پلتفرم اختصاصی
مهندسی کنترل

https://controlengineers.ir

https://t.me/controlengineers

https://www.instagram.com/controlengineers.ir

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی مالک اشتر

مجتمع دانشگاهی برق و الکترونیک - گروه کنترل

جزوه درس کنترل بهینه

تهیه شده توسط:

دکتر ناصر رهبر

مهرماه ۱۳۸۸

عبارت زیر از دانشمند معروف لئونارد اویلر در باره مفهوم کمینه و بیشینه نقل شده است.

"Since the fabric of the universe is most perfect, and is the work of a most wise Creator, nothing whatsoever takes place in the universe in which some form of maximum and minimum does not appear".

Leonhard Euler (1707-1783)

از آنجائی که آفرینش جهان از نوع کاملترین و کار داناترین و خردمندترین خالق است.

هیچگونه اتفاقی در جهان رخ نمی‌دهد مگر اینکه شکلی از بیشینه و کمینه در آن آشکار گردد.

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

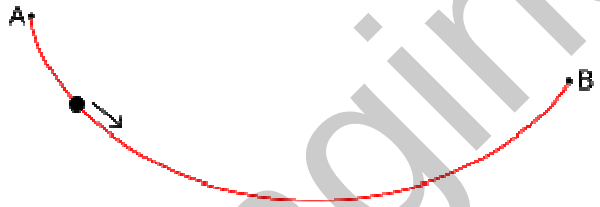
فصل اول: معرفی کنترل بهینه

۱-۱- مقدمه

تئوری کنترل بهینه که به مرور نقش مهمتری را در طرح سیستم‌های مدرن بازی میکند دارای هدفی بصورت حداکثر کردن بازیابی، حداقل کردن قیمت در عملکرد فرآیندهای فیزیکی، اجتماعی و یا اقتصادی می‌باشد.

مسئله براچیستوکرون[1] برای اولین بار در سال ۱۶۹۶ توسط جان برنولی مطرح شد که اولین گام برای گسترش حساب تغییرات به شمار می‌آید. او این مسئله را در مجله مشهور بنام آکتا ارودیشیوروم[2] این گونه مطرح کرد:

تصور کنید ذره ای ملزم است روی خمی که نقطه A را به نقطه پایین تر B وصل می کند، بدون اصطکاک بلغزد. اگر سقوط ذره در طول خم فقط تحت تاثیر گرانش صورت گیرد، این خم چگونه باید باشد تا مدت زمان لازم برای این سقوط، حداقل گردد؟



شکل ۱: هندسه نمایش داده شده جهت مسئله براچیستوکرون

جان برنولی بعد از طرح مسئله جواب آن را منتشر نکرد تا ریاضیدانان آن زمان به خصوص برادرش را برانگیزد تا که توان و مهارت خود را بیازمایند. ریاضیدانان متوجه شدند که مسئله کوتاهترین زمان ماهیتی متفاوت با مسئله‌های دیگر دارد. تا آن زمان در مسائلی که با استفاده از حساب دیفرانسیل حل می شد، کمیتی که قرار بود کمینه شود به یک یا چند متغیر عددی بستگی داشت ولی در این مسئله، کمیت مورد نظر، یعنی مدت زمان سقوط به کل خم وابسته است و این امر تفاوتی اساسی ایجاد می کرد که باعث می شد این مسئله فراتر از حیطه حساب دیفرانسیل یا هر روش دیگری که در آن زمان شناخته بود قرار گیرد.

جوابی که توسط جان برنولی ارائه شد یک سیکلوئید بین دو نقطه A و B است. فقط یک سیکلوئید بدون هیچ نقطه ماکزیمم است که اجازه حرکت از نقطه A به B می دهد سیکلوئید معکوس یک خم براچیستوکرون است.

1. Brachistochorne
2. Acta Eruditiorum

این خم به وزن ذره و یا استقامت پایدار گرانشی بستگی ندارد. این مسئله با ابزارهایی از حساب تغییرات حل می‌شود. توجه کنید که اگر ذره دارای سرعت داخلی در A باشد و یا اگر از اصطکاک صرفنظر نشود، خم کوتاه‌ترین زمان ممکن است با آنچه که شرح داده شد متفاوت باشد.

۱-۲- تشریح سیستم و برآورد عملکرد آن[1]

روش‌های متعارف(کلاسیک) طراحی سیستم‌های کنترل معمولاً روش‌های سعی و خطا می‌باشند که در آنها برای تعیین پارامترهای طراحی یک سیستم قابل قبول، روش‌های مختلف تحلیل بصورت تکرارپذیر[2] مورد استفاده قرار میگیرند نحوهٔ عملکرد قابل قبول سیستم معمولاً بر حسب مشخصه‌های زمانی نظیر زمان صعود[3]، زمان قرار[4]، حداکثر جهش[5] و یا بر حسب مشخصه‌های فرکانسی نظیر حد فاز و حد دامنه[6] و پهنای باند[7] بیان می‌شوند لیکن با این روش در مورد سیستم‌های با چند ورودی چند خروجی که نیازهای صنعتی امروز را برآورده می‌نمایند باید معیارها یا نحوهٔ عملکرد گوناگونی صادق باشند بعنوان مثال طراحی سیستم موقعیت یک فضاپیما که مصرف سوخت را نیز حداقل کند با استفاده از روشهای متعارف امکان پذیر نیست روش جدید و مستقیم طراحی چنین سیستم‌های پیچیده‌ای که با توسعه کامپیوترهای دیجیتال امکان‌پذیر شده است کنترل بهینه[8] نامیده می‌شود.

هدف سیستم کنترل بهینه، تعیین سیگنالهای کنترل بطوری است که در محدودیتها یا قیود فیزیکی صدق کرده و در ضمن نحوهٔ عملکرد یا معیار معینی را کمینه(حداقل) یا بیشینه(حداکثر) نماید[9].

---

1. Describing the System and Evaluating its Performance
2. Iterative
3. Rise Time
4. Settling Time
5. Peak Overshoot
6. Gaine & Phase Margin
7. Band Width
8. Optimal Control
9. The objective of optimal control theory is to detemine the control signals that will cause a process to satisfy the physical constraints and at the same time minimize(or maximize) some performance criterion.

بعداً تعریف ریاضی صحیح‌تری در مورد مسئله کنترل بهینه ارائه خواهد شد لیکن ابتدا موضوع تنظیم صورت مسئله با فرموله کردن آن مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۱-۳- تنظیم صورت مسئله[1]

جمله‌ای که می‌گوید تنظیم خوب صورت مسئله، نصف حل آن است بدون شک منظور مناسبی را دنبال می‌کند. تنظیم صورت هر مسئله کنترل بهینه احتیاج به موارد زیر دارد.

الف) توصیف ریاضی فرآیندی که می‌بایست تحت کنترل قرار گیرد.

ب) بیان قیود یا محدودیت‌های فیزیکی

ج) مشخص نمودن شاخص عملکرد

۱-۴- مدل ریاضی[2]

بخش مهمی از هر مسئله کنترلی، مدلسازی فرآیند آن می‌باشد. هدف بدست آوردن ساده‌ترین بیان ریاضی است که پاسخ سیستم فیزیکی را به تمام ورودی‌های مورد نظر بطور مناسب پیش‌بینی نماید. در اینجا بحث ما به سیستم‌هائی که با معادلات دیفرانسیل معمولی(برحسب متغیرهای حالت یا وضعیت) بیان می‌شوند محدود خواهد شد. بنابر این اگر:

$$x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$$

متغیرهای حالت[3] فرآیند در زمان t باشند و:

$$u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)$$

1. Problem Formulation
2. The Mathematical Model
3. State Variable

ورودی‌های کنترل[1] به فرآیند در زمان t باشند. آنگاه می‌توان سیستم را با n معادلهٔدیفرانسیل مرتبه اول بصورت زیر توصیف نمود:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= a_1(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t), t) \\
\dot{x}_2(t) &= a_2(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t), t) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n(t) &= a_n(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t), t)
\end{aligned}$$

اگر بردار حالت سیستم بصورت زیر در نظر گرفته شده و تعریف شود:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

و بردار ورودی کنترل را بصورت زیر تعریف گردد:

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

آنگاه معادلات حالت سیستم را می‌توان بصورت سادهٔ زیر نوشت:

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t)$$

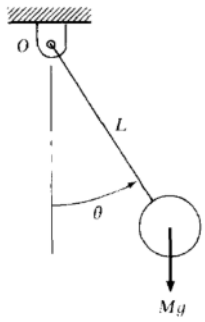
توجه شود که در حالت کلی $\dot{x}(t)$ تابع غیرخطی متغیر با زمان از حالتها، ورودی‌های کنترل و زمان می‌باشد.

مثال ۱: آونگ ساده با اصطکاک ویسکوز در لولا و مقاومت هوا

یک آونگ ساده با اصطکاک ویسکوز در لولا و مقاومت هوا در شکل(۲) در نظرگرفته شده است. معادله سیستم بصورت زیر است:

$$ML^2\ddot{\theta} + b\theta + MgL\sin\theta = 0$$

1. Control Input



شکل ۲: آونگ ساده با اصطکاک ویسکوز در لولا و مقاومت هوا

معادلهٔ دیفرانسیل فوق در فضای حالت به صورت زیر در می‌آید:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \theta \\
x_2 &= \dot{\theta} \\
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= \frac{-b}{ML^2} x_2 - \frac{g}{L} \sin x_1
\end{aligned}
$$

و نتیجه می‌شود:

$$\dot{x} = a(x_1, x_2) = a(x(t))$$

۱-۵- قیود یا محدودیت‌های فیزیکی[1]

پس از انتخاب مدل ریاضی سیستم باید محدودیتهای فیزیکی بر روی حالتها(وضعیتها) و کنترل‌ها را تعریف نمود:

تعریف ۱: سیگنال کنترلی که در تمام مدت $[t_0, t_f]$ در محدودیت‌های کنترل صدق نماید به کنترل قابل قبول یا مجاز[2] معروف می‌باشد.

1. Physical Constraints
2. Admissible Control

تعریف ۲: منحنی مسیر متغیر حالت(وضعیت) که در مدت زمان $[t_0, t_f]$ در محدودیت‌های متغیر حالت صدق نماید منحنی مسیر قابل قبول یا مجاز[1] نامیده می‌شود.

مجموعه قابل قبول یک مفهوم مهمی است زیرا مقادیری که متغیرهای حالت و یا کنترل‌ها می‌توانند بپذیرند را در محدودهٔ کوچکتری قرار می‌دهد و بجای درنظر گرفتن تمام متغیرهای حالت و کنترل‌ها و انتخاب بهترین حالت، فقط متغیرهای حالت و کنترل‌هائی در نظر گرفته می‌شوند که قابل قبول هستند.

۱-۶- ارزیابی عملکرد یا تابع معیار[2]

برای ارزیابی عملکرد یک سیستم بصورت کمی، طراح بایستی یک تابع معیار انتخاب نماید. در یک سیستم، کنترل بهینه کنترلی است که این تابع معیار را حداکثر یا حداقل نماید. تعیین این تابع معیار در برخی مسائل بسیار ساده و روشن بوده و در پاره‌ای دیگر انتخاب آن بسادگی ممکن نیست. بعنوان مثال انتقال سیستم از نقطهٔ A به نقطهٔ B با حداکثر سرعت ممکن، مشخص می‌کند که زمان عمل(که در اینجا تابع معیار است) باید حداقل شود. در مثال دیگر قرار دادن موقعیت و سرعت سیستم نزدیک صفر با صرف انرژی کنترلی کم، بلافاصله یک تابع معیار خاص را تعیین نمی‌کند. در چنین مسئله‌ای طراح ممکن است چندین تابع معیار را مورد بررسی قرار دهد تا اینکه بتواند عملکرد بهینه را بدست آورد. در ادامه نحوه انتخاب تابع معیار مورد بررسی بیشتر قرار می‌گیرد و فرض بر این است که عملکرد سیستم با تابع معیاری به شکل زیر سنجیده یا ارزشیابی گردد:

$$J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t)dt$$

که در آن t_0 و t_f به ترتیب زمان شروع و زمان نهائی بوده و g و h توابع اسکالر هستند. t_f ممکن است تعیین شده و یا آزاد[1] باشد و این به بستگی به بیان مسئله دارد. عبارت $h(x(t_f), t_f)$ برای اهمیت دادن به وضعیت نهائی انتخاب می‌شود.

1. Admissible Trajectory
2. The Performance Measure

شروع از شرایط اولیه $x(t_0)=x_0$ و اعمال سیگنال کنترل $u(t)$ برای $t\in[t_0,t_f]$ باعث می‌شود سیستم، منحنی مسیر حالتی را تعقیب کند. تابع معیار به هر منحنی مسیر سیستم یک عدد حقیقی نسبت می‌دهد. با مطالبی که تاکنون گفته شد اکنون ارائه بیان صریحی برای مسئله کنترل بهینه امکان پذیر است.

۱-۷- مسئله کنترل بهینه[2]

تئوری‌هائی که در فصول آینده بسط داده می‌شود برای حل مسئله زیر است:

مطلوبست یافتن کنترل مجاز u^* که باعث گردد سیستم

$$\dot{x}(t)=a(x(t),u(t),t)$$

مسیر مجاز x^* را تعقیب نموده و تابع معیار زیر را حداقل نماید:

$$J=h(x(t_f),t_f)+\int_{t_0}^{t_f} g(x(t),u(t),t)dt$$

u^* کنترل بهینه[3] و x^* یک مسیر بهینه[4] نامیده می‌شود. در اینجا توضیح چند نکته ضروری می‌باشد:

اولاً: ممکن است قبلاً از وجود کنترل بهینه اطلاعی نداشته باشیم بعبارت دیگر امکان دارد غیرممکن باشد که کنترلی بدست آید که: الف) قابل قبول باشد ب) باعث شود سیستم مسیر مطلوبی را تعقیب نماید. با توجه به مشکلات استفاده از قضایای وجود جواب[5]، اغلب پیداکردن کنترل بهینه ساده‌تر از اثبات وجود جواب خواهد بود.

ثانیاً: اگر کنترل بهینه‌ای وجود داشته باشد ممکن است جواب منحصر بفرد[6] نباشد. منحصر بفرد نبودن جواب باعث مشکل شدن روشهای محاسباتی شده لیکن اجازه می‌دهد که از بین چندین کنترل کننده، امکان

1. Free
2.The Optimal Control Problem
3. Optimal Control
4. Optimal Trajectory
5. Existance Theorems
6. Unique

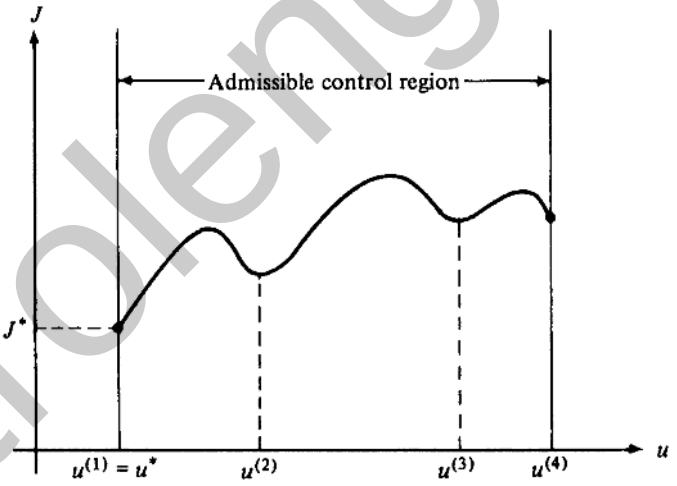
انتخاب میسر گردد. این امکان برای طراح مناسبتر است زیرا می‌تواند با در نظر گرفتن پارامترهای دیگر نظیر قیمت، اندازه و غیره که در تابع معیار در نظر گرفته نشده است انتخاب خود را کامل نماید.

ثالثاً: وقتی بیان می‌شود که u^* باعث حداقل شدن تابع معیار می‌شود منظور این است که برای تمام $x \in X$, $u \in U$ خواهیم داشت:

$$J^* = h(x^*(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x^*(t), u^*(t), t)dt$$
$$\leq h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t)dt$$

این رابطه بیان می کند که در کنترل بهینه، تابع معیار نسبت به هر کنترل قابل قبول دیگر و هر مسیر قابل قبول دیگر کمتر میشود. بنابراین دستیابی به یک حداقل مطلق[1] و نه حداقل محلی[2] مد نظر می‌باشد.

البته یک روش برای تعیین حداقل مطلق آن است که حداقل‌های محلی را پیدا کرده و سپس از بین آنها موردی که کوچکترین مقدار تابع معیار را نتیجه می‌دهد انتخاب گردد.



شکل ۳: نمایشی از مسئله بهینه‌یابی

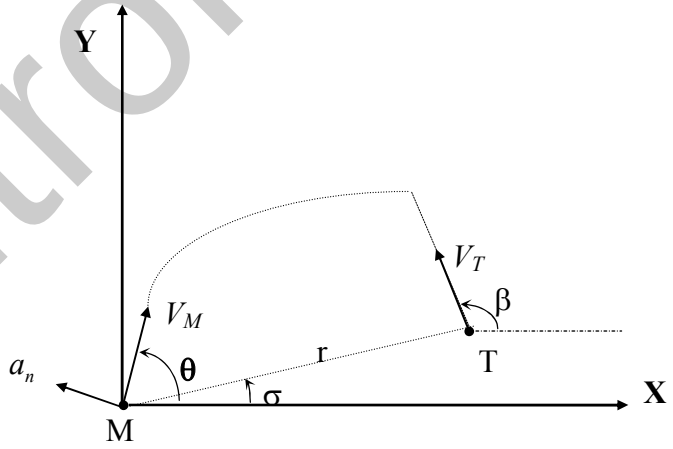
1. Absolute or Global Minimum
2. Local Minimum

در اینجا مفید است که به مثال زیر که جهت توضیح بیشتر مطلب فوق ارائه شده است توجه شود. در شکل(۳) منحنی J بر حسب u ترسیم شده است و دارای چندین حداقل در $u^{(1)},u^{(2)},u^{(3)},u^{(4)}$ می‌باشد و حداقل مطلق همان $u^{(1)}$ خواهد بود.

نهایتاً بایستی توجه نمود که اگر بجای کمینه(حداقل) نمودن تابع معیار، بخواهیم آنرا بیشینه(حداکثر) نماییم این مطلب احتیاج به قضایای خاصی ندارد زیرا حداکثر هر تابع و حداقل منفی همان تابع یکی خواهد بود و لذا در ادامه بدون از دست دادن جامعیت، کمینه نمودن تابع معیار بیان خواهد شد.

۱-۸- کنترل بهینه در مسئله تعقیب صفحه‌ای[1]

هندسهٔ استفاده شده در مسئله تعقیب صفحه‌ای در شکل(٤) نمایش داده شده است مختصات **XY** نشانگر یک مرجع اینرسی است. اندازهٔ سرعت موشک ثابت بوده و با زاویه اولیهٔ θ_0[2] نسبت به محور **X** شلیک می شود. جهت سرعت $\theta(t)$ به وسیلهٔ شتاب $a_n(t)$ که عمود بر جهت سرعت است تغییر می کند. هدف بدون شتاب بوده و لذا اندازهٔ سرعت و زاویهٔ آن در طول مسیر ثابت باقی می‌ماند. با فرض $x = x_T - x_M$, $y = y_T - y_M$ معادلات حرکت در صفحه (معادلات حالت) عبارتند از:



شکل ٤ : هندسهٔ موشک و هدف در تعقیب صفحه‌ای

1. Optimal Control in Planar Pursuit
2. Off-Boresight Angle

(معادلات غیرخطی حالت)

$$\dot{x} = V_T \cos\beta - V_M \cos\theta$$

$$\dot{y} = V_T \sin\beta - V_M \sin\theta$$

$$\dot{\theta} = \frac{a_n}{V_M}$$

شرایط اولیه عبارتند از:

$$t_0 = 0\,,\ \theta(t_0) = \theta_0\,,\ x_T(t_0) = X_0\,,\ y_T(t_0) = Y_0\,,\ x_M(t_0) = 0\,,\ y_M(t_0) = 0$$

اصابت در زمان انتهائی t_f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x(t_f) = 0\,, y(t_f) = 0$$

تابع معیار به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} a_n^2 dt$$

تابع معیار شامل انتگرال مجذور شتاب(فرمان کنترل) می‌باشد که بایستی حداقل گردد.

۱-۹- شکل کنترل بهینه[1]

تعریف ۳: اگر یک رابطهٔ تابعی[2] از فرم:

$$u^*(t) = f(x(t), t)$$

بتواند برای کنترل بهینه در زمان t بدست آید و آنگاه تابع f قانون کنترل بهینه[3] یا سیاست بهینه[4] نامیده می شود.

توجه شود که معادلهٔ اخیر ایجاب می کند که f قانونی[5] باشد که کنترل بهینه را در زمان t به ازاء هر مقدار وضعیت قابل قبول در زمان t تعیین کند. بعنوان مثال اگر داشته باشیم:

$$u^*(t) = \mathrm{F}x(t)$$

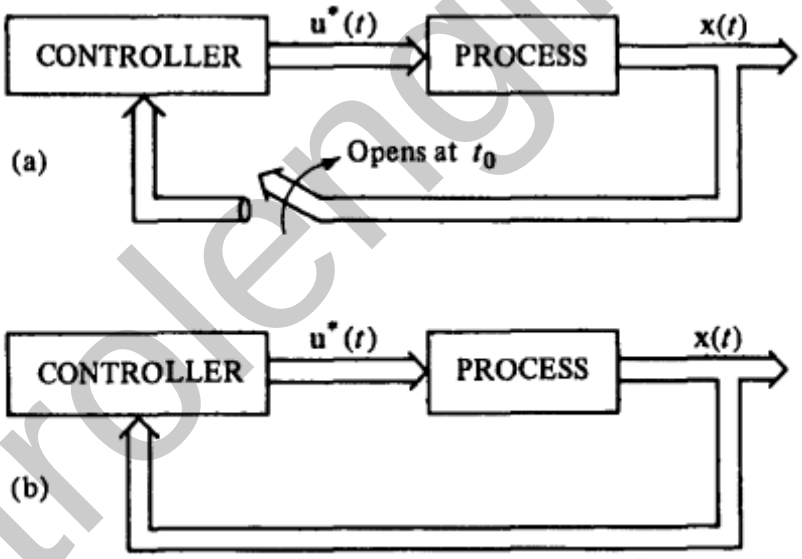
1. Form of Optimal Control
2. Functional Relationship
3. Optimal Control Law
4. Optimal Policy
5. Rule

که در آن F یک ماتریس $m \times n$ از ثابتهای حقیقی باشد گفته می شود که قانون کنترل بهینه قانونی خطی، غیرمتغیر با زمان و بصورت فیدبک از حالت‌ها می‌باشد.

تعریف ۴: اگر کنترل بهینه بصورت تابعی از زمان برای وضعیت اولیه مشخص شده‌ای تعیین شود یعنی:

$$u^*(t) = \mathrm{e}(x(t_0), t)$$

در این حالت کنترل بهینه به شکل حلقه‌باز[1] نامیده می‌شود. بنابر این کنترل بهینه حلقه‌باز یا مدارباز برای وضعیت اولیهٔ خاصی بهینه است. در حالی که اگر قانون کنترل مشخص بوده باشد از هر وضعیتی که شروع گردد کنترل بهینه‌ای می‌تواند تولید شود. تصور تفاوت کنترل بهینه[2] حلقه‌باز و قانون کنترل بهینه(حلقه‌بسته)[3] برای درک بهتر آنها مناسب بوده و این مقایسه در شکل(۵) نشان داده شده است. توجه شود که بطور کلی صرف وجود ارتباط بین حالت‌ها و کنترل تضمین کنندهٔ تولید قانون کنترل بهینه[4] نمی‌باشد.



شکل ۵: a) کنترل بهینه حلقه‌باز b) قانون کنترل بهینه

گر چه مهندسین بیشتر علاقه‌مند به کنترل بهینه حلقه‌بسته یا مدار بسته می‌باشند لیکن مواردی پیش می‌آید که کنترل بهینه حلقه‌باز مانند رادارهای تعقیب کنندهٔ یک قمر مصنوعی، عملی‌تر است. زیرا وقتی که قمر مصنوعی

1. Open Loop
2. Open Loop Optimal Control
3. Optimal Control Law
4. The terms optimal feedback control, closed-loop optimal control, and optimal control strategy are also often used.

در مدار خاصی قرار گرفت کمتر چیزی می تواند باعث تغییر آن شود. پس رادار می تواند طبق برنامه از پیش تعیین شده‌ای عمل نماید.

یک مثال نمونه از کنترل فیدبک دار را می توان مسئله سروومکانیزم نام برد که در آنجا خروجی های واقعی و مطلوب مقایسه شده و هر انحرافی باعث تولید یک سیگنال کنترل می گردد و سعی می کند که اختلاف را به صفر برساند.

۱-۱۰- نمایش سیستم با متغیرهای حالت[1]

نقطهٔ شروع بررسی سیستم کنترل بهینه، مدل ریاضی آن بصورت متغیرهای حالت می‌باشد. در اینجا نتایجی را که باید در بحث‌های آتی مورد استفاده قرار گیرد خلاصه و جمع‌بندی خواهد شد.

۱-۱۰-۱- چرا از متغیرهای حالت استفاده می‌شود[2]

داشتن مدل ریاضی سیستم در فضای حالت(بصورت متغیرهای حالت) بدلائل زیر مناسب است:

الف) دیدگاه فضای حالت را می توان به سیستم های چند ورودی-چند خروجی اعمال کرد در حالی که در سیستم‌های خطی که در حوزهٔ لاپلاس بررسی می‌شوند روش لاپلاس فقط برای سیستم‌های یک ورودی-یک خروجی استفاده می‌شود.

ب) دیدگاه فضای حالت برای سیستم‌های خطی و غیر خطی کاربرد دارد در صورتی که تحلیل در حوزهٔ لاپلاس فقط برای سیستم‌های خطی کاربرد دارد. بعبارت دیگر متغیر حالت چارچوب واحدی برای مطالعه سیستم‌های خطی و غیرخطی ایجاد می‌نماید.

1. State Variable Representation of Systems
2. Why Use State Variables?

ج) در دیدگاه فضای حالت نیاز به تبدیل لاپلاس نیست و از حوزهٔ زمان برای بررسی سیستم استفاده می‌شود. در حالی که در روش لاپلاس از حوزهٔ فرکانس برای بررسی سیستم استفاده می‌کند.

د) دیدگاه فضای حالت برای سیستم‌های متغیر با زمان کاربرد دارد در صورتی که روش لاپلاس فقط برای سیستم‌های غیر متغیر با زمان قابل استفاده است.

ه) حل معادلات دیفرانسیلی که بصورت متغیرهای حالت بیان شوند از طریق آنالوگ یا دیجیتال ایده‌آل می‌باشند. بعبارت دیگر در روش فضای حالت می‌توان معادلات حالت را به معادلات مرتبه اول تبدیل نمود و برای محاسبات عددی و استفاده از کامپیوتر و Matlab سهولت زیادی ایجاد می‌شود.

و) مفهوم حالت دارای یک انگیزهٔ فیزیکی قوی می‌باشد.

۱-۱۰-۲- تعریف حالت یک سیستم[1]

هنگامی که به حالت سیستم اشاره می‌شود تعریف زیر را خواهیم داشت:

تعریف ۵: حالت سیستم، مجموعهٔ مقادیر $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ می‌باشد که اگر در لحظهٔ $t = t_0$ این مقادیر معین باشند و برای $t \geq t_0$ ورودی‌های سیستم معلوم باشند در هر لحظه دیگر $t \geq t_0$ این مجموعه مشخص باشد.

۱-۱۰-۳- دسته‌بندی سیستم‌ها[2]

سیستم‌ها را با جملاتی نظیر خطی[3]، غیرخطی[4]، غیرمتغیر با زمان[5] و متغیر با زمان[1] مشخص می‌نمایند. در ادامه سیستم‌ها برمبنای معادلات حالت آنها دسته‌بندی خواهند شد. بعنوان مثال اگر سیستمی غیرخطی و متغیر با زمان باشد معادلات حالت آنها بصورت زیر خواهد بود:

1. Definition of State of A System
2. System Classification
3. Linear
4. Nonlinear
5. Time Invariant

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t) \text{ (Non Linear \& Time-Varing)}$$

سیستم‌های غیرخطی و غیرمتغیر با زمان توسط معادلات حالت به شکل زیر نشان داده می‌شوند:

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t)) \text{ (Nonlinear, Time-Invariant)}$$

اگر سیستم خطی و متغیر با زمان باشد معادلات حالت آن بصورت زیر است:

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}(t)(x(t) + \mathbf{B}(t)u(t) \text{ (Linear, Time-Varing)}$$

که در آن $\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t)$ ماتریس های $n \times n$ و $n \times m$ با عناصر متغیر با زمان می باشند. معادلات حالت سیستم خطی غیرمتغیر با زمان دارای شکل زیر است:

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) \text{ (Linear, Time-Invariant)}$$

که در آن A و B ماتریس‌های ثابت هستند.

لازم به توضیح است که مجموعه متغیرهای حالت برای یک سیستم یکتا نیست. به شرط اینکه P ماتریس غیرتکین باشد اگر x بردار حالت باشد $\hat{x}$ زیر هم یک بردار حالت است:

$$\hat{x} = \mathbf{P}x$$

مجموعه های متفاوت متغیر حالت همگی اطلاعات یکسانی از رفتار سیستم دارند. نمونه هائی از اشکال متعارف نمایش فضای حالت را می توان به شکل متعارف کنترل پذیر، شکل متعارف قطری و شکل متعارف جردن اشاره نمود.

۱-۱۰-٤- معادلات خروجی[2]

کمیت های فیزیکی که بتواند اندازه گیری شوند خروجی[3] نامیده شده و بصورت $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_q(t)$ نشان داده می‌شوند. اگر خروجی‌ها توابعی غیرخطی، متغیر با زمان از حالت‌ها و کنترل‌ها باشند معادلات خروجی بصورت زیر نوشته می‌شود:

1. Time Varing
2. Output Equatins
3. Output

$$y(t) = c(x(t), u(t), t)$$

اگر خروجی به حالت‌ها و کنترل‌ها با روابط خطی و غیر متغیر با زمان بستگی داشته باشد آنگاه:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

که در آن C و D ماتریسهای ثابت $q \times n$ و $q \times m$ می باشند. در مبحث تئوری کنترل بهینه جهت سهولت فرض می‌شود که خروجی‌ها همگی برای اندازه‌گیری در دسترس باشند یعنی:

$$y(t) = x(t)$$

۱-۱۰-۵- حل معادلات حالت در سیستم‌های خطی[1]

در سیستم‌های خطی معادلات حالت بصورت زیر در می‌آیند:

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}(t)x(t) + \mathbf{B}(t)u(t)$$

حل معادلات اخیر نتیجه زیر را بدست می‌دهد:

$$x(t) = \phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

که در آن $\varphi(t, t_0)$ ماتریس انتقال حالت سیستم[2] می باشد. اگر سیستم خطی غیر متغیر با زمان باشد t_0 می تواند برابر صفر بوده و حل معادلات حالت توسط هر یک از سه صورت زیر بدست آید:

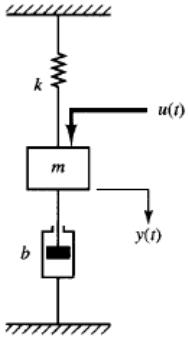
$$\mathbf{x}(t) = \mathscr{L}^{-1}\{[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{x}(0) + [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)\},$$
$$\mathbf{x}(t) = \mathscr{L}^{-1}\{\mathbf{\Phi}(s)\mathbf{x}(0) + \mathbf{H}(s)\mathbf{U}(s)\},$$
$$\mathbf{x}(t) = \epsilon^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \epsilon^{\mathbf{A}t}\int_0^t \epsilon^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau,$$

جزئیات بیشتر در صفحه ۱۹ کتاب kirk آمده است و دانشجویان علاقه‌مند به متن کتاب مراجعه نمایند.

مثال ۲: بدست آوردن معادلات حالت در سیستم مکانیکی جرم و فنر[3]

1. Solution of the State Equations in Linear Systems
2. State Transition Matrix
3. Ogata, Modern Control Engineering 4ed, 2002. Page 73

سیستم مکانیکی شکل(۶) را در نظر بگیرید سیستم خطی فرض می شود. نیروی خارجی $u(t)$ ورودی سیستم و جابجائی $y(t)$ جرم، خروجی سیستم است. جابجائی $y(t)$ نسبت به وضعیت تعادلی که در غیاب نیروی خارجی بوجود می‌آید اندازه‌گیری می‌شود این سیستم تک ورودی، تک خروجی است.



شکل ۶: سیستم مکانیکی جرم و فنر[1]

با توجه به شکل، معادلهٔ سیستم عبارتست از:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u$$

این سیستم از مرتبه دوم است. متغیرهای حالت $x_1(t)$ و $x_2(t)$ بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$x_1(t) = y(t) \quad , \quad x_2(t) = \dot{y}(t)$$

معادلهٔ دیفرانسیل سیستم در فضای حالت بصورت زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \\ y = \mathbf{C}x + \mathbf{D}u \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -b/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

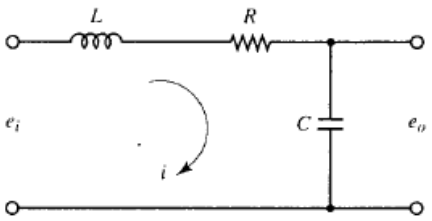
که در آن خواهیم داشت:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -b/m \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad D = 0$$

1. Mechanical System of Mass and Spring

مثال ۳: مدار LRC[1]

مدار الکتریکی نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. مدار از یک مقاومت القائی(هانری)، یک مقاومت(اهم) و یک خازن(فاراد)[2] تشکیل شده است. با استفاده از قانون ولتاژ کرشهف[3] در سیستم، معادلات زیر بدست می‌آیند:



شکل ۷: سیستم مدار الکتریکی LRC

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = e_i$$

$$\frac{1}{C}\int i\,dt = e_o$$

از معادلات اخیر مدل ریاضی سیستم بصورت زیر بدست می‌آید.

$$\ddot{e}_o + \frac{R}{L}\dot{e}_o + \frac{1}{LC}e_o = \frac{1}{LC}e_i$$

با تعریف متغیرهای حالت بصورت زیر خواهیم داشت:

$$x_1 = e_o$$
$$x_2 = \dot{e}_o$$

متغیرهای ورودی و خروجی بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$u = e_i$$
$$y = e_o = x_1$$

نتیجتاً معادلات حالت سیستم بصورت زیر بدست می‌آیند:

1. Ogata, Modern Control Engineering 4ed, 2002. Page 90
2. The circuit consistts of an inductance ***L*** (henry), a resistance ***R*** (ohm) and a capacitance ***C*** **(farad)**
3. Applying Kirchhoff's voltage law to the system

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u$$

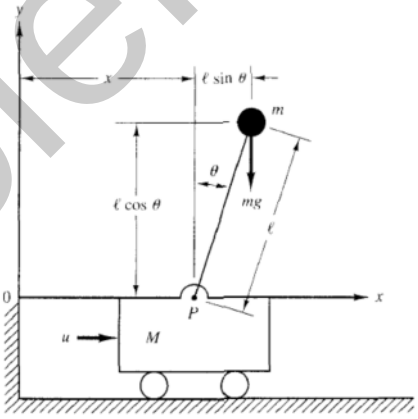
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

با توجه به فرم کلی معادلات حالت نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \\ y = \mathbf{C}x + \mathbf{D}u \end{cases} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} , \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} , \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{D} = 0$$

مثال ۴: بدست آوردن معادلات حالت در سیستم مکانیکی آونگ وارونه یا معلق[1]

شکل (۸) یک آونگ وارونه سوار بر ارابه موتوردار[2] را نشان می دهد. این مدل کنترل راستای یک موشک حامل ماهواره در هنگام پرتاب است(هدف کنترل، عمودی نگهداشتن راستای موشک است)[3]. آونگ وارونه در حالت طبیعی ناپایدار است یعنی در هر لحظه می تواند در هر جهتی واژگون شود مگر اینکه نیروی کنترلی مناسبی اعمال گردد.



شکل ۸: سیستم مکانیکی آونگ وارونه

1. Ogata, Modern Control Engineering 4ed, 2002. Page 88
2.An inverted pendulum mounted on a motor-driven car
3. Attitude Control of A Space Booster on Takeoff

با استفاده از قوانین دینامیک و با فرض کوچک بودن زاویهٔ θ و مشتقات آن، معادلات دیفرانسیل خطی شدهٔ آونگ وارونه به صورت زیر در می‌آیند:

$$(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u$$
$$ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta$$

برای بدست آوردن معادلات حالت، متغیرهای حالت بصورت زیر فرض می‌شوند:

$$x_1 = \theta \quad , \quad x_2 = \dot{\theta} \quad , \quad x_3 = x \quad , \quad x_4 = \dot{x}$$

اگر θ و x بعنوان خروجی‌های سیستم که بسادگی قابل اندازه‌گیری هستند در نظر گرفته شوند:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

و لذا نتیجه خواهد شد:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \frac{M+m}{Ml} g x_1 - \frac{1}{Ml} u$$
$$\dot{x}_3 = x_4$$
$$\dot{x}_4 = -\frac{m}{M} g x_1 + \frac{1}{M} u$$

و بر حسب شکل برداری-ماتریسی خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{M+m}{Ml} g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m}{M} g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

با توجه به اینکه فرم کلی معادلات حالت بصورت زیر است:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \\ y = \mathbf{C}x + \mathbf{D}u \end{cases}$$

لذا نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{M+m}{Ml}g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m}{M}g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{D}=0$$

۱-۱۱- تابع معیار یا ارزشیابی عملکرد[1]

پس از مدل‌سازی سیستم‌ها و تعیین محدودیت‌های کنترل و حالت، اکنون تابع معیار یا ارزشیابی عملکرد که در سیستم‌های کنترل استفاده می‌شود مورد بحث قرار می‌گیرد. در این قسمت هدف فراهم نمودن انگیزهٔ فیزیکی انتخاب تابع معیار می‌باشد.

روش‌های کلاسیک طراحی سیستم‌های کنترل، برای سیستم‌های خطی غیرمتغیر با زمان با یک ورودی و یک خروجی و شرایط اولیهٔ صفر بکار می‌روند. تابع‌های معیار متعارف عبارتند از: پاسخ سیستم به ورودی یکه یا سرعت که توسط زمان صعود، زمان قرار، درصد فراجهش و دقت حالت تعادل مشخص می‌گردند[2] و پاسخ فرکانسی سیستم توسط حد فاز و حد دامنه، ماکزیمم دامنه و پهنای باند مشخص می‌شوند[3]. روشهای کلاسیک در بسیاری از موارد قابل استفاده و قابل اعتمادند لیکن در اینجا به مواردی که روشهای کلاسیک نمی‌توانند جوابگو باشند پرداخته می‌شود.

۱-۱۱-۱- تابع معیار برای مسائل کنترل بهینه[4]

مسئله کنترل بهینه عبارتست از پیدا کردن کنترل $u^* \in U$ بطوری که باعث شود سیستم

1. The Performance Measure
2. Response to a step or ramp input characterized by rise time, settling time, peak overshoot, and steady-state accuracy
3. Frequency response of the system-characterized by gain and phase margin, peak amplitude and bandwidth
4. Performance measures for optimal control problems

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t)$$

مسیر $x^* \in X$ را که باعث حداقل شدن تابع معیار زیر می‌شود تعقیب کند:

$$J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t)dt$$

حال سعی می شود برای برخی از مسائل کنترلی متعارف انگیزهٔ فیزیکی انتحاب تابع معیار بیان شود.

مسائل حداقل زمان[1]:

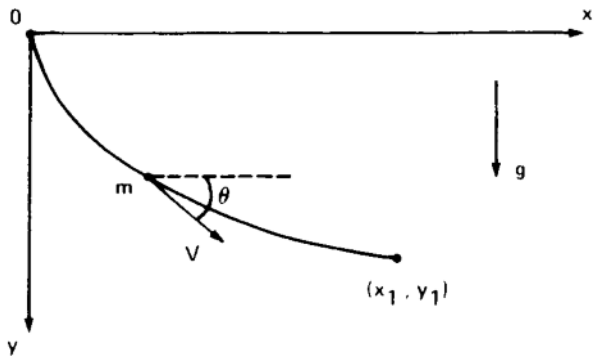
برای انتقال سیستمی از شرایط اولیه دلخواه $x(t_0) = x_0$ به یک مجموعه هدف S[2] در حداقل زمان، تابع معیاری که باید حداقل شود عبارتست از:

$$J = t_f - t_0 = \int_{t_0}^{t_f} dt$$

که در آن t_f اولین لحظه‌ای است که $x(t)$ با مجموعه هدف S برخورد می‌کند. مثلاً اصابت یک موشک به هواپیما، سیستم چرخش یک رادار و نیز توپ ضد هوائی را می‌توان با تابع معیار حداقل زمان تعریف نمود[3].

