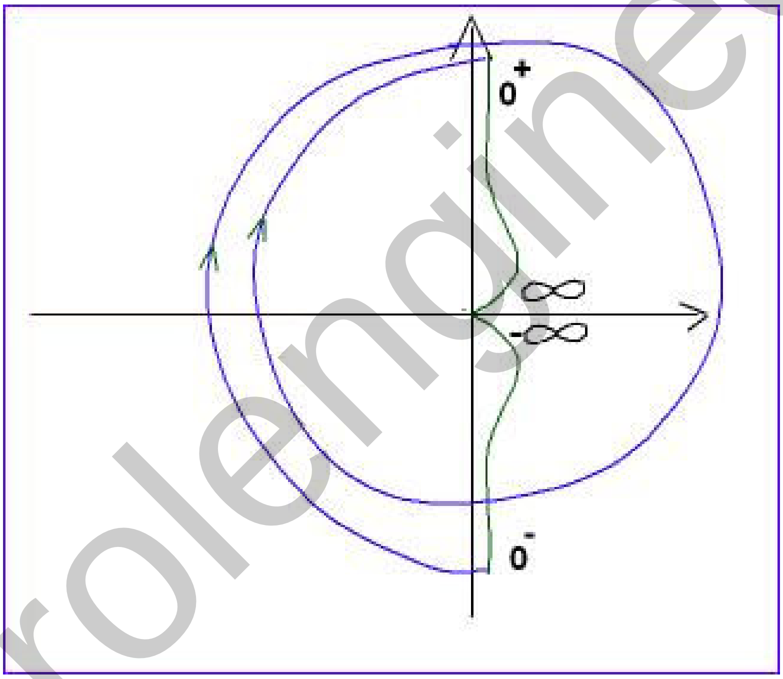
$$G(j\omega)=\frac{K}{(j\omega)^{3}(1+j\tau\omega)}$$

$$G(j\omega)=\frac{K}{\omega^{3}\sqrt{1+\tau^{2}\omega^{2}}}\angle-\frac{3\pi}{2}-Tg^{-1}\tau\omega$$

$$\omega=0^{+}\Rightarrow G(j0^{+})=\infty\angle-\frac{3\pi}{2}$$

$$\omega=\infty\Rightarrow G(j\infty)=0\angle-2\pi$$

مجانب نیاز داریم.



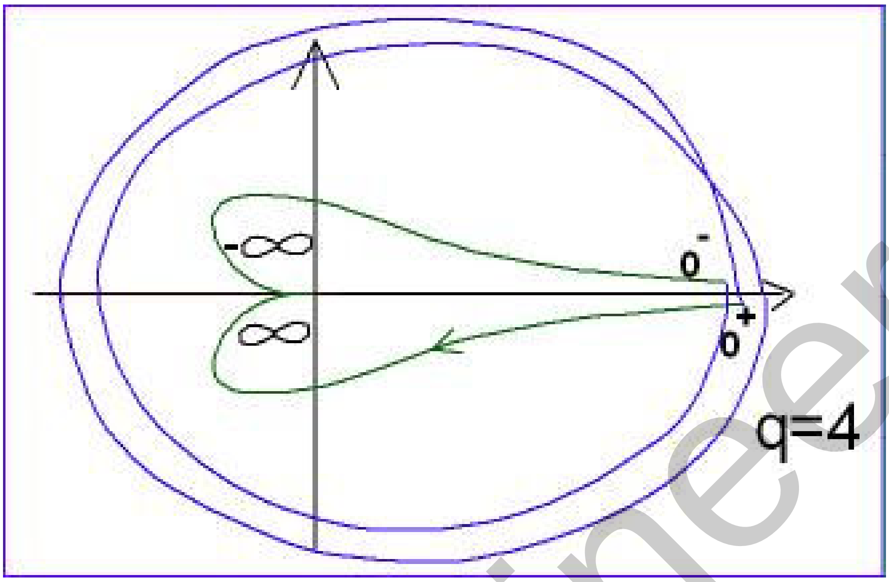
$$C_1: s=\varepsilon e^{j\theta}$$

$$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le+\frac{\pi}{2}$$

$$G(s)=\frac{K}{(\varepsilon e^{j\theta})^{3}(1+\tau\varepsilon e^{j\theta})}\approx\frac{K}{\varepsilon^{3}}e^{-j3\theta}$$

θ یک نیم دایره است پس 3θ، 3 نیم دایره است. توجه شود که جهت برخلاف دایره C_1 است.

$$G(s)=\frac{K}{s^4(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$$



تعداد دورها برابر **q** نیم دایره است که در جهت خلاف C_1 زده می شود.

$$G(j\omega)=\frac{K}{(j\omega)^4(1+j\tau_1\omega)(1+j\tau_2\omega)}\Rightarrow$$

$$G(j\omega)=\frac{K}{\omega^4\sqrt{1+\tau_1{}^2\omega^2}\sqrt{1+\tau_2{}^2\omega^2}}\angle-2\pi-Tg^{-1}\tau_1\omega-Tg^{-1}\tau_2\omega$$

شروع از **2π-** با دامنه **∞** است و آنگاه با زاویه **3π-** وارد مبدا می شویم : $\omega=0^+ : G(j0^+)=\infty\angle-2\pi$

$$\omega=\infty : G(j\infty)=0\angle-3\pi$$

نکات کلیدی نمودار نایکوئیست :

1 - اثر قطب پایدار به صورت کاهش دامنه و کاهش فاز (حداکثر $-\pi/2$) می باشد.