مثال ۵: مسئله براچیستوکرون[4]: در زبان یونانی کلمه براچیستوکرون به معنی کوتاهترین زمان می‌باشد. این مسئله در قرن هفدهم (۱۶۹۶) بوسیله برنولی مطرح و حل گردید[5]. یک جرم m در میدان جاذبهٔ زمین با شتاب g از حالت سکون در مبدأ به حرکت درمی‌آید. مطلوبست یافتن معادلهٔ منحنی مسیر جهت رسیدن به نقطهٔ (x_1, y_1) در صورتیکه این مسیر در کوتاهترین زمان طی شود.

1. Minimum-Time Problems
2. Target set
3. Typical examples are the interception of attacking aircraft and missiles and the slewing mode operation of a radar or gun system.
4. Brachistochrone
5. Lewis, Frank. L., & Syrmos, Vassilis, L., Optimal Control, 2ed, John Wiley & Sons Inc, 1995. Page 267



شکل ۹: هندسه نمایش داده شده جهت مسئله براچیستوکرون

در صورتی که شتاب جاذبه ثابت باشد میدان کنسرواتیو بوده و مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل ثابت است.

$$\frac{1}{2}mV^2(t)-mgy(t)=\frac{1}{2}mV^2(t_0)-mgy(t_0)=0$$

از اینرو سرعت در هر لحظه از زمان $t \geq t_0$ بر حسب مختصات y بصورت زیر بدست می‌آید:

$$V=\sqrt{2gy}$$

معادلات در فضای حالت عبارتند از:

$$\dot{x}(t)=V\cos\theta(t)$$
$$\dot{y}(t)=V\sin\theta(t)$$

که در آن زاویه مسیر $\theta(t)$ ورودی کنترل بوده و بایستی طوری محاسبه گردد که شاخص عملکرد حداقل زمان را کمینه نماید.

$$J(t_0)=\int_{t_0}^{t}dt$$

حل مسئله براچیستوکرون بصورت زیر با فرض $\phi=\pi-2\theta$ از روابط کنترل بهینه بدست می‌آید:

$$x=a(\phi-\sin\phi) \quad , \quad y=a(1-\cos\phi)$$

منحنی بدست آمده برای x,y یک سیکلوئید است که از نقطهٔ مبدأ (x_0,y_0) و مقصد (x_1,y_1) می‌گذرد. سیکلوئید[1] مکان هندسی نقاطی است که از حرکت یک نقطه روی دایره در حال غلطیدن بدون لغزش حول محور x بدست می‌آید. مقادیر a,ϕ از شرایط (x_0,y_0) و (x_1,y_1) بدست می‌آیند.

1. **Cycloid**

مسائل کنترل وضعیت نهائی[1]:

هدف حداقل نمودن انحراف حالت نهائی یک سیستم از مقدار مطلوب آن $r(t_f)$ می‌باشد. یک تابع معیار ممکن عبارتست از:

$$J = \sum_{i=1}^{n} [x_i(t_f) - r_i(t_f)]^2$$

از آنجائی که هر دو انحراف مثبت و منفی نامناسب هستنند لذا تابع مجذور انتخاب شده است. البته می‌توان از تابع قدر مطلق نیز استفاده نمود لیکن تابع مجذور از نظر ریاضی برای بررسی مناسبتر می‌باشد. معادلهٔ فوق را با استفاده از روابط ماتریسی می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$J = [x(t_f) - r(t_f)]^T [x(t_f) - r(t_f)]$$

این رابطه را می‌توان به شکل زیر نشان داد:

$$J = \left\| x(t_f) - r(t_f) \right\|^2$$

که در آن $\left\| x(t_f) - r(t_f) \right\|$ اندازه یا نرم[2] بردار $[x(t_f) - r(t_f)]$ می باشد. برای عمومیت دادن بیشتر مسئله می‌توان بصورت زیر ماتریس H را که یک ماتریس حقیقی متقارن مثبت نیمه معین $n \times n$[3] و بنام ماتریس ارزش‌گذاری یا وزنی[4] است در این تابع بکار برد:

$$J = [x(t_f) - r(t_f)]^T \mathbf{H} [x(t_f) - r(t_f)]$$

معادلهٔ فوق را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$J = \left\| x(t_f) - r(t_f) \right\|_{\mathbf{H}}^2$$

اگر H ماتریس قطری واحد باشد دو معادلهٔ ماقبل معادلهٔ اخیر معادل خواهند بود. اگر H ماتریس قطری باشد فرض اینکه H باید ماتریس مثبت نیمه معین باشد باعث خواهد شد که تمام عناصر قطر اصلی غیرمنفی باشند با

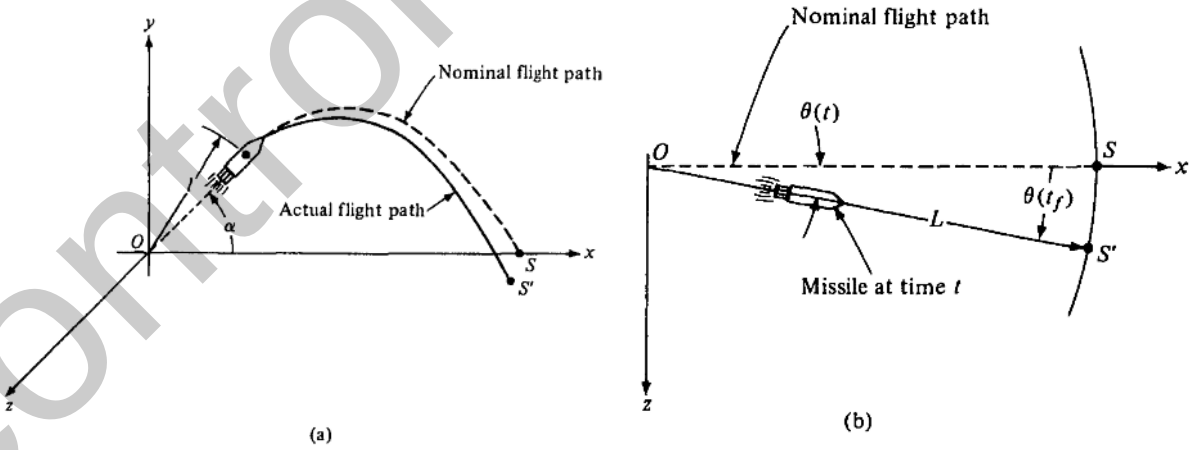
1. Terminal Control Problems
2. Norm
3. Real symmetric positive semi-definite
4. Weighting matrix

تنظیم و انتخاب عناصر H می‌توان اهمیت انحراف هر یک از مقدارهای متغیرهای حالت را از مقدار مطلوب آن تعیین کرد برای مثال اگر hii بزرگ انتخاب شود[1] انحراف $x_i(t_f)$ از مقدار مطلوب آن با اهمیت تلقی شده و اگر hjj صفر در نظر گرفته شود انحراف x_j بی اهمیت تلقی شده است. عناصر H برای نرمالیزه کردن مقادیر عددی نیز بکار گرفته و تنظیم می‌شوند

بعنوان مثال موشک بالستیک نشان داده شده در شکل(۱۰) را در نظر بگیرید. موقعیت موشک در لحظهٔ t با مشخصات کروی $l(t),\alpha(t),\theta(t)$ مشخص می‌شوند. l فاصله از مبدأ مختصات و α,θ به ترتیب زوایای ارتفاع و سمت می‌باشند[2]. اگر $l(t_f)=L, L=5000\ miles$ و خطای زاویهٔ سمت در برخورد $0.01\ rad$ باشد[3] آنگاه انحراف موشک از هدف S به اندازهٔ ۵۰ مایل خواهد بود. اما در صورتی که تابع معیار بصورت زیر در نظر گرفته شود:

$$J = h_{11}[l(t_f)-5000]^2 + h_{22}[\theta(t_f)]^2$$

با انتخاب $h_{22}=\left[\frac{50}{0.01}\right]^2 h_{11}$ اهمیت انحراف در برد و سمت یکی خواهد بود. در صورتی که $h_{11}=h_{22}$ مدنظر باشد لزوماً بایستی متغیرهای l,θ نرمالیزه[4] شوند.



شکل ۱۰: یک موشک بالستیک که به سمت هدف S روانه شده است.

1. *hii* denotes the *ii*th element of H
2. Elevation and azimuth ang1es
3. Azimuth error at impact
4. Normalized

مسائل کنترل حداقل تلاش[1]:

انتقال سیستمی از یک وضعیت اولیهٔ $x(t_0)=x_0$ به مجموعهٔ هدف S با مصرف حداقل نیروی کنترل، یک مسئله کنترل با حداقل تلاش می‌باشد. معنی عبارت "کنترل حداقل تلاش" بستگی به کاربرد خاص فیزیکی آن داشته و لذا تابع معیار شکلهای مختلفی می‌پذیرد. بعنوان مثال یک قمر مصنوعی در یک سفر بین کرات را در نظر بگیرید فرض شود $u(t)$ تراست موتور راکت بوده و دامنه تراست متناسب با نرخ مصرف سوخت باشد. برای حداقل کردن کل مصرف سوخت، تابع معیاربصورت زیر انتخاب می‌شود:

$$J=\int_{t_0}^{t_f}|u(t)|dt$$

مثال ۶: کنترل درجه حرارت اتاق با کمترین مصرف انرژی[2]

در نظر است اتاقی با کمترین مقدار مصرف انرژی گرم شود. در صورتی که $\theta(t)$ درجه حرارت اتاق، θ_a درجه حرارت محیط بیرونی(مقدار ثابت) و $u(t)$ نرخ تزریق حرارت به داخل اتاق باشد، معادلات دینامیکی حاکم عبارتند از:

$$\dot{\theta}=-a(\theta-\theta_a)+bu$$

ثابتهای a,b به عایق کاری و برخی دیگر از مشخصات اتاق وابسته می‌باشند. با تعریف متغیر حالت بصورت $x(t)=\theta(t)-\theta_a, \theta_a=0^{\circ}$ معادلات حالت سیستم بصورت زیر در می‌آیند:

$$\dot{x}=-ax+bu$$

برای کنترل درجه حرارت در یک فاصلهٔ زمانی ثابت $[0,T]$ با حداقل انرژی تزریق شده، شاخص عملکرد (تابع معیار) بصورت زیر انتخاب می‌شود:

1. Minimum-Control-Effort Problems
2. Temperature Control in a Room Using the Least Possible Energy

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)dt$$

درصورتی که بخواهیم دمای نهائی اتاق مقدار ثابت $\theta(T) = 10^o$ باشد نشان داده خواهد شد که حل بهینه برای این سیستم بصورت زیر خواهد بود[1]:

$$u^*(t) = \frac{10ae^{at}}{b\sinh aT} \quad , \quad x^*(t) = 10\frac{\sinh at}{\sinh aT} \quad , \quad 0 \le t \le T$$

مسائل تعقیب[2]:

نزدیک کردن حالت $x(t)$ سیستم به وضعیت مطلوب $r(t)$ در حد ممکن در محدودهٔ $[t_0, t_f]$ یک مسئله تعقیب می‌باشد و در مسائل تعقیب تابع معیار بصورت زیر انتخاب می‌شود:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \|x(t) - r(t)\|^2_{\mathbf{Q}(t)} dt$$

که در آن $\mathbf{Q}(t)$ماتریس حقیقی متقارن $n \times n$ مثبت نیمه معین به ازای هر $t \in [t_0, t_f]$ می‌باشد. عناصر Q آنچنان تعیین می‌شوند که به وضعیت‌های مختلف اهمیت و ارزش مورد نظر داده شود.

مسائل تنظیم کننده‌ها[3]:

مسئله تنظیم کننده حالت خاص مسئله تعقیب است که در آن به ازاء $t \in [t_0, t_f]$ مقدار $r(t) = 0$ می‌باشد. در مرجع زیر مثالی از این مسئله را معرفی نموده است[4].

بعنوان مثال مسئله‌ی واندرپل واداشته را در نظر بگیرید[5]. این مسئله نشانگر یک سیستم دینامیکی غیرخطی است معادلات سیستم عبارتند از:

---

1. Lewis, Frank. L., & Syrmos, Vassilis, L., Optimal Control, 2ed, John Wiley & Sons Inc, 1995. Page 139
2. Tracking Problems
3. Regulators Problems
4. Yahiaoui, Model Based Optimal Control for Integrated Building Systems
5. Milam & Mushambi & Murray., A New Computational Approach to Real-Time Trajectory, Generation for Constrained Mechanical Systems, Proceedings of the 39" IEEE. Conference on Decision and Control Sydney, Australia December, 2000, P845-851

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + (1 - x_1^{\,2})x_2 + u \end{cases}$$

شرایط اولیه و مقدار نهایی نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند:

شرایط اولیه $\quad x_2(0) = 0 \quad , \quad x_1(0) = 1$

مقدار نهایی $\quad x_2(5) - x_1(5) = 1$

مسئله کنترل بهینه، کمینه کردن شاخص عملکرد زیر به صورتی که معادلات دینامیکی بالا ارضا شوند، می‌باشد:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^5 \left(x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)\right)dt$$

۱-۱۱-۲-انتخاب تابع معیار[1]

در انتخاب تابع معیار طراح سعی می‌نماید که یک تابع ریاضی چنان تعریف کند که وقتی آن تابع حداقل می‌شود سیستم در مطلوبترین وضعیت خود عمل نماید. بنابراین انتخاب تابع معیار ترجمه مشخصات فیزیکی مورد لزوم سیستم در غالب عبارت ریاضی خواهد بود.

اگر تابع معیاری بطور واقعی عملکرد مطلوب سیستم را منعکس نماید منحنی مسیر انتخاب شده توسط طراح باید کوچکترین J را نتیجه دهد اگر این درست نباشد باید تابع معیار و یا محدودیت‌ها مورد تجدید نظر قرارگیرند.

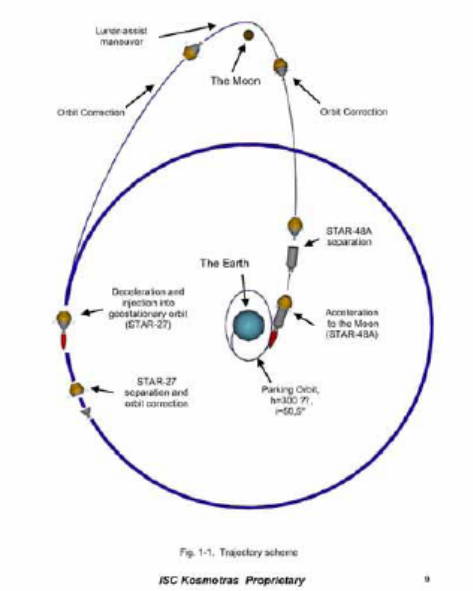
مفهوم فیزیکی مقدار تابع معیار نیز عاملی است که باید مورد توجه قرار گیرد حداقل مقدار تابع معیار همچون زمان فرآیند و یا سوخت مصرف شده، دارای معنی خواهد بود لیکن در مواردی که تابع معیار ترکیبی از کمیتهای متفاوت با ضریب ارزش‌گذاری مختلف باشد مقدار عددی تابع معیار نمی‌تواند یک مفهوم خاصی را عرضه نماید. در تصویر زیر مثالی که کمترین زمان و کمترین مصرف سوخت را همزمان در شاخص عملکرد بهینه می‌نماید نمایش داده شده است:

1. Selecting a Performance measure

R. Kalman 1960

Optimality in Control Systems Design

Rocket Orbit Injection



http://microsat.sm.bmstu.ru/e-library/Launch/Dnepr_GEO.pdf

Dynamics

$$\dot{r} = w$$

$$\dot{w} = \frac{v^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \frac{F}{m}\sin\phi$$

$$\dot{v} = \frac{-wv}{r} + \frac{F}{m}\cos\phi$$

$$\dot{m} = -Fm$$

Objectives

Get to orbit in minimum time

Use minimum fuel

شکل ۱۱: کمترین زمان و کمترین مصرف سوخت در شاخص عملکرد

تکلیف T1: مسائل تاریخی در حساب تغییرات

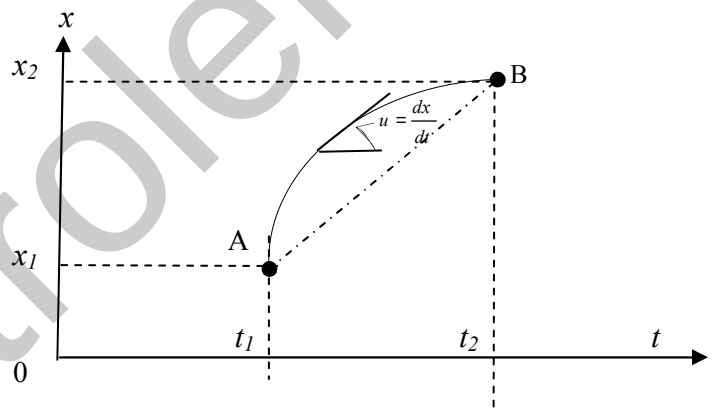
۱- **مسئله براچیستوکرون**[1]: در زبان یونانی کلمه براچیستوکرون به معنی کوتاهترین زمان می‌باشد. این مسئله در قرن هفدهم بوسیله برنولی مطرح و حل گردید. با جستجو در منابع اینترنتی و یا منابع کتابخانه‌ای، صورت مسئله و جواب آنرا بیان نمایید.

۲- **معرفی یک مسئله تاریخی در حساب تغییرات**[2]: با تحقیق در منابع کتابخانه‌ای و اینترنتی مسئله‌ای تاریخی از کاربرد حساب تغییرات همراه با جواب آنرا بیان نمایید.

تکلیف T2: محاسبه مقدار تابع معیار در مسئله کوتاهترین فاصله بین دو نقطه[3]

در مختصات دو بعدی طول یک منحنی $x(t)$ وابسته به پارامتر t بین نقاط A و B بصورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)}\,dt$$



شکل ۶: کوتاهترین فاصله بین دو نقطه در یک صفحه

در رابطه فوق J تابع معیار و همان طول پاره خط AB می‌باشد. با استفاده از روابط کنترل بهینه می‌توان نشان داد که کوتاهترین فاصله بین دو نقطه خط راست می باشد. با فرض $x(1) = 1$ و $x(3) = 5$ مقدار تابع J را برای پنج

1. Brachistochrone
2. Calculus of Variational
3. Shortest Distance Between Two Points

مسیر مختلف دلخواه محاسبه نموده ونشان دهید که کوتاهترین مسیر بین دو نقطه خط راست می‌باشد(شکل منحنی‌ها و جدول داده‌ها به همراه تکلیف تحویل داده شود).

تکلیف T3: معرفی یک سیستم و توابع معیار برای مسائل کنترل بهینه

الف) معرفی یک سیستم کنترل بهینه

a) یک سیستم دینامیکی را بدلخواه در نظرگرفته و معادلات دیفرانسیل آنرا نوشته و سپس این معادلات را بصورت معادلات حالت بیان نمایید. برای این سیستم تابع معیاری که می‌بایست بهینه شود معرفی نموده و شرایط اولیه و انتهائی و یا قیود احتمالی را بیان نمایید.

b) مسئله‌ی واندرپل واداشته زیر را در نظر بگیرید[1]. این مسئله نشانگر یک سیستم غیرخطی است نشان دهید که دینامیک سیستم عبارتست از:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + (1 - x_1^{\,2})x_2 + u \end{cases}$$

شرایط اولیه و مقدار نهایی نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند:

شرایط اولیه $\quad x_2(0) = 0 \quad , \quad x_1(0) = 1$

مقدار نهایی $\quad x_2(5) - x_1(5) = 1$

مسئله کنترل بهینه، کمینه کردن شاخص عملکرد زیر به صورتی که معادلات دینامیکی بالا ارضا شوند، می‌باشد:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^5 \left(x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)\right)dt$$

1. Milam & Mushambi & Murray., A New Computational Approach to Real-Time Trajectory, Generation for Constrained Mechanical Systems, Proceedings of the 39" IEEE. Conference on Decision and Control Sydney, Australia December, 2000, P845-851
M. I. Ross & F. Fahroo. Pseudospectal method for Optimal Motion Planning of differentially flat systems. In Proc. Of the 41th IEEE Conf. on Decision and Control. 2002

ب) توابع معیار برای مسائل کنترل بهینه

جهت هر یک از عناوین زیر یک مسئله کاربردی بیان نموده و معادلات حالت و تابع معیار را برای آن مشخص نمایید:

الف) مسئله حداقل زمان

ب) مسئله کنترل وضعیت نهائی

ج) مسئله تعقیب

د) مسئله کنترل حداقل تلاش

فصل دوم: بهینه سازی استاتیکی

۲-۱- مسائل غیرمقید[1]

یک دسته ساده از مسائل بهینه‌سازی استاتیکی[2] شامل پیدانمودن مقدار p پارامتر $y_1,...,y_p$ می‌باشند که یک شاخص عملکرد که تابعی از این پارامترهاست را بهینه نماید،

$$L(y_1.....y_p)$$

جهت تناسب یک نماد فشرده بصورت زیر مورد استفاده قرار می گیرد:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} = \text{parameter vector} \qquad (۱)$$

و شاخص عملکرد بصورت زیر مورد استفاده قرار می گیرد:

$$L(y) \qquad (۲)$$

اگر روی مقادیر ممکن y هیچگونه قیدی ذکر نشده باشد و اگر تابع $L(y)$ در هر جا دارای مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم باشد سپس تابع در همسایگی y^* بوسیلهٔ سه جملهٔ تیلور را می‌توان بصورت زیر تقریب زد:

$$L(y) \approx L(y^o) + L_y(y - y^o) + \frac{1}{2}(y - y^o)^T L_{yy}(y - y^o) \qquad (۳)$$

که در آن مشتقات L_{yy}, L_y در y^o ارزیابی می‌شوند و

$$\frac{\partial L}{\partial y} \equiv L_y = [L_{y_1} \;\; L_{y_2} \;\; \cdots \;\; L_{y_p}] \qquad (۴)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \equiv L_{yy} = \begin{bmatrix} L_{y_1 y_1} & \cdots & L_{y_1 y_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{y_p y_1} & \cdots & L_{y_p y_p} \end{bmatrix} \qquad (۵)$$

L_y یک ماتریس سطری از مشتقات اول بوده و بنام گرادیان[1] L نامیده می‌شود و L_{yy} یک ماتریس متقارن مربعی از مشتقات بوده و بنام هسین[2] از L نامیده می‌شود. از تعریف رابطه(۳) واضح است که شرایط لازم برای یک کمینه[3] عبارتند از:

1. Problems without Constraints
2. Static Optimization

$$L_y = 0 \qquad (۶)$$

$$L_{yy} \geq 0 \qquad (۷)$$

و این بدان معنی است که هسین بایستی مثبت نیمه معین باشد(تمامی مقادیر ویژه[4] مثبت یا صفر باشند). نقاطی که شرط (۶) را ارضاء می‌کنند نقاط ایستا[5] نامیده می‌شوند.

شرایط کافی[6] برای یک کمینه محلی[7] عبارتند از رابطهٔ (۶) و شکل قوی از رابطهٔ (۷) یعنی:

$$L_{yy} > 0 \qquad (۸)$$

یعنی هسین بایستی مثبت معین باشد(تمامی مقادیر ویژه مثبت باشند) در صورتی که یک نقطه حالت ایستا را دارا باشد ولی هسین مثبت نیمه معین باشد اطلاعات اضافی برای اینکه مشخص شود نقطهٔ فوق یک کمینه است یا نه مورد نیاز است. چنین نقطه‌ای بنام نقطهٔ تکین یا منفرد نامیده می‌شود[8] در صورتی که L تابع خطی از y باشد در این صورت تمامی مقادیر ویژه ماتریس هسین صفر بوده و یک کمینه وجود نخواهد داشت.

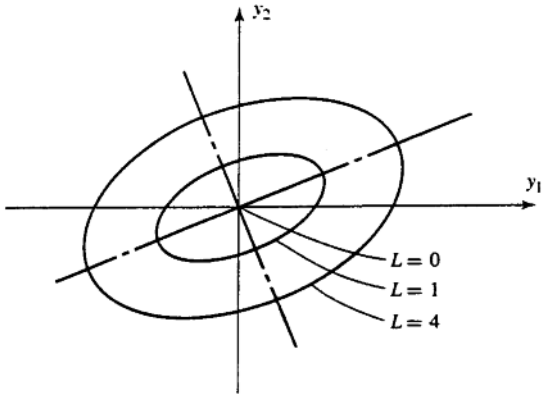
مثال ۱: مسائل دوبعدی(2D)[9]

a) کمینه: شاخص عملکرد زیر را در نظر بگیرید. هر دو مقدار ویژه هسین L مثبت می‌باشند.

$$L = [y_1 \quad y_2] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \ (\lambda_1 = 1.39, \lambda_2 = 8.6)$$

همانگونه که در شکل (۱) مشاهده می‌گردد نقطه ایستا در این مسئله بنام کمینه نامیده شده و در نقطهٔ $y_1 = y_2 = 0$ واقع خواهد شد.

1. Gradient
2. Hessian
3. Necessary Conditions for a Minimum
4. Eigenvalues
5. Stationary Points
6. Sufficient Conditions
7. Local Minimum
8. Singular Point
9. Problems in Two Dimensions (2D)

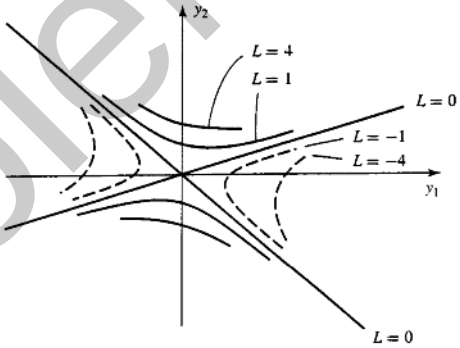


شکل ۱: نمایش یک نقطهٔ ایستای کمینه

b) نقطهٔ زین اسبی (سرج الفرس)[1]**:** شاخص عملکرد زیر را در نظر بگیرید. یک مقدار ویژه هسین L مثبت و یک مقدار ویژه منفی می‌باشند $(\lambda_1 = -2.4, \lambda_2 = 6.4)$.

$$L = [y_1 \quad y_2]\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

همانگونه که در شکل(۲) مشاهده می‌گردد نقطه ایستا در این مسئله بنام نقطهٔ زین اسبی نامیده شده و در نقطهٔ $y_1 = y_2 = 0$ واقع خواهد شد.



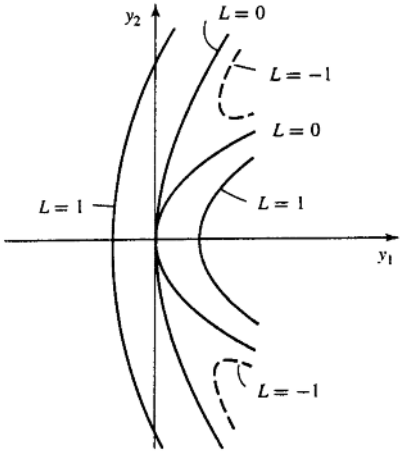
شکل ۲: نمایش یک نقطهٔ ایستای زین اسبی

c) نقطهٔ تکین (منفرد)[2]**:** شاخص عملکرد زیر را در نظر بگیرید. یک مقدار ویژه هسین L مثبت و یک مقدار ویژه صفر است $(\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0)$.

$$L = (y_1 - y_2^2)(y_1 - 3y_2^2)$$

1. Saddle Point
2. Singular Point

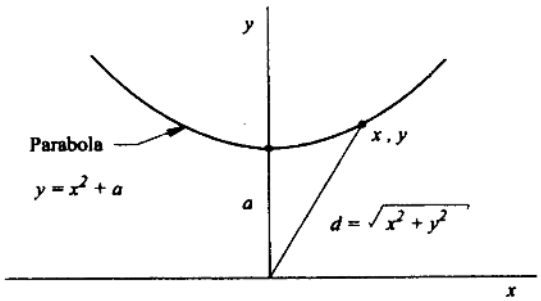
همانگونه که در شکل(۳) مشاهده می‌گردد نقطه ایستا در این مسئله بنام نقطهٔ تکین نامیده شده و در نقطهٔ $y_1 = y_2 = 0$ واقع خواهد شد.



شکل ۳: نمایش یک نقطهٔ ایستای تکین زین اسبی

مثال ۲: مسئله کوتاهترین فاصلهٔ مبدأ از یک سهمی[1]

مطلوبست محاسبه کوتاهترین فاصلهٔ مبدأ مختصات از سهمی $y = x^2 + a$ که در آن ثابت a یک مقدار معلوم می‌باشد(ثابت a مقادیر منفی را هم می‌تواند اختیار کند). بعبارت دیگر فاصلهٔ مبدأ از یک سهمی یعنی $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ را در کوتاهترین فاصله بیابید. همچنین به ازای مقادیر مختلف ثابت a نقاط ایستا را در روی سهمی بدست آورده و نوع نقاط ایستا را مشخص نمایید[2].



شکل ۴: کوتاهترین فاصلهٔ مبدأ از یک سهمی

1. Minimum Distance to a Parabola from the origin
2. Hull, David. G., Optimal Control Theory for Applications, Springer, 2003. Page 29

حل: تابع معیار بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$L = d^2 = x^2 + y^2 = x^2 + (x^2 + a)^2 \qquad \text{(جهت سهولت رادیکال حذف شده است)}$$

$$L_x = 2x[1 + 2(x^2 + a)] = 0$$

و نقاط ایستا بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$a > -\frac{1}{2} \quad , \quad x = 0$$
$$a = -\frac{1}{2} \quad , \quad x = 0$$
$$a < -\frac{1}{2} \quad , \quad x = 0 \ , \ x = \pm\sqrt{-a - 1/2}$$

جهت مشخص کردن نوع نقاط ایستا یعنی اینکه کدام نقطه کمینه و کدام نقطه بیشینه است مشتق دوم L را بایستی بدست آورد:

$$L_{xx} = 2(6x^2 + 1 + 2a)$$

و نتایج زیر برای نقاط ایستا بدست می‌آیند:

$$a > -\frac{1}{2} \quad , \quad x = 0 \quad , \qquad L_{xx} > 0, \quad \text{minimum}$$
$$a = -\frac{1}{2} \quad , \quad x = 0 \quad , \qquad L_{xx} = 0, \quad \text{unknown}$$
$$a < -\frac{1}{2} \quad , \quad x = 0 \quad , \qquad L_{xx} < 0, \quad \text{maximum}$$
$$a < -\frac{1}{2} \quad , \quad x = \pm\sqrt{-a - 1/2} \quad , \quad L_{xx} > 0, \quad \text{minimum}$$

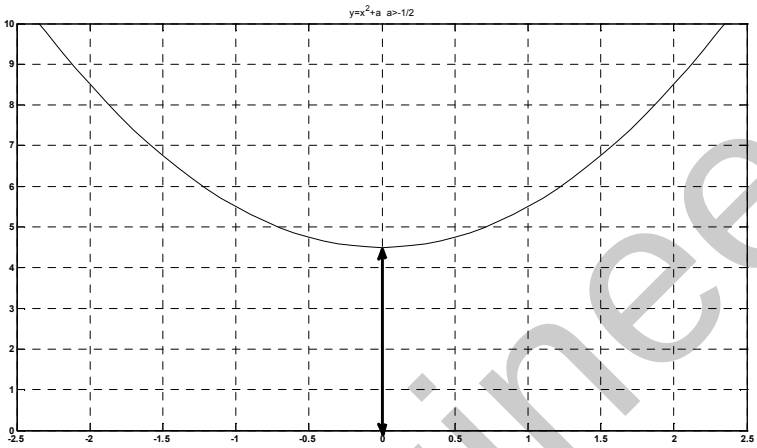
برای حالتی که در آن $a = -\frac{1}{2}$ است لازم است که مشتقات مرتبه بالاتر بدست آمده و تحلیل گردد، از آنجائی که $L^{(3)} = 24x, \quad L^{(4)} = 24$ لذا نتیجه می‌شود که نقطهٔ ایستای $x = 0$ در این حالت یک کمینه است.

در ادامه برای حالتهای مختلف ثابت a منحنی سهمی ترسیم شده و فاصلهٔ مبدأ از آن در کوتاهترین فاصله نشان داده شده است.

اگر $a > -\frac{1}{2}$ باشد بعنوان مثال $a = 4.5$ در این حالت در نقطهٔ ایستای $y = 4.5$, $x = 0$ یک کمینه خواهیم داشت:

$$y = x^2 + 4.5 \Rightarrow L_x = 2x\left(1 + 2(x^2 + 4.5)\right) = 4x(x^2 + 20) \Rightarrow$$

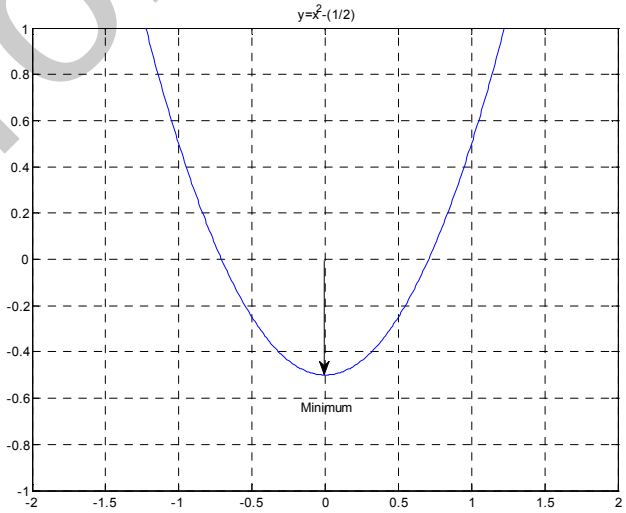
$$L_x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 4.5$$



اگر $a = -\frac{1}{2}$ باشد آنگاه در نقطه ایستای $y = -\frac{1}{2}$, $x = 0$ یک کمینه خواهیم داشت:

$$a = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = x^2 - 0.5 \Rightarrow L_x = 2x[1 + 2(x^2 - 0.5)] = 4x^3$$

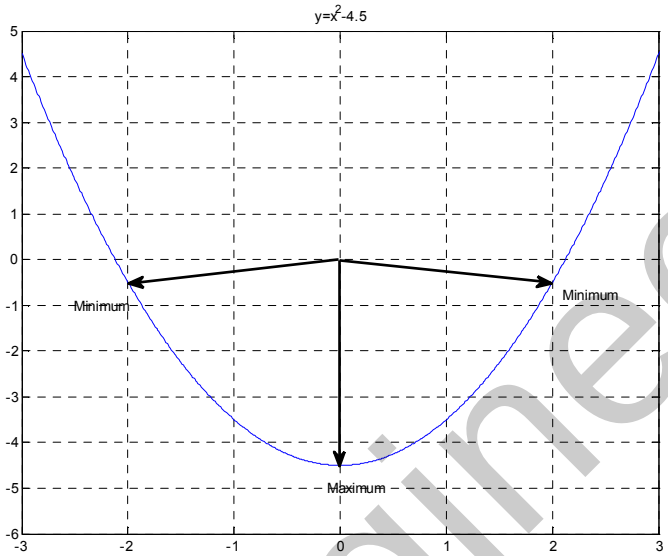
$$L_x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = -0.5$$



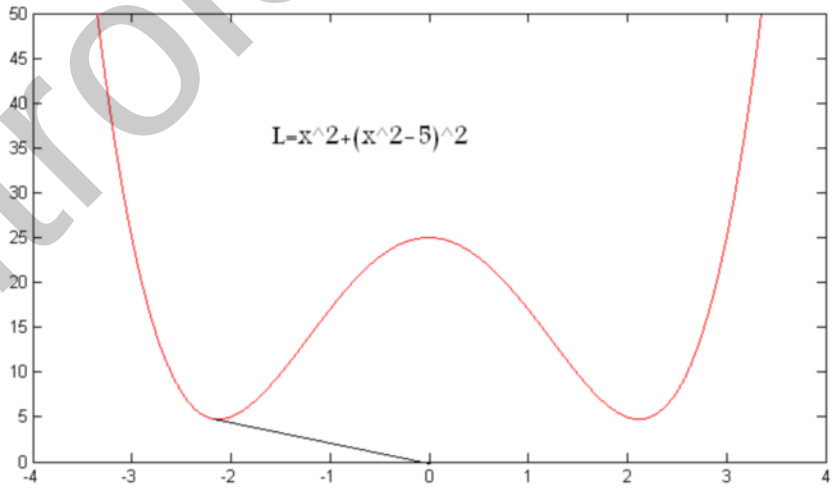
اگر $a < -\frac{1}{2}$ باشد بعنوان مثال $a = -4.5$ در این حالت خواهیم داشت:

$$a = -4.5 \Rightarrow y = x^2 - 4.5 \Rightarrow L_x = 2x[1 + 2(x^2 - 4.5)] = 4x(x^2 - 4) \Rightarrow$$

$$L_x = 0 \Rightarrow \quad x = \begin{cases} 0 \Rightarrow y = -4.5 \Rightarrow max \\ 2 \Rightarrow y = -0.5 \Rightarrow min \\ -2 \Rightarrow y = -0.5 \Rightarrow min \end{cases}$$



منحنی اندازه فاصله مبدا از سهمی برای $a = -5$ بصورت زیر رسم شده است و محل یک بیشینه و دو کمینه را نشان می‌دهد.




```
% Origin Distance from a parabola,
Clc; clear all;close all
f='y=x^2+a';
as=[1/2 -1/2 -4.5];
S=solve(f,'J=x^2+y^2','J','y');
```

```
J=S.J; y=S.y;
for i=1:length(as),
    figure
    a=as(i);
    Jx=diff(J,'x');
    x=solve(Jx);
    x=subs(x,'a',a);
    Jx2=diff(Jx,'x');
    Jx3=diff(Jx2,'x');
    Jx4=diff(Jx3,'x');
    ezplot(subs(S.y,'a',a));
    grid; hold on
    for j=1:length(x)
        if isreal(x(j))
            x_  =double(x(j));
            Jx2_=double(subs(subs(Jx2,'x',x_),'a',a));
            Jx3_=double(subs(subs(Jx3,'x',x_),'a',a));
            Jx4_=double(subs(subs(Jx4,'x',x_),'a',a));
            y_=  double(subs(subs(S.y,'x',x_),'a',a));
            if      (Jx2_>0)||((Jx2_==0)&&(Jx3_==0) && (Jx4_>0))
                plot([0,x_],[0,y_])
                text(x_,y_,'Minimum','color','r')
            elseif (Jx2_<0)||((Jx2_==0)&&(Jx3_==0) && (Jx4_<0))
                plot([0,x_],[0,y_],'b')
                text(x_,y_,'Maximum','color','r')
            elseif (Jx2_==0)&&(Jx3_==0)&&(Jx4_==0)
                plot([0,x_],[0,y_],'r--')
                text(x_,y_,'Stationary(Unknown?)')
            end
        end
    end
    axis([-6 6 -6 6]);
    daspect([1 1 1]);
end
```

۲-۲- مسائل با قیود تساوی[1]

یک دسته‌بندی عمومی‌تر از مسائل بهینه‌سازی استاتیکی شامل پیداکردن p پارامتر y می‌باشد که یک تابع $L(y)$ را با یک مجموعه از n رابطهٔ مقیدکننده بهینه نماید:

$$f^{(i)}(y)=0\ ,\ \ i=1,\ldots,n$$

که در آن $n<p$ می‌باشد. جهت تناسب مجدداً از یک نمایش فشرده بصورت زیر استفاده می‌شود:

1. Problems with Equality Constraints

$$f = \begin{bmatrix} f^{(1)} \\ \vdots \\ f^{(n)} \end{bmatrix} = \text{Constraint Vector}$$

در این نمایش مسئله را می‌توان بصورت زیر بیان نمود:

مطلوبست یافتن بردار پارامتری y را که تابع $L(y)$ را با n رابطهٔ مقیدکننده زیر کمینه نماید.

$$f(y) = 0 \quad , \quad \text{where } n < p$$

در این فصل صرفاً حالتهائی مورد بحث قرار می‌گیرند که در آنها سیستمهای $L(y)$ و $f(y) = 0$ غیرخطی هستند. بطوری که یک کمینه بتواند بدون اضافه نمودن قیود ناتساوی[1] وجود داشته باشد(قیود ناتساوی در فصل نهم مطرح شده‌اند). البته غیرخطی بودن به تنهائی تضمین کنندهٔ وجود یک کمینه نخواهد بود.

۲-۳- شرایط لازم مرتبه اول[2] جهت کمینه بودن یک نقطه ایستا

فرض شود که یک y وجود داشته باشد بطوری که $f(y) = 0$ و می‌خواهیم ببینیم که آیا این y یک کمینه از L را می‌تواند ایجاد نماید یا خیر.

جهت بدست آوردن شرایط لازم برای اینکه y یک نقطهٔ ایستا باشد ابتدا قیود $f(y) = 0$ را به شاخص عملکرد $L(y)$ با یک مجموعه از n ضریب ثابت نامعین $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ اضافه یا ملحق می‌نماییم[3]:

$$H(y,\lambda) = L(y) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f^{(i)}(y) = L(y) + \lambda^T f(y)$$

فرض کنید که ما مقادیری را برای پارامترهای y حدس زده باشیم، آنگاه تغییرات دیفرانسیلی در H مربوط به تغییرات دیفرانسیلی در y بوسیلهٔ رابطهٔ $dH = H_y dy$ بدست می‌آید که در آن:

$$H = L + \lambda^T f \quad \Rightarrow \quad H_y = L_y + \lambda^T f_y$$

1. Inequality Constraints
2.The First-Order Nessesary Conditions
3. Adjoining Aoproach to First-order Necessary conditions

اکنون اگر قیود $f=0$ ارضاء گردند آنگاه $H \equiv L$ می‌شود و شرط لازم برای یک کمینه H این است که $H_y=0$ باشد و بنابراین شرایط لازم مرتبه اول برای اینکه y یک نقطهٔ ایستا (کمینه، بیشینه یا زین اسبی) باشد بصورت زیربدست می‌آیند:

$$f(y)=0$$
$$L_y+\lambda^T f_y=0$$

این شرایط متشکل از $n+p$ معادله از $n+p$ مجهول y,λ می‌باشند. مقادیر λ_i بنام ضرائب لاگرانژی[1] نامیده می‌شوند. تابع H بنام تابع هامیلتونی[2] نامیده می‌شود.

۲-۴- تفسیر ضرائب لاگرانژی[3]

فرض کنید که ما قیود را بصورت $f=c$ بجای $f=0$ داشته باشیم که در آن c یک بردار از مقادیر ثابت باشند. سپس ما می‌بایست تابع H معادلهٔ $H=L+\lambda^T f$ را بصورت زیر تعریف نماییم:

$$H=L+\lambda^T(f-c)$$

و بدنبال آن خواهیم داشت:

$$dH=(L_y+\lambda^T f_y)dy-\lambda^T dc$$

در نقطهٔ ایستا ضرائب dy صفر(حذف) خواهند شد و لذا خواهیم داشت:

$$dH=-\lambda^T dc$$

از این رابطه واضح است که:

$$\lambda^T=-L_c^{\min}\equiv\frac{\partial L^{\min}}{\partial c}$$

1. Lagrange Multipliers
2. Hamiltonian
3. Interpretation of the Lagrange Multipliers

که در آن $L = L(y,c)$ و $-\lambda$ یک بردار حساسیت پذیری کمترین مقدار L به سطح قیود c می‌باشد. لازم به توضیح است که اگر بجای $f - c = 0$ عبارت $c - f = 0$ در روابط بالا استفاده شود نتیجه $\lambda^T = -L_c^{\min} \equiv -\dfrac{\partial L^{\min}}{\partial c}$ حاصل خواهد شد.

مثال ۳: مسئله LQ با دو پارامتر و یک قید[1]

مطلوبست یافتن بردار دو پارامتری y که یک مقدار ایستا را با قید خطی $f(y) = y_1 + my_2 - c = 0$ برای شاخص عملکرد زیر ایجاد نماید:

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2}\right)$$

در روابط فوق a,b,c,m ثابتهای اسکالر هستند.

حل: منحنی‌های L ثابت تشکیل دهندهٔ بیضی[2] می‌باشند بطوری که با بزرگ شدن L ابعاد بیضی هم بزرگ می‌شود و معادلهٔ $y_1 + my_2 - c = 0$ نیز یک خط مستقیم ثابت می‌باشد. واضح است که کوچکترین مقدار L که ارضاء کنندهٔ قید می‌باشد هنگامی حاصل می‌شود که بیضی دقیقاً مماس بر خط راست باشد. تابع H عبارتست از:

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2}\right) + \lambda(y_1 + my_2 - c)$$

و شرط لازم برای ایستا بودن عبارتست از:

$$f = y_1 + my_2 - c = 0\,, \quad H_{y_1} = \frac{y_1}{a^2} + \lambda = 0\,, \quad H_{y_2} = \frac{y_2}{b^2} + \lambda m = 0$$

سه معادلهٔ اخیر دارای سه مجهول λ, y_1, y_2 هستند و با حل آنها نتیجه می‌شود که:

$$\lambda = \frac{-c}{a^2 + m^2 b^2}\,, \quad y_1 = -\lambda a^2\,, \quad y_2 = -\lambda m b^2$$

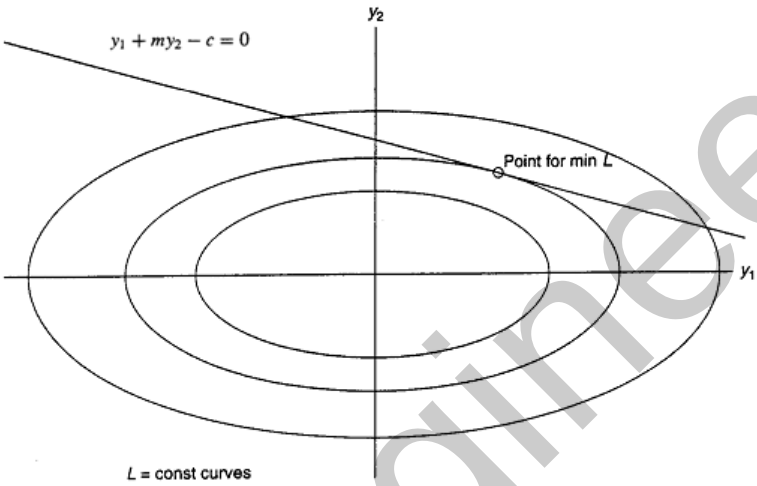
1. A Linear-Ouadratic (LQ) Problem with Two Parameters and One Constraint
2. Ellipse

و کوچکترین مقدار L عبارتست از:

$$L_{\min} = \frac{c^2}{2(a^2 + m^2 b^2)}$$

توجه شود که:

$$\lambda = -\left(L_c^{\min}\right)_f, \quad y_1 + m y_2 - c = 0$$



شکل ۵: کمینه‌یابی نسبت به دو پارامتر و یک قید خطی

۲-۵- تجزیه نمودن به بردار تصمیم‌گیری و بردار وابسته[1]

گاهی اوقات مناسب است که y را به دو بردار x به ابعاد n و u به ابعاد $m = p - n$ تجزیه نماییم. بطوری که u معین کنندهٔ x از n معادلهٔ قیود $f(y) = 0$ باشد:

$$f(x,u) = 0$$

در این حالت $L_y + \lambda^T f_y = 0$ تبدیل به دو معادلهٔ برداری زیر می‌شود:

$$L_x + \lambda^T f_x = 0$$
$$L_u + \lambda^T f_u = 0$$

1. Decomposition into a Decision Vector and a Dependent Vector

از آنجائی که u تعیین کنندهٔ x است نتیجه می‌شود که f_x بایستی غیرتکین[1] باشد از اینرو معادلهٔ $L_x + \lambda^T f_x = 0$ نتیجه می‌دهد:

$$\lambda^T = -L_x f_x^{-1}$$

با جایگذاری معادلهٔ اخیر در معادلهٔ $L_u + \lambda^T f_u = 0$ که منجر به حذف λ می‌شود بطور ساده شرایط لازم برای یک نقطهٔ ایستا عبارتند از:

$$f(x,u) = 0$$
$$L_u - L_x f_x^{-1} f_u = 0$$

دو معادلهٔ اخیر مجموعاً $n + m = p$ معادله برای یافتن $n + m = p$ مجهول x و u تشکیل می‌دهند. توجه شود که معادلهٔ اخیر بطور ساده نشانگر آن است که:

$$H_u \equiv (L_u)_f = 0$$

مثال ۴: بهینه‌سازی با متغیرهای اسکالر[2]

فرض کنید در شاخص عملکرد زیر متغیرهای u_1, u_2 کمیتهای اسکالر باشند[3]:

$$L(u_1, u_2) = \tfrac{1}{2}u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2 + u_2.$$

در نقطهٔ ایستا مشتقات L نسبت به تمامی متغیرهای مستقل[4] مساوی صفر خواهد بود:

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = u_1 + u_2 = 0,$$

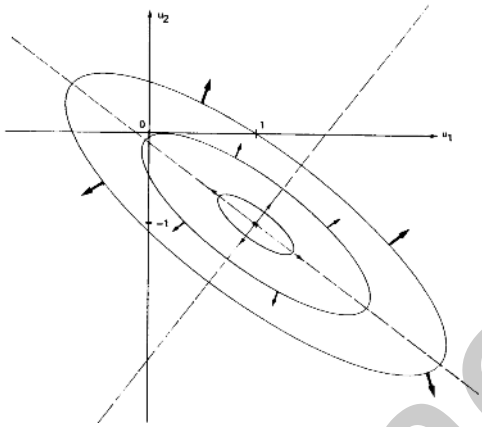
$$\frac{\partial L}{\partial u_2} = u_1 + 2u_2 + 1 = 0.$$

با حل همزمان این معادلات نتیجه خواهد شد:

$$u_1 = 1, \qquad u_2 = -1$$

1. Nonsingular
2. Optimization by Scalar Manipulations
3. Lewis, Frank. L., & Syrmos, Vassilis, L., *Optimal Control*, 2ed, John Wiley & Sons Inc, 1995. Page 3.
4. Arguments

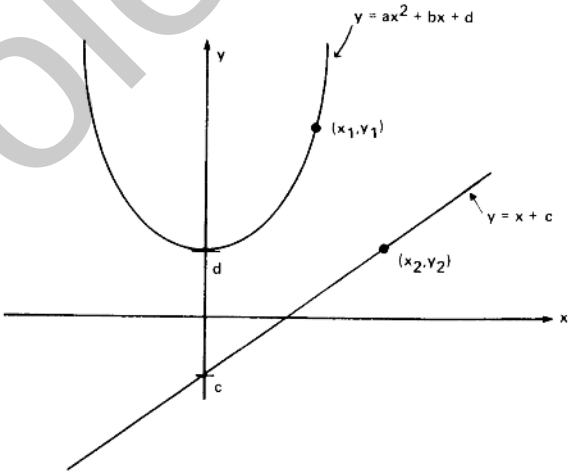
لذا نقطهٔ (1,-1) یک نقطهٔ ایستا خواهد بود. شکل زیر نمایشی از این مثال را ارائه می‌دهد. توجه شود که بردار گرادیان همواره در یک نقطه عمود بر جهت منحنی‌های تراز یا کانتور[1] بوده و جهت آن به سمت افزایش مقدار $L(u)$ می‌باشد.



شکل ۶: نمایش منحنی‌های تراز و بردار گرادیان

مثال ۵: بهینه سازی شاخص عملکرد با چندین قید[2]

مطلوبست یافتن کوتاهترین فاصله بین سهمی $y = ax^2 + bx + d$ و خط راست $y = x + c$[3]



شکل ۷: نمایش مسئله بهینه سازی با دو قید

1. Contours
2. Multiple Constraint
3. Lewis, Frank. L., & Syrmos, Vassilis, L., *Optimal Control*, 2ed, John Wiley & Sons Inc, 1995. Page 17.

حل: در این مسئله دو قید وجود دارند:

$$f(x_1,y_1)=y_1-ax_1^2-bx_1-d=0$$
$$f(x_2,y_2)=y_2-x_2-c=0$$

که در آن (x_1,y_1) یک نقطه روی سهمی و (x_2,y_2) یک نقطه روی خط می‌باشد. شاخص عملکرد بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$L(x_1,x_2,y_1,y_2)=\frac{1}{2}(x_1-x_2)^2+\frac{1}{2}(y_1-y_2)^2$$

بااستفاده از دو متغیر لاگرانژی λ_1,λ_2 خواهیم داشت:

$$H=\frac{1}{2}(x_1-x_2)^2+\frac{1}{2}(y_1-y_2)^2+\lambda_1(y_1-ax_1^2-bx_1-d)+\lambda_2(y_2-x_2-c)$$

شرایط لازم جهت ایستا بودن عبارتست از:

$$\begin{aligned}
H_{x_1} &= x_1 - x_2 - 2a\lambda_1 x_1 - b\lambda_1 = 0,\\
H_{x_2} &= -x_1 + x_2 - \lambda_2 = 0,\\
H_{y_1} &= y_1 - y_2 + \lambda_1 = 0,\\
H_{y_2} &= -y_1 + y_2 + \lambda_2 = 0,\\
y_1 &- ax_1^2 - bx_1 - d = 0,\\
y_2 &- x_2 - c = 0.
\end{aligned}$$

با حل این دستگاه چند معادله چند مجهول و با معلوم بودن ثابتهای a,b,c,d مقدار x_1 از معادلهٔ درجه سوم زیرجهت یافتن نقطهٔ بهینه بدست می‌آید:

$$(2ax_1+(b-1))(ax_1^2+(b-1)x_1+d-c)=0.$$

با مشخص شدن مقدار x_1 می‌توان سایر مجهولات x_2,y_1,y_2 را نیز محاسبه نمود. در صورتی که خط سهمی را قطع کند محل تلاقی خط و سهمی نقطهٔ بهینه خواهد بود. در این صورت نشان داده می‌شود که مقادیر $\lambda_1=\lambda_2=0$ می‌باشند.

مسئله ۱.۲.۳: حل شبه معکوس جهت یک مجموعه نامعین از معادلات خطی[1]

یک مجموعه نامعین از معادلات خطی $\mathbf{A}x = \mathrm{b}$ را در نظر بگیرید. در این معادلات $\mathbf{A}$ یک ماتریس مستطیلی است که تعداد سطرهای آن کمتر از ستون‌های آن می‌باشد(یعنی تعداد معادلات کمتر از تعداد عناصر x است)

الف) نشان دهید که کمترین طول بردار x که $\mathbf{A}x = b$ را ارضاء نماید عبارتست از:

$$x = \mathbf{A}^T(\mathrm{AA}^T)^{-1}\mathrm{b}$$

ماتریس $\mathbf{A}^T(\mathbf{AA}^T)^{-1}$ بنام شبه معکوس $\mathbf{A}$ نامیده می‌شود.

ب) با استفاده از قسمت قبل x را برای حالت زیر بیابید:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

حل الف): مسئله فوق را می‌توان بصورت زیر تعریف نمود: مطلوبست یافتن x را که تابع $L = x^T x/2$ را با قید $\mathbf{A}x = b$ کمینه نماید. در اینجا تعداد سطرهای $\mathbf{A}$ کمتر از تعداد ستون‌هایش می‌باشد.

$$H = L + \lambda^T(\mathbf{A}x - \mathrm{b}) \ , \qquad (۱)$$

شرط ایستائی عبارتست از:

$$0 = H_x = x^T + \lambda^T\mathbf{A} \implies x = -\mathbf{A}^T\lambda \qquad (۲)$$

با جاگذاری (۲) در معادلهٔ قید نتیجه می‌شود که:

$$-\mathbf{AA}^T\lambda = \mathrm{b} \implies \lambda = -(\mathbf{AA}^T)^{-1}\mathrm{b} \qquad (۳)$$

با جاگذاری (۳) در (۲) نتیجه می‌شود که:

$$x = \mathbf{A}^T(\mathbf{AA}^T)^{-1}\mathrm{b}$$

حل ب) با جاگذاری مقادیر $\mathbf{A}$, b خواهیم داشت:

1. Pseudo-Inverse Solution to an Indeterminate set of Linear Equation

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix} \quad , \quad b=\begin{bmatrix}10\\ 10\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x=\begin{bmatrix}1.6949\\ -1.1864\\ 3.5593\end{bmatrix} \Rightarrow L\min=8.4746$$

طول بردار x مقدار 4.1169 می‌شود چون شاخص عملکرد بصورت $L=x^T x/2$ در نظر گرفته شد.

حل عددی بصورت زیر است:

```
%*********numerical solution of 1.2.3********%
x0=[1;1;1];      %initial vector
Aeq=[1 2 3;1 -1 2];
beq=[10;10];
L=@(x)(x'*x/2);
[x,Lval]=fmincon(L,x0,[],[],Aeq,beq)
```

مسئله ۱.۲.۵: مسیر کمترین زمان از یک منطقهٔ دولایه‌ای با دامنه سرعت ثابت[1]

یک نجات غریق می‌تواند با سرعت υ_1 دویده و با سرعت υ_2 شنا نماید. فرض شود که $y>y_1$ مربوط به قسمت آب و $y<y_1$ مربوط به قسمت خشکی باشد. شخص ابتدا در $x=y=0$ قرار دارد ما می‌خواهیم مسیر کمترین زمان از نقطهٔ مبدأ به نقطهٔ (x_2,y_2) را که در آن $y_2>y_1$ است بدست آوریم. فرض می‌شود که مسیر از دو خط مستقیم تشکیل شود و این دو خط در لبهٔ آب تغییر جهت می‌دهند. مسئله را می‌توان بصورت زیر بیان نمود:

$$\min_{\theta_1,\theta_2} L=\frac{y_1\sec\theta_1}{\upsilon_1}+\frac{(y_2-y_1)\sec\theta_2}{\upsilon_2}$$

تحت قید:

$$f=x_2-y_1\tan\theta_1-(y_2-y_1)\tan\theta_2=0$$

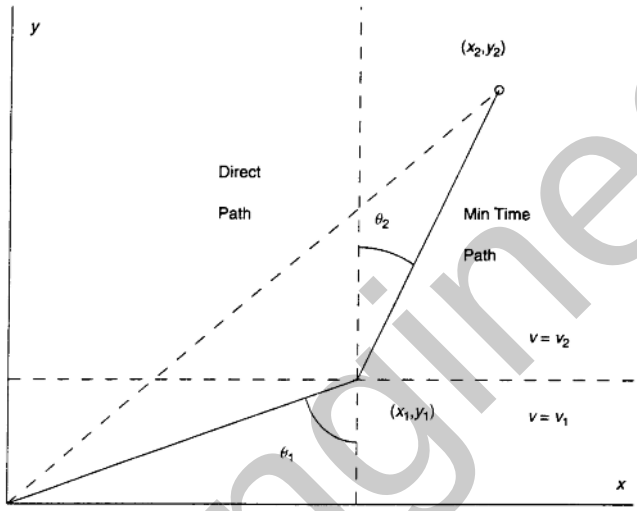
الف) با استفاده از ضرائب لاگرانژی نشان دهید که:

$$\frac{\sin\theta_1}{\upsilon_1}=\frac{\sin\theta_2}{\upsilon_2}$$

1. MinTime Path Through a Region with Two Layers of Constant Velocity Magnitude

قانون فوق بنام قانون اسنل[1] شناخته می‌شود.

ب) قانون اسنل و قید $f=0$ دو معادلهٔ غیرخطی تشکیل می‌دهند و دو مجهول θ_1,θ_2 بایستی بدست آیند. در حالتی که $x_2=300\,ft, y_2=300\,ft, y_1=100\,ft, \upsilon_1=25\,ft/s, \upsilon_1=6\,ft/s$ باشند نشان دهید که کمترین زمان نشان داده شده مساوی ۴۵/۱ ثانیه خواهد بود. همچنین نشان دهید که زمان مسیر مستقیم از مبدأ تا مقصد(خط مستقیم) مساوی ۵۲/۸ ثانیه بدست خواهد آمد.



شکل ۸: مسیر کمترین زمان در منطقهٔ دولایه‌ای با دامنه سرعت ثابت

حل الف)

$$L=\frac{y_1\sec\theta_1}{\upsilon_1}+\frac{(y_2-y_1)\sec\theta_2}{\upsilon_2}\quad,\quad f=x_2-y_1\tan\theta_1-(y_2-y_1)\tan\theta_2=0$$

تابع هامیلتونی عبارت است از:

$$H=\frac{y_1}{\upsilon_1\cos\theta_1}+\frac{(y_2-y_1)}{\upsilon_2\cos\theta_2}+\lambda\left(x_2-y_1\tan\theta_1-(y_2-y_1)\tan\theta_2\right)$$

شرایط ایستائی عبارت‌اند از:

$$H_{\theta_1}=\frac{y_1}{\upsilon_1}\left(\frac{\sin\theta_1}{\cos^2\theta_1}\right)-\lambda\frac{y_1}{\cos^2\theta_1}=0\Rightarrow\lambda=\frac{\sin\theta_1}{\upsilon_1}$$

1. Snell's Law

$$H_{\theta_2} = \frac{y_2 - y_1}{\upsilon_2}\left(\frac{\sin\theta_2}{\cos^2\theta_2}\right) - \lambda\frac{y_2 - y_1}{\cos^2\theta_2} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\sin\theta_2}{\upsilon_2}$$

از دو معادله اخیر نتیجه می‌شود که:

$$\frac{\sin\theta_1}{\upsilon_1} = \frac{\sin\theta_2}{\upsilon_2}$$

حل ب) برای مقادیر عددی قید وقانون اسنل به صورت زیر می‌باشند:

$$\tan\theta_1 + 2\tan\theta_2 = 3 \Rightarrow \tan\theta_1 = 3 - \tan\theta_2 \qquad (۱)$$

$$6\sin\theta_1 = 25\sin\theta_2 \qquad (۲)$$

معادله اخیر به صورت زیر می‌شود:

$$\frac{6\tan\theta_1}{\sqrt{1+\tan^2\theta_1}} = \frac{25\tan\theta_2}{\sqrt{1+\tan^2\theta_2}} \Rightarrow \frac{36\tan^2\theta_1}{1+\tan^2\theta_1} = \frac{625\tan^2\theta_2}{1+\tan^2\theta_2} \qquad (۳)$$

با جایگذاری معادله (۱) در معادله (۳) وانجام محاسباتی خواهیم داشت:

$$-1178\tan^4\theta_2 + 3534\tan^3\theta_2 - 2891\tan^2\theta_2 - 216\tan\theta_2 + 162 = 0$$

با حل این معادله در محدودهٔ $\theta_2 \in [0, \pi/2]$ داریم:

$$\tan\theta_2 = 0.2291 \Rightarrow \theta_2 = 0.225\,rad = 12.9^\circ$$

$$\Rightarrow \tan\theta_1 = 2.5416 \Rightarrow \theta_1 = 1.196\,rad = 68.5^\circ$$

زمان مسیر برای مقادیر عددی فوق عبارت است از:

$$t = \frac{y_1}{\upsilon_1\cos\theta_1} + \frac{(y_2 - y_1)}{\upsilon_2\cos\theta_2} = \frac{100}{25\cos 68.5} + \frac{200}{6\cos 12.9} = 45.11\sec$$

برای مسیر مستقیم داریم:

$$\tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ \Rightarrow t = \frac{y_1}{\upsilon_1\cos\theta} + \frac{(y_2 - y_1)}{\upsilon_2\cos\theta} = \frac{100}{25\cos 45} + \frac{200}{6\cos 45} = 52.797\sec$$

۲-۶- شرایط کافی برای وجود یک کمینه[1]

همانطوری که اشاره شد یک نقطهٔ ایستا همواره یک نقطهٔ کمینه نیست یعنی ممکن است است این نقطه یک نقطهٔ زین اسبی یا تکین باشد. برای اینکه یک نقطه کمینه باشد علاوه بر شرط لازم بایستی شرط کافی نیز برقرار شود یعنی مقادیر ویژهٔ ماتریس هسین مثبت باشند. در این قسمت میخواهیم جهت مسائلی که قیود تساوی دارند ماتریس هسین را محاسبه نماییم. با انجام محاسباتی که در صفحهٔ ۳۵ کتاب برایسون آمده است نتیجه گرفته شده که شرط کافی برای یک کمینه محلی در یک نقطهٔ ایستا $(H_y = 0, f = 0)$ عبارتست از $H_{yy} > 0$ و در صورتی که y به بردارهای تصمیم گیری u[2] و بردار وابسته x[3] تجزیه گردد شرط کافی بصورت $(L_{uu})_f > 0$ در می‌آید که در آن خواهیم داشت:

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial u^2}\right)_{f=0} = H_{uu} - H_{ux} f_x^{-1} f_u - f_u^T (f_x^T)^{-1} H_{xu} + f_u^T (f_x^T)^{-1} H_{xx} f_x^{-1} f_u$$

مثال ۶: بهینه سازی شاخص عملکرد درجه دوم با قید خطی[4]

شاخص عملکرد زیر را در نظر بگیرید[5]:

$$L(x, u) = \tfrac{1}{2}[x \quad u]\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} + [0 \quad 1]\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

در این رابطه متغیرهای u_1, u_2 با متغیرهای x, u جایگزین شده‌اند. معادلهٔ قید نیز بصورت زیر است:

$$f(x, u) = x - 3 = 0$$

تابع H عبارتست از:

$$H = L + \lambda^T f = \tfrac{1}{2}x^2 + xu + u^2 + u + \lambda(x - 3).$$

که در آن λ یک مقدار اسکالر می‌باشد. شرایط لازم برای ایستا بودن یک نقطه عبارتست از:

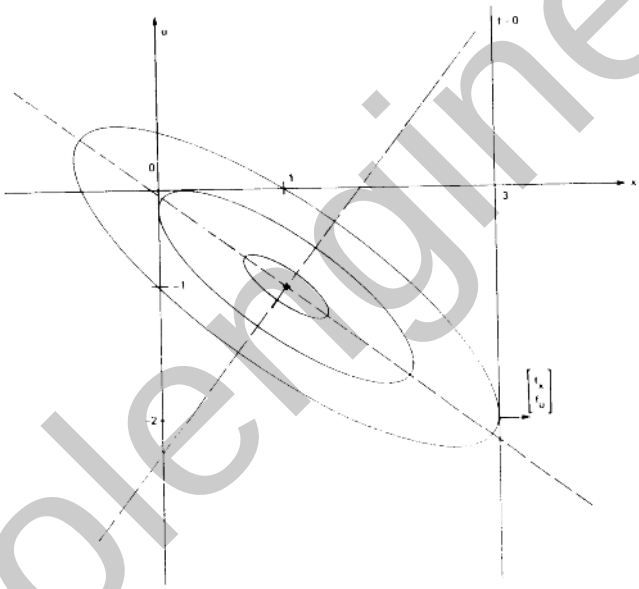
1. Sufficient Conditions for a Minimum
2. Decision Vector
3. Dependent Vector
4. Quadratic Surface with Linear Constraint
5. Lewis, Frank. L., & Syrmos, Vassilis, L., *Optimal Control*, 2ed, John Wiley & Sons Inc, 1995. Page 10.

$$H_x = x + u + \lambda = 0,$$
$$H_u = x + 2u + 1 = 0.$$

دو معادله اخیر و معادلهٔ قید $f(x,u) = x - 3 = 0$ یک دستگاه سه معادله و سه مجهول را تشکیل می‌دهند و با حل این دستگاه نتیجه زیر بدست می‌آید:

$$x = 3\ ,\ u = -2\ ,\ \lambda = -1$$

لذا نقطه $(x,u) = (3,-2)$ یک نقطهٔ ایستا خواهد بود. حال برای اینکه نشان دهیم این نقطه ایستا یک کمینه است بایستی شرط کافی را بکار گرفت. از آنجائی که $L^f_{uu} = 2$ یک مقدار مثبت است پس نقطهٔ ایستا یک نقطهٔ کمینه خواهد بود. منحنی‌های تراز و منحنی قید در شکل زیر نمایش داده شده است:



شکل ۹: منحنی های تراز $L(x,u)$ و قید $f(x,u)$

در اینجا تذکر چند نکته ارزشمند خواهد بود. ابتدا ملاحظه شود که گرادیان $f(x,u)$ در صفحهٔ (x,u) عبارتست از:

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

و گرادیان $L(x,u)$ در صفحه عبارتست از:

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + u \\ x + 2u + 1 \end{bmatrix}$$

در نقطهٔ کمینه $(3,-2)$ این مقدار عبارتست از:

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

توجه شود که در نقطهٔ ایستا گرادیان f و L موازی یکدیگر خواهند بود. این بدان معنی است که کمینه در حالت وجود قید در محلی واقع میشود که در آنجا قید بر منحنی بیضی تراز L مماس گردد. در این محل حرکت در طول خط $f=0$ در هر دو جهت باعث افزایش مقدار L خواهد شد.

مثال ۷: مسئله کمینه‌یابی با استفاده از قید غیر خطی[1]

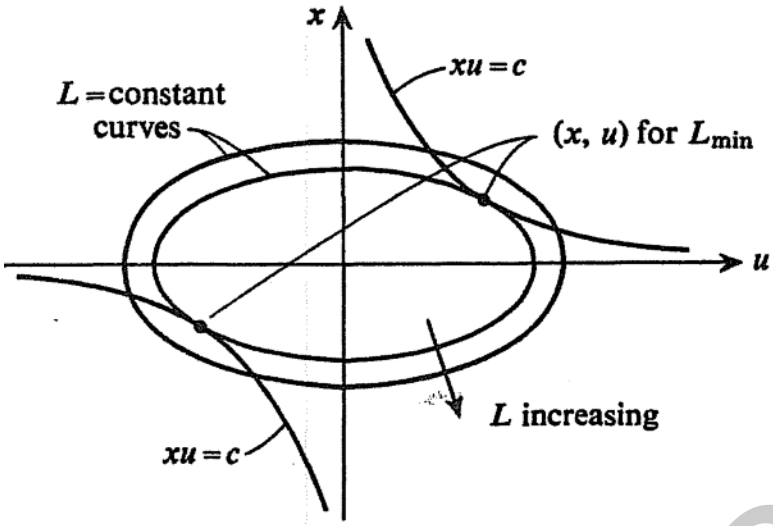
مطلوبست یافتن کمیت اسکالر u را که تابع $L=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{u^2}{b^2}\right)$ را با قید غیرخطی[2] زیر کمینه نماید:

$$f(x,u)=c-xu=0$$

که در آن x یک پارامتر اسکالر بوده و a,b,c ثابتهای مثبت هستند[3].

حل: منحنی‌های L ثابت بصورت بیضی‌های مختلف درمی‌آیند بطوری که با افزایش L اندازهٔ بیضی بزرگ می‌شود. از سوی دیگر $c-xu=0$ یک هذلولی(قطع زائد)[4] با دو شاخه (شکل ۱۰)می‌باشد. کوچکترین مقدار L که قید را هم ارضاء کند هنگامی است که بیضی مماس بر هذلولی گردد.

1. A Quadratic-Quadratic Problem
2. Quadratic Constraint
3. Bryson, Applied Optimal Control Optimization, Estimation & Control 1975, Page 11
4. Hyperbola



شکل ۱۰: کمینه‌یابی با استفاده از قید غیرخطی

از لحاظ تحلیلی تابع H عبارتست از:

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{u^2}{b^2}\right) + \lambda(c - xu)$$

شرط لازم برای مقدار ایستا عبارت است از:

$$c - xu = 0\,, \qquad \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{x}{a^2} - \lambda u = 0\,, \qquad \frac{\partial H}{\partial u} = \frac{u}{b^2} - \lambda x = 0$$

با استفاده از سه رابطهٔ فوق نتایج زیر حاصل می‌گردد:

$$x = \pm\sqrt{\frac{ac}{b}}\,, \qquad u = \pm\sqrt{\frac{bc}{a}}\,, \qquad \lambda = \frac{1}{ab}\,, \qquad J = L_{\min} = \frac{c}{ab}$$

برای اینکه نقطهٔ ایستا کمینه باشد شرط کافی مورد بررسی قرار می‌گیرد یعنی ماتریس $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial u^2}\right)_{f=0}$ بایستی مثبت معین باشد. با انجام محاسباتی می‌توان به نتیجه زیر رسید:

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial u^2}\right)_{f=0} = H_{uu} - H_{ux} f_x^{-1} f_u - f_u^T (f_x^T)^{-1} H_{xu} + f_u^T (f_x^T)^{-1} H_{xx} f_x^{-1} f_u$$

$$\left(-\frac{a}{b}, 1\right) \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2}, & -\frac{1}{ab} \\ -\frac{1}{ab}, & \frac{1}{b^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{a}{b} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{4}{b^2} > 0$$

و شرط کافی ارضاء می‌شود یعنی نقطهٔ ایستا یک نقطهٔ کمینه خواهد بود. توجه شود که دو نقطه وجود دارند که در آن مقدار کمینه L واقع می‌شود. همچنین توجه شود که:

$$\lambda = \frac{\partial J}{\partial c}$$

۱.۲.۶: مسئله عمومی شاخص عملکرد درجهٔ دوم با قیود تساوی خطی[1]:

مطلوبست یافتن بردار پارامتری x, u که شاخص عملکرد $L = \frac{1}{2}(x^T Qx + u^T Ru)$ را تحت قید $x + Gu - c = 0$ کمینه نماید.

الف) قیود را بابردار لاگرانژی λ^T به شاخص عملکرد ملحق نموده و نشان دهید که:

$$u = Kc\ ,\quad L^{\min} = \frac{1}{2}c^T Sc\ ,\quad -\lambda = Sc \equiv \left[\frac{\partial L^{\min}}{\partial c}\right]^T$$

که در آن:

$$K = (R + G^T QG)^{-1} G^T Q \equiv R^{-1} G^T S \ \text{ if } \ R^{-1} \ \text{ exists}\ ,$$
$$S = Q - QG(R + G^T QG)^{-1} G^T Q \equiv (Q^{-1} + GR^{-1}G^T)^{-1} \ \text{ if } \ Q^{-1},\ R^{-1} \ \text{ exist}$$

هم ارز بودن دو تساوی اخیر برای K و S حالت خاصی از لم معکوس ماتریس[2] می‌باشد. این دو عبارت در ادامه کتاب بدفعات مورد استفاده قرار می‌گیرند.

ب) با استفاده از حل قسمت الف) مسئله را با داده‌های زیر حل کنید:

$$Q = \text{diag}[1\ 2\ 3]\ ,\ R = \text{diag}[4\ 5]\ ,\ G = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}\ ,\ c = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

حل: قیود را با ضریب لاگرانژی λ به شاخص عملکرد ملحق می‌نماییم:

$$H \triangleq (x^T Qx + u^T Ru)/2 + \lambda^T (x + Gu - c) \qquad (۱)$$

1.General Quadratic Performance Indes(QPI) with Linear Equality Constraintsl
2. Matrix Inversion Lemma

شرایط ایستا عبارتند از:

$$0 = H_x = x^T Q + \lambda^T \qquad (۲)$$

$$0 = H_u = u^T R + \lambda^T G \qquad (۳)$$

معادلات (۲) و (۳) و قیود معادلات خطی از مجهولات x, u, λ می‌باشند. حل (۲) برای λ نتیجه می‌دهد:

$$\lambda = -Qx \equiv -Q(c - Gu) \qquad (۴)$$

حل (۳) برای u با استفاده از (۴) نتیجه می‌دهد:

$$u = R^{-1}G^T (Q^{-1} + GR^{-1}G^T)^{-1} c \qquad (۵)$$

که در آن فرض شده است که R^{-1} موجود باشد. جاگذاری (۵) در معادله قید نتیجه می‌دهد:

$$x = Q^{-1}(Q^{-1} + GR^{-1}G^T)^{-1} c \qquad (۶)$$

جاگذاری (۵) و (۶) در $L \square \frac{1}{2}(x^T Qx + u^T Ru)$ نتیجه می‌دهد:

$$L_{min} = c^T Sc / 2 \ , \ S \square (Q^{-1} + GR^{-1}G^T)^{-1} \qquad (۷)$$

جاگذاری (۶) در (۴) نتیجه می‌دهد:

$$-\lambda = (Q^{-1} + GR^{-1}G^T)^{-1} c \equiv Sc \qquad (۸)$$

به روش دیگر بدون یک متغیر لاگرانژی مقدار x از معادله قید بدست می‌آید و $x = c - Gu$ را در معادله شاخص عملکرد درجه دوم جاگذاری می‌کنیم:

$$2L = (c - Gu)^T Q (c - Gu) + u^T Ru \qquad (۹)$$

شرط ایستائی بصورت ساده زیر در می‌آید:

$$0 = L_u = (c - Gu)^T Q(-G) + u^T R \implies u = (R + G^T QG)^{-1} G^T Qc \qquad (۱۰)$$

جاگذاری (۱۰) در معادله قید نتیجه می‌دهد:

$$x = [I - G(R + G^T QG)^{-1} G^T Q]c \qquad (۱۱)$$

جاگذاری (۹) و (۱۰) در معادله $L = (x^T Qx + u^T Ru)/2$ نتیجه می‌دهد:

$$L_{min} = c^T Sc/2 \quad , \quad S = Q - QG(R + G^T QG)^{-1} G^T Q \qquad (۱۲)$$

مساوی قرار دادن ضرائب c در روابط (۵) و (۱۰) نتیجه می‌شود:

$$K = R^{-1} G^T S \equiv (R + G^T QG)^{-1} G^T Q \qquad (۱۳)$$

مساوی قرار دادن ضرائب c در روابط (۶) و (۱۱) و ضرب کردن هر دو طرف در Q نتیجه می‌شود:

$$S = (Q^{-1} + GR^{-1} G^T)^{-1} \equiv Q - QG(R + G^T QG)^{-1} G^T Q \qquad (۱۴)$$

مستقیماً نیز میتوان اتحادهای[1] (۱۳) و (۱۴) را بدست آورد. توجه گردد که (۱۴) حالت خاصی از لم معکوس ماتریس می‌باشد.

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} B(C + DA^{-1} B)^{-1} DA^{-1} \qquad (۱۵)$$

اهمیت این لم بدین صورت است که اگر A^{-1} از قبل معلوم باشد آنگاه معکوس $(A + BCD)$ را می‌توان از عبارت سمت راست (۱۵) محاسبه نمود و نتیجه آن در صورتی که بعد C از A کمتر باشد تبدیل یک ماتریس با مرتبه کوچکتر خواهد بود.

حل ب)

$$Q = \text{diag}[1\ 2\ 3] \ , \ R = \text{diag}[4\ 5] \ , \ G = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \ , \ c = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$S = (Q^{-1} + GR^{-1} G^T)^{-1} \ , \ K = R^{-1} G^T S$$

$$x = Q^{-1} Sc \quad \rightarrow \quad x = \begin{bmatrix} -2.506 \\ 1.6914 \\ -0.552 \end{bmatrix}$$

$$u = Kc \quad \rightarrow \quad u = \begin{bmatrix} 0.6246 \\ -0.683 \end{bmatrix}$$

$$L_{min} = c^T Sc/2 \ , \quad \rightarrow \quad L_{min} = 8.4099$$

1. Identities

۲-۷- حل عددی مسائل بهینه‌سازی استاتیکی با استفاده از روش گرادیان[1]

در قسمت قبل از روابط تحلیلی برای تعیین بردار پارامتری y که $L(y)$ را با قیود $f(y)=0$ کمینه نماید استفاده گردید. این روش برای حالتی که $f(y), L(y)$ روابط کاملاً ساده‌ای انتخاب شوند کاربرد دارد در غیراینصورت بایستی از روشهای عددی برای حل مسئله استفاده نمود.

۲-۷-۱- الگاریتم گرادیان برای بهینه‌سازی پارامترها با قیود تساوی(POP)[2]

یک روش عددی مستقیم آن است که یک مقدار اولیهٔ y را حدس زده و سپس مقدار نمو کوچک Δy در جهت سریعترین سقوط $-H_y^T$ را به آن بیفزاییم[3]. این روش به شرط وجود جواب منجر به رسیدن به کمینه محلی خواهد شد. اگر چندین کمینه محلی وجود داشته باشد این روش نمی‌تواند کمینه اصلی را بیابد. انتخاب اندازهٔ نمو[4] نیازمند تجربه می‌باشد، در صورتی که نمو بزرگ انتخاب شود ممکن است از روی کمینه عبور نماییم و در صورتی که نموها خیلی کوچک انتخاب شوند تعداد تکرار برای رسیدن به جواب افزایش می‌یابد. الگوریتم کار به صورت زیر می‌باشد:

Enter data

- Guess y.
- Choose $k > 0$ for a minimum, $k < 0$ for a maximum.
- Choose η so that $|\Delta y|$ is not too large. $0 < \eta \leq 1$.
- Choose stopping tolerance tol.