2 - اثر صفر پایدار (در سمت چپ محور $j\omega$) به صورت افزایش فاز (پادساعتگرد) و احتمالا افزایش دامنه خواهد بود.

3 - اثر نوع سیستم :

الف) نمودار از بی نهایت شروع می گردد.

ب) زاویه شروع نمودار بیانگر q است. $\angle G(j0^+)=q\times(-\pi/2)$ که q بدست آمده حداقل تعداد است.

رسم نمودار نایکوئیست

ج) برای کامل کردن نمودار از $\omega = 0^-$ به $\omega = 0^+$، q نیم دایره به شعاع بی نهایت و در خلاف جهت دایره C_1 (ویا C_1') رسم می کنیم.

این مرحله باید پس از رسم فرکانس های 0 و ∞ رسم گردد. (حتماً باید q ≠ 0)

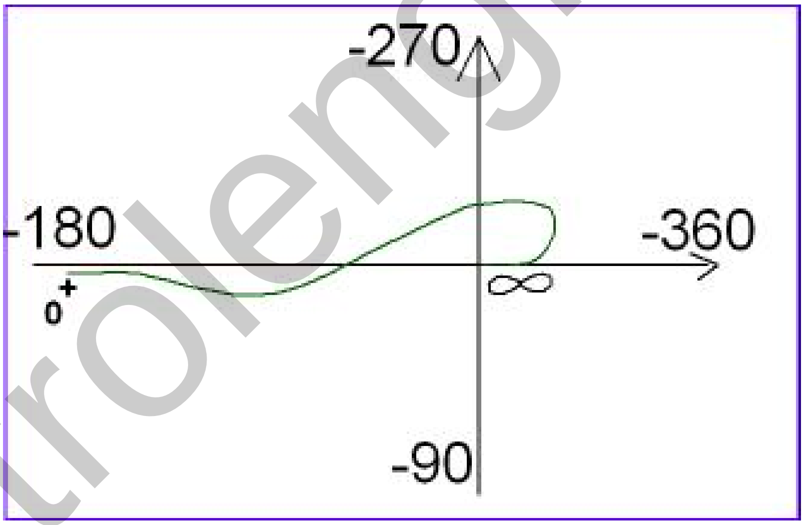
برای قطب ها و صفرهای سمت چپ محور $J\omega$:

$$\angle G(j+\infty) = n\left(-\pi/2\right) + m\left(\pi/2\right), \angle G(j\infty) = (n-m)\left(-\pi/2\right)$$

4 - تعداد صفرهای سیستم از روی تعداد تغییر جهت چرخش نمودار از ساعتگرد به پادساعتگرد بدست می آید.

<u>مثالی از امتحانات پایان ترم گذشته :</u>

نمودار نایکوئیست یک سیستم آمده است. حداقل نوع و مرتبه و تعداد صفرهای سیستم را بدست آورید.



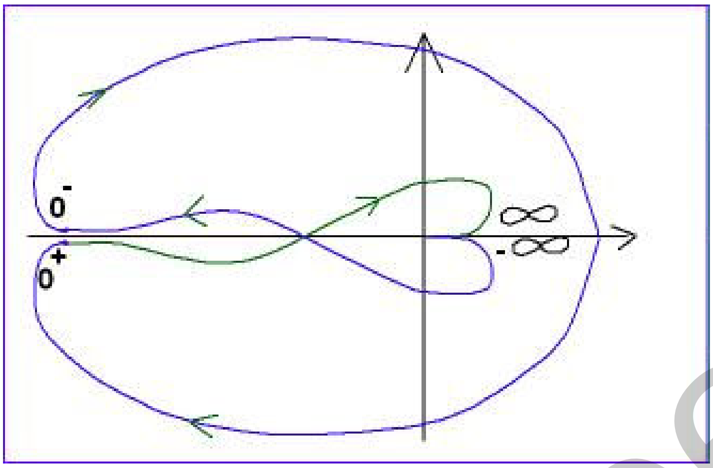
حداقل تعداد $\angle G(j0^+) = -\pi = q\left(-\pi/2\right) \Rightarrow q = 2$ **زاویه ی شروع**