Find L, f, L_y, f_y, f_y^*, and H_y

$(*) L = L(y),\ f = f(y),\ L_y = L_y(y),\ f_y = f_y(y).$

- $f_y^* = f_y^T (f_y f_y^T)^{-1}.$
- $\lambda^T = -L_y f_y^*.$
- $H_y = L_y + \lambda^T f_y.$

1. Numerical Solution with Gradient Methods
2. POP-A Gradient Algorithm for Parameter OPtimization with Equality Constraints
3. The Direction of Steepest Descent
4. Step Size

Find improved value of y

- $dy = -\eta f_y^* f - k H_y^T$.
- If $\max(|f|,\ |dy|/\sqrt{p}) < tol$, then end.
- Replace y by $y + dy$ and go to (*).

$\sqrt{p}$ طول y می‌باشد. لازم به توضیح است که پارامتر y بهتر است بصورت نرمالیزه[1] در آیند اینکار سرعت جواب گرفتن را افزایش می‌دهد.

جدول ۱.۱ در صفحهٔ ۳۰ کتاب فهرست برنامه Matlab را جهت بکارگیری الگاریتم POP نشان می‌دهد البته الگاریتم‌های گرادیان دیگری نیز وجود دارند که سرعت بالائی در جهت رسیدن به جواب ایجاد می‌نمایند. اما در مقابل پیچیدگی آنها نیز بیشتر می‌شود(علاقه‌مندان جهت جزئیات بیشتر به متن کتاب مراجعه کنند).

جدول ۱.۱ یک کد Matlab برای دستور POP

```
function [L,y,f]=pop(name,y,k,tol,eta,mxit)
%POP - gradient code for Para. Opt. Pbs. w. equality constraints
%[L,y,f]=pop(name,y,k,tol,eta,mxit)
  % Parameter OPtimization using a generalized gradient algorithm.
  % Outputs L and y (p by 1) are optimum performance index & parameter
  % vector; constraints are f = 0 where f is (n by 1) with n < p; user
  % must supply a subroutine 'name' that computes L,f,Ly,fy; input y
  % is a guess; y should be normalized so that a change of one unit in
  % each element of y is approx. of same significance; k is a scalar
  % step size parameter; stopping criterion is max(fn,dyn)<tol, where
  % fn = norm(f); dyn = norm(dy)/sqrt(p); eta = fraction of constraint
  % violation to be removed; mxit=max number of iterations;    8/20/97
it=0; dyn=1; fn=1; p=length(y);
disp('    it        L        fn         dyn')
while max(fn,dyn) > tol
 [L,f,Ly,fy]=feval(name,y);  fn=norm(f);
 fyi=fy'/(fy*fy');        % Generalized inverse
 lat=-Ly*fyi;
 Hy=Ly+lat*fy;
 dy=-eta*fyi*f-k*Hy'; dyn=norm(dy)/sqrt(p);
 disp([it L fn dyn]);
 y=y+dy;
 if it> mxit, break, end
 it=it+1;
end
```

۲-۷-۲- دستور CONSTR در جعبه ابزار بهینه‌سازی Matlab

1. Normalized

CONSTR[1] یک کد شبه نیوتنی در جعبه ابزار بهینه‌سازی Matlab می‌باشد که یک شاخص عملکرد اسکالر $f(y)$ را با یک بردار از قیود تساوی و ناتساوی $g(y) \le 0$ کمینه می‌نماید. در اینجا y یک بردار پارامتری است. استفاده از این کد نسبت به برنامه POP ساده‌تر می‌باشد چون کاربر نیازی به تعیین پارامتر k ندارد. همچنین این کد قیود ناتساوی را هم پشتیبانی می‌کند در صورتی که POP این قابلیت را ندارد.

کاربر بایستی یک فایل تابع Matlab (بدون نام) ایجاد نماید که در آن $f(y), g(y)$ محاسبه شوند و بایستی یک حدس اولیه‌ای برای y بکارگیرد. تولید یک تابع برای محاسبهٔ گرادیان‌های f_y, g_y اختیاری است. در صورتی که انجام نشود فرمان CONSTR بصورت عددی آنرا از طریق اختلاف محدود[2] محاسبه می‌نماید. اگر گرادیان‌ها بکارگرفته شود همگرائی تسریع خواهد شد.

کاربر همچنین بایستی تعدادی قیود تساوی را وارد نماید این قیود بایستی قسمت اولیه بردار قیود g را تشکیل دهند. کاربر بایستی در اغلب مواقع مقادیر بالائی و پایینی پارامترها را بکار گیرد هر چند که نیازی به این کار نیست. انتخاب‌های دیگر شامل مشخص نمودن دقت (f, g, y) و مشخص نمودن تعداد تکرار محاسبات قبل از توقف می‌باشد.

شکل[3] فرمان CONSTR بصورت $y = \text{constr}(\text{'name'}, y_0, \text{optn}, \text{vlb}, \text{vub}, \text{'nameg'}, p)$ می‌باشد که در آن ورودی y_0 حدس اولیه و خروجی y مقدار بهینهٔ y می‌باشند.

'name' یک m فایل است که f, g را محاسبه می‌کند.

'optn' بردار انتخاب‌های مختلف می‌باشد(به مثال صفحه ۳۲ کتاب مراجعه شود).

vlb برداری از حدود پایین y و vub برداری از حدود بالائی y می‌باشند.

1. CONSTR Finds the constrained minimum of a function of several variables
2. Finite Difference
3. Syntax

nameg یک m فایل دیگری است که گرادیان‌های تحلیلی f, g را داراست(استفاده از این پارامتر اختیاریست).

P برداری از پارامترهای ثابت می‌باشد که در کدهای name و nameg مورد نیاز می‌باشد.

مثال ۸: حل عددی تمرین ۱.۲.۱ کتاب در خصوص تعیین بزرگترین محیط مستطیلی که در داخل یک بیضی محاط می‌شود.

لیست برنامه

```
% Problem (1-2-1); y is a vector where: (y(1),y(2))=(x,y)
y0=[1 1]; % y0 initial estimate
optn(1)=1; % Display parameter (Default:0). 1 displays some results.
optn(13)=1; % Number of equality constraint
optn(14)=1000; % Maximum number of iterations
y=constr('Problem1_2_1',y0,optn)
[L,f]=Problem1_2_1(y);
-L,f
disp('normal termination');
```

متن فایل تابع معیار و قیود مسئله:

```
function [L,f]=Problem1_2_1(y)
% y is a vector where: (y(1),y(2))=(x,y)
a=1; b=2;
L = -4*(y(1)+y(2));
% constraint problem
f = y(1)^2/a^2+y(2)^2/b^2-1;
```

نتیجه حل عددی که همان حل تحلیلی است بصورت زیر بدست خواهد آمد:

```
x=0.4471          y=1.7887          Pmax=8.9443
```

مثال ۹: حل تمرین ۱.۳.۱۹ کتاب در خصوص مسئله QQ[1]

مطلوبست یافتن (x, y, z) برای حداکثر نمودن $L = xy + 2xz + 3yz$ به شرطی که قید زیر ارضاء گردد:

$$f = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 = 0$$

جواب: $x = \pm 0.54098, y = \pm 0.39379, z = \pm 0.36389, L_{\max} = 1.03659$

1. Quadratic-Quadratic Problem

فهرست برنامه Matlab برای این مسئله بصورت زیر است:

متن فایل اصلی

```
%Problem 1.3.19 a Quadratic-Quadratic using MATLAB code CONSTR;
clc; clear;
y0=[1 1 1];
optn(1)=1; % Display parameter (Default:0). 1 displays some results.
Optn(13)=1; % Number of equality constraint
optn(14)=1000; % Maximum number of iterations
y=constr('fun',y0,optn)
[L,f]=fun(y);
```

مقدار حداکثر شاخص عملکرد با حذف علامت منفی بدست می‌آید

```
L_max=-L, f
disp('Normal Termination');
```

متن فایل دوم

```
function [L,f]=fun(y)
L=-(y(1)*y(2)+2*y(1)*y(3)+3*y(2)*y(3));
```

برای بدست آوردن ماکزیمم یک منفی به معادلات اضافه شده است.

```
f=y(1)^2+2*y(2)^2+3*y(3)^2-1;
```

نتیجهٔ بدست آمده از اجرای برنامه Matlab

```
f-COUNT    FUNCTION        MAX{g}          STEP  Procedures
    4           -6             5             1
   10     -5.14493       4.03858          0.25
   15      -3.3233       2.41759           0.5
   19     -1.40196      0.467691             1
   23     -1.23128      0.258696             1
   27     -1.09432     0.0563711             1
   31     -1.03773     0.0011117             1
   35     -1.03659 2.65193e-006             1   Hessian modified
   36     -1.03659 5.64965e-010             1   Hessian modified
Optimization Converged Successfully
Active Constraints:
     1
y =
    0.5410    0.3938    0.3639
L_max =
   1.0366
f =
  5.6497e-010
```

توجه شود که حل عددی بسته به اینکه از کدام شرط اولیه آغاز شود یکی از جوابها را می‌دهد. در صورتی که

حل تحلیلی همه جواب‌ها را نتیجه می‌دهد.

تکلیف T4: مقادیر ویژهٔ ماتریس هسین و نمایش منحنی شاخص عملکرد و نقاط ایستا

الف) مقادیر ویژهٔ ماتریس هسین را در سه حالت گفته شده در مثال(۱) بدست آورده و منحنی شاخص عملکرد را برای مقادیر مختلف ترسیم و نوع و محل نقطهٔ ایستا را در هر حالت تعیین نمایید(جهت ترسیم منحنی شاخص عملکرد می‌توان با دستورات ezcontour و ezmeshc در نرم‌افزارMatlab بصورت زیر استفاده نمود):

```
close all; clear all; clc;
syms y1 y2;
L = y1^2 -2*y1*y2 + 4*y2^2;          % a)
% L = -y1^2 + 2*y1*y2 + 3*y2^2;      % b)
% L = y1^2 - 4*y1*(y2^2) + 3*y2^4;   % c)
% L = 5*y1^2 + y1*y2 - 3*y2^2;       % d)
ezcontour(L,[-1,1]); figure;
ezmeshc(L,[-1,1]);
```

برای محاسبهٔ مقادیر ویژه ماتریس هسین از دستور زیر استفاده شود:

```
close all; clear all; clc;
syms y1 y2;
L = y1^2 -2* y1*y2 + 4*y2^2;
Ly1 = diff(L,'y1'); Ly1y1 = diff(Ly1,'y1'); Ly1y2 = diff(Ly1,'y2');
Ly2 = diff(L,'y2'); Ly2y1 = diff(Ly2,'y1'); Ly2y2 = diff(Ly2,'y2');
Lyy=[Ly1y1 Ly1y2; Ly2y1 Ly2y2]
eig(Lyy)
```

ب) در شاخص عملکرد زیر وجود کمینه را بررسی نموده وشکل آنرا برای مقادیر مختلف L ترسیم کرده و مشخص نمائید که جزو کدام دسته a یا b یا c در مثال(۱) می‌باشد.

$$L=[y_1 \quad y_2]\begin{bmatrix}5 & 2\\ -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=5y_1^2+y_1y_2-3y_2^2$$

ج) شاخص عملکردی را بصورت دلخواه در نظر بگیرید که در آن یک مقدار ویژهٔ هسین منفی و یک مقدار ویژه صفر باشد شکل این تابع L را برای مقادیر مختلف ترسیم نموده مشخص نمائید که جزو کدام دسته a یا b یا c در مثال(۱) می‌باشد.

تکلیف T5: مسائل بهینه‌سازی استاتیکی با قیود تساوی

الف) مسئله ۱.۲.۱ و ۱.۲.۲ را به همراه یک مسئله اختیاری از مسائل باقیمانده یعنی ۱.۲.۶ تا ۱.۲.۲۰ (صفحات ۲۸-۱۱ کتاب برایسون) حل نموده و تحویل دهید.

ب) مسئله ۱.۴.۱: فاصلهٔ کمینه و بیشینه یک دایره از یک بیضی[1]: با استفاده از ضرائب لاگرانژی و انجام مشتق مرتبه دوم نشان دهید که با فرض $a > b > 1$ کوچکترین فاصله بین دایره $x^2 + y^2 = 1$ و بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ در نقاط $(x, y) = (0, \pm 1)$ روی دایره و $(x, y) = (0, \pm b)$ روی بیضی و بزرگترین فاصله در نقاط $(x, y) = (\mp 1, 0)$ روی دایره و $(x, y) = (\pm a, 0)$ روی بیضی رخ می‌دهند(صورت مسئله در کتاب اشکال تایپی دارد اصلاح شود).

مسئله ۱.۲.۱: تعیین بزرگترین محیط مستطیلی که در داخل یک بیضی محاط می‌شود.

مطلوبست یافتن x و y که $P = 4(x + y)$ را تحت قید زیر حداکثر نماید:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (۱)$$

مقادیر x و y را برای حالتی که $a = 1$, $b = 2$ باشد بیابید.

مسئله ۱.۲.۲: تعیین مستطیل متوازی السطوح که دارای بیشترین حجم بوده و در یک بیضوی محاط شده باشد.

1. Min and Max Distance from a Circle to an Ellipse

مطلوبست یافتن x, y, z که تابع $V = 8xyz$ را با قید $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ بیشینه نماید: مقادیر x, y, z را برای حالتی که $a=1$, $b=2$, $c=3$ باشد بیابید.

تکلیف T6: حل عددی مسائل بهینه‌سازی استاتیکی

الف) مسئله ۱.۲.۲ را به صورت عددی با دستور FMINCON در Matlab حل کنید.

ب) یک مسئله اختیاری از مسائل ۱.۲.۳ تا ۱.۲.۱۸ از فصل اول کتاب برایسون به روش عددی حل شود.

ج) مسئله ۱.۳.۲۰: مطلوب است پیدا نمودن کوتاهترین فاصله بین دو بیضی[1] بطوری که در بیضی اول داریم:

$$\frac{\bar{x}^2}{2^2}+\frac{\bar{y}^2}{1}=1 \quad \text{که در آن:} \quad \begin{bmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}, \theta=30^\circ$$

و در بیضی دوم داریم:

$$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$$

ترسیم منحنی بیضی‌ها و نمایش محل کمترین فاصله به همراه برنامه‌های کامپیوتری Matlab از طریق ایمیل ارسال گردد.

1. Minimum Distance between Two Ellipses

فصل سوم: بهینه‌سازی دینامیکی

۳-۱- سیستم‌های دینامیکی گسسته[1]

یک سیستم دینامیکی گسسته(ناپیوسته) توسط بردار حالت n بعدی $x(i)$ در مرحله iام توصیف می‌شود. انتخاب یک بردار کنترل m بعدی $u(i)$ انتقال سیستم به حالت $x(i+1)$ را از طریق رابطهٔ زیر تعیین می‌نماید:

$$x(i+1)=f[x(i),u(i),i] \qquad (۱)$$

که در آن:

$$x(0)=x_0 \qquad (۲)$$

یک مسئله بهینه‌سازی نسبتاً کلی برای چنین سیستمی عبارت است از یافتن دنبالهٔ بردارهای کنترل $u(i)$ برای $i=0,\ldots,N-1$ که شاخص عملکرد به شکل زیر را:

$$J=\phi[x(N)]+\sum_{i=0}^{N-1}L[x(i),u(i),i] \qquad (۳)$$

تحت روابط (۱) و (۲) در صورتی که x_0 و N و تابع f در ابتدا مشخص شوند بهینه نماید. این یک مسئله بهینه‌سازی پارامتری با قیود تساوی می‌باشد بطوری که می‌توان آنرا با استفاده از روش فصل قبل با فرض اینکه تاریخچه $u(i)$ بعنوان پارامترهای مجهول باشند حل نمود. یک حدس اولیه‌ای از $u(i)$ در نظر گرفته سپس تاریخچهٔ $x(i)$ محاسبه می‌گردند تا نهایتاً مقدار J تعیین گردد $J_{u(i)}$ یعنی گرادیان J نسبت به $u(i)$ را می‌توان از طریق عددی با محاسبهٔ تاریخچهٔ حالت $N\times m$ دفعه در حالی که صرفاً یک المان $u(i)$ در هر بار تغییر کند را می‌توان محاسبه نمود. کد Matlab بنام FMINU[2] اینکار را انجام خواهد داد. و انجام این عمل برای مسائل کوچک روی کامپیوترهای شخصی کاملاً سریع می‌باشد. این کد محاسبه را تا هنگام یافتن مقدار بهینه $u(i)$ ادامه می‌دهد. در هر حال تمامی مولفه‌های $J_{u(i)}$ را می‌توان توسط یک دنباله بازگشتی از یک مجموعه معادلات[3] که به معادلات حالت ملحق می‌شوند محاسبه نمود. در هنگام حل مسائل بزرگ، این عمل باعث

1. Discrete Dynamic Systems
2. Function MINimization Unconstrained
3. One Backward Sequencing of a Set of Equations

صرفه‌جوئی قابل ملاحظه از لحاظ زمانی خواهد شد. در ادامه توسعهٔ این معادلات الحاقی[1] که سودمندی فرم دنباله‌ای (۱) را به همراه دارد مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۳-۱-۱- شرایط لازم برای یک حل ایستا[2]

قیود (۱) و (۲) را به معادلهٔ شاخص عملکرد (۳) با یک دنباله‌ای از بردارهای ضرائب لاگرانژی $\lambda(i)$ بصورت زیر ملحق(اضافه) می‌نماییم:

$$\bar{J} = \phi[x(N)] + \sum_{i=0}^{N-1} \{L(i) + \lambda^T(i+1)[f(i) - x(i+1)]\} + \lambda^T(0)[x_0 - x(0)] \tag{۴}$$

تابع هامیلتون گسسته[3] $H(i) = H[x(i), u(i), \lambda(i+1), i]$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(i) = L[x(i), u(i), i] + \lambda^T(i+1) f[x(i), u(i), i] \tag{۵}$$

با استفاده از رابطهٔ (۵) در (۴) و جابجائی اندیس‌های جمع[4] $\sum$ روی آخرین جملهٔ (۴) نتیجه می‌دهد که:

$$\bar{J} = \phi[x(N)] - \lambda^T(N)x(N) + \lambda^T(0)x_0 + \sum_{i=0}^{N-1} [H(i) - \lambda^T(i)x(i)] \tag{۶}$$

حال تغییرات دیفرانسیلی در $\bar{J}$ مربوط به تغییرات دیفرانسیلی در $u(i)$ و x_0 را مورد ملاحظه قرار دهید:

$$d\bar{J} = [\phi_x - \lambda^T(N)]\, dx(N) + \lambda^T(0) dx_0 + \sum_{i=0}^{N-1} \{[H_x(i) - \lambda^T(i)]\, dx(i) + H_u(i) du(i)\} \tag{۷}$$

برای اینکه مجبور نباشیم تغییرات دیفرانسیلی $dx(i)$ تولید شده بوسیلهٔ دنبالهٔ $du(i)$ را محاسبه نماییم ما دنباله ضرائب $\lambda(i)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که ضرائب $dx(i)$ و $dx(N)$ در معادلهٔ (۷) حذف شوند یعنی:

$$\lambda^T(i) = H_x(i) \equiv L_x(i) + \lambda^T(i+1) f_x(i) \tag{۸}$$

برای $i = 0, \ldots, N-1$ با شرایط مرزی[1]:

1. Adjoint Equations
2. Necessary Conditions for a Stationary Solution
3. Discrete Hamiltonian
4. Summation

$$\lambda(N) = \phi_x \tag{۹}$$

معادلات (۷) بصورت زیر در می‌آیند:

$$d\bar{J} = \lambda^T(0)dx_0 + \sum_{i=0}^{N-1} H_u(i)du(i) \tag{۱۰}$$

بنابر این $H_u(i)$ شیب J نسبت به $u(i)$ در حالی که x_0 ثابت بوده و معادلهٔ (۱) ارضاء شود می‌باشد و $\lambda^T(0)$ شیب J نسبت به x_0 در صورتی که $u(i)$ را ثابت نگهداشته و معادلهٔ (۱) ارضاء گردد می‌باشد. در صورتی که x_0 مشخص باشد آنگاه $dx_0 = 0$ است.

برای داشتن یک حل ایستا و برای هر $du(i)$ لازم است $d\bar{J} = 0$ و این هنگامی رخ می‌دهد که:

$$H_u(i) = 0, i = 0,\ldots,N-1 \tag{۱۱}$$

$H_u(i)$ بنام دنبالهٔ پاسخ پالسی[۲] نامیده می‌شود. از اینرو برای پیدا نمودن دنبالهٔ بردار کنترل $u(i)$ که تولید یک مقدار ایستا برای J نماید بایستی معادلات تفاضلی زیر را به آنها معادلات گسستهٔ اویلر لاگرانژ[۳] و یا به اختصار EL گفته می‌شود حل نماییم:

$$x(i+1) = f[x(i), u(i), i] \tag{۱۲}$$

$$\lambda(i) = H_x^T(i) = L_x^T(i) + f_x^T(i)\lambda(i+1) \tag{۱۳}$$

که در آن $H_u(i)$ از معادلهٔ (۱۱) که بصورت زیر می‌توان نوشت تعیین می‌شود:

$$H_u(i) \equiv L_u(i) + \lambda^T(i+1)f_u(i) = 0 \tag{۱۴}$$

شرایط مرزی برای این معادلات تفاضلی بصورت مجزا[۴] n شرط در $i = 0$ و n شرط در $i = N$ می‌باشند.

$$x(0) = x_0 \tag{۱۵}$$

$$\lambda(N) = \phi_x^T \tag{۱۶}$$

1. Boundary Conditions
2. Pulse Response Sequense
3. Discrete Euler-Lagrange Equations
4. Split

این مسئله بنام مسئله شرایط مرزی در دو نقطهٔ مجزا (TPBVP)[1] نامیده می‌شود. توجه شود که معادلات (۱۲) و (۱۳) با یکدیگر همگیر[2] می‌باشند چونکه ضرائب $u(i)$ از طریق معادلهٔ (۱۴) وابسته به $\lambda(i+1)$ می‌باشد و ضرائب (۱۳) نیز وابسته به $x(i)$ و $u(i)$ می‌باشند.

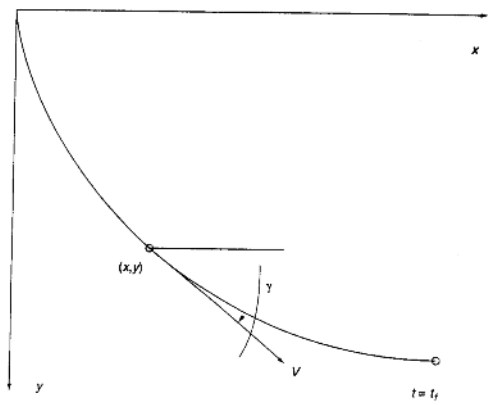
از آنجائی که هر دو $x(i)$ و $\lambda(i)$ دارای ابعاد n می‌باشند و $u(i)$ دارای بعد m هست و $i=0,\ldots,N-1$ لذا مسئله TPBVP دارای $N(2n+m)$ مجهول و همین تعداد معادله می‌باشد و برای حل آن بایستی یک مجموعه دستگاه معادلات جبری غیر خطی بزرگ را حل نمود(بعنوان مثال می‌توان از فرمان Fsolve در Matlab استفاده نمود).

مثال ۱: برنامه‌ریزی جهت سرعت گسسته در حضور جاذبه(DVDP): بیشترین برد در زمان معین[3]

یک مهره (دانه تسبیح) تحت نیروی جاذبه روی یک سیم بدون اصطکاک سر می‌خورد(می‌لغزد). می‌خواهیم شکل سیم را طوری انتخاب کنیم که در زمان معین t_f برد افقی به حداکثر مقدار خود برسد. اینکار را می‌خواهیم با برنامه‌ریزی روی جهت سرعت انجام دهیم یعنی می‌خواهیم زاویهٔ زیر خط افق یعنی $\gamma(t)$ را بعنوان تابعی از زمان بدست آوریم(شکل ۱ را ببینید).

این مثال یک مسئله دوگانه[4] یا دوقلوی مسئله براچیستوکرون یا کوتاهترین زمان به منظور پیدا نمودن شکل سیم جهت کمینه نمودن زمان t_f برای رسیدن به برد افقی معین می‌باشد. این مسئله در قرن هفدهم میلادی بوسیله برنولی مطرح و حل گردید.

1. Two Point Boundary Value Problem
2. Coupled
3. Discrete Velocity Direction Programming (DVDP) with Gravity: Max Range in a Given Time
4. Dual Problem

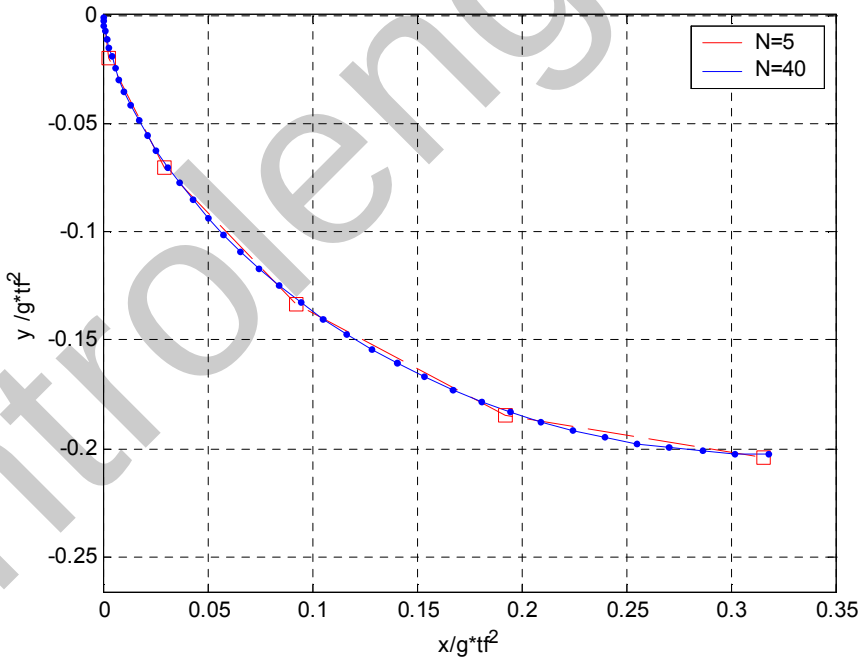


شکل ۱: مسئله برنامه‌ریزی جهت سرعت(مسئله براچیستوکرون)

جهت گسسته نمودن مسئله می‌خواهیم مقدار γ صرفاً در فاصله‌های زمانی بطول ΔT عوض شود. بنابراین دنبالهٔ کنترل $\gamma(t)$ را به ازای $i = 0,\ldots,N-1$ به منظور حداکثر نمودن x در زمان t_f می‌یابیم که در آن:

$$\Delta T = t_f / N \quad , \quad t = i\Delta T$$

شکل ۲ حالتی که در آن $N = 5$, $N \to \infty$ است را نشان می‌دهد.



شکل ۲: شکل سیم جهت دستیابی به برد حداکثر در حضور جاذبه (مسئله DVDP) برای N=40 و N=5

از مکانیک کلاسیک سرعت مهره در زمان $(i+1)\Delta T$ عبارتست از:

$$v(i+1) = v(i) + g\Delta T \cdot \sin\gamma(i) \ , \quad v(0) = 0 \qquad (۱۷)$$

از سینماتیک، مختصات x مهره در زمان $(i+1)\Delta T$ عبارتست از:

$$x(i+1) = x(i) + \Delta\ell(i)\cos\gamma(i)\ , \quad x(0) = 0 \tag{۱۸}$$

که در آن:

$$\Delta\ell(i) = \Delta T\, v(i) + \tfrac{1}{2} g(\Delta T)^2 \sin\gamma(i) \tag{۱۹}$$

$\Delta\ell(i)$ طول سیم مابین گوشهٔ iام و گوشهٔ $(i+1)$ام می‌باشد. فرض کنید $s = [v \quad x]^T$ بردار حالت باشد سپس $L = 0$ و $\phi[s(N)] = x(N)$ و هامیلتونین عبارتست از:

$$H(i) = \lambda_v(i+1)[v(i) + g\Delta T \sin\gamma(i)] + \lambda_x(i+1)[x(i) + \Delta\ell(i)\cos\gamma(i)] \tag{۲۰}$$

معادلات الحاقی (۱۳) بصورت زیر در می‌آیند:

$$\lambda_v(i) = H_v(i) = \lambda_v(i+1) + \Delta T \cos\gamma(i)\lambda_x(i+1)\ , \quad \lambda_v(N) = 0 \tag{۲۱}$$

$$\lambda_x(i) = H_x(i) = \lambda_x(i+1)\ , \quad \lambda_x(N) = 1 \tag{۲۲}$$

بطور واضح:

$$\lambda_x(i) = 1 \quad \text{for all} \quad i \tag{۲۳}$$

با استفاده از (۲۳) و $\Delta T = \frac{t_f}{N}$، شرط بهینه‌گی (۱۴) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$0 = \cos\gamma(i)\frac{\lambda_v(i+1)}{t_f} - \frac{v(i)}{g t_f}\sin\gamma(i) + \frac{1}{2N}\cos[2\gamma(i)] \tag{۲۴}$$

که $\gamma(i)$ را با مقادیر $v(i)$ و $v(i+1)$ معین می‌نماید. با تعریف $\alpha \square \pi/2N$ حل این مسئله TPBVP عبارتست از:

$$\gamma(i) = \frac{\pi}{2} - \alpha(i + \tfrac{1}{2})\ , \quad i = 0, \ldots, N-1 \tag{۲۵}$$

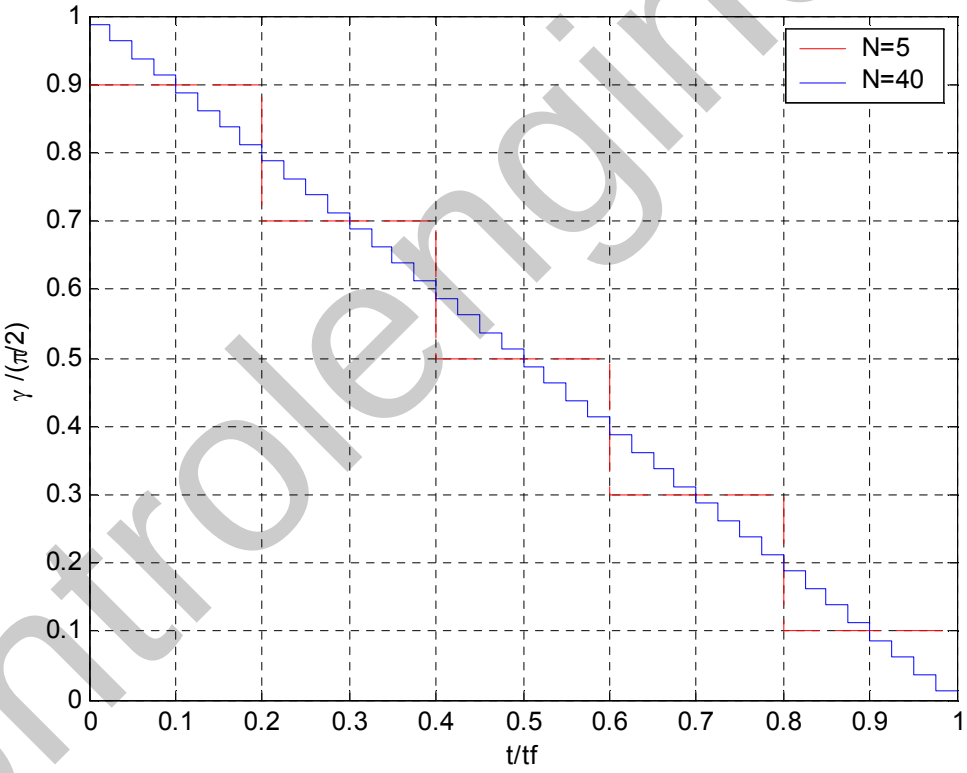
$$\frac{v(i)}{gt_f} = \frac{\sin(\alpha i)}{2N\sin(\alpha/2)}\ , \quad i = 0, \ldots, N \tag{۲۶}$$

$$\frac{x(i)}{gt_f^2} = \frac{\cos(\alpha/2)}{4N^2\sin(\alpha/2)}\left[i - \frac{\sin(2\alpha i)}{2\sin\alpha}\right], \quad i = 0, \ldots, N \tag{۲۷}$$

$$\frac{\lambda_v(i)}{t_f} = \frac{\cos(\alpha i)}{2N\sin(\alpha/2)}\ , \quad i = 1, \ldots, N \tag{۲۸}$$

شکل ۳ در (صفحه ۵۱ کتاب برایسون) مقادیر γ را در مقابل $\frac{t}{t_f}$ برای حالتهای $N=40, N=5$ نشان می‌دهد.

هنگامی که $N \to \infty$ آنگاه $\gamma \to (\pi/2)(1-t/t_f)$ که همان جواب حل سیستم پیوسته را تولید می‌نماید.



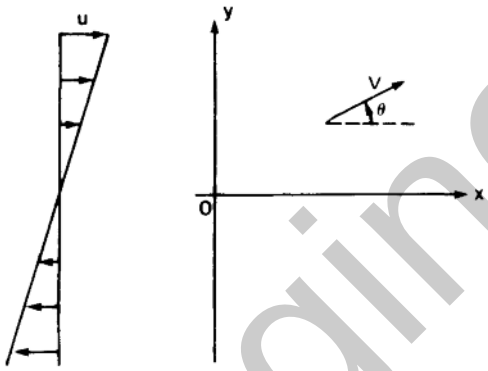
شکل ۳: مقدار γ جهت دستیابی به برد حداکثر در حضور جاذبه (مسئله DVDP) برای N=40 و N=5

مثال۲: مسئله زیمرلو[1]: برنامه‌ریزی جهت سرعت گسسته(DVDP) برای بیشترین برد با $u_c = \frac{Vy}{h}$

یک کشتی با سرعت ثابت V نسبت به آب که در آن سرعت جریان موازی محور x بوده ولی نسبت به y تغییر می‌کند در حال حرکت است چنانکه:

$$\dot{x} = V\cos\theta + u_c(y)$$
$$\dot{y} = V\sin\theta$$

که در آن θ زاویه سمت کشتی نسبت به محور x می‌باشد. زیمرلو نخستین کسی بود که با این مسئله روبرو شد.



شکل ۴ : هندسه مسئله زیمرلو

a) برای $u_c = \frac{Vy}{h}$ یعنی در صورتی که جریان نسبت به y بصورت خطی تغییر نماید و θ در فاصلهٔ زمانی ΔT ثابت باشد، نشان دهید که مختصات x, y در انتهای این فاصله زمانی از معادلات تفاضلی زیر بدست می‌آیند:

$$y(i+1) = y(i) + \Delta T \sin\theta(i)\ ,$$
$$x(i+1) = x(i) + \Delta T\,[\cos\theta(i) + y(i)] + \tfrac{1}{2}(\Delta T)^2 \sin\theta(i)$$

که در آن واحد ΔT مشابه $\frac{h}{V}$ و x, y دارای واحد مشابه h هستند.

b) در صورتی که $x(0) = y(0) = 0$ و t_f داده شده باشد نشان دهید که دنبالهٔ $\theta(i)$ که $x(t_f)$ را در N مرحله بیشینه می‌نماید عبارتست از:

$$\tan\theta(i) = (N - i - \frac{1}{2})\Delta T$$

1. Zemerlo Problem: Problem 2.1.2 - DVDP for Max Range with $u_c = Vy/h$

که در آن:
$$\Delta T = \frac{t_f}{N} \quad , \quad i = 0,\ldots,N-1$$

c) برای $\frac{Vt_f}{h} = 2$ محاسبه و ترسیم منحنی $x(i)$ در مقابل $y(i)$ برای $N = 5, N = 40$ با استفاده از شرط بهینه گی (b) و با معادلات گسسته حرکت (a) مطلوب می‌باشد.

حل: معادلات حالت را روی یک نمو زمانی ΔT با مقدار ثابت θ انتگرال گیری می‌نماییم:

$$y(\Delta T) = y(0) + V\,\Delta T\,\sin\theta \tag{۱}$$

$$x(\Delta T) = x(0) + V\,\Delta T\,\cos\theta + (V/h)\int_0^{\Delta T} y(\tau)d\tau. \tag{۲}$$

جاگذاری (۱) در (۲) نتیجه می‌دهد:

$$x(\Delta T) = x(0) + V\,\Delta T\,\cos\theta + (V/h)[\Delta T y(0) + V(\Delta T)^2\sin\theta/2] \tag{۳}$$

سنجش (x, y) بر حسب واحد h و ΔT بر حسب h/V باعث می‌شود که اگر از صفر تا ΔT حرکت کنیم مشابه آن است که از i به $i+1$ رفته ایم.

$\phi = x(N)$ و تابع هامیلتونی H عبارتست از:

$$\begin{aligned} H = {} & \lambda_y(i+1)[y(i) + \Delta T\,\sin\theta(i)] + \lambda_x(i+1)\{x(i) + \\ & \Delta T[\cos\theta(i) + y(i)] + (\Delta T)^2\sin\theta(i)/2\} \end{aligned} \tag{۴}$$

سپس معادلات گسسته اویلر لاگرانژ بصورت زیر در می‌آیند:

$$\lambda_y(i) = \frac{\partial H}{\partial y(i)} = \lambda_y(i+1) + \Delta T\,\lambda_x(i+1), \lambda_y(N) = \frac{\partial\phi}{\partial y(N)} = 0 \tag{۵}$$

$$\lambda_x(i) = \frac{\partial H}{\partial x(i)} = \lambda_x(i+1), \lambda_x(N) = \frac{\partial\phi}{\partial x(N)} = 1 \tag{۶}$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial\theta(i)} = \lambda_y(i+1)\Delta T\,\cos\theta(i) + \lambda_x(i+1)\Delta T[-\sin\theta(i) + \Delta T\,\cos\theta(i)/2] \tag{۷}$$

معادلات تفاضلی (۵) و (۶) با شرایط مرزی خود بسادگی حل می‌شوند:

$$\lambda_x(i) = 1 \quad , \quad \lambda_y(i) = (N-i)\Delta T \tag{۸}$$

جاگذاری (۸) در (۷) و حذف ΔT نتیجه می‌دهد که:

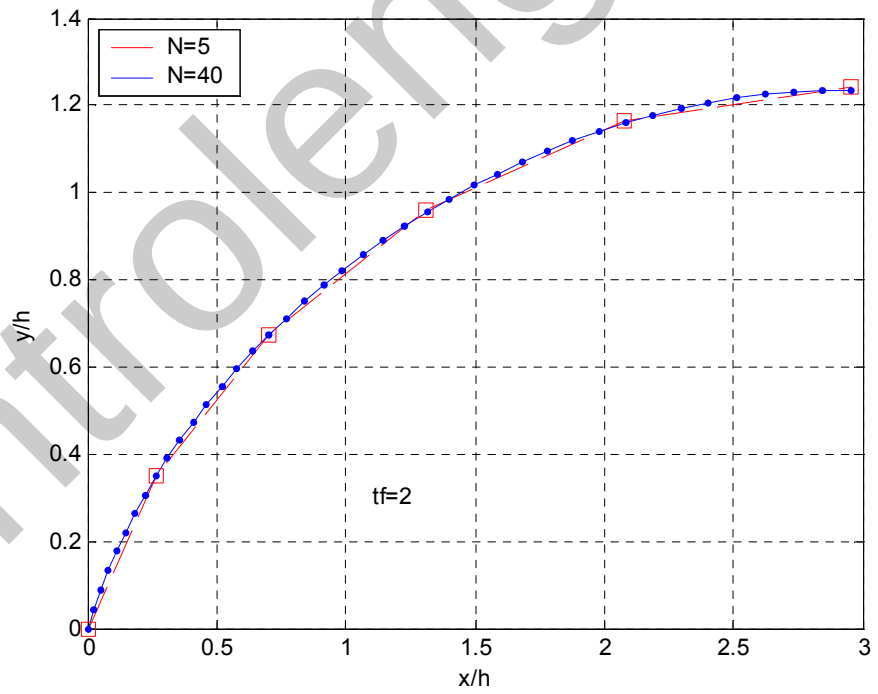
$$0 = (N - i - 1)\Delta T \cos\theta(i) - \sin\theta(i) + \Delta T \cos\theta(i)/2$$

و یا:

$$\tan\theta(i) = (N - i - \frac{1}{2})\Delta T \qquad (۹)$$

فهرست برنامه Matlab برای ترسیم مسئله زیمرلو بصورت زیر می‌باشد

```
% DVDP for max range with uc=Vy/h; optimal paths for Pb. 2.1.2(c);
N=5; tf=2; dT=tf/N; x(1)=0; y(1)=0;
for i=1:N,
  th(i)=atan(dT*(N-i+.5)); y(i+1)=y(i)+dT*sin(th(i));
  x(i+1)=x(i)+dT*(y(i)+cos(th(i)))+dT^2*sin(th(i))/2;
end;
N=40; dT=tf/N; x1(1)=0; y1(1)=0;
for i=1:N,
  th1(i)=atan(dT*(N-i+.5)); y1(i+1)=y1(i)+dT*sin(th1(i));
  x1(i+1)=x1(i)+dT*(y1(i)+cos(th1(i)))+dT^2*sin(th1(i))/2;
end;
figure(1); plot(x,y,'r--',x1,y1,'b'); hold on; text(1.1,.3,'tf=2');
legend('N=5','N=40',2); plot(x,y,'rs',x1,y1,'b.'); hold off; grid;
xlabel('x/h'); ylabel('y/h');
```



شکل ۵: ترسیم منحنی‌های بدست آمده جهت مسئله زیمرلو

۳-۱-۲- حل عددی مسائل بهینه‌سازی دینامیکی گسسته با استفاده از روش گرادیان

صرفاً تعداد اندکی از مسائل ساده وجود دارند که می‌توان آنها را با استفاده از توابع جدولی حل نمود. ما در اینجا می‌خواهیم از الگاریتم عددی برای حل مسائل گسسته معرفی شده در این فصل استفاده نماییم.

قبل از ادامه مبحث یادآوری می‌کنیم که معادلات (۱) تا (۳) که قبلاً به آنها اشاره شد از روش بولزا[1] جهت فرموله نمودن استفاده نموده بودند:

$$x(i+1) = f[x(i), u(i), i] \qquad (۱)$$

$$x(0) = x_0 \qquad (۲)$$

$$J = \phi[x(N)] + \sum_{i=0}^{N-1} L[x(i), u(i), i] \qquad (۳)$$

در این فصل بجای روش بولزا از روش فرموله نمودن مایر[2] استفاده می‌نماییم. در روش جدید یک حالت $x_{n+1}(i)$ به بردار حالت معادلات (۱) و (۲) اضافه می‌شود که مجموع اضافه شده L به مرحلهٔ i می‌باشد یعنی:

$$x_{n+1}(i+1) = x_{n+1}(i) + L[x(i), u(i), i]\ ,\ \ x_{n+1}(0) = 0$$

بنابراین شاخص عملکرد (۳) بصورت زیر در می‌آید:

$$J = \phi[x(N)] + x_{n+1}(N) \triangleq \bar{\phi}[\bar{x}(N)]$$

که در آن:

$$\bar{x} \triangleq \begin{bmatrix} x \\ x_{n+1} \end{bmatrix}$$

این دو روش فرمول نویسی دقیقاً معادل یکدیگرند ولی از شکل مایر عبارت ساده تری بدست آمده و کد نوشتن در حل عددی را آسانتر می‌سازد.

1. Bolza Formulation
2. Mayer Formulation

فرمان FMINU در جعبه ابزار بهینه سازی Matlab کمینهٔ تابع f را نسبت به یک بردار پارامتری u با گرادیان تحلیلی f_u (یا بدون آن) بدست می‌آورد(در نسخه‌های جدید Matlab این دستور به FMINUNC[1] تغییر یافته است). آنچه مورد نیاز است این است که یک m فایل Matlab تابع $f(u)$ را به کمک مقدار u محاسبه نماید. این بدان معنی است که دنبالهٔ $x(i+1)=f[x(i),u(i)]$ را به صورت پیشخور[2] برای محاسبهٔ ϕ استفاده می‌کند. این کد نیازی به انتخاب پارامتر اندازهٔ نمو ندارد. همچنین این فرمان نیازی به گرادیان‌های تحلیلی ϕ_x, f_x, f_u ندارد چون آنها را بصورت عددی محاسبه می‌نماید. در هر صورت اگر این گرادیان‌ها به برنامه داده شود در مسائل با ابعاد بزرگ برنامه با سرعت بیشتری اجرا خواهد شد.

مثال ۳: حل عددی مسئله برنامه‌ریزی جهت سرعت گسسته در حضور جاذبه(DVDP): بیشترین برد در زمان معین با استفاده از دستور FMINU

این مسئله همان مثال یک می‌باشد که در اینجا آنرا از طریق عددی با دستور FMINU حل می‌کنیم. لیست برنامه کامپیوتری این مسئله در ادامه آمده است. اجرای برنامه در حالت استفاده از گرادیان‌ها با ۱۳ تکرار و در حالت بدون استفاده از گرادیانها با ۲۱۶ تکرار به جواب می‌رسد.

فایل اصلی برنامه:

```
% Script e02_2_2.m; DVDP for max range w. gravity using MATLAB code
% FMINU with (flg=2) or without (flg=1) analytical gradient;
s=[v,x)';
flg=2; N=40; optn(1)=1; s0=[0 0]'; tf=1; ga=[1:-1/(N-1):0];
if flg==1,
   optn(14)=34; ga=fminu('dvdp_f',ga,optn,[],s0,tf,N);
elseif flg==2,
   optn(14)=14; ga=fminu('dvdp_f',ga,optn,'dvdp_gr',s0,tf,N);
end
[f,v,x]=dvdp_f(ga,s0,tf,N); t=[0:1/N:1]; gah=[ga ga(N)];
figure(1); clf; subplot(211), zohplot(t,2*gah/pi); grid;
axis([0 1 0 1]); ylabel('2*ga/pi');
subplot(212), plot(t,v,t,x,'r--');
```

1. Function MINimization Unconstrained, FMINUNC finds the minimum of a function of several variables. X=FMINUNC(FUN,X0) starts at X0 and finds a minimum X of the function
2. Forward

```
grid; xlabel('t/tf'); legend('v/g*tf','x/g*tf^2',2);
```

فایل دوم معرفی توابع:

```
function [f,v,x]=dvdp_f(u,s0,tf,N)
% Subroutine for e02_2_2.m;DVDP with gravity using FMINU; u=estimate
% of optimal u; s0=initial state; tf=final time; N=no. steps;
dt=tf/N; v(1)=s0(1); x(1)=s0(2);
for i=1:N,
   x(i+1)=x(i)+dt*v(i)*cos(u(i))+dt^2*sin(2*u(i))/4;
   v(i+1)=v(i)+dt*sin(u(i));
end
f=-x(N+1);
```

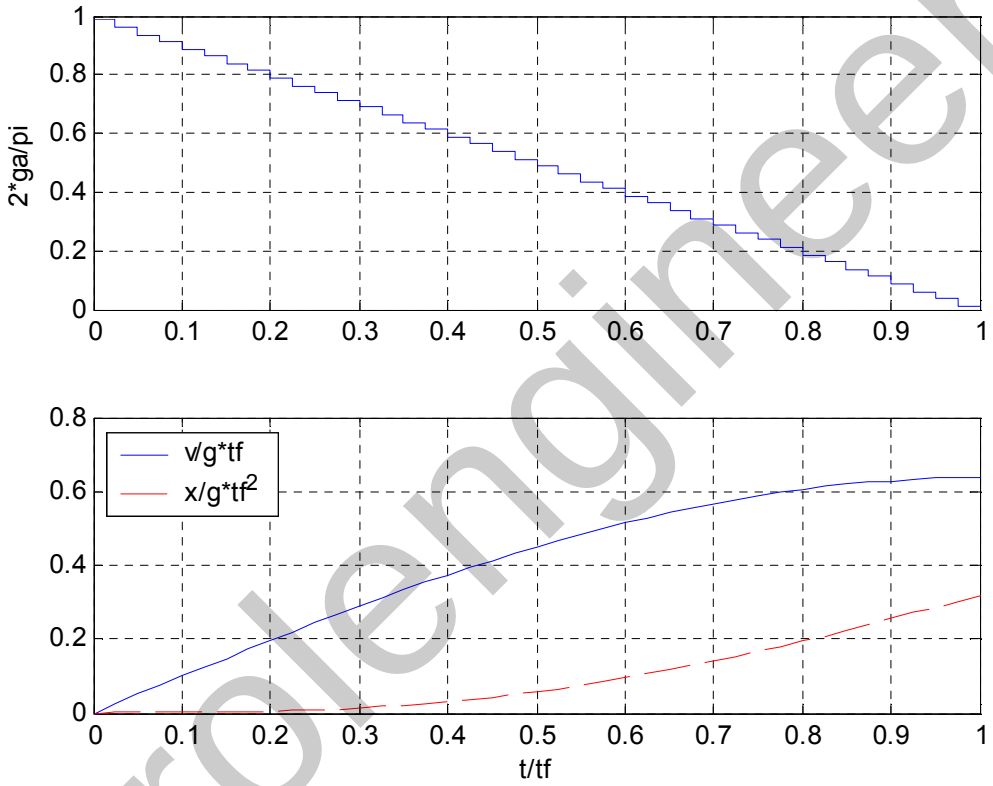
فایل سوم حاوی گرادیان‌ها:

```
function df=dvdp_gr(u,s0,tf,N)
% Subroutine for e02_2_2;DVDP for maxrange with gravity using FMINU;
% u=estimate of u; s0=initial state; tf=final time; N=no. steps;
Hu=zeros(1,N); dt=tf/N; v(1)=s0(1); x(1)=s0(2);
% Forward sequencing & store v(i) & x(i):
for i=1:N, v(i+1)=v(i)+dt*sin(u(i));
   x(i+1)=x(i)+dt*v(i)*cos(u(i))+dt^2*sin(2*u(i))/4;
end;
% Gradient phix:
phis=[0 1]; la=phis';
% Backward sequencing and store Hu(i);
for i=N:-1:1, fs=[1 0; dt*cos(u(i)) 1];
 fu=dt*[cos(u(i)); -v(i)*sin(u(i))+dt*cos(2*u(i))/2];
 Hu(i)=la'*fu;  la=fs'*la;
end;
df=-Hu;
```

فایل چهارم ترسیم منحنی‌ها با نگهدار مرتبه صفر:

```
function zohplot(xord,yord,plotchar)
% ZOHPLOT  Plots the zero-order hold of two columns of data.
% zohplot(xord,yord,plotchar)
% Plots the zero-order hold of two columns of data.  If
% yord is a matrix then it plots each column of yord vs
% the vector xord.  xord and yord must have the same row dimension.
% xord = data in the x coordinate, yord = data in the y coordinate
% plotchar = the line or point-type as in plot(x,y,'plotchar')
[xlen,xwid] = size(xord);
xlen = xlen-1;
%  if xlen==0, then assume data was provided in row rather than
%  column format and transpose input.  these variables are local,
%  so the change will not affect the users format.
if xlen==0
   xord=xord';
   [xlen,xwid] = size(xord);
   xlen = xlen-1;
   yord=yord';
end
[ylen,ywid] = size(yord);
ylen = ylen-1;
if xlen~=ylen
   disp('--ERROR-- xord and yord must have same number of rows')
   return
```

```
end
bigx=zeros(2*xlen,1);                % Fill these with zero;
bigy=zeros(2*ylen,ywid);
txlm1 = 2*xlen-1;
txl   = 2*xlen;
xlp1  = xlen+1;
bigx(1:2:txlm1) = xord(1:xlen);
bigx(2:2:txl)   = xord(2:xlp1);
bigy(1:2:txlm1,:) = yord(1:xlen,:);
bigy(2:2:txl,:)   = yord(1:xlen,:);
if(nargin <= 2)
  plot(bigx,bigy);
else
```



شکل ٦: منحنی بدست آمده از اجرای دستور FMINU جهت مسئله DVDP با N=40

۳-۲- سیستم‌های دینامیکی پیوسته[1]

مسائل برنامه‌ریزی بهینه جهت سیستم‌های پیوسته همان مسائل حساب تغییرات یا حساب واریاسیون‌ها[2] می‌باشند. این مسائل را می‌توان بعنوان حالت حدی مسائل برنامه‌ریزی بهینه در سیستم‌های گسسته دانست که در آنها نمو زمانی بین مراحل در مقایسه با مشخصات زمانی سیستم‌های پیوسته کوچک باشد. روش معکوس امروزه بسیار متداول می‌باشد یعنی جهت شبیه‌سازی روی کامپیوترهای دیجیتال سیستم‌های پیوسته بوسیلهٔ سیستم‌های گسسته تقریب زده می‌شوند.

یک سیستم دینامیکی با مراحل پیوسته بوسیلهٔ یک بردار حالت $x(t)$ با ابعاد n در زمان t توصیف می‌گردد. انتخاب یک بردار کنترل $u(t)$ با ابعاد m نرخ زمانی تغییر بردار حالت را از طریق روابط زیر تعیین می‌کند:

$$\dot{x} = f(x, u, t) \qquad (۱)$$

یک مسئله بهینه‌سازی نسبتاً عمومی برای چنین سیستمی این است که تاریخچهٔ زمانی بردار کنترل $u(t)$ در $t_0 \le t \le t_f$ برای کمینه نمودن شاخص عملکرد به شکل زیر را بدست آوریم:

$$J = \phi[x(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t)dt \qquad (۲)$$

شاخص عملکرد فوق تحت قیود (۱) بوده و مقادیر زیر مشخص می‌باشند:

$$t_0 \ , \ t_f \ , \ x(t_0) \qquad (۳)$$

۳-۲-۱- شرایط لازم برای یک حل ایستا[3]

معادلات قیود (۱) را به شاخص عملکرد (۲) با یک بردار ضریب لاگرانژی متغیر با زمان $\lambda(t)$ بصورت زیر ملحق می‌نماییم:

1. Continuous Dynamic Systems
2. Calculus of Variations
3. Necessary Conditions for a Stationary Solution

$$\bar{J} = \phi[x(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ L[x(t), u(t), t] + \lambda^T(t)[f[x(t), u(t), t] - \dot{x}] \right\} dt \tag{۴}$$

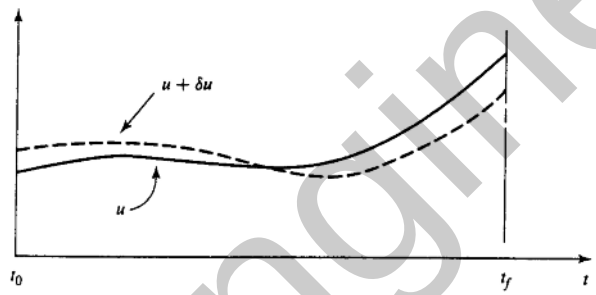
یک تابع هامیلتونین اسکالر $H[x(t),u(t),\lambda(t),t]$ تعریف می‌نماییم طوری که:

$$H(t) \triangleq L[x(t), u(t), t] + \lambda^T(t) f[x(t), u(t), t] \tag{۵}$$

همچنین جملهٔ $\lambda^T \dot{x}$ در (۴) را بوسیلهٔ روش جزء به جزء[1] بصورت زیر در می‌آید:

$$\bar{J} = \phi[x(t_f)] - \lambda^T(t_f)x(t_f) + \lambda^T(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ H[x(t), u(t), \lambda(t), t] + \dot{\lambda}^T x(t) \right\} dt \tag{۶}$$

حال یک تغییر خیلی کوچک[2] در $u(t)$ را بنام $\delta u(t)$ همانند شکل(۷) در نظر می‌گیریم:



شکل ۷ : یک تغییر کوچک در تاریخچهٔ کنترل $\delta u(t)$

تغییر خیلی کوچک $\delta u(t)$ موجب تغییر در تاریخچه حالت یعنی $\delta x(t)$ و یک تغییر در شاخص عملکرد $\delta \bar{J}$ شده و از رابطهٔ زیر داریم:

$$\delta \bar{J} = \left[(\phi_x - \lambda^T)\,\delta x\right]_{t=t_f} + \left[\lambda^T \delta x\right]_{t=t_0} + \int_{t_0}^{t_f} \left[(H_x + \dot{\lambda}^T)\,\delta x + H_u \delta u\right] dt \tag{۷}$$

برای اجتناب از الزام به تعیین تابع $\delta x(t)$ که بوسیلهٔ $\delta u(t)$ بوجود می‌آید، ضرائب لاگرانژی $\lambda(t)$ طوری انتخاب می‌شوند که در رابطهٔ (۷) مقادیر $\delta x(t)$ و $\delta u(t)$ حذف گردند یعنی داریم:

$$\dot{\lambda}^T = -H_x \equiv -L_x - \lambda^T f_x \tag{۸}$$

1. By Part
2. Infinitesimal Variation

با شرایط مرزی

$$\lambda^T(t_f) = \phi_x(t_f) \qquad (۹)$$

لذا معادلهٔ (۷) بصورت زیر در می‌آید:

$$\delta \bar{J} = \lambda^T(t_0)\delta x(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} H_u \delta u dt \qquad (۱۰)$$

در صورتی که $x(t_0)$ مشخص باشد $\delta x(t_0) = 0$ است و برای یک حل ایستا داریم $\delta \bar{J} = 0$ برای هر $\delta u(t)$ و این اتفاق خواهد افتاد فقط اگر:

$$H_u = 0\,,\ t_0 \le t \le t_f \qquad (۱۱)$$

معادلات (۸) و (۹) و (۱۱) معادلات EL یا اویلر لاگرانژ در حساب تغییرات می‌باشند. از اینرو جهت یافتن یک بردار کنترل $u(t)$ که یک مقدار ایستا از شاخص عملکرد J ایجاد نماید ما بایستی معادلات دیفرانسیل زیر را حل نماییم:

(۱۲) معادله حالت $\dot{x} = f(x, u, t)$

(۱۳) معادله اویلر لاگرانژ یا کمک حالت $\dot{\lambda} = -H_x^T \equiv -L_x^T - f_x^T \lambda$

که در آن $u(t)$ از رابطهٔ (۱۱) بصورت زیر بدست می‌آید:

(۱۴) شرط بهینه گی $H_u \equiv L_u + \lambda^T f_u = 0$

شرایط مرزی برای این معادلات دیفرانسیل مجزا می‌باشند برخی در $t = t_0$ و بقیه در $t = t_f$ داده می‌شوند:

$$x(t_0) = \text{معلوم} \qquad (۱۵)$$

$$\lambda(t_f) = \phi_x^T \qquad (۱۶)$$

این یک مسئله با شرایط مرزی در دو نقطهٔ مجزا (TPBVP) می‌باشد. قابل توجه است که معادلات (۱۲) و (۱۳) همگیر یا کوپل هستند چونکه $u(t)$ وابسته به $\lambda(t)$ در معادله (۱۴) بوده و ضرائب در (۱۳) به $u(t)$ و $x(t)$ وابسته هستند.

۳-۲-۲- یک انتگرال از مسئله با شرایط مرزی در دو نقطهٔ مجزا[1]

در صورتی که مسئله صریحاً وابسته به t نباشد یک انتگرال مسئله TPBVP یعنی معادلات (۱۲) تا (۱۶) وجود دارد و بنام انتگرال اول[2] در حساب تغییرات کلاسیک نامیده می‌شود. جهت بدست آوردن این انتگرال مشتق زمانی $H(x,\lambda,u,t)$ را در نظر می گیریم(قاعده زنجیری[3] در مشتق استفاده شده است):

$$\begin{aligned}\dot{H} &= H_t + H_x\dot{x} + H_\lambda\dot{\lambda} + H_u\dot{u}\ ,\\ &= L_t + \lambda^T f_t + \dot{\lambda}^T f + H_x\dot{x} + H_u\dot{u}\\ &= L_t + \lambda^T f_t + H_u\dot{u} + (H_x + \dot{\lambda}^T)f\end{aligned}$$

با استفاده از (۸) یعنی $\dot{\lambda}^T = -H_x \equiv -L_x - \lambda^T f_x$ خواهیم داشت:

$$\dot{H} = L_t + \lambda^T f_t + H_u\dot{u}$$

در هر صورت اگر $u(t)$ یک نقطهٔ ایستا باشد از (۱۱) داریم $H_u = 0$ بعلاوه $f = f(x,u), L = L(x,u)$ سپس $L_t + \lambda^T f_t = 0$ و لذا $\dot{H} = 0$ یا:

$$H = \text{constant for } t_0 \le t \le t_f \qquad (۱۷)$$

۳-۲-۳- شرایط کافی مرتبه دوم[4] در مسائل بهینه‌سازی دینامیکی پیوسته

1. An Integral of the TPBVP
2. First Integral
3. Chain Rule
4. Second-Order Sufficient Conditions

در فصل قبل گفته شد که شرایط کافی برای کمینه بودن J این است که اولاً روی تمام مسیر $H_u = 0$ بوده و ثانیاً در مرتبه دوم δJ برای مقدار دلخواه $\delta u(t)$ در حالی که $\dot{x} = f$ است مثبت باشد.

در صفحه ۶۶ کتاب برایسون محاسباتی در این خصوص انجام شده و نهایتاً شرایط کافی برای کمینه بودن J بصورت زیر بدست آمده است:

$$\phi_{xx} > 0 \qquad (۱۸)$$

و در تمامی مسیر داشته باشیم:

$$\begin{bmatrix} H_{xx} & H_{xu} \\ H_{ux} & H_{uu} \end{bmatrix} > 0 \qquad (۱۹)$$

شرط اخیر بدان معنی است که ماتریسهای متقارن معرفی شده دارای مقادیر ویژه مثبت باشد(توضیح اگر $\phi = 0$ باشد نیازی به ارضای (۱۸) نیست).

۳-۲-۴- چه موقع شرایط لازم، بطور همزمان شرایط کافی هم خواهند بود؟[1]

فرض کنید که در مسئله بهینه‌سازی زیر $f(x,u,t)$ و $g(x,u,t)$ هردو توابع مشتق پذیر از x,u باشند.

$$\max_u \int_{t_0}^{t_1} g(x,u,t)dt$$

تحت قیود زیر:

$$\dot{x} = f(x,u,t) \quad , \quad x(t_0) = x_0$$

اگر f,g هردو بر حسب x,u مقعر[2] باشند و برای $\lambda \geq 0$ for all t آنگاه شرایط لازم، شرایط کافی هم خواهند بود[3]. برای کمینه شدن شاخص عملکرد بایستی توابع f,g محدب[4] باشند.

برای تبدیل مسئله بهینه سازی مقید فوق از هامیلتونین استفاده می کنیم که به صورت زیر تعریف می شود:

1. When are Necessary Conditions Also Sufficient?
2. Concave
3. Thompson, Lecture Notes on Dynamic Modeling, 2004. modeling_chapter2, Page 47
4. Convex

$$H(\lambda,t,x,u)=\lambda f(t,x,u)+g(t,x,u)$$

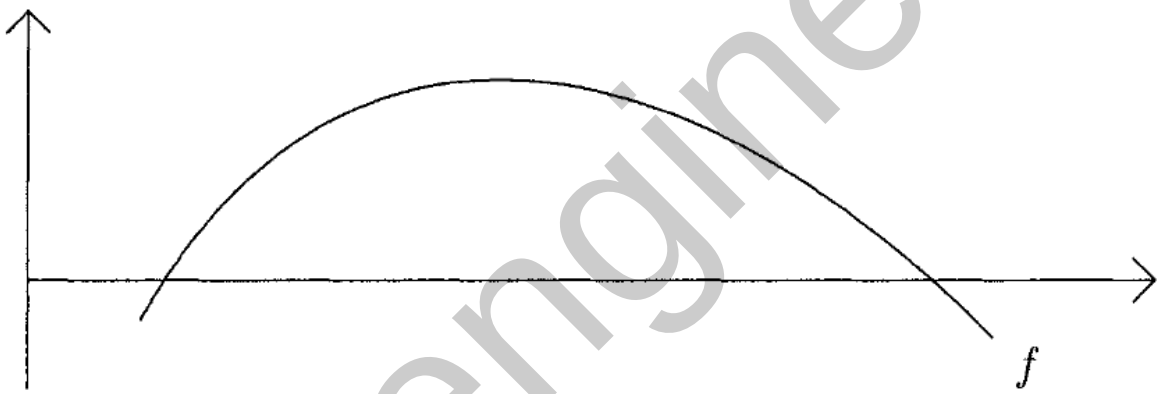
اگر f و g هردو نسبت به متغیرهای x و u مقعر باشند، یعنی

$$f(t,\alpha(x_1,u_1)+t,(1-\alpha)(x_2,u_2)\geq \alpha f(t,x_1,u_1)+(1-\alpha)f(t,x_2,u_2)$$
$$g(t,\alpha(x_1,u_1)+t,(1-\alpha)(x_2,u_2)\geq \alpha g(t,x_1,u_1)+(1-\alpha)g(t,x_2,u_2)$$

چون H از مجموع این دوتابع تشکیل شده، H نیز یک تابع مقعر است.

$$H(\lambda,t,\alpha(x_1,u_1)+\lambda,t,(1-\alpha)(x_2,u_2))\geq \alpha H(\lambda,t,x_1,u_1)+(1-\alpha)H(\lambda,t,x_2,u_2)$$

و یک تابع مقعر نقطه ماکزیمم منحصر به فرد دارد. پس اگر نقطه‌ای در شرط لازم بهینگی صدق کند، قطعاً نقطه ماکزیمم تابع خواهد بود.



شکل ۸: نمایش یک تابع مقعر

مثال ۴: اصل هامیلتون در مکانیک[1]

حرکت یک سیستم مکانیکی کنسرواتیو[2](حافظ انرژی) برای $t_0 \leq t \leq t_f$ چنان است که:

$$A \triangleq \int_{t_0}^{t_f} L(u,q,t)dt \qquad (۲۰)$$

دارای یک مقدار ایستا باشد. در رابطهٔ فوق:

1. Hamilton's Principle in Mechanics
2. Conservative

$$
\begin{aligned}
L &\triangleq T(u, q, t) - V(q, t) = \text{ the Lagrangian} \\
T &= \text{ kinetic energy }, \\
V &= \text{ potential energy }, \\
q &= \text{ generalized coordinate vector }, \\
u &= \dot{q} = \text{ generalized velocity vector }, \\
q(t_0) &= q_0 \ .
\end{aligned}
$$

هامیلتونین بصورت زیر است:

$$H = L + \lambda^T u \tag{۲۱}$$

در مکانیک هامیلتونین بصورت $H = -L + P^T u$ تعریف می‌شود بطوری که برای کمینه نمودن L بایستی H بیشینه شود. $P \equiv \lambda$ بنام بردار مومنتم تعمیم یافته[1] نامیده می‌شود. معادلات اویلر لاگرانژ عبارتند از:

$$
\begin{aligned}
\dot{\lambda}^T &= -H_q \equiv -L_q \ , \\
0 &= H_u \equiv L_u + \lambda^T
\end{aligned} \tag{۲۲}
$$

با حذف λ^T بین این دو رابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود که:

$$\frac{d}{dt}(L_{\dot{q}}) - L_q = 0 \tag{۲۳}$$

این معادلات بنام معادلات لاگرانژی حرکت برای سیستم می‌باشند. در صورتی که L تابع صریح از زمان نباشد یک انتگرال حرکت بصورت ثابت=H می‌باشد:

$$H = L - L_u u = T - V - T_u u = \text{ constant} \tag{۲۴}$$

اکنون T یک تابع درجه دوم بر حسب u می‌باشد بطوری که:

$$T_u u = 2T \tag{۲۵}$$

از اینرو ما خواهیم داشت:

$$-H = T + V = \text{ constant} \tag{۲۶}$$

1. Generalized Momentum Vector

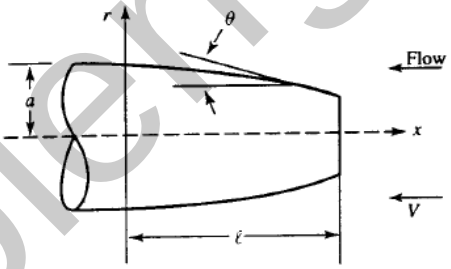
یعنی مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل در زمان حرکت ثابت می‌باشد.

مثال ۵: کمترین پسا در شکل نیوتنی دماغه[1]

این مسئله برای اولین توسط اسحاق نیوتن در سال ۱۶۸۶ بوسیلهٔ حساب تغییرات حل گردید. علی‌الظاهر وی حساب تغییرات را برای حل این مسئله بدون اینکه از روشهای جاکوب برنولی اطلاع داشته باشد، پایه‌ریزی نمود در آن زمان او فقط حل مسئله را بدون اشاره به روش آن بیان نمود.

با توجه به شکل (۹) مسئله به این صورت تعریف می‌شود که برای یک شعاع معلوم $r(0)=a$ و طول معلوم ℓ زاویهٔ $\theta(x)$ بین جهت سرعت و مماس موضعی دماغه را بعنوان تابعی از x طوری پیدا کنید که ضریب پسای C_D یک دماغهٔ متقارن محوری کمینه شود.

$$C_D \triangleq \frac{D}{q\pi a^2} = -2\int_{x=0}^{\ell} C_p(\theta) r\, dr \qquad (۲۷)$$



شکل ۹: معرفی علائم جهت تحلیل شکل نیوتنی دماغه در مسئله کمترین پسا

که در آن (x,ℓ) دارای واحدی مشابه a می‌باشند و داریم:

$$\frac{dr}{dx} = -\tan\theta \qquad (۲۸)$$

$$C_p = \begin{cases} 2\sin^2\theta\,, & \theta \geq 0 \\ 0\,, & \theta \leq 0 \end{cases} \qquad (۲۹)$$

و داریم:

1. Newton's Min Drag Nose Shape

q = فشار دینامیکی = $\rho V^2/2$

V = سرعت گازهای ورودی

ρ = چگالی گازهای ورودی

با فرض انتخاب بردار کنترل به صورت زیر:

$$u \triangleq \tan\theta \tag{۳۰}$$

معادلهٔ (۲۷) برای دماغه‌ای که سر آن پخ دارد[1] بصورت زیر می‌توان نوشت:

$$C_D = 2[r(\ell)]^2 + 4\int_0^{\ell} \frac{ru^3}{1+u^2}dx \tag{۳۱}$$

هامیلتونین سیستم بصورت زیر در می‌آید:

$$H = \frac{4\,ru^3}{1+u^2} + \lambda(-u) \tag{۳۲}$$

معادلات اویلر لاگرانژ عبارتند از:

$$\frac{d\lambda}{dx} = -H_r \equiv -\frac{4u^3}{1+u^2} \tag{۳۳}$$

$$0 = H_u \equiv \frac{4\,ru^2(3+u^2)}{(1+u^2)^2} - \lambda \tag{۳۴}$$

شرایط مرزی عبارتند از:

$$r(0) = 1 \tag{۳۵}$$

$$\lambda(\ell) = \phi_r(\ell) = 4\,r(\ell) \tag{۳۶}$$

معادلات (۳۳) تا (۳۶) بایستی با کمک معادلهٔ زیر حل شوند:

$$\frac{dr}{dx} = -u \tag{۳۷}$$

1. Blunted Tip

از آنجائی که هیچیک از معادلات (۳۱) و سمت راست معادلهٔ (۳۷) تابعی از متغیر مستقل x نیستند لذا سیستم دارای انتگرال اول یعنی ثابت=H خواهد بود. جاگذاری λ از معادلهٔ (۳۴) در معادلهٔ (۳۲) نتیجه می‌دهد:

$$H = -\frac{8ru^3}{(1+u^2)^2} = \text{constant} \tag{۳۸}$$

استفاده از (۳۶) در (۳۴) به ازای $x = \ell$ نتیجه می‌دهد:

$$r(\ell)\left[1 - \frac{u^2(3+u^2)}{(1+u^2)^2}\right]_{x=\ell} = 0 \tag{۳۹}$$

که بوسیلهٔ $r(\ell) = 0$ ارضاء شده است یا:

$$u(\ell) = 1 \tag{۴۰}$$

استفاده از (۴۰) در (۳۸) مقدار ثابت H را بدست می‌دهد:

$$H = -2r(\ell) \tag{۴۱}$$

معادلات (۴۱) و (۳۸) شعاع r شکل دماغه را بر حسب شیب u می‌دهد:

$$\frac{r}{r(\ell)} = \frac{(1+u^2)^2}{4u^3} \tag{۴۲}$$

این به ما پیشنهاد می‌کند معادلهٔ (۳۷) را به شکل زیر انتگرال گیری نماییم:

$$-\int_{\ell}^{x} dx = \int_{1}^{u} \frac{dr}{du}\frac{du}{u} \tag{۴۳}$$

و نتیجه خواهد شد:

$$\frac{\ell - x}{r(\ell)} = \int_{1}^{u} \frac{d}{du}\left(\frac{(1+u^2)^2}{4u^3}\right)\frac{du}{u} \tag{۴۴}$$

این انتگرال می‌تواند بر حسب توابع جدولی ارزیابی شود:

$$\frac{\ell - x}{r(\ell)} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4u^4} + \frac{1}{u^2} - \frac{7}{4} + \log u\right) \tag{۴۵}$$

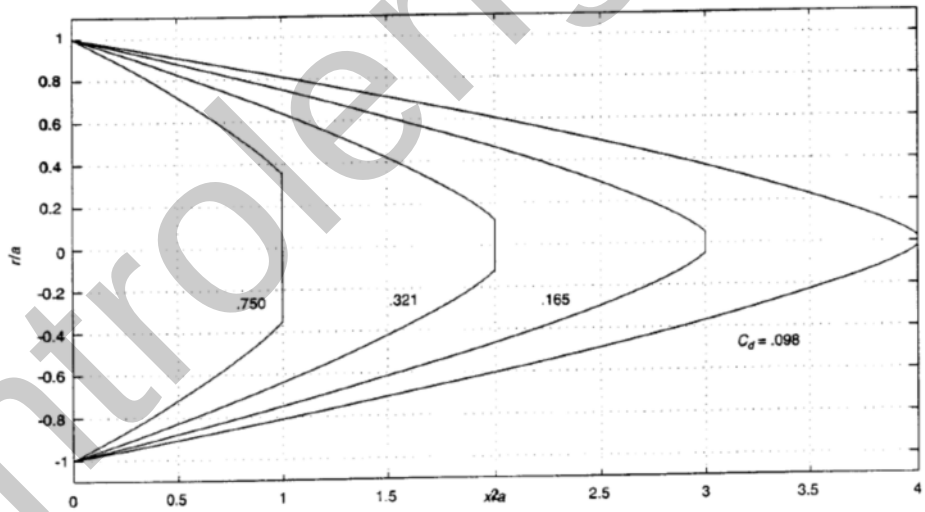
معادلات (۴۲) و (۴۵) معادلات پارامتری برای شکل دماغهٔ بهینه می‌باشند: انتخاب شیب u_0 در $x = 0$ تعیین کنندهٔ نسبت a/ℓ است. شکل (۱۰) منحنی‌های بهینهٔ دماغه برای چندین مقدار a/ℓ را نشان می‌دهد. کمترین پسا را می‌توان با انتگرال‌گیری از معادلهٔ (۳۱) به شرطی که u تغیر مستقل باشد می‌توان بدست آورد:

$$C_D = \frac{u_0^2}{(1+u_0^2)^4}\left(3 + 10u_0^2 + 17u_0^4 + 2u_0^6 + 4u_0^4 \log\frac{1}{u_0}\right) \tag{۴۶}$$

نکتهٔ تعجب آور این است که شکل بهینه دماغه در جریان هایپرسونیک یک شکل سر پخ می‌باشد. در هر حال برای نسبتهای لاغری کوچک[1] شکل سرپخ به سختی قابل درک می‌باشد. در حقیقت برای $a/\ell \to 0$ نشان داده می‌شود که خواهیم داشت:

$$\frac{r}{a} \to \left(\frac{\ell - x}{\ell}\right)^{3/4} \tag{۴۷}$$

$$C_D \to \frac{27}{16}\left(\frac{a}{\ell}\right)^2 \tag{۴۸}$$



شکل ۱۰: اشکال دماغه با کمترین پسا در جریان هایپرسونیک

مثال ۶: کنترل درجه حرارت اتاق[1]

1. Small Fineness Ratio

در نظر است اتاقی با کمترین مقدار مصرف انرژی گرم شود. در صورتی که $\theta(t)$ درجه حرارت اتاق، θ_a درجه حرارت محیط بیرونی(مقدار ثابت) و $u(t)$ نرخ تزریق حرارت به داخل اتاق باشد، معادلات دینامیکی حاکم عبارتند از[۲]:

$$\dot{\theta} = -a(\theta - \theta_a) + bu \qquad (۱)$$

ثابتهای a,b به عایق‌کاری و برخی دیگر از مشخصات اتاق وابسته می‌باشند. با تعریف متغیر حالت بصورت $x(t) \triangleq \theta(t) - \theta_a \ , \ \theta_a = 0^o$ معادلات حالت سیستم بصورت زیر در می‌آیند:

$$\dot{x} = -ax + bu \qquad (۲)$$

برای کنترل درجه حرارت در یک فاصلهٔ زمانی ثابت $[0,T]$ با حداقل انرژی تزریق شده، شاخص عملکرد بصورت زیر انتخاب می‌شود:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)dt \qquad (۳)$$

درصورتی که بخواهیم دمای نهائی اتاق مقدار ثابت $\theta(T) = 10^o$ باشد نشان دهید که حل بهینه برای این سیستم بصورت زیر خواهد بود:

$$u^*(t) = \frac{10ae^{at}}{b\sinh aT} \quad , \quad x^*(t) = 10\frac{\sinh at}{\sinh aT} \quad , \quad 0 \le t \le T \qquad (۴)$$

حل: تابع هامیلتونی عبارت است از

$$H = \frac{u^2}{2} + \lambda(-ax + bu) \qquad (۵)$$

کنترل بهینهٔ $u(t)$ با حل معادلات زیر بدست می‌آید:

$$\dot{x} = -ax + bu \qquad (۶)$$

$$\dot{\lambda} = -H_x = a\lambda \qquad (۷)$$

1. Temperature Control in a Room
2. Lewis, Frank. L., & Syrmos, Vassilis, L., Optimal Control, 2ed, John Wiley & Sons Inc, 1995. Page 139

$$0 = H_u = u + b\lambda \qquad (۸)$$

شرط ایستا بودن (۸) بیان می‌کند که کنترل بهینه بوسیلهٔ رابطهٔ زیر تعیین می‌شود:

$$u(t) = -b\lambda(t) \qquad (۹)$$

لذا برای تعیین $u^*(t)$ بایستی $\lambda^*(t)$ بدست آید. با جاگذاری (۹) در (۶) و استفاده از (۷) دستگاه معادلات زیر نتیجه می‌شود:

$$\dot{x} = -ax - b^2\lambda \qquad (۱۰a)$$

$$\dot{\lambda} = a\lambda \qquad (۱۰b)$$

با حل معادلات فوق $\lambda^*(t)$ و $x^*(t)$ بدست می‌آیند. حل معادلهٔ دیفرانسیل (۱۰b) بصورت زیر می‌باشد:

$$\lambda(t) = e^{-a(T-t)}\lambda(T) \qquad (۱۱)$$

که در آن $\lambda(T)$ مجهول می‌باشد. با استفاده از معادلهٔ اخیر در (۱۰a) نتیجه می‌شود که:

$$\dot{x} = -ax - b^2\lambda(T)e^{-a(T-t)} \qquad (۱۲)$$

با استفاده از تبدیل لاپلاس حل $x(t)$ را می‌توان بصورت زیر بدست آورد:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{x(0)}{s+a} - \frac{b^2\lambda(T)e^{-aT}}{(s+a)(s-a)} \\ &= \frac{x(0)}{s+a} - \frac{b^2}{a}\lambda(T)e^{-aT}\left(\frac{-1/2}{s+a} + \frac{1/2}{s-a}\right) \end{aligned} \qquad (۱۳)$$

و نتیجتاً:

$$x(t) = x(0)e^{-at} - \frac{b^2}{a}\lambda(T)e^{-aT}\sinh at. \qquad (۱۴)$$

فرض شود که دمای اولیهٔ اتاق $\theta_a = 0\ ^\circ C$ لذا:

$$x(0) = 0^o \qquad (۱۵)$$

حال می‌خواهیم دمای نهائی اتاق $\theta(T)$ را در زمان T ثانیه به سمت مقدار دقیق $\theta_a = 10\ ^{o}C$ برسانیم لذا خواهیم داشت:

$$x(T) = 10^{\circ} \tag{۱۶}$$

با استفاده از معادلات (۱۵) و (۱۶) می‌خواهیم مجهول $\lambda(T)$ را تعیین کنیم. با استفاده از معادلهٔ (۱۴) خواهیم داشت:

$$x(T) = x(0)e^{-aT} - \frac{b^2}{2a}\lambda(T)(1 - e^{-2aT}). \tag{۱۷}$$

با استفاده از معادلات (۱۵) و (۱۶) خواهیم داشت:

$$\lambda(T) = \frac{20a}{b^2(1 - e^{-2aT})} \tag{۱۸}$$

و از آنجا خواهیم داشت:

$$\lambda^*(t) = -\frac{10\ ae^{at}}{b^2 \sinh aT} \tag{۱۹}$$

و نهایتاً مقدار بهینهٔ فرمان کنترل $u^*(t)$ بدست می‌آید:

$$u^*(t) = \frac{10\ ae^{at}}{b \sinh aT} \qquad 0 \le t \le T. \tag{۲۰}$$

برای چک نمودن درستی جواب اگر این مقدار را در معادلهٔ (۳) قرار داده و معادلهٔ دیفرانسیل را حل نماییم نتیجه می‌شود که $x(T) = 10^{o}$ و همان جواب مدنظر می‌باشد.