حداقل تعداد
$$\begin{cases} \angle G(j\infty) = (n-m)\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -2\pi \Rightarrow n-m=4 \\ \angle G(j\infty) = -2\pi \end{cases}$$

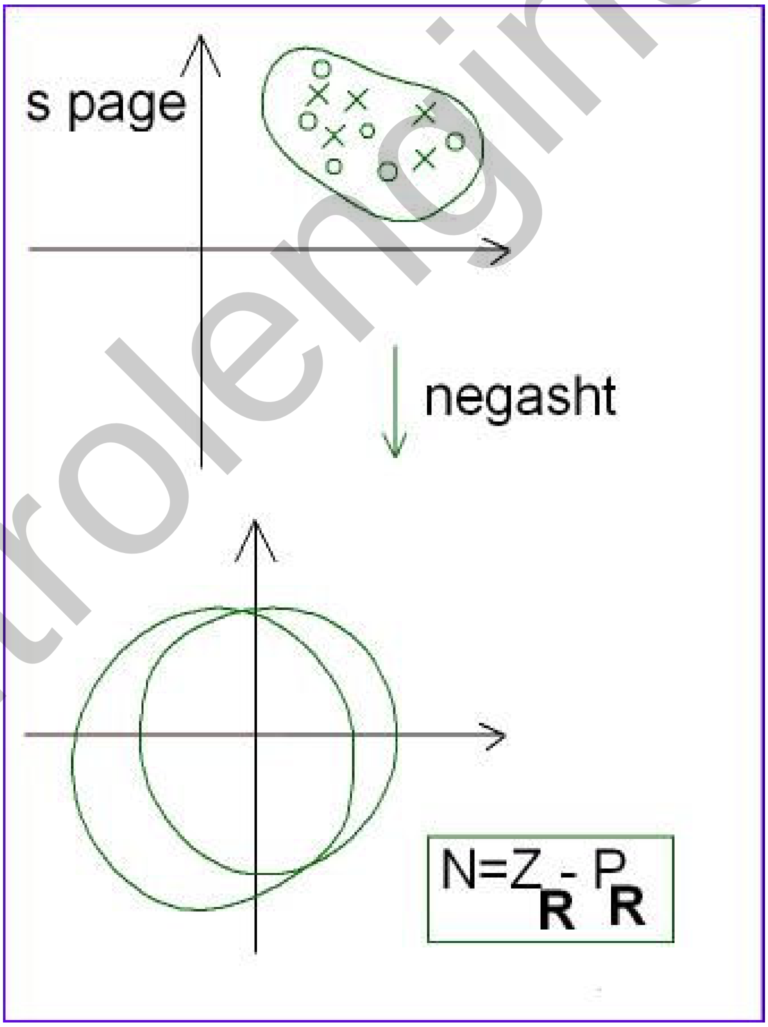
از مبدا حرکت کنیم، چهار ناحیه گردیده است تا به مبدا رسیده است.

از رشد فاز در ابتدای نمودار معلوم است که حداقل **m = 1** است .

تعداد حداقل $n-m=4 \Rightarrow n-1=4 \Rightarrow n=5$



معیار پایداری نایکوئیست :



P_R : تعداد قطب های F(s)

Z_R : تعداد صفرهای F(s)

داخل کانتور
(میر بسته)

F(s) که N تعداد دور زدن مبدا در خلاف جهت C است.

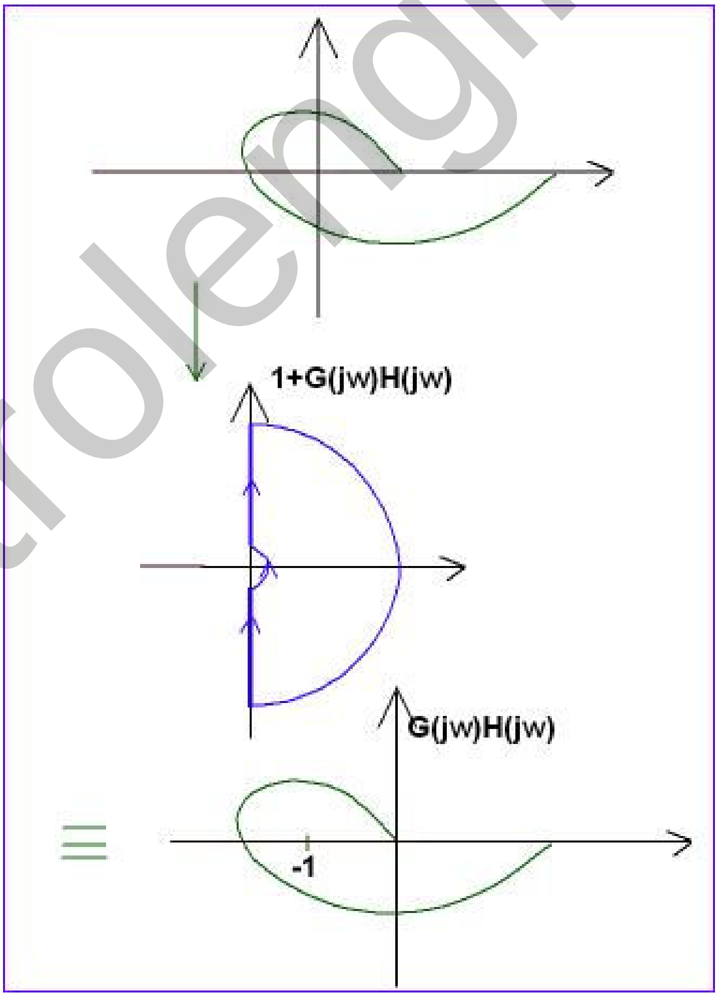
نایکوئیست :