لازم به توضیح است که $x(T) = 10^{o}$ یک جزء از شاخص عملکرد که بایستی کمینه شود نیست بلکه یک شرط انتهائی است لذا در این مسئله مجاز به استفاده از آن در رابطهٔ $\lambda(t_f) = \phi_x^T$ نخواهیم بود. در فصل آینده با رابطهٔ $\lambda(t_f) = \Phi_x = \phi_x + \nu^T \psi_x$ آشنا شده و در آنجا از شرط انتهائی برای محاسبهٔ $\lambda(t_f)$ استفاده خواهد شد.

مثال ۷: مطلوبست یافتن کنترل بهینه برای سیستم زیر(مقادیر x, u اسکالر هستند)[1]:

$$\dot{x} = -x + u \qquad \text{معادله حالت} \tag{۱}$$

$$x(0) = x_0 \quad , \quad x(T) = 0 \qquad \text{شرط اولیه} \tag{۲}$$

شاخص عملکرد بصورت زیر می‌باشد:

$$J = \int_0^T (x^2 + u^2)dt \tag{۳}$$

حل: در مرحلهٔ اول هامیلتونین را تشکیل می‌دهیم:

$$H = x^2 + u^2 + \lambda(-x + u) \tag{۴}$$

شرط لازم برای بهینه بودن عبارتست از:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -2x + \lambda \qquad \text{معادلهٔ کمک حالت یا اویلر لاگرانژ} \tag{۵}$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = 2u + \lambda \rightarrow u = -\frac{\lambda}{2} \qquad \text{شرط بهینه گی} \tag{۶}$$

$$\lambda(T) = \phi_x^T = 0 \rightarrow \lambda(T) = 0 \rightarrow u(T) = 0 \qquad \text{شرط مرزی} \tag{۷}$$

با جاگذاری (۶) در معادلهٔ (۱) و استفاده از (۵) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x & , \quad x(0) = x_0 \\ \dot{u} = x + u & , \quad u(T) = 0 \end{cases}$$

با حل دستگاه فوق مقادیر x, u بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$x = \frac{x_0 \sinh\sqrt{2}(T-t)}{\sinh\sqrt{2}T}$$

$$u = x_0 \frac{\sinh\sqrt{2}(T-t) - \sqrt{2}\cosh\sqrt{2}(T-t)}{\sinh\sqrt{2}T}$$

1. Nguyen Tan Tien, Introduction to Control Theory Including Optimal Control, C.10 Optimal Control with Unbounded Continuous Controls, Page 50

مثال ۸: مطلوبست یافتن کنترل بهینه برای سیستم زیر(مقادیر x, u اسکالر هستند)[1]:

(۱) $\dot{x} = u$ معادله حالت

(۲) $x(0) = 1 \quad , \quad x(1) = free$ شرط اولیه

شاخص عملکرد بصورت زیر می‌باشد:

$$J = \int_0^1 (x^2 + u^2)dt \tag{۳}$$

حل: در مرحلهٔ اول هامیلتونین را تشکیل می‌دهیم:

$$H = x^2 + u^2 + \lambda u \tag{۴}$$

شرط لازم برای بهینه بودن عبارتست از:

(۵) $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -2x$ معادلهٔ کمک حالت یا اویلر لاگرانژ

(۶) $0 = \frac{\partial H}{\partial u} = 2u + \lambda \rightarrow u = -\frac{\lambda}{2}$ شرط بهینه گی

(۷) $\lambda(1) = \phi_x^T = 0 \rightarrow \lambda(1) = 0 \rightarrow u(1) = 0$ شرط مرزی

با جاگذاری (۶) در معادلهٔ (۱) و استفاده از (۵) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \dot{x} = x & , \quad x(0) = 1 \\ \dot{u} = x & , \quad u(1) = 0 \end{cases}$$

با حل دستگاه فوق مقادیر x, u بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$x = \frac{\cosh(1-t)}{\cosh 1} \quad \text{and} \quad u = -\frac{\sinh(1-t)}{\cosh 1}$$

مثال ۹: مطلوبست یافتن کنترل بهینه برای سیستم زیر(مقادیر x, u اسکالر هستند):

(۱) $\dot{x} = x + u$ معادله حالت

1. Nguyen Tan Tien, Introduction to Control Theory Including Optimal Control, C.10 Optimal Control with Unbounded Continuous Controls, Page 50

$$x(0)=2 \qquad \text{شرط اولیه} \tag{۲}$$

شاخص عملکرد بصورت زیر می‌باشد:

$$J=\int_0^T (u^2+2x^2)dt \tag{۳}$$

حل: در مرحلهٔ اول هامیلتونین را تشکیل می‌دهیم:

$$H=u^2+2x^2+\lambda(x+u) \tag{۴}$$

شرط لازم برای بهینه بودن عبارتست از:

$$\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial x}=-(4x+\lambda) \qquad \text{معادلهٔ کمک حالت یا اویلر لاگرانژ} \tag{۵}$$

$$0=\frac{\partial H}{\partial u}=2u+\lambda \qquad \text{شرط بهینه گی} \tag{۶}$$

$$\rightarrow \lambda=-2u \tag{۷}$$

$$\lambda(T)=\phi_x^T=0 \rightarrow \lambda(T)=0 \rightarrow u(T)=0 \qquad \text{شرط مرزی} \tag{۸}$$

با جاگذاری(۷) در معادلهٔ(۵) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \dot{x}=x+u & , \quad x(0)=2 \\ \dot{u}=2x-u & , \quad u(T)=0 \end{cases}$$

با حل دستگاه فوق مقدار u به ازای مقدار معین T بدست آمده و از رابطهٔ(۷) مقدار λ محاسبه می‌گردد. به ازای $T=10\sec$ مقادیر x,u,λ,J بصورت زیر بدست می‌آیند:

فهرست برنامه Matlab جهت حل مسئله فوق

```
%Solving a TPBVP using matlab dsolve
clc; clear; close all
S=dsolve('Dx=x+u','Du=2*x-u','x(0)=2','u(10)=0');
x=simple(S.x)
u=simple(S.u)
J=double(int(u^2+2*x^2,0,10))
```

نتیجه اجرای برنامه:

```
x =(2*3^(1/2)*cosh(t*3^(1/2)-10*3^(1/2))+2*sinh(t*3^(1/2)-
10*3^(1/2)))/(3^(1/2)*cosh(10*3^(1/2))-sinh(10*3^(1/2)))
lambda = -8*sinh(t*3^(1/2)-10*3^(1/2))/(3^(1/2)*cosh(10*3^(1/2))-
sinh(10*3^(1/2)))
u =4*sinh(3^(1/2)*(t-10))/(3^(1/2)*cosh(10*3^(1/2))-sinh(10*3^(1/2)))
J = 10.9282
```

مثال ۱۰: مسئله ۲.۳.۳: برنامه‌ریزی جهت سرعت برای پیمودن کوتاه‌ترین مسافت از یک نقطه به یک نصف‌النهار- مسئله ژئودزی[1]

می‌خواهیم زاویهٔ سمت حرکت β[2](جهت مثبت خلاف جهت عقربه‌های ساعت از شرق است) را بعنوان تابعی از طول جغرافیائی ϕ طوری محاسبه نماییم که مسافت طی شده بر روی سطح کرهٔ به شعاع واحد از یک نقطه با مختصات عرضی و طولی (θ_0, ϕ_0) به نصف‌النهاری که در آن $\phi = \phi_f$ است کوتاهترین مسافت باشد.

مسافت طی شده از رابطهٔ زیر محاسبه می‌گردد:

$$J = \int_0^{\phi_f} \sec\beta \cos\theta \, d\phi$$

که در آن:

$$\frac{d\theta}{d\phi} = \tan\beta \cos\theta \quad , \quad \theta(0) = \theta_0$$

a) نشان دهید که مسیر کوتاهترین مسافت از نقطهٔ با زاویهٔ θ که از رابطهٔ زیر حاصل می‌شود می‌گذرد:

$$\tan\theta = \tan\theta_0 \frac{\cos(\phi_f - \phi)}{\cos(\phi_f)}$$

و زاویهٔ سمت حرکت بهینه از محل اولیه عبارتست از:

$$\cos\beta = \frac{\sec\theta}{\sec\theta_f}$$

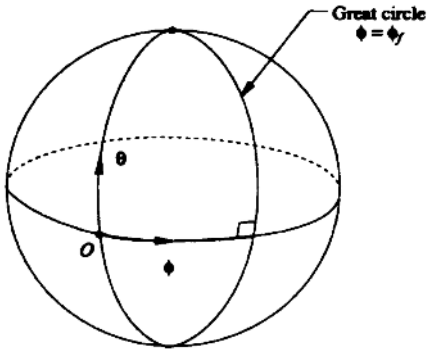
که در آن θ_f از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\tan\theta_f = \tan\theta_0 \sec\phi_f$$

1. Velocity Direction Programming(VDP) for Min Distance to a meridian; a Geodesic Problem
2. Heading Angle

این دایرهٔ عظیمه‌ای است که عمود بر نصف النهار در نقطهٔ انتهائی $(\beta_f = 0)$ می گذرد.

b) مسیر کمترین مسافت را از $\theta_0 = 40\deg$, $\phi_0 = 0$ به نصف النهار $\phi_f = 50\deg$ ترسیم نمایید.



شکل ۱۱: نمایش طول و عرض جغرافیایی روی یک کره

حل: برای این مسئله هامیلتونین بصورت زیر در می آید:

$$H = L + \lambda f = \sec\beta\cos\theta + \lambda\tan\beta\cos\theta \qquad (۱)$$

از آنجائی که H تابع صریح از متغیر مستقل ϕ نیست لذا از انتگرال اول TPBVP مقدار H در طول مسیر ثابت می‌باشد. می‌خواهیم این رابطه را بجای معادله کمک حالت λ استفاده نماییم. شرط بهینه بودن عبارتست از:

$$0 = H_\beta = \sec\beta\tan\beta\cos\theta + \lambda\sec^2\beta\cos\theta = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = -\sin\beta \qquad (۲)$$

با جاگذاری (۲) در (۱) نتیجه می‌شود:

$$H = \cos\beta\cos\theta \qquad (۳)$$

از معادلهٔ (۱۶) یعنی $\lambda(t_f) = \phi_x^T$ نتیجه می‌شود:

$$\lambda(\phi_f) = 0$$

از رابطهٔ (۲) و رابطه اخیر نتیجه می‌شود:

$$\beta(\phi_f) = 0$$

چون H در طول مسیر ثابت است لذا ار رابطه (۳) می‌توان به رابطهٔ زیر رسید:

$$H = \cos\theta_f$$

و نهایتاً داریم:

$$\cos\beta\cos\theta = \cos\theta_f \Rightarrow \cos\beta = \frac{\cos\theta_f}{\cos\theta} \qquad (۴)$$

با جاگذاری (۴) در معادلهٔ قید داریم:

$$\frac{d\theta}{d\phi} = \cos\theta\tan\beta \equiv \cos\theta\sqrt{\sec^2\beta - 1} = \cos\theta\sqrt{\frac{\sec^2\theta_f}{\sec^2\theta} - 1} \qquad (۵)$$

از اینرو:

$$\phi_f - \phi = \int_{\theta}^{\theta_f} \frac{\sec^2\theta}{\sqrt{\tan^2\theta_f - \tan^2\theta}}\, d\theta = \int_{\tan\theta}^{\tan\theta_f} \frac{dz}{\sqrt{\tan^2\theta_f - z^2}} = \cos^{-1}\frac{\tan\theta}{\tan\theta_f} \qquad (۶)$$

استفاده از (۶) در $\phi = \phi_0$ نتیجه می‌دهد:

$$\tan\theta_f = \frac{\tan\theta_0}{\cos(\phi_f - \phi_0)} \qquad (۷)$$

با جاگذاری (۷) در (۶) نتیجه می‌شود:

$$\tan\theta = \tan\theta_0 \frac{\cos(\phi_f - \phi)}{\cos(\phi_f - \phi_0)} \qquad (۸)$$

از آنجائی که در مبدا $\phi_0 = 0$ لذا:

$$\tan\theta = \tan\theta_0 \frac{\cos(\phi_f - \phi)}{\cos(\phi_f)}$$

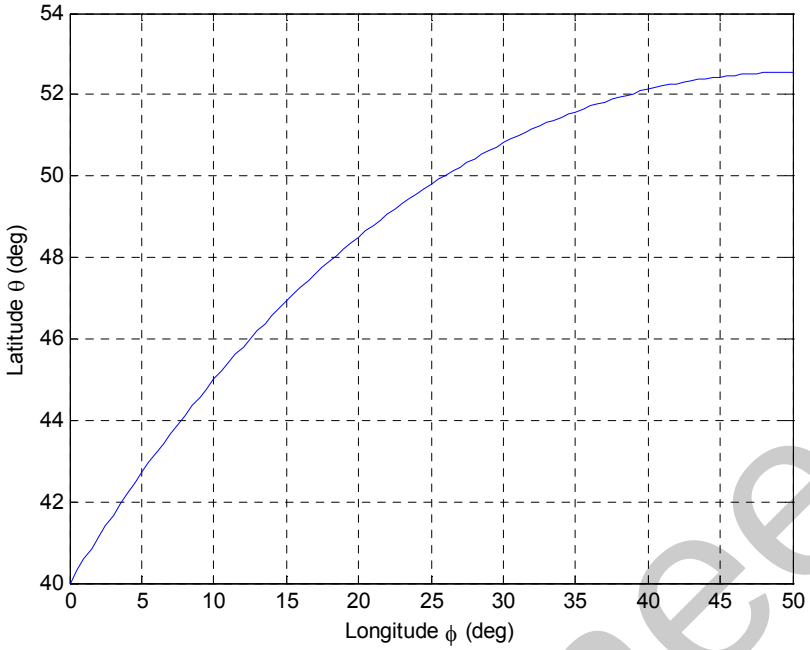
و همچنین در مقصد $\phi = \phi_f$, $\theta = \theta_f$ است لذا نتیجه می‌شود:

$$\tan\theta_f = \tan\theta_0 \sec\phi_f \qquad (۹)$$

برنامه Matlab برای حل این مسئله و منحنی حاصل از اجرای برنامه در ادامه آمده است.

```
% Problem2_3_3.m; Min Distance from a Point to Meridian on a Sphere;
phf=50*pi/180;
tho=40*pi/180;
pho=0;
N=100;
ph=phf*[0:1/N:1]; c=180/pi;
un=ones(1,N+1);
tth=tan(tho)*cos(phf*un-ph)/cos(phf-pho);
th=atan(tth);
figure(1); clf; plot(ph*c,th*c);grid;
xlabel('Longitude \phi (deg)');
```

```
ylabel('Latitude \theta (deg)');
```



شکل ۱۲: ترسیم مسئله کمترین مسافت از $\theta_0 = 40\,\text{deg}$, $\phi_0 = 0$ **به نصف النهار** $\phi_f = 50\,\text{deg}$

۳-۲-۴- حل عددی مسائل بهینه‌سازی دینامیکی پیوسته با استفاده از روش گرادیان[1]

فرمان FMINU در نرم افزار Matlab جهت حل مسائل بهینه سازی دینامیکی پیوسته نیز بکار می‌رود. کاربر بایستی در این حالت یک فایل تابع Matlab آماده کند که با داشتن u مقدار $f(u)$ را محاسبه نماید در این حالت انتگرال‌گیری $\dot{\lambda} = -\lambda^T f_x$ بصورت پیشخور با نموهای زمانی مساوی برای محاسبهٔ ϕ(هنگامی که از دستور FMINU استفاده میکنید آنرا f بنامید) انجام می‌شود.

مثال ۱۱: حل مسئله شکل دماغه با کمترین پسا با استفاده از دستور FMINU

فایل تابع Matlab زیر پسای دماغه را با تابع شیب $u(t)$ محاسبه می‌نماید. کد ODEU شبیه ODE23 می‌باشد ولی از نموهای زمانی یکسان استفاده می‌کند. فایل Matlab زیر بنام E02_4_2.M یک حدس اولیه شیب دماغه

1. Numerical Solution with Gradient Methods

$u(t)$ در تعداد محدودی از نقاط آماده نموده و همچنین تعدادی از اعداد انتخابی تابع FMINU را هم تعیین می‌نماید در این مثال گرادیان‌ها با استفاده از روش تفاضل محدود در خود برنامه محاسبه می‌شوند اگر گرادیان‌ها به برنامه داده شوند تعداد تکرار در بدست آوردن جواب کاهش می‌یابد.

```
% Script e02_4_2.m; min drag nose-shape pb. using MATLAB code FMINU;
% t-->x=distance; s=[d r]'; u=-tan(theta); lengths in a=r(0); drag in
% q*pi*a^2 where q=dynamic pressure;
tf=4; optn(1)=1; optn(14)=500;
u0=[.18 .18 .19 .19 .19 .20 .20 .20 .21 .21 .22 .22 .23 .24 .25 .26 .28 .29
.34 .38 .68];
%u=.5*ones(1,N+1);              % Rough initial guess
u=fminu('noshp_f',u0,optn,[],tf)
```

فایل معرفی تابع تحت نام NOSHP_F.M

```
function f=noshp_f(u,tf)
% subroutine for e02_4_2; min drag nose shape; t-->x=distance; s=[d r]';
% u=-tan(theta); lengths in a=r(0);
% drag in q*pi*a^2 where q=dynamic pressure;
s0=[0 1]'; N1=length(u); [t,s]=odeu('noshp',u,s0,tf);
f=2*s(2,N1)^2+s(1,N1);
```

فایل معرفی تابع تحت نام NOSHP.M

```
function [f1,f2]=noshp(u,s,t,flg)
% Subroutine for e02_4_1; min drag nose shape using FOP0; t-->x;
% s=[d r]'; u=-tan(theta); lengths in a=r(0); drag in q*pi*a^2 where
% q=dynamic pressure;
d=s(1); r=s(2);
if flg==1, f1=[4*r*u^3/(1+u^2); -u];
elseif flg==2, f1=2*r^2+d; f2=[1 4*r];
elseif flg==3, f1=zeros(2,2); f1(1,2)=4*u^3/(1+u^2);
    f2=[4*r*u^2*(3+u^2)/(1+u^2)^2; -1];
end
```

فایل معرفی تابع تحت نام ODEU.M

```
function [t,s]=odeu(name,u,s0,tf)
% Forward 4th order fixed step-size Runge-Kutta integration with
% vector forcing function u(t); sdot=f(s,u); function file
% 'name' contains the function f(s,u) for flg=1;
[nc,N1]=size(u); N=N1-1; t=tf*[0:1/N:1]; dt=tf/N;     s(:,1)=s0;
for i=1:N,
 if i==1,          u2=(3*u(:,1)+6*u(:,2)-u(:,3))/8;
 elseif i==N,      u2=(3*u(:,N1)+6*u(:,N)-u(:,N-1))/8;
 else              u2=(-u(:,i-1)+9*u(:,i)+9*u(:,i+1)-u(:,i+2))/16;
 end
 t1=(i-1)*dt;      t2=t1+dt/2;  t3=t1+dt;
 s1=s(:,i);        f1=feval(name,u(:,i),s1,t1,1);
 s2=s1+dt*f1/2;    f2=feval(name,u2,s2,t2,1);
 s3=s1+dt*f2/2;    f3=feval(name,u2,s3,t2,1);
 s4=s1+dt*f3;      f4=feval(name,u(:,i+1),s4,t3,1);
 s(:,i+1)=s1+dt*(f1+2*f2+2*f3+f4)/6;
end;
```

نتیجه حاصل از اجرای برنامه بصورت زیر است:

```
para =
  Columns 1 through 10
```

```
    1.0000     0.0001     0.0001     0.0000          0          0          0
0         0         0
  Columns 11 through 18
0        0         0  500.0000         0    0.0000    0.1000         0

f-COUNT    FUNCTION    STEP-SIZE      GRAD/SD
   23     0.0982108            1   -4.72e-005
   47     0.0981971     0.568019   -1.83e-007
   72     0.0981837      1.06831    -1.7e-007
   97     0.0981819      2.20246   -4.09e-008
  122     0.0981813      2.88468   -1.04e-008
Optimization Terminated Successfully
 Search direction less than 2*options(2)
 Gradient in the search direction less than 2*options(3)
 NUMBER OF FUNCTION EVALUATIONS=122

u =
  Columns 1 through 10
    0.1826     0.1853     0.1876     0.1901     0.1932     0.1963     0.1998
0.2037    0.2077    0.2128
  Columns 11 through 20
    0.2175     0.2237     0.2306     0.2384     0.2486     0.2594     0.2767
0.2938    0.3381    0.3809
  Column 21
    0.6799
```

تکلیف T7: مسائل بهینه‌سازی دینامیکی گسسته

الف) مسئله ۲.۱.۴ فرما در صفحه ۵۴ کتاب برایسون را حل کنید.

ب) یک مسئله از مسائل ۲.۲.۱ تا ۲.۲.۷ در صفحه ۶۲ کتاب برایسون را از طریق عددی با دستور FMINU حل نموده و به همراه فایل کامپیوتری Matlab از طریق ایمیل ارسال نمایید.

تکلیف T8: مسائل بهینه‌سازی دینامیکی پیوسته

الف) شاخص عملکرد زیر را در نظر بگیرید[۱]:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2 + u^2)dt$$

معادله حالت یا قیود دیفرانسیلی عبارتند از:

۱. پینچ، ای. آر، کنترل بهینه و حساب تغییرات – مترجم فراهی، محمدهادی – مشهد نشر بنفشه ۱۳۸۵ ص ۱۷۸

$$\dot{x} = -x + \sqrt{3}u$$

الف) در صورتی که $x(0) = 2$ باشد نشان دهید که:

$$x^* = \frac{2(e^{2t} + 3e^4 e^{-2t})}{3e^4 + 1} \quad , \quad u^* = \frac{6\sqrt{3}(e^{2t} - e^4 e^{-2t})}{3e^4 + 1}$$

ب) یک مسئله بدلخواه از مسائل ۲.۳.۱ تا ۲.۳.۷ در صفحه ۷۱ الی ۷۶ کتاب برایسون را حل نمایید(مسئله ۲.۳.۳ در جزوه موجود است).

ب) یک مسئله بدلخواه از مسائل ۲.۴.۱ تا ۲.۴.۷ در صفحه ۸۱ کتاب برایسون را از طریق عددی با دستور FMINU حل نموده و به همراه فایل کامپیوتری Matlab از طریق ایمیل ارسال نمایید.

ج) شاخص عملکرد $\int_0^1 (u^2 - x)dt$ را در نظر بگیرید: حل کمینهٔ این شاخص تحت معادله حالت(قید دیفرانسیلی) $\dot{x} = u$ و شرایط اولیه $x_0 = 0$ را با استفاده از دستور FMINCON بصورت عددی بدست آورده و با حل تحلیلی زیر مقایسه کنید[1]

$$x^*(t) = -\frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} \quad , \quad u^*(t) = -\frac{t}{2} + \frac{1}{2}$$

مقدار شاخص عملکرد را در حالت حل تحلیلی و حل عددی با هم مقایسه نمایید.

1. Hull, David. G., *Optimal Control Theory for Applications*, Springer, 2003. Problem 9.5, Page 156

فصل چهارم:

بهینه‌سازی دینامیکی با قیود انتهائی

۴-۱- سیستم‌های دینامیکی گسسته

بسیاری از مسائل بهینه‌سازی دینامیکی قیود انتهائی[1] را شامل می‌شوند یعنی توابعی از حالتهای انتهائی مشخص شده‌اند

$$\psi[x(N)] = 0$$

که در آن ψ دارای ابعاد $q < n$ می‌باشد. حل چنین مسائلی نیازمند بسط تئوری و الگاریتم‌های توسعه داده شده در فصل قبل می‌باشند. مسئله به این صورت تعریف می‌شود: $u(i)$ را چنان انتخاب نمائید که شاخص عملکرد زیر را کمینه نماید:

$$J = \phi[x(N)] \tag{۱}$$

و داریم:

$$x(i+1) = f[x(i), u(i), i] \ , \ i = 0, \cdots, N-1 \tag{۲}$$

$$x(0) = x_0 \ , \quad \psi[x(N)] = 0 \tag{۳}$$

۴-۱-۱- شرایط لازم برای یک حل ایستا

قیود را به شاخص عملکرد با ضرائب برداری لاگرانژی ν و $\lambda(i)$ ملحق می‌نماییم:

$$\bar{J} = \phi + \nu^T \psi + \sum_{i=0}^{N-1} \lambda^T(i+1)\{f[x(i), u(i), i] - x(i+1)\} + \lambda^T(0)[x_0 - x(0)] \tag{۴}$$

ادامه حل مشابه آنچه که در فصل قبل انجام شد می‌باشد فقط در اینجا $L = 0$ بوده و ϕ با رابطه زیر جایگزین می‌شود:

$$\Phi \square \phi + \nu^T \psi \tag{۵}$$

از اینرو:

1. Dynamic Optimization with Terminal Constraints

$$H(i) \triangleq \lambda^T(i+1) f[x(i), u(i), i] \tag{۶}$$

و خواهیم داشت:

$$\lambda^T(i) = H_x(i) \equiv \lambda^T(i+1) f_x \tag{۷}$$

$$\lambda^T(N) = \Phi_x \equiv \phi_x + \nu^T \psi_x \tag{۸}$$

$$0 = H_u(i) \equiv \lambda^T(i+1) f_u \ , \ i = 0, \cdots, N-1 \tag{۹}$$

۴-۱-۲- حل ایستای یک مسئله با شرایط مرزی در دو نقطهٔ مجزا[1]

شرط بهینه‌گی(۹) همراه با معادلات حالت(۲)، شرایط مرزی(۳)، معادلات الحاقی(۷) و شرایط مرزی الحاقی(۸) یک مسئله با شرایط مرزی در دو نقطهٔ مجزا(TPBVP) را برای تعیین یک حل ایستای $x(i), \lambda(i), u(i)$ تشکیل می‌دهند. تعداد q ثابت ضرائب لاگرانژی ν بایستی طوری انتخاب شوند که تعداد q قید انتهائی(۳) ارضاء گردند.

کتاب برایسون در صفحه ۹۴ مثالی را در خصوص برنامه‌ریزی جهت تراست بصورت گسسته و در صفحهٔ ۱۰۰ حل عددی سیستم‌های گسسته به روش گرادیان عنوان نموده و مطالعه آن به دانشجویان واگذار می‌شود.

۴-۲- سیستم‌های دینامیکی پیوسته

معادلات (۱) تا (۳) در حالت پیوستهٔ بصورت زیر در می‌آیند. مسئله در اینصورت انتخاب $u(t)$ برای کمینه نمودن شاخص عملکرد

$$J = \phi[x(t_f)] \tag{۱۰}$$

تحت معادلات زیر می‌باشد:

1. An TPBVP for a Stationary Solution

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t) \tag{۱۱}$$

$$x(t_0) = x_0 \quad , \quad \psi[x(t_f)] = 0 \tag{۱۲}$$

در معادلات بالا t_f معلوم است.

۴-۲-۱- شرایط لازم برای یک حل ایستا[1]

معادلات قیود را به شاخص عملکرد (۱۰) با یک بردار ضریب لاگرانژی متغیر با زمان $\nu, \lambda(t)$ بصورت زیر ملحق می‌نماییم:

$$\bar{J} = \phi + \nu^T \psi + \int_0^{t_f} \lambda^T(t) \{ f[x(t), u(t), t] - \dot{x} \} dt \tag{۱۳}$$

روش شبیه فصل قبل می‌باشد به استثنای اینکه در اینجا $L = 0$ و ϕ بوسیلهٔ معادلهٔ زیر جایگزین می‌شود:

$$\Phi \equiv \phi + \nu^T \psi \tag{۱۴}$$

از اینرو

$$H(t) = \lambda^T(t) f[x(t), u(t), t] \tag{۱۵}$$

و نتیجتاً خواهیم داشت:

$$\dot{\lambda}^T = -H_x \equiv -\lambda^T f_x \tag{۱۶}$$

معادله اویلر لاگرانژ یا کمک حالت

$$\lambda^T(t_f) = \Phi_x \equiv \phi_x + \nu^T \psi_x \tag{۱۷}$$

شرایط مرزی

$$0 = H_u \equiv \lambda^T f_u \ , \ 0 \le t \le t_f \tag{۱۸}$$

شرط بهینه گی

۴-۲-۲- حل ایستای یک مسئله با شرایط مرزی در دو نقطهٔ مجزا[1]

1. Necessary Conditions for a Stationary Solution

شرط بهینه‌گی (۱۸) همراه با معادلات حالت (۱۱)، شرایط مرزی (۱۲) معادلات کمک حالت (۱۶) و شرایط مرزی (۱۷) یک مسئله با شرایط مرزی در دو نقطهٔ مجزا(TPBVP) برای تعیین یک حل ایستای $x(t),\lambda(t),u(t)$ تشکیل می‌دهند تعداد q ضریب لاگرانژی ν می‌بایست طوری انتخاب شوند که تعداد q قید انتهائی در (۱۲) را ارضاء نمایند.

کتاب برایسون در صفحهٔ ۱۰۷ مثالی در خصوص برنامه‌ریزی جهت تراست برای حداکثر نمودن u_f و با v_f, y_f مشخص ارائه نموده است مطالعه این مثال به دانشجویان واگذار می‌شود.

مثال ۱:

شاخص عملکرد $\int_{t_0}^{t_f}(u^2-x)dt$ را در نظر بگیرید:

الف) نشان دهید که کمینهٔ این شاخص تحت معادله حالت(قید دیفرانسیلی) $\dot{x}=u$ و شرایط مرزی $t_0=0$, $x_0=0$, $t_f=1$ بصورت زیر است:

$$u(t)=-\frac{t}{2}+\frac{1}{2} \quad , \quad x(t)=-\frac{t^2}{4}+\frac{t}{2}$$

ب)همین مسئله را با شرط مرزی انتهائی $x_f=1$ در نظر بگیرید. فرمان کنترل $u(t)$ را بصورت تحلیلی بدست آورده و نشان دهید که در این حالت $x(t)=\frac{t}{4}(5-t)$ می‌باشد[۲]

حل قسمت الف به دانشجویان واگذار شده و در اینجا به حل قسمت ب می‌پردازیم:

تابع هامیلتونی عبارتست از:

$$H=L+\lambda^T f=u^2-x+\lambda u \qquad (۱)$$

$$\Phi=\phi+\nu^T\psi=0+\nu(x(1)-1) \qquad (۲)$$

1. An TPBVP for a Stationary Solution
2. Hull, David. G., *Optimal Control Theory for Applications*, Springer, 2003. Problem 9.5, Page 156

معادله حالت $\dot{x} = u$ (۳)

کمک حالت $\dot{\lambda} = -H_x = 1 \rightarrow \lambda = t + c_1$ (۴)

شرط بهینه گی $H_u = 2u + \lambda = 0 \rightarrow u = -\frac{\lambda}{2} = -\frac{t}{2} - \frac{c_1}{2}$ (۵)

شرط مرزی $\lambda(t_f) = \Phi_{x_f} = \nu \rightarrow 1 + c_1 = \nu$ (۶)

قید انتهائی $x(1) - 1 = 0$ (۷)

شرط اولیه $x(0) = 0$ (۸)

$$\dot{x} = u \rightarrow \dot{x} = -\frac{t}{2} - \frac{c_1}{2} \rightarrow x = -\frac{t^2}{4} - \frac{c_1}{2}t + c_2 \quad (۹)$$

$$x(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0 \quad , \quad x(1) = 1 \rightarrow c_1 = -\frac{5}{2} \rightarrow \quad (۱۰)$$

$$x(t) = -\frac{t^2}{4} + \frac{5t}{4} \quad (۱۱)$$

از رابطهٔ (۴) و (۵) و (۶) خواهیم داشت

$$\lambda(t) = t - \frac{5}{2} \quad (۱۲)$$

$$u(t) = -\frac{t}{2} + \frac{5}{4} \quad (۱۳)$$

$$\nu = 1 + c_1 = -\frac{3}{2} \quad (۱۴)$$

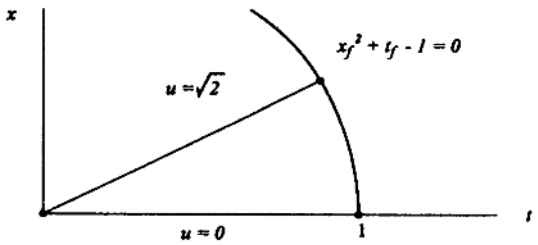
$$J_{\min} = 0.4792 \quad (۱۵)$$

مثال ۲: کوتاهترین فاصله مبدا از یک سهمی(مسئله مسافت)[1]

1. Minimum Distance to a Parabola (Distance Problem), Ref: Hull, David. G., Optimal Control Theory for Applications, Springer, 2003. Page 235

با توجه به شکل(۱) مطلوبست یافتن کمترین فاصلهٔ مبدا از یک سهمی، به عبارت دیگر مطلوبست یافتن فرمان کنترل $u(t)$ که شاخص عملکرد زیر را کمینه نماید:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{1+u^2}\,dt \qquad (۱)$$



شکل ۱: کوتاهترین فاصله مبدا از یک سهمی

قیود دیفرانسیلی یا معادله حالت عبارتند از:

$$\dot{x} = u \qquad (۲)$$

شرایط اولیه عبارتند از:

$$t_0 = 0 \quad , \quad x_0 = 0 \qquad (۳)$$

قید انتهائی عبارتست از:

$$x_f^2 + t_f - 1 = 0 \qquad (۴)$$

حل: برای این مسئله خواهیم داشت:

$$\Phi = \phi + \nu^T \psi \rightarrow \phi = 0 \quad , \quad \psi = x_f^2 + t_f - 1 \quad \rightarrow \quad \Phi = \nu(x_f^2 + t_f - 1) \qquad (۵)$$

هامیلتونین بصورت زیر در می‌آید:

$$H = \sqrt{1+u^2} + \lambda u \qquad (۶)$$

ادامه حل به دانشجویان واگذار شده است. دو جواب برای این مسئله بدست می‌آید:

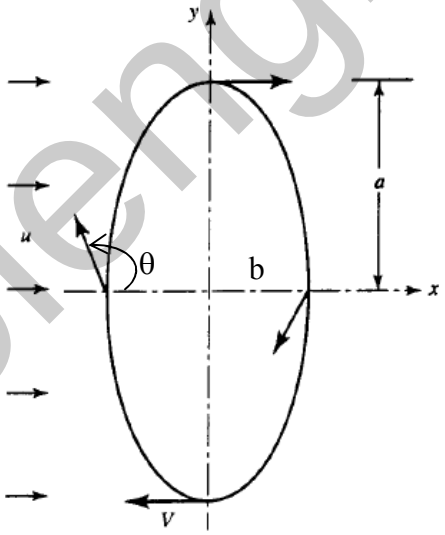
$$a) \quad u = 0 \quad , \quad x = 0 \quad , \quad t_f = 1 \quad , \quad \nu = 1 \qquad (۷)$$

$$b)\quad u=\sqrt{2}\quad,\quad x=\sqrt{2}t\quad,\quad t_f=\frac{1}{2}\quad,\quad \nu=-\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad (۸)$$

در فصل دوم و سوم کتاب Hull نشان داده شده است که جواب اول بیشینه محلی و جواب دوم یک کمینه محلی خواهد بود.

مسئله ۳.۳.۱۳:کنترل جهت سرعت در جریان باد ثابت به منظور محصور نمودن حداکثر سطح یک منحنی بسته[1]

یک هواپیما با سرعت ثابت V در حال پرواز افقی در آسمان می‌باشد. در صورتیکه سرعت باد ثابت و برابر U باشد، مطلوبست یافتن فرمان کنترل θ بطوری که هواپیما در زمان معین T حداکثر سطح را در حین پرواز بصورت منحنی بسته محصور نماید.



شکل ۲: کنترل جهت سرعت در جریان باد ثابت به منظور محصور نمودن حداکثر سطح یک منحنی بسته

راهنمائی: معادلات حرکت عبارتند از:

$$\dot{x}=V\cos\theta+u \qquad , \qquad \dot{y}=V\sin\theta$$

1 .Velocity Direction Programming(VDP) to Enclose Max Area in a Constant Wind

که در آن محور x همانند شکل در راستای جهت باد انتخاب شده است. همچنین در صورتیکه هواپیما یک منحنی بسته را طی کند سطح محصورشده از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$A = \int_0^T y\,\dot{x}\,dt$$

و شرایط انتهائی عبارتند از:

$$x(T) = x_0 = -b, \qquad y(T) = y_0 = 0$$

جهت سهولت در حل این مسئله فرض شود که:

$$T = 1 \quad , \quad V = 1$$

حل: هامیلتونین H و مقدار شاخص عملکرد اضافه شدهٔ Φ عبارتست از:

$$H = y(\cos\theta + u) + \lambda_x(\cos\theta + u) + \lambda_y \sin\theta \qquad (۱)$$

$$\Phi = \nu_x[x(1) - x_0] + \nu_y[y(1) - y_0] \qquad (۲)$$

معادلات کمک حالت عبارتند از:

$$\dot{\lambda}_x = 0 \quad , \quad \dot{\lambda}_y = -(\cos\theta + u), \qquad (۳)$$

شرایط مرزی عبارتند از:

$$\lambda_x(1) = \nu_x\,,\ \lambda_y(1) = \nu_y\,,\ \Rightarrow \lambda_x(t) = \nu_x\,. \qquad (٤)$$

شرط بهینه‌گی عبارتست از:

$$0 = -\sin\theta(\lambda_x + y) + \lambda_y \cos\theta \quad \Rightarrow \quad \lambda_y = \tan\theta(\nu_x + y) \qquad (۵)$$

از آنجائی که هامیلتون H تابع صریح از t نیست لذا مقدار آن در طول مسیر ثابت است و یک انتگرال TPBVP وجود دارد از این انتگرال بجای معادلهٔ کمک حالت $\dot{\lambda}_y$ در (۳) استفاده می‌شود.

با جاگذاری (۵) در (۱) و حل برای y نتیجه می‌دهد:

$$y + \nu_x = \frac{H\cos\theta}{1 + u\cos\theta} \qquad (۶)$$

با مشتق گیری از (۶) نسبت به زمان و استفاده از $\dot{y} = \sin\theta$ نتیجه می‌دهد:

$$H\dot{\theta} = -(1+u\cos\theta)^2 \qquad (۷)$$

تقسیم نمودن رابطهٔ (۷) به $\dot{x} = u + \cos\theta$ نتیجه می‌شود

$$\frac{\dot{x}}{\dot{\theta}} \equiv \frac{dx}{d\theta} = -\frac{H(u+\cos\theta)}{(1+u\cos\theta)^2} \qquad (۸)$$

بسادگی میتوان با انتگرال گیری نتیجه گرفت:

$$x = c - H\frac{\sin\theta}{1+u\cos\theta} \quad , \quad c = \text{constant} \qquad (۹)$$

با استفاده از (۶) و (۹) خواهیم داشت:

$$(x-c)^2 + (y+\nu_x)^2 = \frac{H^2}{(1+u\cos\theta)^2}$$

و یا:

$$r = \frac{H}{1+u\cos\theta} \qquad (۱۰)$$

معادلهٔ اخیر یک معادلهٔ قطبی برای یک بیضی با مراکز $x = c, y = -\nu_x$ خروج از مرکز u[1] می‌باشد. و محور فرعی یعنی محور x موازی جهت باد خواهد بود.