$$F(s)=1+G(s)H(s)=1+\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{D(s)+N(s)}{D(s)}$$

$Z_R \xrightarrow{\text{تعداد}}$ صفرهای F(s) = قطب های سیستم حلقه بسته

$P_R \xrightarrow{\text{تعداد}}$ قطب های F(s) = قطب های G(s)H(s)

که در پایداری قطب های سیستم حلقه بسته اهمیت دارد یعنی : Z_R



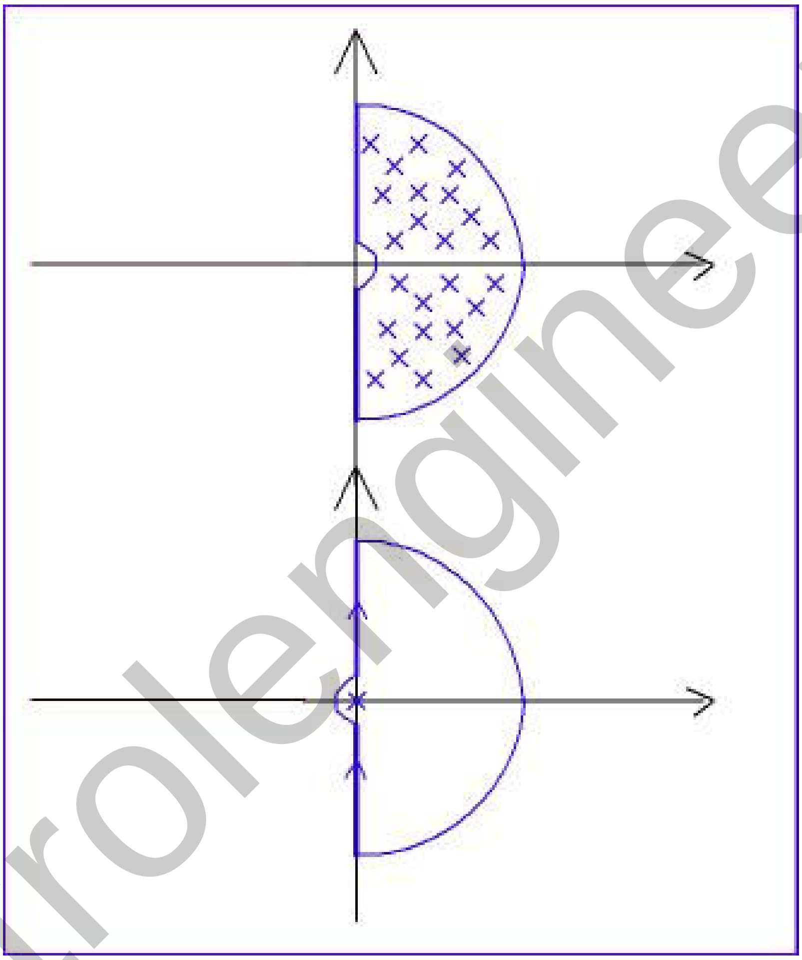
۱- مثلثاتی **N > 0**

در نمودار نایکوئیست چرخش حول $N=-1$

۲- خلاف مثلثاتی **N < 0**

$Z_2 =$ قطبهای حلقه بسته ناپایدار ← ریشه های ناپایدار $1+G(s)H(s)$

(داخل مسیر ناکویست) $P_R =$ قطبهای حلقه باز ناپایدار



قطبهایی که روی محور هستند را نیز ناپایدار در نظر می گیریم زیرا داخل کانتور هستند .

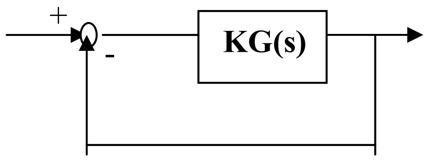
پس آنها را جزء P_R حساب می کنیم .