زمان پرواز از (۷) بصورت زیر بدست می‌آید:

$$t_f \equiv 1 = H\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(1+u\cos\theta)^2} \equiv \frac{2\pi H}{(1-u^2)^{3/2}} \qquad (۱۱)$$

سطح بیضی عبارتست از:

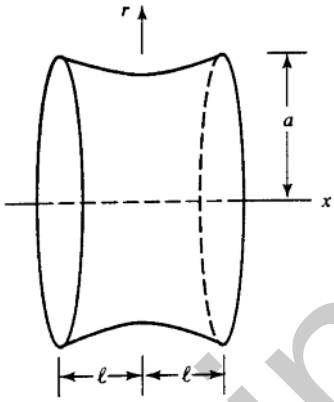
$$A = \frac{(1-u^2)^{3/2}}{4\pi} \qquad (۱۲)$$

مسئله ۳.۳.۱۴: کوچکترین سطحی که دو حلقه دایروی را به هم متصل می‌کند[1]:

1. Eccentricity

دو دایره هم محور با شعاع‌های a به فاصلهٔ 2ℓ از یکدیگر قرار دارند. می‌خواهیم کوچکترین سطح دورانی را که دو حلقه را به یکدیگر متصل می‌کند بدست آوریم(این سطح همان شکل فیلم صابونی است که بین دو حلقه کشیده می‌شود). با استفاده از مختصات استوانه‌ای (r,x) همانند شکل زیر مساحت عبارتست از:

$$A = 2\pi \int_{-\ell}^{\ell} r\sqrt{1+u^2}dx$$



شکل ۳ : سطحی که با کوچکترین مساحت دو حلقهٔ دایروی را به هم متصل می‌کند.

که در آن:

$$\frac{dr}{dx} = u \ , \ r(-\ell) = a \ , \ r(\ell) = a$$

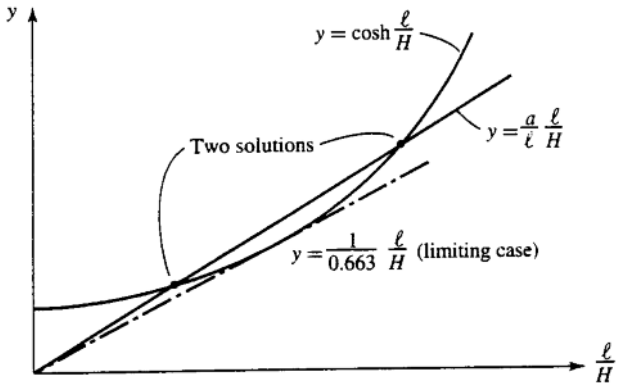
a) نشان دهید که کوچکترین سطح یک منحنی زنجیروار[2] بصورت زیر است:

$$r = H\cosh\frac{x}{H}$$

که در آن H/ℓ بوسیلهٔ رابطهٔ $(a/\ell)(\ell/H) = \cosh \ell/H$ تعیین می‌شود.

b) نشان دهید که معادله دارای دو جواب برای $0 \le \ell/a \le 0.663$ بوده و برای $\ell/a > 0.663$ بدون جواب است(شکل زیر را ملاحظه نمایید).

1. Surface of Min Area Connecting Two Circular Loops
2. Catenary



شکل ۴: نمایش وجود دو جواب برای مسئله کوچکترین سطح جهت اتصال دو حلقه دایروی به یکدیگر

c) نشان دهید که کوچکترین مساحت بوسیلهٔ رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$A_{min} = \begin{cases} 2\pi a^2[\tanh(\ell / H) + (\ell / H)\operatorname{sech}^2(\ell / H)], & 0 \le \ell / a \le .528 \\ 2\pi a^2, & \ell / a \ge .528 \end{cases}$$

که در آن $2\pi a^2$ سطح صافی است که دو دایره را به یکدیگر متصل می‌کند.

d) در این قسمت دو حلقه هم محور ولی دارای شعاعهای متفاوت می‌باشند و به فاصله ℓ از یکدیگر قرار دارند که در آن یک حلقه شعاع a و دیگری شعاع b دارد نشان دهید که برای مقدار مشخص b / a در این حالت هم حالت حدی ℓ / a وجود دارد که پس از آن کوچکترین سطح بین دو حلقه بصورت صاف[1] در می‌آید.

حل: هامیلتونین را تشکیل می‌دهیم:

$$H = r\sqrt{1+u^2} + \lambda u \quad , \quad \Phi = \nu[r(\ell) - a] \tag{۱}$$

شرط بهینه‌گی عبارتست از:

$$0 = \frac{ru}{\sqrt{1+u^2}} + \lambda \tag{۲}$$

از آنجائی که تابع هامیلتونی H تابع صریح از x نیست لذا ثابت = H و یک انتگرال TPBVP وجود دارد. از این انتگرال بجای معادلهٔ کمک حالت استفاده می‌شود. جاگذاری (۲) در (۱) و حل برای u نتیجه می‌شود که:

$$u = \frac{\sqrt{r^2 - H^2}}{H} \tag{۳}$$

1. Min surface is two flat discs within the circular loops

جاگذاری (۳) در $dr/dx = u$ نتیجه می‌دهد:

$$\frac{dx}{H} = \frac{dr}{\sqrt{r^2 - H^2}} \qquad (٤)$$

انتگرالگیری از (۴) نتیجه می‌شود:

$$r = H\cosh\frac{x}{H} \quad \Rightarrow \quad u = H\sinh\frac{x}{H} \qquad (٥)$$

ارزیابی (۵) در $x = \ell$ نتیجه می‌دهد که:

$$\frac{a}{\ell} = \frac{H}{\ell}\cosh\frac{\ell}{H} \qquad (٦)$$

این یک معادلهٔ غیرجبری[1] است که H/ℓ را به ازای a/ℓ تعیین می‌کند حل (۶) را می‌توان بصورت تقاطع دو تابع ℓ/H یعنی خط مستقیم $y = (a/\ell)(\ell/H)$ و منحنی $y = \cosh(\ell/H)$ بدست آورد. این موجب دو جواب برای $\ell/a < .663$ و هنگامی که خط بر منحنی مماس شود یک جواب به ازای $\ell/a = .663$ خواهد شد و به ازای $\ell/a > .663$ مسئله جواب ندارد.

جاگذاری (۵) در عبارت کمترین سطح نتیجه می‌دهد:

$$A = 2\pi\int_{-\ell}^{\ell} H\cosh^2\frac{x}{H}dx = 2\pi H\left[\ell + \frac{H}{2}\sinh\frac{2\ell}{H}\right] \qquad (٧)$$

این معادله تابع پیچیده ای از ℓ/a خواهد بود که از رابطهٔ (۶) به ازای مقدار معلوم ℓ/H تعیین می‌شود. با استفاده از (٦) در (۷) خواهیم داشت:

$$A_{min} = 2\pi a^2[\tanh(\ell/H) + (\ell/H)\mathrm{sech}^2(\ell/H)] \qquad (٨)$$

A_{min} یک تابع صعودی یکنواخت[2] از ℓ/a در محدودهٔ تقاطع می‌باشد ولی بزرگتر از $2\pi a^2$ که داخل دو حلقه برای $\ell/H > .639$ که مربوط به $\ell/a > .528$ است می‌باشد. بنابراین:

$$A_{min} = \begin{cases} 2\pi a^2[\tanh(\ell/H) + (\ell/H)\mathrm{sech}^2(\ell/H)], & 0 \le \ell/a \le .528 \\ 2\pi a^2, & \ell/a \ge .528 \end{cases} \qquad (٩)$$

1. Transcendental Equation
2 .Monotonically increasing function

d) این قسمت مسئله در شرایط مرزی متفاوت می‌باشد با روش مشابه مستقیماً می‌توان نشان داد که هنوز هم شکل زنجیروار خواهد بود:

$$r = H\cosh\left[\cosh^{-1}\frac{a}{H} - \frac{x}{H}\right] \qquad (۱۰)$$

که در آن H از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$b = H\cosh\left[\cosh^{-1}\frac{a}{H} - \frac{\ell}{H}\right] \qquad (۱۱)$$

در اینجا ℓ فاصلهٔ بین دو حلقه می‌باشد در سایر قسمتها این فاصله 2ℓ در نظر گرفته شده بود(مسئله ۱۰.۳.۱ و شکل ۱۰.۹ کتاب بحث بیشتری راجع به این مسئله مطرح نموده اند).

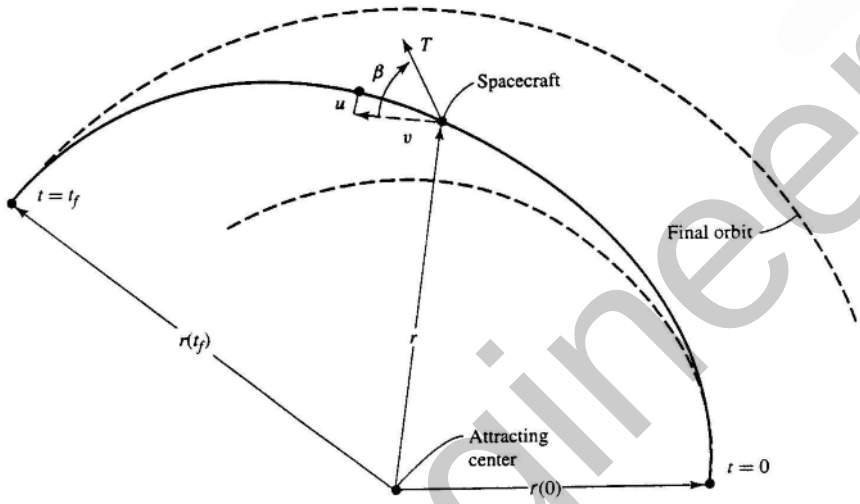
۴-۲-۳- حل عددی مسائل دینامیکی پیوسته با قیود انتهائی با استفاده از روش گرادیان

همانطوری که قبلاً اشاره شد تعداد مسائلی که از راه تحلیلی حل می‌شوند محدود بوده و بایستی اغلب این مسائل را از طریق عددی حل نمود. از آنجائی که تابع کنترل $u(t)$ در تعداد محدود $(N+1)$ نقطه تعیین خواهد شد. ما می‌توانیم از دستور CONSTR و یا FMINCON برای حل مسائل بهینه‌سازی دینامیکی پیوسته با قیود انتهائی استفاده کنیم. آنچه که مورد نیاز است این است که یک تابع Matlab داشته باشیم تا شاخص عملکرد و قیود انتهائی را برای یک مقدار اختیاری $u(t)$ محاسبه نماید. این بدان معنی است که انتگرال‌گیری از معادلهٔ $0 = H_u \equiv \lambda^T f_u \;,\; 0 \le t \le t_f$ بصورت پیشخور[1] انجام شده و ϕ و ψ محاسبه شوند. لذا در هنگام استفاده از دستور CONSTR شاخص عملکرد و قیود انتهائی بنام 'f' و 'g' نامیده می‌شوند. در انتگرال‌گیری از دستور ODEU استفاده می‌شود.

1. Forward

مثال ۳ : برنامه‌ریزی جهت نیروی رانش جهت انتقال فضاپیما به حداکثر شعاع مداری[1]

موتور راکتی با نیروی رانش یا تراست T و زمان سوزش t_f در نظر بگیرید. می‌خواهیم تاریخچهٔ جهت نیروی رانش یعنی $\theta(t)$ را طوری بدست آوریم که یک فضاپیما را از یک مدار دایروی اولیه به بزرگترین مدار دایروی ممکن انتقال دهد. در شکل زیر علائم استفاده شده در مسئله معرفی شده اند.



شکل ۵: انتقال به حداکثر شعاع مداری در زمان معین

r = شعاع فضاپیما از مرکز زمین و u = مولفهٔ شعاعی سرعت فضاپیما و v = مولفهٔ مماسی سرعت فضاپیما و m = جرم فضاپیما و $-\dot{m}$ = نرخ مصرف سوخت فضاپیما و θ = زاویهٔ جهت نیروی رانش فضاپیما و μ = شتاب جاذبهٔ زمین می‌باشند. در این صورت مسئله به شکل زیر تعریف می‌شود:

مطلوبست تعیین $\theta(t)$ که مقدار $r(t_f)$ را تحت معادلات قید زیر حداکثر نماید.

$$\dot{r} = u\ , \quad \dot{u} = \frac{v^2}{r} - \frac{1}{r^2} + a\sin\theta\ , \quad \dot{v} = -\frac{uv}{r} + a\cos\theta$$

with $r(0) = 1,\ u(0) = 0,\ v(0) = 1, \psi_1 = u(t_f) = 0,\ \psi_2 = v(t_f) - 1/\sqrt{r(t_f)} = 0$, and $a \triangleq T/(1 - |\dot{m}|t)$.

تابع هامیلتون عبارتست از:

1. Thrust Direction Programming(TDP) for Max Radius Orbit Transfer

$$H = \lambda_r u + \lambda_u \left(\frac{v^2}{r} - \frac{1}{r^2} + a \sin\theta \right) + \lambda_v \left(\frac{-uv}{r} + a \cos\theta \right)$$

و خواهیم داشت:

$$\Phi = r(t_f) + \nu_1 u(t_f) + \nu_2 \left[v(t_f) - \sqrt{\frac{1}{r(t_f)}} \right]$$

بنابراین شرایط لازم به صورت زیر در می‌آیند:

$$\dot{\lambda}_r = -H_r = -\lambda_u \left(-\frac{v^2}{r^2} + \frac{2}{r^3} \right) - \lambda_v \left(\frac{uv}{r^2} \right) ,$$

$$\dot{\lambda}_u = -H_u = -\lambda_r + \lambda_v \frac{v}{r} , \quad \dot{\lambda}_v = -H_v = -\lambda_u \frac{2v}{r} + \lambda_v \frac{u}{r} ,$$

$$0 = H_\theta = (\lambda_u \cos\theta - \lambda_v \sin\theta) a \Rightarrow \tan\theta = \frac{\lambda_u}{\lambda_v} ,$$

$$\lambda_r(t_f) = \Phi_r = 1 + \frac{\nu_2}{2[r(t_f)]^{3/2}} , \quad \lambda_u(t_f) = \Phi_u = \nu_1 , \quad \lambda_v(t_f) = \Phi_v = \nu_2$$

شش معادلهٔ دیفرانسیل را می‌توان با شش شرط مرزی و انتخاب ν_1 و ν_2 برای ارضای دو شرط مرزی اضافی حل نمود. در این صورت $\theta(t)$ بر حسب λ_u, λ_v از شرط بهینه‌گی تعیین خواهد شد. یک حل عددی برای این مسئله نتیجهٔ زیر را می‌دهد:

$$T = .1405 , \quad |\dot{m}| = .07489 , \quad t_f = 3.3155$$

در اینجا می‌خواهی این مسئله را از طریق عددی حل نماییم. لیست برنامه Matlab بصورت زیر است:

```
% Script e03_4_2.m; TDP for max radius from earth orbit using
% FMINCON; s=[r u v]';
be0=[0.4310 0.4663 0.5045 0.5457 0.5902 0.6380 0.6893 0.7441 ...
     0.8026 0.8648 0.9306 1.0002 1.0735 1.1507 1.2324 1.3196 ...
     1.4151 1.5252 1.6675 1.9044 2.5826 3.9427 4.4209 4.6081 ...
     4.7222 4.8071 4.8768 4.9373 4.9913 5.0407 5.0864 5.1292 ...
     5.1695 5.2077 5.2442 5.2792 5.3129 5.3456 5.3773 5.4083 5.4386];
N1=length(be0); N=N1-1; tf=3.3155; t=tf*[0:1/N:1]; z=180/pi;
optn=optimset('Display','Iter','MaxIter',0); s0=[1 0 1]';
be=fmincon('marc_f',be0,[],[],[],[],[],[],'marc_c',optn,s0,tf);
[f,s]=marc_f(be,s0,tf); r=s(1,:); u=s(2,:); v=s(3,:);
th=cumtrapz(t,v./r); rf=r(N1); x=r.*cos(th); y=r.*sin(th);
ep=ones(1,N1)*pi/2+th-be; xt=x+.2*cos(ep); yt=y+.2*sin(ep);
%-------------------------------------
figure(1); clf; plot(x,y,x(N1),y(N1),'ro',0,0,'ro'); grid; hold on
for i=1:91, th1(i)=(i-1)*pi/90; end; c=cos(th1); s=sin(th1);
plot(c,s,'r--',rf*c,rf*s,'r--',1,0,'ro');
for i=1:2:N1, pltarrow([x(i);xt(i)],[y(i);yt(i)],.05,'r','-'); end
hold off; axis([-1.6 1.6 -.5 2.2]); ylabel('y/r_e'); xlabel('x/r_e')
```

```
text(-.6,.65,'Earth Orbit'); text(-.1,.1,'Sun')
text(.9,1.3,'Mars Orbit')
%-----------------------------
figure(2); clf; subplot(311), plot(t,r,t,v,'r--'); grid
axis([0 tf .7 1.6]); legend('r','v',2); subplot(312), plot(t,u);
grid; axis([0 tf 0 .4]); ylabel('u'); subplot(313)
plot(t,z*be,t,z*be,'b.'); grid; axis([0 tf 0 360])
ylabel('\beta (deg)'); xlabel('Time')
```

فهرست زیربرنامه اول بنام MARC.M:

```
function [f1,f2]=marc(be,s,t,flg)
% Subroutine for Exs. 3.4.1,2, 3.6.2, 4.5.1,2,
% Pbs. 3.4.20a,b, 3.4.21;                    3/94, 9/13/02
%
T=.1405; mdot=.07489; a=T/(1-mdot*t); r=s(1); u=s(2);
v=s(3); co=cos(be); si=sin(be);
if flg==1
   f1=[u; v^2/r-1/r^2+a*si; -u*v/r+a*co];
elseif flg==2
   f1=[r; u; v-1/sqrt(r)];
   f2=[1 0 0; 0 1 0; 1/(2*r^1.5) 0 1];
elseif flg==3
   f1=[0 1 0; -(v/r)^2+2/r^3 0 2*v/r; u*v/r^2 -v/r -u/r];
   f2=a*[0; co; -si];
```

فهرست زیربرنامه دوم بنام MARC_C.M:

```
function [c,ceq]=marc_c(be,s0,tf)
% Subroutine for Example 3.4.2;
[t,s]=odeu('marc',be,s0,tf); N=length(be); rf=s(1,N);
uf=s(2,N); vf=s(3,N); ceq=[uf vf-1/sqrt(rf)]; c=[];
```

فهرست زیربرنامه سوم بنام MARC_F.M:

```
function [f,s]=marc_f(be,s0,tf)
% Subroutine for Example 3.4.2;
[t,s]=odeu('marc',be,s0,tf); N=length(be); rf=s(1,N); uf=s(2,N);
vf=s(3,N); f=-rf;
```

فهرست زیربرنامه چهارم بنام ODEU.M:

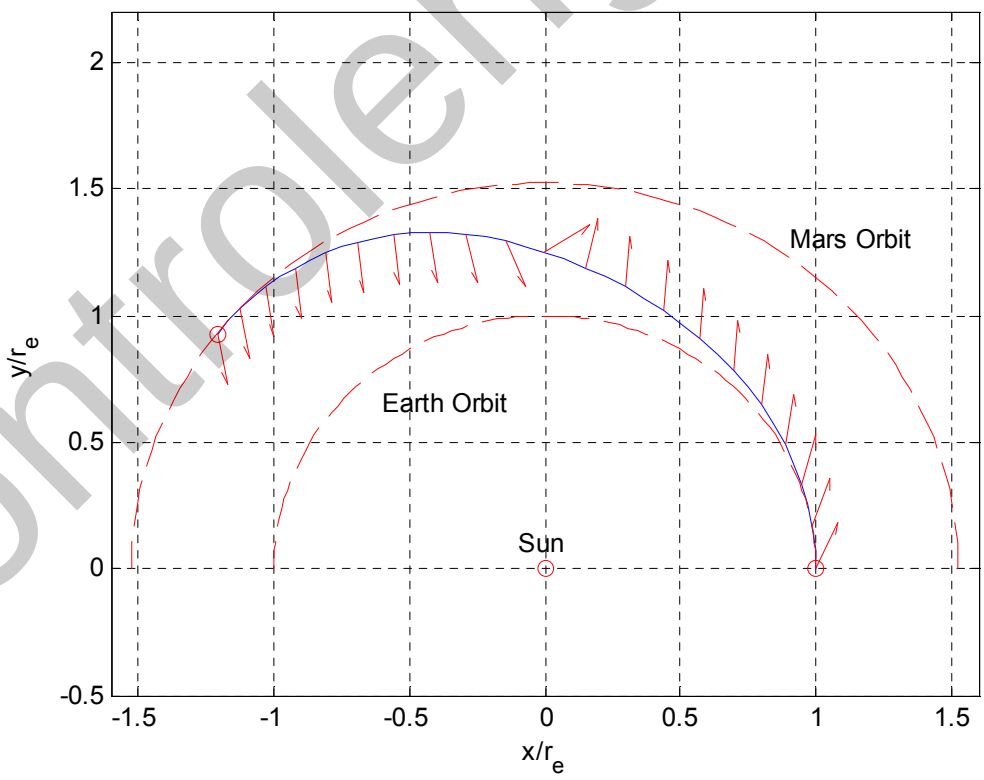
```
function [t,s]=odeu(name,u,s0,tf)
% Forward 4th order fixed step-size Runge-Kutta integration with
% vector forcing function u(t); sdot=f(s,u); function file
% 'name' contains the function f(s,u) for flg=1;            9/97
[nc,N1]=size(u); N=N1-1; t=tf*[0:1/N:1]; dt=tf/N; s(:,1)=s0;
for i=1:N,
 if i==1,        u2=(3*u(:,1)+6*u(:,2)-u(:,3))/8;
 elseif i==N,    u2=(3*u(:,N1)+6*u(:,N)-u(:,N-1))/8;
 else            u2=(-u(:,i-1)+9*u(:,i)+9*u(:,i+1)-u(:,i+2))/16;
 end
 t1=(i-1)*dt;    t2=t1+dt/2;  t3=t1+dt;
 s1=s(:,i);      f1=feval(name,u(:,i),s1,t1,1);
 s2=s1+dt*f1/2;  f2=feval(name,u2,s2,t2,1);
 s3=s1+dt*f2/2;  f3=feval(name,u2,s3,t2,1);
 s4=s1+dt*f3;    f4=feval(name,u(:,i+1),s4,t3,1);
 s(:,i+1)=s1+dt*(f1+2*f2+2*f3+f4)/6;
```

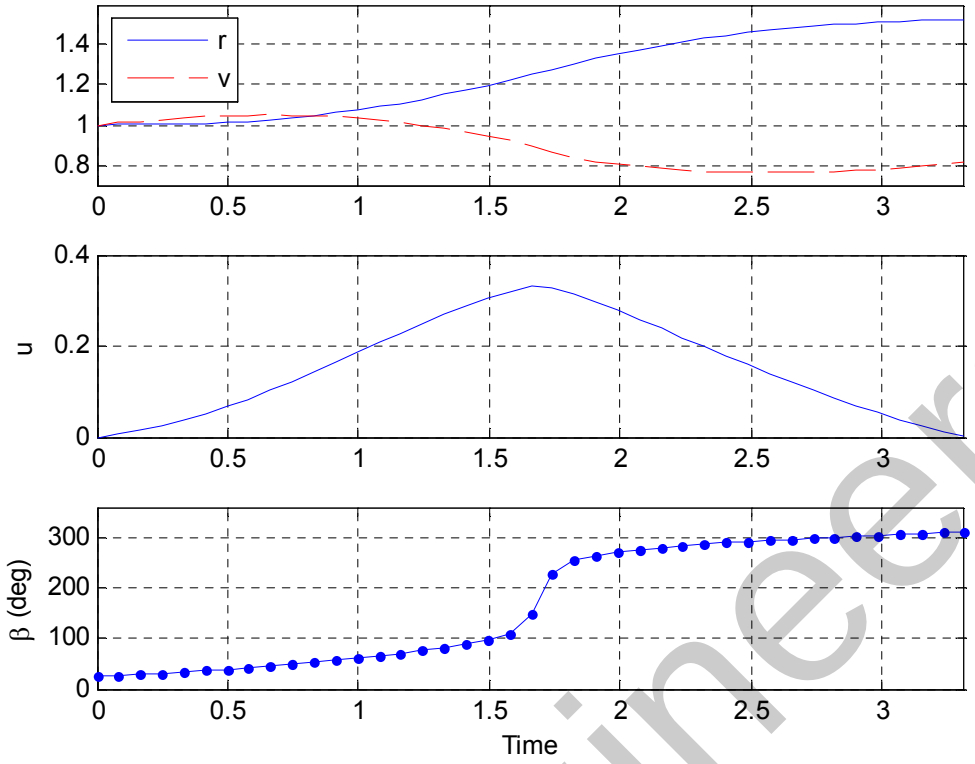
فهرست زیربرنامه پنجم بنام PLTARROW.M:

```
function dummy = pltarrow(x,y,l,lcolor,ltype)
% dummy = pltarrow(x,y,l,ltype)
% Function 'pltarrow' draws a line with an arrow head. The size is
controlled by l.
```

```
% If x and y have more than two data points, the arrow direction is
determined based
% on the last two data points.
% Input
%    x,y    : data points
%    l      : arrow head size
%    lcolor : line color (r,g,b,w,y)
%    ltype  : line type (-, --, -., .)
% Example : pltarrow([1 2.3],[3 -2.7],.05,'y','-')
%           draws a yellow solid line from (1,3) to (2.3,-2.7) with
%           an arrow head whose size is .2.
% Note : To prevent the distortion due to aspect ratio, the function draws
%        a one sided arrow head.
% Keeyoung Choi, 2/8/1997
ltype1 = [lcolor ltype];
ltype2 = [lcolor '-'];
n = length(x);
if (n<2),
  error('Not enough data to plot - x and y should have at least two
elements.')
end
theta = 15*pi/180;
dx = x(n)-x(n-1);
dy = y(n)-y(n-1);
direction = [dx dy]'; direction = direction/norm(direction);
ct = cos(theta); st = sin(theta);
p3 = [x(n); y(n)] - l*[ct -st; st ct]*direction;
plot(x,y,ltype1,[x(n) p3(1)],[y(n) p3(2)],ltype2)
dummy = 0;
```

اشکال حاصل از اجرای برنامه بصورت زیر بدست می‌آیند:



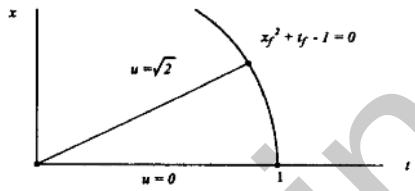


تکلیف T9: مسائل بهینه‌سازی دینامیکی پیوسته با قیود انتهائی(حل تحلیلی و عددی)

۱- یک مسئله بدلخواه از مسائل ۳.۳.۱ تا ۳.۳.۱۹ در صفحه ۱۰۹ الی ۱۲۴ کتاب برایسون را حل نمائید(مسائلی که توسط استاد حل آنها ارائه میشود مستثنی می‌باشند).

۲- با توجه به شکل زیر مطلوبست یافتن کمترین فاصلهٔ مبدا از یک سهمی، بعبارت دیگر مطلوبست یافتن فرمان کنترل $u(t)$ که شاخص عملکرد زیر را کمینه نماید(مسئله مسافت):

$$J=\int_{t_0}^{t_f}\sqrt{1+u^2}\,dt \qquad (۱)$$



شکل ۱: کوتاهترین فاصله مبدا از یک سهمی

قیود دیفرانسیلی(معادله حالت) و شرایط اولیه عبارتند از:

$$\dot{x}=u \quad , \quad t_0=0 \quad , \quad x_0=0 \qquad (۲)$$

قید انتهائی عبارتست از:

$$x_f^2+t_f-1=0 \qquad (۳)$$

الف) نشان دهید که دو جواب برای این مسئله بدست می‌آید:

$$a)\quad u=0 \quad , \quad x=0 \quad , \quad t_f=1 \quad , \quad \nu=-1$$

$$b)\quad u=\sqrt{2} \quad , \quad x=\sqrt{2}t \quad , \quad t_f=\frac{1}{2} \quad , \quad \nu=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ب) نشان دهید که جواب اول بیشینه محلی و جواب دوم یک کمینه محلی خواهد بود.

۳- یک مسئله بدلخواه از مسائل ۳.۴.۱ تا ۳.۴.۲۵ در صفحه ۱۳۰ الی ۱۳۴ کتاب برایسون را از طریق عددی با دستور FMINCON حل نموده و به همراه فایل کامپیوتری Matlab از طریق ایمیل ارسال نمایید.

۴- شاخص عملکرد $\int_0^1 (u^2 - x)dt$ را در نظر بگیرید. حل کمینهٔ این شاخص تحت معادله حالت(قید دیفرانسیلی) $\dot{x} = u$ و شرط اولیه $x_0 = 0$ و شرط مرزی انتهائی $x_f = 1$ را بصورت عددی با استفاده از دستور FMINCON بدست آورده و فرمان کنترل $x(t)$ و $u(t)$ را با حل تحلیلی زیر مقایسه کنید[1].

$$x^*(t) = \frac{t}{4}(5-t) \quad , \quad u^*(t) = -\frac{t}{2} + \frac{5}{4}$$

مقدار شاخص عملکرد را در حالت حل تحلیلی و حل عددی با هم مقایسه نمایید.

تکلیف T10: مسائل بهینه‌سازی دینامیکی پیوسته با زمان انتهائی آزاد-یافتن کوتاهترین مسیر مابین نقطه و دایره[2]

الف) مطلوبست یافتن تاریخچهٔ فرمان کنترل $u(t)$ که مسافت یک نقطه $(t_0, 0)$ را روی محور مثبت t به یک دایره $t_f^2 + x_f^2 = r^2$ که در آن $0 \le t_0 \le r$ است کمینه نماید.

ب) نشان دهید که کمترین کنترل برای تمامی $t_0 > 0$ مقدار $u = 0$ است. همچنین در $t_0 = 0$ یک نقطهٔ مزدوج[3] وجود دارد. شرح دهید که اختلاف بین حالت $t_0 > 0$ و $t_0 = 0$ چه می‌باشد.

1. Hull, David. G., *Optimal Control Theory for Applications*, Springer, 2003. Problem 9.5, Page 156
2. Hull, David. G., *Optimal Control Theory for Applications*, Springer, 2003. Problem 13.7, Page 244
3 Conjugate

فصل پنجم:

بهینه‌سازی دینامیکی با زمان انتهائی آزاد

۵-۱- مقدمه

در این فصل بسط مطالب فصل پیشین به حالتی که در آن زمان انتهائی آزاد[1] باشد انجام می‌شود. حالت اختصاصی و مهم مربوط به مسائل کمترین زمان[2] خواهد بود. این مسائل بایستی حداقل یک شرط انتهائی[3] را داشته باشد در غیر این‌صورت معلوم نیست چه موقع بایستی ما به پایان مسیر برسیم. از اینرو راه حل دیگر برای مسائل کمترین زمان آن است که کمترین زمان یعنی t_f را حدس زده و شرایط انتهائی کلیدی را حداکثر نماییم. با تکرار این عمل برای چندین مقدار t_f می‌توان کمترین زمان را با میانیابی[4] بدست آورد بطوری که شرایط مرزی کلیدی ارضاء گردند. مسئله حداکثر نمودن را می‌توان بعنوان یک مسئله دوقلو[5] با مسئله کمترین زمان محسوب نمود. بسیاری از مسائل کمترین زمان با مسائل مشابه به صورت دو قلو یا مزدوج ظاهر می‌شوند. به عنوان مثال در مسئله برنامه‌ریزی جهت سرعت (VDP) دستیابی به حداکثر برد در زمان معین یک مسئله دوقلو با مسئله دستیابی به کمترین زمان در برد معین می‌باشد. همچنین در مسئله برنامه‌ریزی جهت تراست (TDP) جهت انتقال به مدار با حداکثر شعاع در زمان معین یک مسئله دوقلو با مسئله کمترین زمان با شعاع معین می‌باشد.

۵-۲- سیستم‌های دینامیکی ناپیوسته

در بسیاری از مسائل بهینه‌سازی دینامیکی می‌خواهیم زمان نهائی را جهت رسیدن به شرایط انتهائی مشخص کمینه نماییم و یا اینکه برخی توابع از حالتهای انتهائی در حالت زمان انتهائی آزاد کمینه نماییم. چنین مسائلی نیازمند گسترش مختصری از تئوری و الگاریتم‌هائی است که تا کنون بسط یافته‌اند. این بسط بوسیلهٔ منظور نمودن زمان انتهائی بعنوان یک پارامتری که می‌بایست علاوه بر توابع کنترل، بهینه گردد در نظر گرفته می‌شود بطوری که مسئله ترکیبی از ریاضیات و حساب تغییرات خواهد شد.

---

1. Dynamic Optimization with Open Final Time
2. Min Time Problem
3. Terminal Condition
4. Interpolate
5. Dual Problem

مطالعه ادامه مطالب این قسمت در خصوص شرایط لازم برای یک حل ایستا در حالت گسسته و مثال ۴.۲.۱ در صفحه ۱۵۰ تا ۱۵۸ به دانشجویان واگذار می‌شود.

۵-۳- سیستم‌های دینامیکی پیوسته

مسائل پیوسته با زمان انتهائی آزاد تشابه زیادی با مسائل گسسته با زمان انتهائی آزاد دارند. تنها تفاوت در این است که قیود در حالت ناپیوسته بصورت معادلات اختلاف محدود[1] بوده ولی در حالت پیوسته بصورت معادلات دیفرانسیلی بیان می‌شوند.

۵-۳-۱- شرایط لازم برای حل ایستا

ما می‌خواهیم تابع بردار کنترل $u(t)$ برای $t_0 \le t \le t_f$ و زمان انتهائی t_f را طوری بدست آوریم که شاخص عملکرد زیر را کمینه نماید:

$$J = \phi[x(t_f), t_f] \tag{۱۵}$$

معادلات حالت یا قیود دیفرانسیلی عبارتند از:

$$\dot{x} = f(x, u, t)\ , \quad x(t_0) = x_0 \tag{۱۶}$$

$$0 = \psi[x(t_f), t_f] \tag{۱۷}$$

در مسائل کمترین زمان $\phi = t_f$ خواهد بود.

شرایط لازم برای حل ایستا را می‌توان با توسعه مطالب دو فصل قبل بدست آورد. آنچه که در این فصل جدید می‌باشد این است که شاخص عملکرد و قیود انتهائی و معادلات دینامیکی همگی وابسته به t_f می‌باشند. قیود (۱۶) و (۱۷) را با ضرائب برداری لاگرانژی ν و $\lambda(t)$ به شاخص عملکرد ملحق می‌نماییم:

1. Difference Equations

$$\bar{J} = \phi + \nu^T \psi + \int_{t_0}^{t_f} \lambda^T(t)\{f[x(t), u(t), t] - \dot{x}\}dt \tag{۱۸}$$

توابع $H(t)$ و Φ بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$H(t) \triangleq \lambda^T(t) f[x(t), u(t), t] \tag{۱۹}$$

$$\Phi \triangleq \phi + \nu^T \psi \tag{۲۰}$$

استفاده از (۱۹) و (۲۰) در (۱۸) و انتگرالگیری آخرین ترم انتگرال به صورت جزء به جزء داریم

$$\bar{J} = \lambda^T(t_f)x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [H(t) + \dot{\lambda}^T x(t)]dt + \lambda^T(t_0)x_0 \tag{۲۱}$$

حال تغییرات دیفرانشیلی در $\bar{J}$ مربوط به تغییر در $u(t)$ و یک تغییر دیفرانسیلی در t_f را در نظر بگیرید:

$$d\bar{J} = [\Phi_x - \lambda^T(t_f)]dx(t_f) + \dot{\Phi}dt_f + \int_{t_0}^{t_f} \{[H_x(t) + \dot{\lambda}^T]\delta x + H_u \delta u\}dt \tag{۲۲}$$

که در آن:

$$\dot{\Phi} \triangleq \Phi_{t_f} + \Phi_x \dot{x}(t_f) \tag{۲۳}$$

حال ما $\lambda(t)$ را طوری انتخاب میکنیم که ضرائب δx در (۲۲) حذف گردند:

$$\dot{\lambda} = -H_x \equiv -\lambda^T f_x \tag{۲۴}$$

$$\lambda^T(t_f) = \Phi_x \equiv \phi_x + \nu^T \psi_x \tag{۲۵}$$

سپس معادله (۲۲) بصورت زیر در می‌آید:

$$d\bar{J} = \dot{\Phi}dt_f + \int_{t_0}^{t_f} H_u \delta u dt \tag{۲۶}$$

در یک حل ایستا برای هر δu و dt_f بایستی $d\bar{J} = 0$ شود بنابراین شرایط لازم برای یک حل ایستا بصورت زیر خواهند بود:

$$0 = H_u(t)\,, \quad t_0 \le t \le t_f \tag{۲۷}$$

$$0 = \dot{\Phi} \tag{۲۸}$$

ν بایستی طوری بدست آید که $\psi = 0$ شود. معادلهٔ (۲۷) همان شرطی است که در حالت زمان انتهائی ثابت بدست آمد شرط لازم جدید (۲۸) بنام شرط تعامد[1] نامیده می‌شود. این شرط اضافی جدید مقدار زمان انتهائی بهینه t_f را تعیین می کند.

$$\dot{\Phi} = \Phi_{t_f} + \Phi_x \dot{x}(t_f) = 0 \tag{۲۹}$$

که در آن $\Phi \triangleq \phi + \nu^T \psi$ می‌باشد. شرط تعامد (۲۸) را می‌توان بر حسب هامیلتونین $H = \lambda^T f$ در زمان انتهائی بدست آورد. از آنجائی که $\lambda^T(t_f) = \Phi_x$ و $\dot{x} = f$

$$\Rightarrow \dot{\Phi} = \Phi_{t_f} + H(t_f) = 0 \tag{۳۰}$$

در صورتی که هیچکدام از ϕ و ψ تابع صریح از t_f نباشند نتیجتاً $\Phi_{t_f} = 0$ و شرط تعامد بصورت ساده زیر در می‌آید:

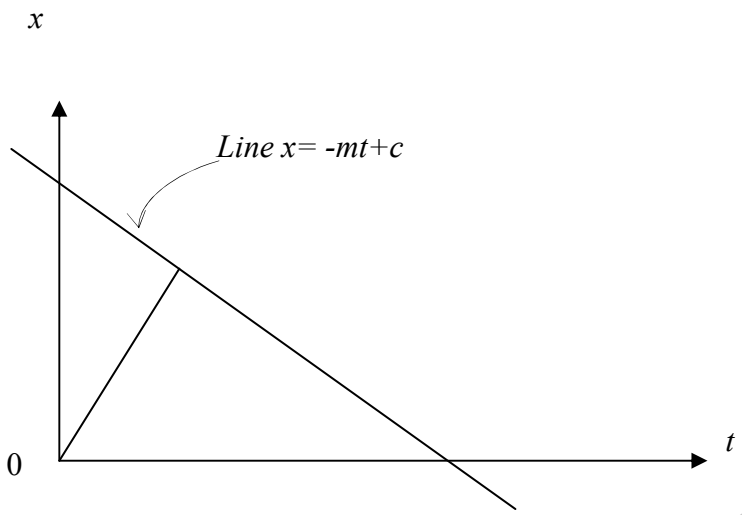
$$H(t_f) = 0 \tag{۳۱}$$

در مسائل کمترین زمان $\phi = t_f$ می‌باشد. در صورتی که $\psi_{t_f} = 0$ باشد سپس شرط تعامد بصورت ساده زیر در می‌آید:

$$1 + H(t_f) = 0\,. \tag{۳۲}$$

مثال ۱-کوتاهترین فاصلهٔ مبدا از یک خط مفروض: برای محاسبهٔ کوتاهترین فاصلهٔ مبدا از یک خط مفروض[1] شکل (۵-۱) را ملاحظه نمائید:

1. Transversality Condition



شکل (۵-۱): کوتاهترین فاصلهٔ مبدا از یک خط مفروض

تعریف زیر را در نظر می گیریم[2]:

$$\dot{x} = u \tag{۱}$$

$$J = \int_0^T \sqrt{1+u^2}\,dt \tag{۲}$$

که در آن T در حالت کلی آزاد خواهد بود. شرط اولیه در این مسئله $x(0)=0$ می‌باشد. در صورتی که معادلهٔ خط مورد نظر $x = -mt + c$ باشد نشان دهید که جهت دستیابی به کوتاهترین فاصله بایستی فرمان کنترل بهینه به صورت $u = \frac{1}{m}$ انتخاب شود و نتیجتاً کوتاهترین فاصله روی خط $x = ut$ واقع و مقدار آن از رابطهٔ $T = \frac{mc}{1+m^2}$ محاسبه می گردد.