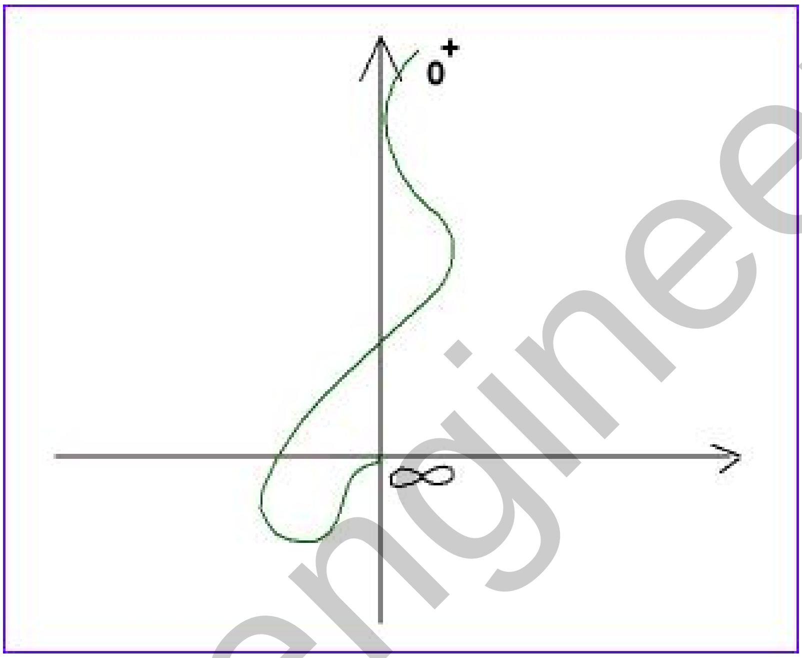
از پایان ترم ـ دیاگرام قطبی سیستمی، مینیمم فاز به ازاء $K = 1$ رسم شده است (تمام صفرها یا قطب ها یا روی محورند یا سمت چپ محور $j\omega$). مطلوبست :

الف) فرم کلی G(s)

ب) رسم نمودار کامل نایکوئیست

ج) بررسی پایداری برحسب k





از $-\frac{\pi}{2}$ مماس شده و داخل رفته است.

$$\angle G\left(j0^+\right) = -\frac{3\pi}{2}$$

$$q = 3$$

$$\angle G\left(j\infty\right) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow n - m = 1$$

نوع سیستم (q) جزء n ها است پس حتما $n \geq 3$ خواهد بود.

از مبدا حرکت کنیم می بینیم که $3\pi/2$ کامل چرخیده است و کمی جلوتر رفته اما برگشته است. در این برگشت $2\pi/2$ فقط در ربع های (دوم و سوم) می گردد و کمی هم در ربع اول دارد پس قطعا بیشتر $2\pi/2$ دارد یعنی $3\pi/2$ پس حداقل ۳ تا صفر را داریم ($m = 3$) است.

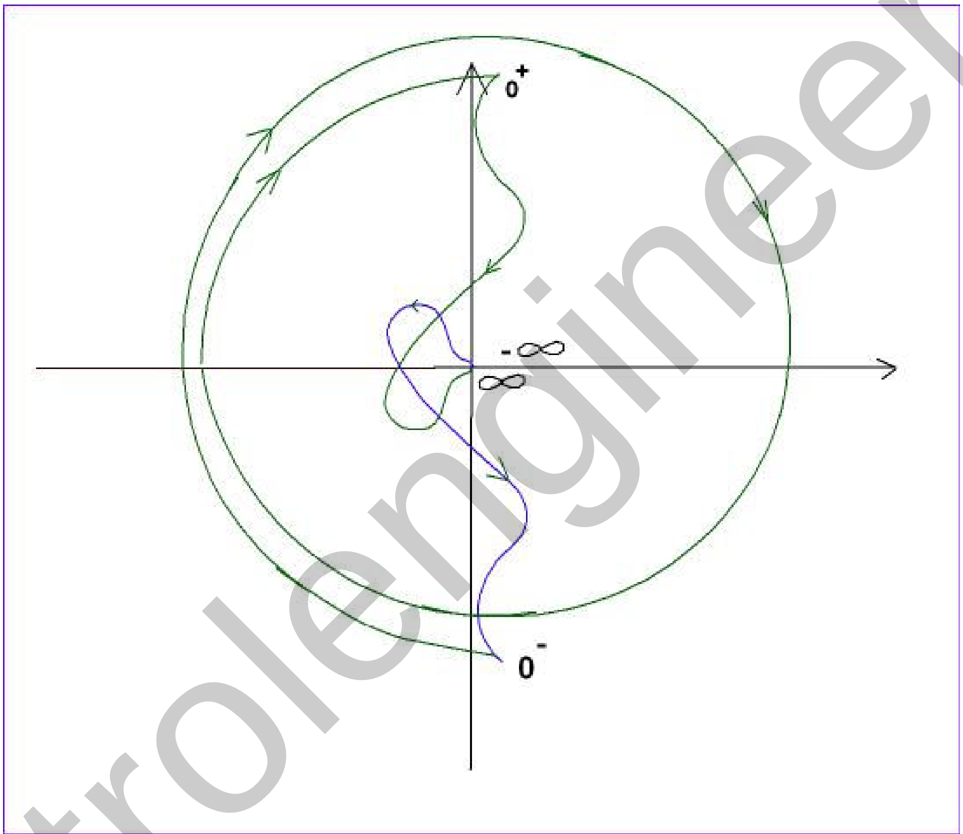
$$n - m = 1 \Rightarrow n - 3 = 1 \Rightarrow n = 4$$

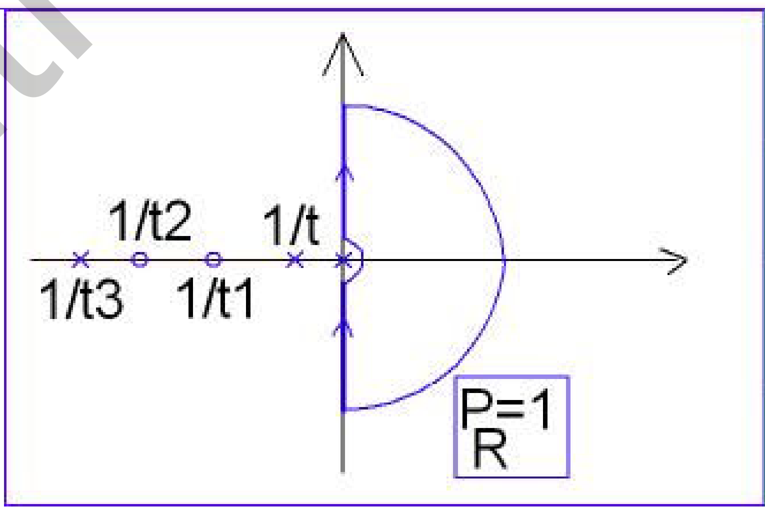
افزایش فاز در نمودار بیش از $2\pi/2$ است پس حداقل تعداد صفرهایش بیش از **2** تا است یعنی **m = 3**

تعداد صفر برابر **m = 3** است.

$$G(s)=\frac{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)(1+\tau_3 s)}{s^3(1+\tau s)^1}$$

و می توان نوشت $\frac{1}{\tau}\langle\frac{1}{\tau_1}\langle\frac{1}{\tau_2}\langle\frac{1}{\tau_3}$

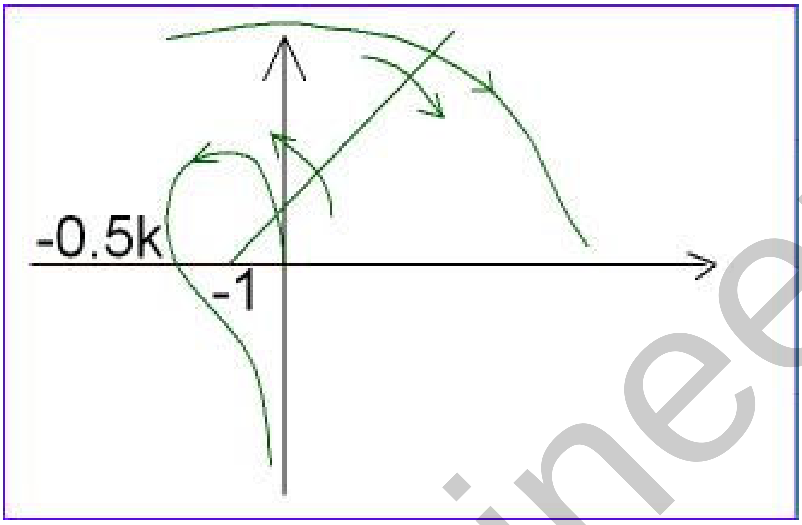




این مسئله برای $K = 1$ حل شده است. اگر $K \neq 1$ باشد تمام مقادیر روی محور در آن عدد ضرب می گردد.

نقطه ۱- می تواند قبل از -0.5 یا بعد از آن باشد (بستگی به K دارد)

A) اگر ۱- داخل باشد : اگر منفی یک (۱-) یک خط در جهت بیرون در مسیری که کمترین برخورد را پیدا کند رسم می کنیم.



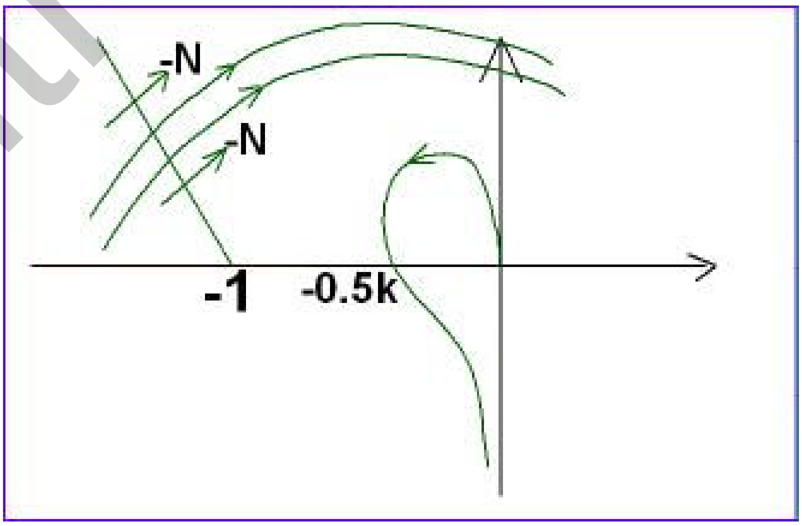
$$\left.\begin{array}{ll} N & \text{یکبار مثبت} \\ N & \text{یکبار منفی} \end{array}\right\} N=0$$

$$N = P_R - Z_R \Rightarrow 0 = 0 - Z_R \Rightarrow Z_R = 0$$

سیستم حلقه بسته قطب ناپایدار ندارد.

$$-0.5K < -1 \Rightarrow K > 2$$

B) اگر ۱- خارج باشد.



$N=-2$

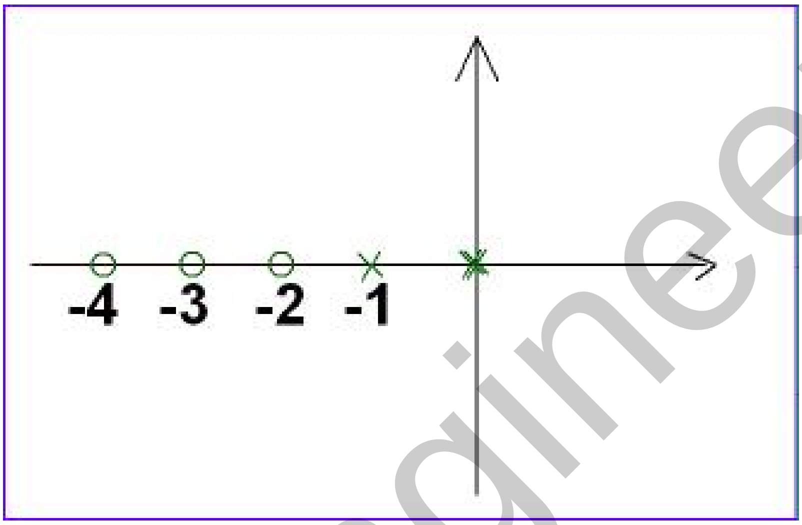
$P_R=0 \qquad N=P_R-Z_R \Rightarrow -2=0-Z_R \Rightarrow Z_R=2$

سیستم حلقه بسته، دو قطب ناپایدار دارد.

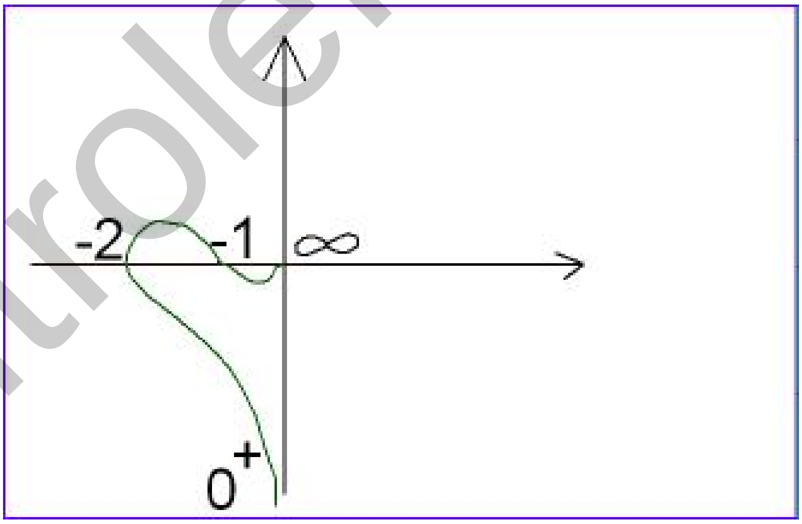
$$0 < K < 2 \Leftarrow -1 < -0.5K$$

....

تمرین : مکان ریشه سیستم فوق را رسم کنید.



تمرین : همانند مثال قبل عمل کنید: ؟



حاشیه فاز و حاشیه بهره :

شرایط ناپایداری :

$$1+G(S)H(S)=0 \Rightarrow S=\text{قطبها}$$

قطب سیستم

$$1+G(j\omega)H(j\omega)=0 \Rightarrow S=j\omega$$

سیستم نوسانی است مشروط بر آنکه سایر قطب ها سمت چپ محور $j\omega$ باشند.

$$1+G(j\omega)H(j\omega)=0 \Rightarrow G(j\omega)H(j\omega)=-1$$

در این حالت **شرایط نوسان**

$$\left.\begin{aligned}&|G(j\omega)\cdot H(j\omega)|=1\\&\angle G(j\omega)H(j\omega)=-\pi\end{aligned}\right\}$$

هر قدر شرایط، فاصله بیشتری از مرز نوسان داشته باشد، پایدارتر است.

می توان با ثابت کران اندازه و دامنه، حاشیه فاز را بدست آورد.

حاشیه بهره : فرض کنید به ازاء فرکانس $\omega=\omega_{CP}$ داشته باشیم

$$\left.\begin{aligned}&\angle G(j\omega_C)H(j\omega_C)=-\pi\\&|G(j\omega_C)H(j\omega_C)|=\alpha\end{aligned}\right\}$$

یک مقدار مشخص α و مقداری که باید در α ضرب شودتا حاصل یک گردد. $G\cdot H=\frac{1}{\alpha}\rightarrow$ حاشیه بهره اثر تاخیر در دامنه نیست بلکه کاملا در فاز است . که t_d زمان تاخیر است .

$$e^{-st_d}\rightarrow\left|e^{-st_d}\right|=1,\angle e^{-j\omega t_d}=-\omega t_d$$

در واقع حاشیه بهرهٔ حداقل تقویت بهره ای است که سیستم را به مرز نوسان می رساند. مثلا اگر 4 مقدار برای G.M بدست آوریم، مقدار کوچکتر مد نظر ما خواهد بود.

حاشیه فاز :

فرض کنید فرکانس $\omega = \omega_{CG}$ فرکانسی باشد که در آن :

$|G(j\omega_{CG})H(j\omega_{CG})| = 1$ می شود. و آنگاه اگر $\angle G(j\omega_{CG})H(j\omega_{CG}) = \beta$ باشد، آنگاه :

برحسب رادیان $\quad P\cdot M = \beta - (-\pi) = \pi + \beta \quad$ حاشیه فاز

و یا برحسب درجه $\quad P\cdot M = \beta - (-180) = 180 + \beta^{\circ}$

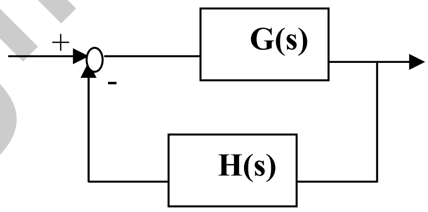
حاشیه فاز مناسب در کنترل حدود 60° و بالاتر است. یعنی $P\cdot M \geq 60^{\circ}$

حاشیه فاز سیستم، حداقل میزان فازی است که می توان در فرکانس ω_{CG}، از فاز سیستم کم کرد. اضافه کردن صفر به سیستم باعث افزایش فاز و در نتیجه پایداری بهتر سیستم می گردد.

سوال ۸۴،۶،۹:

K را طوری تعیین کنید که حاشیه فاز سیستم 45° باشد . $(P.M = 45^{\circ})$

$$G(s)H(s) = \frac{K}{S(S^2+3+1)}$$



مراحل حل : در هر مسئله حاشیه فاز بهره ، ابتدا باید :

$$S^2 + S + 1 \rightarrow (j\omega)^2 + (j\omega) + 1 = (1-\omega^2) + j(\omega)$$

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = \frac{K}{\omega\sqrt{(1-\omega^2)^2 + \omega^2}}$$

$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = -\pi/2 - Tg^{-1}\frac{\omega}{1-\omega^2}$$

$P.M$ از تعریف : حتماً $|G(j\omega_0)H(j\omega_0)| = 1$

$$P.M = \beta + \pi \Rightarrow 45^{\circ} = \beta + 180^{\circ} \Rightarrow \beta = -135^{\circ}$$

$$\angle G(j\omega_0)H(j\omega_0) = -135^{\circ}$$

$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = -\pi/2 - Tg^{-1}\frac{\omega}{1-\omega^2} = -90^\circ - Tg^{-1}\frac{\omega}{1-\omega^2} = -135^\circ$$

$$Tg^{-1}\frac{\omega}{1-\omega^2} = 45^\circ \Rightarrow \frac{\omega}{1-\omega^2} = 1 \Rightarrow 1-\omega^2-\omega = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2+\omega-1=0 \Rightarrow \omega = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \quad \begin{cases} \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

بدست آوردن k :

$$\frac{K}{\omega\sqrt{(1-\omega^2)^2+\omega^2}}$$

در رابطه فوق $\omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ قرار می دهیم تا k بدست آید .

اگر در جدول روث یک سطر صفر شد (نوسانی شد) و آنگاه k = 20 بدست آمد و به ما گفتند می خواهیم G .M = 5 باشد باید k جدید به صورت زیر محاسبه گردد .

$$K = \frac{k}{G.M}$$

حداکثر گینی که می توان به یک سیستم داد تا سیستم نوسانی نشده و پایدار باشد برابر G . M می باشد .