حل: شرط لازم جهت کمینه بودن در این مسئله عبارتند از:

$$H = \sqrt{1+u^2} + \lambda u \qquad \text{تابع هامیلتونی} \tag{۳}$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \rightarrow \lambda = \text{Constant} \qquad \text{معادله کمک حالت یا اویلر لاگرانژ} \tag{۴}$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} + \lambda \qquad \text{شرط بهینه گی} \tag{۵}$$

1. Shortest Distance from a point to a Line
2. Lewis, Frank. L., & Syrmos, Vassilis, L., *Optimal Control*, 2ed, Jhon Wiley & Sons Inc, 1995. Page 275.

(۶) $x(0)=0$ شرط اولیه

از معادلهٔ (۵) نتیجه می‌شود که:

$$\lambda = -u/\sqrt{1+u^2} \tag{۷}$$

$$u = \lambda/\sqrt{1-\lambda^2}. \tag{۸}$$

ومعادلهٔ کمک حالت (۴) نشان می‌دهد که λ ثابت می‌باشد از اینرو از رابطه (۸) نتیجه می‌شود که $u=$ ثابت

بنابراین از معادله حالت (۱) و با فرض $x(0)=0$ نتیجه می‌شود:

$$x(t) = ut. \tag{۹}$$

حال بایستی مقدار ثابت u را تعیین نماییم. ابتدا فرض می‌شود خط مورد نظر یا مجموعه هدف[1] بصورت $x=-mt+c$ باشد و برای بدست آوردن فرمان کنترل یعنی شیب بهینه u از طریق زیر عمل می‌کنیم:

در زمان انتهائی T بایستی داشته باشیم:

$$\psi(x(T), T) = x(T) + mT - c = 0, \tag{۱۰}$$

$$\lambda^T(t_f) = \Phi_x \equiv \phi_x + \nu^T \psi_x \rightarrow \lambda = \lambda(t_f) = \nu\frac{\partial\psi(T)}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial\psi(T)}{\partial x} = 1 \rightarrow \lambda = \nu \tag{۱۱}$$

در رابطهٔ بالا ν یک مجهول جدید می‌باشد. از شرط تعامد (۳۰) خواهیم داشت:

$$\dot{\Phi} = \Phi_{t_f} + H(t_f) = 0 \rightarrow \frac{\partial\psi(T)}{\partial T}\nu + H(T) = m\nu + \sqrt{1+u^2} + \lambda u = 0 \tag{۱۲}$$

جاگذاری (۷) و (۱۱) در (۱۲) نتیجه می‌شود که:

$$\sqrt{1+u^2} - \frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}} - \frac{mu}{\sqrt{1+u^2}} = 0, \tag{۱۳}$$

و نتیجتاً فرمان کنترل بهینه بصورت زیر بدست می‌آید:

1. Target Set

$$u = \frac{1}{m} \tag{۱۴}$$

و مسیر بهینه از مبدا به خط هدف عبارت خواهد بود از:

$$x = \frac{t}{m} \tag{۱۵}$$

این خط بر مجموعه هدف یعنی خط $x = -mt + c$ عمود خواهد بود.

با استفاده از (۷) معادلهٔ کمک حالت λ عبارتست از:

$$\lambda = \nu = \frac{-1}{\sqrt{1 + m^2}} \tag{۱۶}$$

و از رابطهٔ (۱۰) برای بدست آوردن T استفاده می‌کنیم:

$$T = \frac{mc}{1 + m^2} \tag{۱۷}$$

کوتاهترین فاصلهٔ مبدا از خط نیز $d = \frac{c}{\sqrt{1+m^2}}$ بدست خواهد آمد.

مسئله ۴.۴.۱۴: تعیین جهت سرعت برای طی نمودن عرض یک رودخانه با جریان سهموی در کمترین زمان[1]

مطلوبست پیدا نمودن زاویهٔ سمت حرکت $\theta(t)$ جهت طی نمودن عرض یک رودخانه از نقطهٔ $x = 0\ ,\ y = +h$ به نقطهٔ $x = 0\ ,\ y = -h$ در کمترین زمان که در آن سرعت جریان در جهت x از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$u = u_c\left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right)$$

a) نشان دهید که مسیرهای کمترین زمان بوسیلهٔ فیدبک غیرخطی زیر تولید می‌شوند:

1. VDP for Min Time to Cross a River with a Parabolic Current

$$\sec\theta = \sec\theta_0 + \frac{u_c}{V}(1-\frac{y^2}{h^2})$$

b) مسیرهای کمترین زمان را برای حالتی که در آن $\frac{u_c}{V}=1$ باشد بیابید. جهت اینکار از دستور FSOLVE در MATLAB برای تعیین θ_0 استفاده نمایید. همچنین از کد شبیه ODE23 در MATLAB برای انتگرال‌گیری از معادلات دیفرانسیل حرکت استفاده نمایید.

حل: تابع هامیلتونین و Φ عبارتند از:

$$H = \lambda_x[-\cos\theta + \frac{u_c}{V}(1-\frac{y^2}{h^2})] + \lambda_y \sin\theta \qquad (۱)$$

$$\Phi = t_f + \nu_x x(t_f) + \nu_y[y(t_f)-1] \qquad (۲)$$

از آنجائی که تابع هامیلتون H تابع صریح از زمان نیست پس ثابت است انتگرال اول مسئله TPBVP وجود دارد. از شرط تعامد $H=-1$ بدست می‌آید ما از این رابطه بجای معادلهٔ کمک حالت برای λ_y استفاده می‌کنیم. معادله کمک حالت λ_x عبارتشت از

$$\dot{\lambda}_x = H_x = 0,\ \lambda_x(t_f) = \Phi_x = \nu_x \Rightarrow \lambda_x(t) = \nu_x. \qquad (۳)$$

از شرط بهینه‌گی خواهیم داشت:

$$H_\theta = 0 \rightarrow 0 = \nu_x \sin\theta + \lambda_y \cos\theta \Rightarrow \lambda_y = -\nu_x \tan\theta \qquad (۴)$$

جاگذاری (۴) در (۱) و استفاده از $H=-1$ نتیجه می‌دهد که:

$$-1 = \nu_x[-\cos\theta + \frac{u_c}{V}\left(1-\frac{y^2}{h^2}\right) - \sin^2\theta/\cos\theta] \qquad (۵)$$

$$\Rightarrow \sec\theta = \sec\theta_0 + \frac{u_c}{V}\left(1-\frac{y^2}{h^2}\right) \qquad (۶)$$

که در آن $\cos\theta_0 = -\nu_x$ می‌باشد

فایل اصلی برنامه Matlab بصورت زیر است:

```
% Script p4_4_14.m; VDP to cross a river w. a parabolic current
% uc=uo*(1-y^2/h^2); uo in V, (x,y) in h, t in h/V; uo=1;
p0=[.5 3]; s0=[0 -1]'; optn=optimset('Display','Iter');
p=fsolve('zrmpt_f',p0,optn); opt=odeset('reltol',1e-4); tf=p(2);
[t,s]=ode23('zrmpar',[0 tf],s0,opt); s=real(s); x=s(:,1); y=s(:,2);
th0=p(1); N=length(t); un=ones(N,1); secth=un/cos(th0)+un-y.^2;
th=real(acos(un./secth)); c=180/pi;
figure(1); clf; plot(x,y,x(1),y(1),'ro',x(N),y(N),'ro'); grid;
axis([-2/3 2/3 -1 1]); xlabel('x'); ylabel('y');
```

```
figure(2); clf; subplot(211),plot(t,c*th); grid; xlabel('V*t/h');
ylabel('\theta (deg)');
```

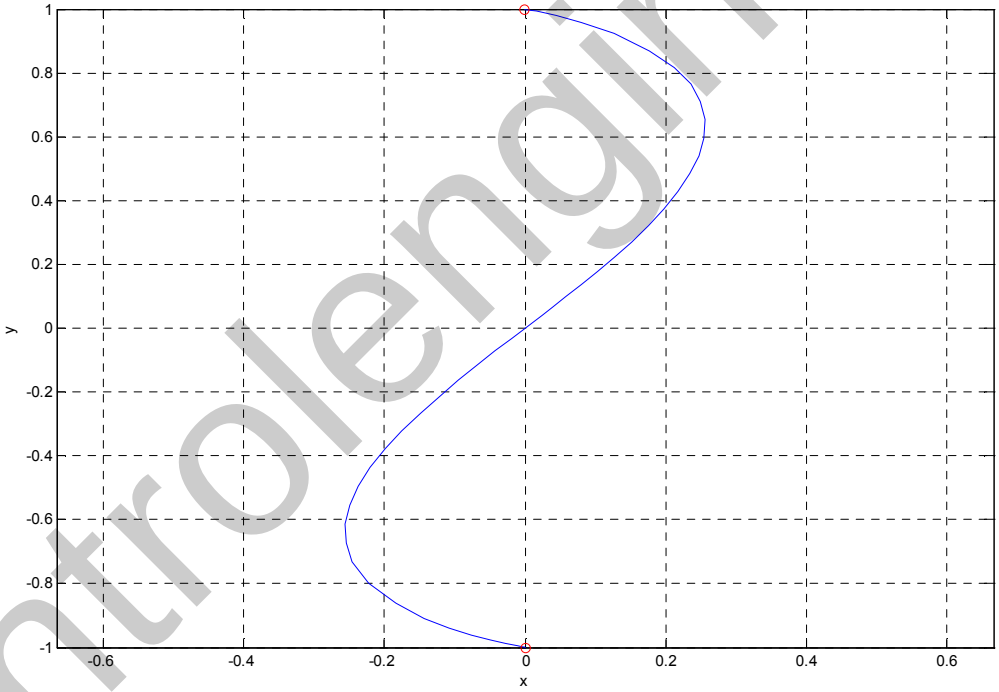
فایل بنام zrmpt_f

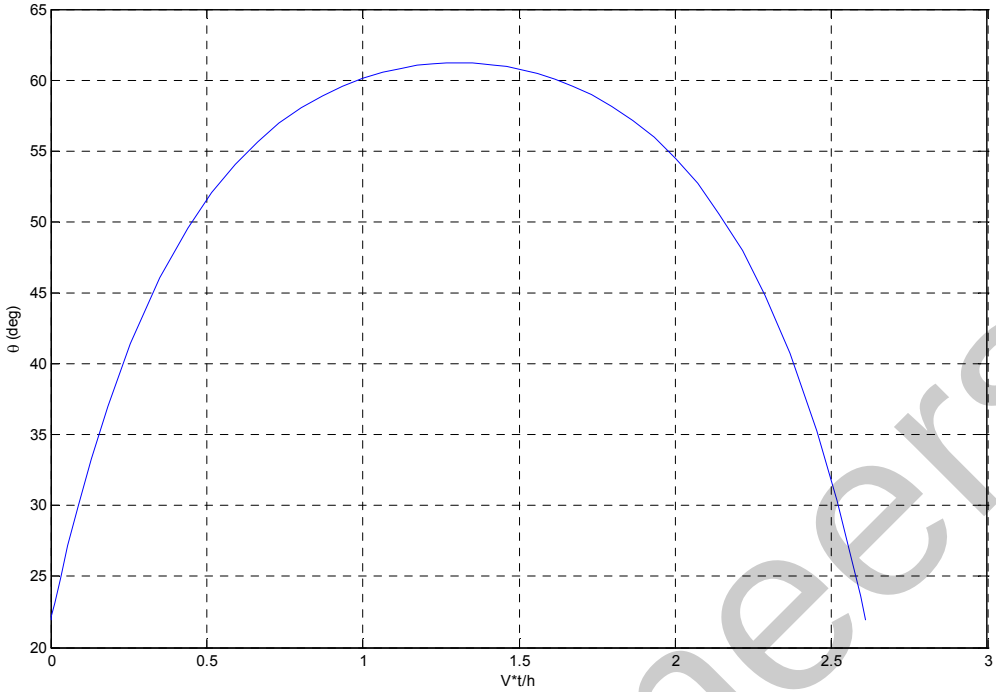
```
function f=zrmpt_f(p)
% Subroutine for Pb. 4.3.12; min time to cross a river with a
% parabolic current; uc=1-y^2; s=(x,y)
global th0; th0=p(1); tf=p(2); s0=[0 -1]';
opton=odeset('reltol',1e-4);
[t,s]=ode23('zrmpar',[0 tf],s0,opton);
N=length(t); xf=s(N,1); yf=s(N,2); f=[xf yf-1];
```

فایل بنام zrmpar

```
function sp=zrmpar(t,s)
% Subroutine for p4_3_14; min time to cross a river with a parabolic
% current; uc=1-y^2; s=(x,y) in h, uc in V, t in h/V;
global th0; y=s(2); uo=1; secth=uo/cos(th0)+1-y^2;
c=1/secth; s=sqrt(1-c^2); sp=[-c+1-y^2; s];
```

نتایج اجرای برنامه در اشکال زیر نشان داده شده است:





٥-٤- مسائل برنامه‌ریزی بهینه در سیستم‌های دینامیکی

مسائل کنترل بهینه(بهینه‌سازی) در سیستم‌های دینامیکی پیوسته شامل مسائل حساب تغییرات[1] می‌باشند. فرض می‌شود که سیستم دینامیکی با معادلات دیفرانسیل زیر بیان شود:

$$\dot{x} = f\,[x(t),u(t),t] \quad , \qquad t_0 \le t \le t_f \tag{۱}$$

که در آن $x(t)$ تابع برداری با n مؤلفه و $u(t)$ فرمان کنترل بوده که یک تابع برداری با m مؤلفه می‌باشد.

حال تابع معیار (اسکالر) به صورت زیر در نظر گرفته‌می‌شود:

$$J = \phi\,[x(t_f),t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[x(t),u(t),t]dt \tag{۲}$$

1. Calculus-of-Variation

اگر قیودی به صورت توابعی از متغیرهای حالت در زمان نهائی نامشخص(شامل مسائل کمترین زمان) به صورت زیر موجود باشند:

$$\psi[x(t_f),t_f]=0 \qquad (\psi \text{ یک تابع برداری با } q \text{ مؤلفه است}) \qquad (۳)$$

آنگاه قیود و معادلات دیفرانسیل حالت، با ضرائب لاگرانژی υ , $\lambda(t)$ به تابع معیار افزوده می‌شوند:

$$J=[\phi+\upsilon^T\psi]_{t=t_f}+\int_{t_0}^{t_f}\{L(x,u,t)+\lambda^T[f(x,u,t)-\dot{x}]\}dt \qquad (٤)$$

سپس تابع هامیلتونی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H=L(x,u,t)+\lambda^T(t)f(x,u,t) \qquad (٥)$$

بطور خلاصه مجموعه شرایط لازم برای ایستا بودن J به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\dot{x}=f(x,u,t) \qquad (\text{معادلات حالت}) \qquad (٦)$$

$$\dot{\lambda}=-\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T=-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T\lambda-\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^T \qquad (\text{معادلات کمک حالت یا اویلر-لاگرانژ}) \qquad (٧)$$

$$0=\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^T=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^T\lambda+\left(\frac{\partial L}{\partial u}\right)^T \qquad (\text{شرط بهینه‌بودن}) \qquad (٨)$$

$$x_k(t_0)=\text{معلوم} \quad \text{یا} \quad \lambda_k(t_0)=0 \qquad (\text{شرایط اولیه}) \qquad (٩)$$

$$\lambda(t_f)=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}+\upsilon^T\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^T_{t=t_f} \qquad (\text{شرط مرزی}) \qquad (١٠)$$

$$\Omega=\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}+\upsilon^T\frac{\partial\psi}{\partial t}+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}+\upsilon^T\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)f+L\right]_{t=t_f}=0 \qquad (\text{شرط تعامد}) \qquad (١١)$$

$$\psi[x(t_f),t_f]=0 \qquad (\text{قیود انتهائی}) \qquad (١٢)$$

شرط بهینه بودن (۸)، m بردار $u(t)$ را معین می‌کند. حل $2n$ معادلات دیفرانسیل (٦) و (۷) و انتخاب $q+1$ پارامتر υ و t_f بوسیلهٔ $2n+1+q$ شرط مرزی (۹) تا (۱۲) بدست می‌آید. در صورتی که معادلات حالت

غیرخطی باشند، در حالت کلی، حل تحلیلی حلقه‌بسته برای معادلات دیفرانسیل فوق، وجود ندارد لذا این معادلات با استفاده از روش عددی و به صورت حلقه‌باز حل می‌گردد.

۵-۵- کنترل بهینهٔ حلقه‌باز و حلقه‌بسته

تا این مرحله، مسئله کنترل بهینه در سیستم دینامیکی، به صورت کنترل‌بهینهٔ حلقه‌باز[1] مطرح گردید. فرمان کنترلی در کنترل بهینهٔ حلقه‌باز به صورت تابعی از زمان، یعنی $u(t)$ بدست می‌آید. فرمان کنترل از یک حالت اولیه $x(t_0)$ شروع شده و بسوی ابرسطح[2] انتهائی که بوسیلهٔ قیود $\psi(x(t_f),t_f)=0$ تعریف می‌شود پیش‌روی می‌کند.

حال هر نقطه‌ای که مستقیما روی مسیر بهینه مابین $(x(t_0),t_0)$ و ابرسطح انتهائی باشد می‌تواند یک نقطهٔ اولیه ممکن برای همان تابع کنترل بهینهٔ قبلی باشد. اما اگرنقطهٔ اولیه‌ای خارج از مسیر بهینهٔ مابین $(x(t_0),t_0)$ و ابرسطح انتهائی را در نظر گرفته شود، حل قبلی $u(t)$ قابل استفاده نیست و مجدداً بایستی مسئله با شرط اولیهٔ جدید حل شود. در مسائل کنترل اتوماتیک، بیشتر مواقع $u(t)$ در تعداد زیادی از نقاط اولیه به ابرسطح انتهائی مورد نیاز می‌باشد. چونکه معلوم نیست سیستم چه موقع و یا از کدام شرط اولیه شروع بکار خواهد کرد. برای غلبه بر این مشکل، خانواده‌ای از مسیرهای بهینه مورد نیاز است تا تمامی نقاط اولیهٔ ممکن را پوشش دهند. در حساب تغییرات، چنین خانواده‌ای را میدان مقادیر نهائی[3] می‌نامند. در حالت کلی تنها یک مسیر بهینه از یک نقطه $(x(t_0),t_0)$ به ابرسطح انتهائی وجود دارد و یک بردار کنترل بهینه منحصربفرد $u^o(t)$ برای این نقطه وجود خواهد داشت. از این‌رو می‌توان نوشت:

1. Open Loop
2. Hypersurface
3. Field of Extermals

$$u^o = u^o(x,t) \qquad (۱۳)$$

این قانون بنام قانون کنترل بهینهٔ حلقه‌بسته[1] نامیده می‌شود. یعنی بردار کنترل به صورت تابعی از حالت $x(t)$ و زمان کنونی t داده شده است. برای سیستم‌های ایستا[2] که در آن، شاخص عملکرد و قیود توابع صریح از زمان نباشند آنگاه توابع کنترل بهینه تابع صریح از زمان نخواهند بود یعنی:

$$u^o = u^o(x) \qquad (۱٤)$$

بدست آوردن قانون کنترل حلقه‌بسته برای سیستم‌های غیرخطی بندرت امکان‌پذیر است. اما در سیستم‌هائی که بتوان با فرضیات ساده کننده معادلات حرکت آنها را به صورت خطی در آورد می‌توان قانون کنترل حلقه‌بسته را با انتخاب شاخص عملکرد و قیود مناسب بدست آورد.

برای بدست آوردن حل حلقه‌بسته، علاوه بر روش هامیلتونی، دو روش دیگر نیز مطرح می‌باشند. روش اول بنام روش همسایگی جواب بهینه[3] معروف است. عیب این روش آن است که در همسایگی جواب اولیه پاسخ مناسبی دارد. اما با فاصله گرفتن از آن، جواب بدست آمده رضایت‌بخش نیست. روش دوم در بدست آوردن حل حلقه‌بسته بنام روش برنامه‌ریزی پویا[4] شناخته می‌شود. بطور کلی، این روش دارای دو مشکل اساسی است. نخست آنکه استراتژی کنترل بهینه در این روش به حالت نهائی سیستم وابسته است و دوم اینکه، با افزایش ابعاد سیستم، حجم محاسبات و حافظهٔ مورد نیاز سریعاً افزایش می‌یابند. در مسائلی با بیش از دو یا سه متغیر، دستیابی به حل حلقه‌بسته با این روش، حتی با کمک کامپیوترهای پیشرفتهٔ امروزی نیز میسر نیست. بطور مثال برای یک مسئله با حداقل سه متغیرحالت، ذخیره نمودن پاسخ (تمامی میدان مقادیر نهائی) به مقدار حافظه بسیار زیادی که عملاً در دسترس نیست نیاز خواهد بود.

1. Optimal Closed-Loop or Feedback Control Law
2. Stationary Systems
3. Neighboring Optimal
4. Dynamic Programming

۵-۶- حل عددی مسائل کنترل‌بهینه

در قسمت قبل، از حساب تغییرات برای بدست آوردن شرایط لازم در کنترل بهینه استفاده گردید. در حالت کلی، روش حساب تغییرات به مسئله غیرخطی با شرایط حدی در دو نقطهٔ مجزا[1] منتهی می‌شود بطوری‌که برای بدست آوردن کنترل بهینهٔ حلقه‌بسته و یا حتی یک قانون حلقه‌باز به‌صورت تحلیلی نمی‌توان آنرا حل نمود. کاربرد موفقیت آمیز روش‌های عددی تکرارپذیر در حل مسائل پیچیدهٔ حساب تغییرات، از زمان پیدایش کامپیوترهای دیجیتال آغاز گردید. روش‌های عددی مختلفی برای حل مسائل غیرخطی با شرایط حدی در دو نقطهٔ مجزا مورد استفاده قرار می‌گیرند در این میان روش‌های سریعترین سقوط[2] و تغییرنهایتها[3] و خطی‌کردن مجازی[4] معروفتر می‌باشند. هر یک از این روش‌ها یک کنترل‌بهینهٔ حلقه‌باز (یعنی منحنی کنترل بهینه‌ای‌که مرتبط با مجموعه‌ای از شرایط اولیهٔ مشخص است) را تعیین می‌کنند. باید توجه نمود که در هر یک از این روش‌ها حدس اولیه‌ای برای بدست آوردن پاسخ مسئله‌ای که در آن یک یا چند شرط از شرایط (۱۵) تا (۲۱) برقرار نشده است بکار گرفته می‌شود. سپس این پاسخ برای تنظیم کردن حدس اولیه، و ارضاء نمودن تمام شرایط بکار می‌رود. اگر این گامها تکرار گردند و روش تکرارپذیر همگرا باشد، نهایتاً شرایط لازم (۱۵) تا (۲۱) برای بهینه‌بودن برقرار خواهند شد. الگوریتمی که برای حل مسائل کنترل بهینه با استفاده از روش سریعترین سقوط بکار گرفته می‌شود به صورت زیر است:

الف - فرض می‌شود در ابتدا اندیس تکرار i صفر باشد. یک تقریب منقطع[5] برای منحنی کنترل نامی $u^{(0)}(t)$ به ازاء هر $t \in [t_0, t_f]$ انتخاب شده و در حافظهٔ کامپیوتر ذخیره می‌گردد. این عمل را می‌توان با تقسیم‌کردن فاصلهٔ زمانی $t \in [t_0, t_f]$ به N فاصلهٔ فرعی (معمولاً مساوی) و فرض ثابت بودن $u^{(0)}$ در هر یک از این فاصله‌ها انجام داد. در اینصورت:

---

1. Two-Point Boundary-Value
2. Steepest Descent
3. Variation of Extermals
4. Quasilinearization
5. Discrete

$$u^{(0)}(t) = u^{(0)}(t_k), \qquad t \in [t_k, t_{k+1}), \qquad k = 0,1,\ldots, N-1 \qquad (۱۵)$$

ب - با استفاده از منحنی کنترل نامی $u^{(i)}$، معادلات وضعیت از t_0 تا t_f با شرایط اولیهٔ $x(t_0) = x(0)$ انتگرال‌گیری شده و منحنی مسیر حالت منتجه $x^{(i)}$ به‌صورت تابع برداری ثابت‌مقطعی ذخیره می‌گردد.

ج - مقدار $\lambda^{(i)}(t_f)$ با جایگزینی $x^{(i)}(t_f)$ از مرحلهٔ پیشین در معادلهٔ (۱۹) محاسبه خواهد شد. از این مقدار به عنوان شرایط اولیه و نیز مقادیر ثابت مقطعی $x^{(i)}$ ذخیره شده در مرحلهٔ دوم استفاده شده، معادلات کمک‌حالت (۱۶) از t_f به سمت عقب تا t_0 انتگرال‌گیری می‌شوند. سپس $\frac{\partial H^{(i)}(t)}{\partial u}$ به ازاء $t \in [t_0, t_f]$ برآورد گردیده و به طریق ثابت‌مقطعی ذخیره می‌شود. لازم نیست که منحنی مسیر کمک‌حالت ذخیره گردد.

د - اگر رابطهٔ زیر تعریف شود:

$$\left\| \frac{\partial H^{(i)}}{\partial u} \right\|^2 \equiv \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial H^{(i)}}{\partial u}(t) \right]^T \left[\frac{\partial H^{(i)}}{\partial u}(t) \right] dt \qquad (۱۶)$$

شرط توقف[1] هنگامی است که معادلهٔ $\left\| \frac{\partial H^{(i)}}{\partial u} \right\| \le \gamma$ برقرار گردد (γ ثابت مثبت از پیش انتخاب شده است). در این‌صورت روش تکرارپذیر پایان یافته است و مقادیر نهائی متغیرهای حالت و کنترل بدست می‌آیند. در غیر این‌صورت، کنترل مقطعی جدید که توسط رابطهٔ زیر داده می‌شود تولید می‌گردد:

$$u^{(i+1)}(t_k) = u^{(i)}(t_k) - \mu \frac{\partial H^{(i)}}{\partial u}(t_k), \qquad k = 0,\ldots, N-1 \qquad (۱۷)$$

که در آن:

$$u^{(i)}(t) = u^{(i)}(t_k) \quad \text{به ازاء} \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \qquad k = 0,\ldots, N-1. \qquad (۱۸)$$

حال $u^{(i)}(t_k)$ را با $u^{(i+1)}(t_k), \quad k = 0,\ldots, N-1,$ جایگزین نموده و به مرحلهٔ (ب) بازمی‌گردیم. مقدار استفاده شده برای ثابت خاتمه‌دهندهٔ γ به مسئله مورد حل و دقت مطلوب پاسخ، بستگی دارد. بهتر است قبل از انتخاب γ چندین مرحله محاسبهٔ آزمایشی انجام شود.

1. Stopping Criterion

یک روش برای انتخاب μ، استفاده از جستجوی تک متغیره[1] می‌باشد. یک مقدار اختیاری برای μ به‌عنوان شروع انتخاب می‌شود سپس $\frac{\partial H^{(i)}(t)}{\partial u}$ محاسبه شده و $u^{(i+1)}$ با استفاده از رابطهٔ (۲۶) بدست می‌آید. آنگاه جستجو در میان مقادیر مختلف $\mu > 0$ برای یافتن کوچکترین مقدار J ادامه می‌یابد. به‌عبارت دیگر در جهت سریعترین سقوط حرکت کرده تا اینکه کاهش دیگری در J بدست نیاید.

در مسائلی که زمان انتهائی نامشخص است (شامل مسائل کمترین زمان و مسائل تعقیب) ابتدا مقدار اختیاری برای زمان t_f در نظر گرفته شده و اصلاح آن پس از هر مرحله با کمک رابطهٔ (۲۰) و به صورت زیر انجام می‌پذیرد:

$$t_f^{new} = t_f^{old} - \varepsilon\,\Omega \qquad (۱۹)$$

انتخاب ε نیز به روشی مشابه μ انجام می‌پذیرد. در ارتباط با ارضاء نمودن قیود انتهائی (۲۱) یا مسائلی که تمام یا بعضی از حالت‌های نهائی ثابت هستند روش دیگری که در حل عددی سهولت ایجاد می‌نماید استفاده می‌گردد. بدین منظور از مفهوم تابع جریمه[2] کمک گرفته می‌شود. در این حالت معادلات (۲۱) صرفنظر شده و بجای آن جمله‌ای به صورت $(\psi^T Q \psi)$ به ϕ اضافه می‌گردد. در این روش معادلات (۲۱) بجای اینکه دقیقا ارضاء شوند به صورت تقریبی ارضاء می‌گردند. در عبارت اخیر Q ماتریس قطری با عناصر مثبت بزرگ می‌باشد.

در حقیقت، کاربرد موفقیت‌آمیز روش‌های تغییراتی در مسائل پیچیدهٔ فیزیکی فقط از زمان اختراع کامپیوترهای دیجیتال انجام گرفت. در این زمینه فعالیت‌های پژوهشی وسیعی به منظور دستیابی به الگوریتم‌های عددی که بتوان این مسائل را با کمک نرم‌افزارهای کامپیوتری حل نمود انجام پذیرفته است.

1. Single Variable Search
2. Penalty Function

۵-۷- کنترل بهینه در موشک‌های آشیانه‌یاب[1]

۵-۷-۱- معادلات حرکت در تعقیب صفحه‌ای و بدست آوردن پاسخ حلقه‌باز

هندسهٔ استفاده شده در مسئله تعقیب صفحه‌ای در شکل (۵-۲) نمایش داده شده است مختصات **XY** نشانگر یک مرجع اینرسی است. اندازهٔ سرعت موشک ثابت بوده و با زاویه اولیهٔ θ_0[2] نسبت به محور **X** شلیک می‌شود. جهت سرعت $\theta(t)$ به وسیلهٔ شتاب $a_n(t)$ که عمود بر جهت سرعت است تغییر می‌کند. هدف بدون شتاب بوده و لذا اندازهٔ سرعت و زاویهٔ آن در طول مسیر ثابت باقی می‌ماند. با فرض $x = x_T - x_M$, $y = y_T - y_M$ معادلات حرکت در صفحه (معادلات حالت) عبارتند از:

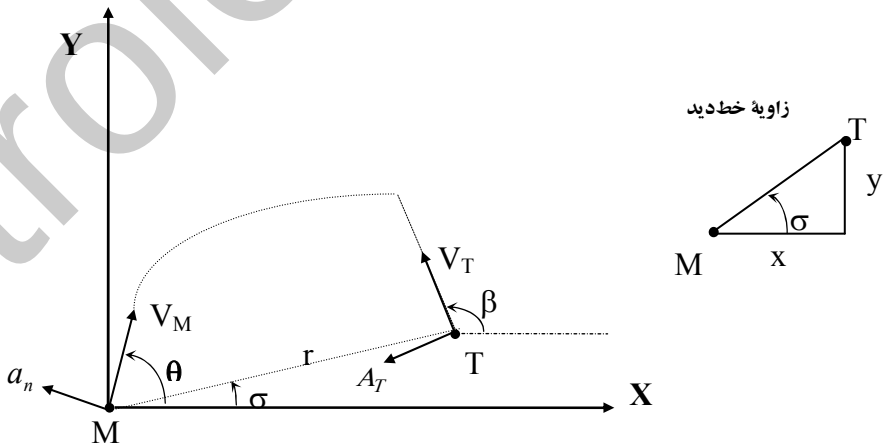
$$\dot{x} = V_T \cos\beta - V_M \cos\theta \qquad \text{(معادلات غیرخطی حالت)} \tag{۱}$$

$$\dot{y} = V_T \sin\beta - V_M \sin\theta \tag{۲}$$

$$\dot{\theta} = \frac{a_n}{V_M} \tag{۳}$$

شرایط اولیه عبارتند از:

$$t_0 = 0 \ , \ \theta(t_0) = \theta_0 \ , \ x_T(t_0) = X_0 \ , \ x_M(t_0) = 0 \ , \ y_T(t_0) = Y_0 \ , \ y_M(t_0) = 0 \tag{٤}$$



شکل (۵-۲): هندسهٔ موشک و هدف در تعقیب صفحه‌ای

اصابت در زمان انتهائی t_f به صورت زیر تعریف می‌شود:

1. Optimal Control in Homing Missiles
2. Off-Boresight Angle

$$x(t_f)=0 \quad , \quad y(t_f)=0 \tag{۵}$$

شاخص عملکرد به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} a_n^2\,dt \tag{٦}$$

شاخص عملکرد شامل انتگرال مجذور شتاب (فرمان کنترل) می‌باشد که بایستی حداقل گردد. در این‌صورت تابع هامیلتونی به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$H=\frac{1}{2}a_n^2+\lambda_x(V_T\cos\beta-V_M\cos\theta)+\lambda_y(V_T\sin\beta-V_M\sin\theta)+\lambda_\theta\left(\frac{a_n}{V_M}\right) \tag{۷}$$

که در آن $\lambda_x,\lambda_y,\lambda_\theta$ ضرائب لاگرانژی هستند. معادلات اویلر-لاگرانژ به صورت زیر در می‌آیند:

$$\dot{\lambda}_x=-\frac{\partial H}{\partial x}=0 \rightarrow \lambda_x=\text{ثابت} \qquad \text{(معادلات اویلر-لاگرانژ)} \tag{۸}$$

$$\dot{\lambda}_y=-\frac{\partial H}{\partial y}=0 \rightarrow \lambda_y=\text{ثابت} \tag{۹}$$

$$\dot{\lambda}_\theta=-\frac{\partial H}{\partial \theta}=-\lambda_x V_M\sin\theta+\lambda_y V_M\cos\theta \tag{۱۰}$$

معادلات (۸) و (۹) بیان می‌کنند که λ_x,λ_y در طول مسیر بهینه ثابت هستند. شرط بهینه بودن آن است که:

$$0=\frac{\partial H}{\partial a_n}=a_n+\frac{\lambda_\theta}{V_M} \rightarrow a_n=-\frac{\lambda_\theta}{V_M} \tag{۱۱}$$

با فرض $\phi=(\upsilon_x x_f+\upsilon_y y_y)$، مقادیر مرزی ضرائب لاگرانژی از شرایط تعامد، بدست می‌آیند:

$$\lambda_x(t_f)=\frac{\partial\phi}{\partial x_f}=\upsilon_x \tag{۱۲}$$

$$\lambda_y(t_f)=\frac{\partial\phi}{\partial y_f}=\upsilon_y \tag{۱۳}$$

$$\lambda_\theta(t_f)=\frac{\partial\phi}{\partial \theta_f}=0 \tag{١٤}$$

$$H_f=\frac{\partial\phi}{\partial t_f}=0 \tag{۱۵}$$

معادلات (۱۱) و (۱٤) دلالت دارند که:

$$a_n(t_f) = 0 \qquad (۱٦)$$

از آنجائی که هامیلتون تابع صریحِ زمان نیست پس ثابت است و از (۱۵) نتیجه می‌شود:

$$H = 0 \qquad (۱۷)$$

در صورتی که (۷) در معادلهٔ (۱۷) جایگزین شود عبارت زیر برای کنترل بهینه بدست می‌آید:

$$a_n = \pm\sqrt{2(a + b\sin\theta + c\cos\theta)} \qquad (۱۸)$$

$$sign(a_n) = sign(-\lambda_\theta) \qquad (۱۹)$$

که در آن:

$$a = V_T(\lambda_x \cos\beta + \lambda_y \sin\beta) \qquad (۲۰)$$

$$b = -V_M\lambda_y \qquad (۲۱)$$

$$c = -V_M\lambda_x \qquad (۲۲)$$

با توجه به اینکه λ_x, λ_y در طول مسیر ثابت هستند، با کمک (۱٦) و (۱۸) رابطه‌ای بین آنها بدست می‌آید:

$$\lambda_y = \frac{\lambda_x(V_M \cos\theta_f - V_T \cos\beta)}{V_T \sin\beta - V_M \sin\theta_f} \qquad (۲۳)$$

کمترین فرمان کنترل به صورت $a_n = 0$ بدست می‌آید. در این حالت موشک مستقیما در مسیر برخورد شلیک می‌شود و مسیر بهینه به صورت خط راست (ثابت = $\theta = \theta_{Straight\ Line} = \theta_{SL}$) در می‌آید. در صورتی که $\theta_0 < \theta_{SL}$ باشد، در معادلهٔ (۱۸) علامت مثبت و اگر $\theta_0 > \theta_{SL}$ باشد، علامت منفی استفاده می‌شود. مقدار θ_{SL} از قانون سینوس‌ها به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\theta_{SL} = \sin^{-1}\left(\frac{V_T}{V_M}\sin\beta\right) \qquad (۲٤)$$

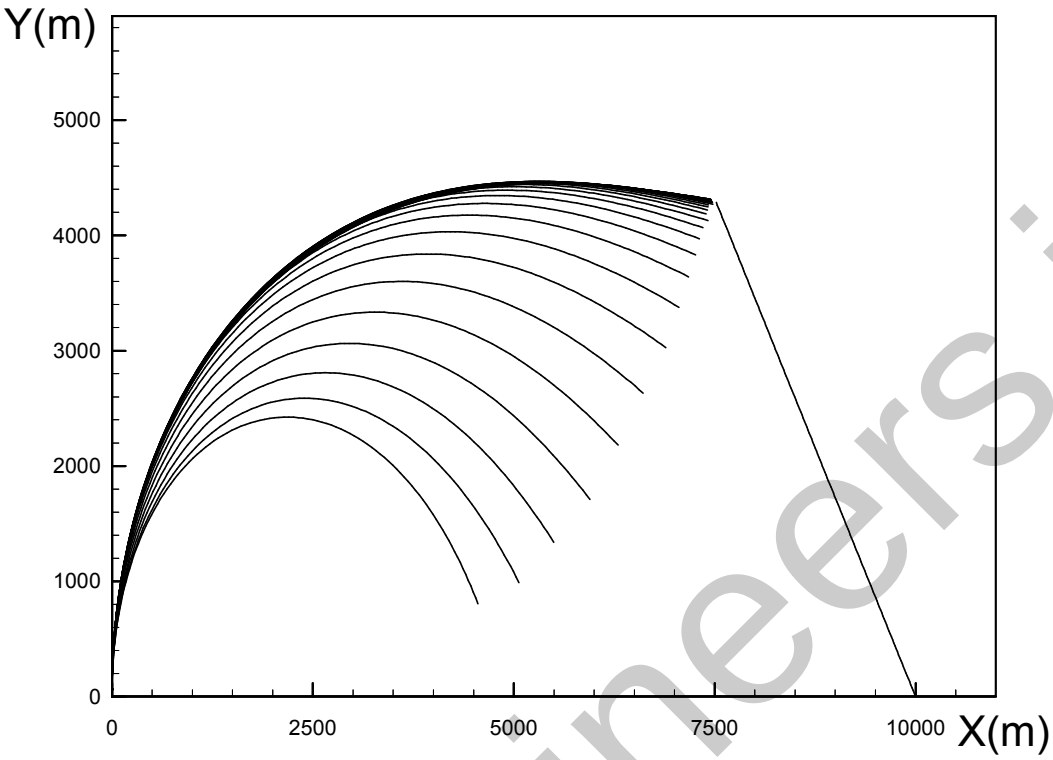
همانگونه که از معادلهٔ (۱۸) مشاهده می‌گردد، فرمان کنترل، تابعی از متغیرهای λ_x, λ_y می‌باشد و در آخرین مرحله می‌بایست این متغیرها، طوری انتخاب شوند که شرایط اولیه (٤) و (٥) ارضا گردند. از آنجائی که معادلات حالت غیرخطی هستند حل تحلیلی برای این مسئله وجود ندارد و می‌بایست جواب را با تکرار متوالی و از طریق عددی، بدست آورد. بدین منظور، مقدار اولیه‌ای برای λ_x, λ_y اختیار می‌شود در انتخاب این مقادیر بایستی دقت نمود تا عبارت زیر رادیکال (۱۸) منفی نشود. آنگاه معادلات (۱) تا (۳) به روش عددی انتگرال‌گیری می‌شوند و انتگرال‌گیری هنگامی پایان می‌پذیرد که سرعت نسبی موشک و هدف تغییر علامت دهد ($V_C < 0$) سپس مقدار λ_x با استفاده از (۸) و (۱۲) به صورت زیر اصلاح می‌گردد:

$$\lambda_x^{new} = \lambda_x^{old} + \mu x_f \qquad (۲۵)$$

که در آن $0 < \mu < 1$ می‌باشد. مقدار جدید λ_y از رابطهٔ (۲۳) بدست می‌آید. پس از تعیین مقادیر جدید برای λ_x, λ_y دوباره عمل انتگرال‌گیری تکرار می‌گردد. پایان کار هنگامی است که فاصلهٔ نسبی در t_f کمتر از یک متر شود ($r_f < 1.0$ m) این فاصلهٔ به معنی اصابت موشک به هدف در نظر گرفته شده است. مراحل فوق بر روی یک سناریوی تعقیب با ورودی‌های زیر انجام شده است

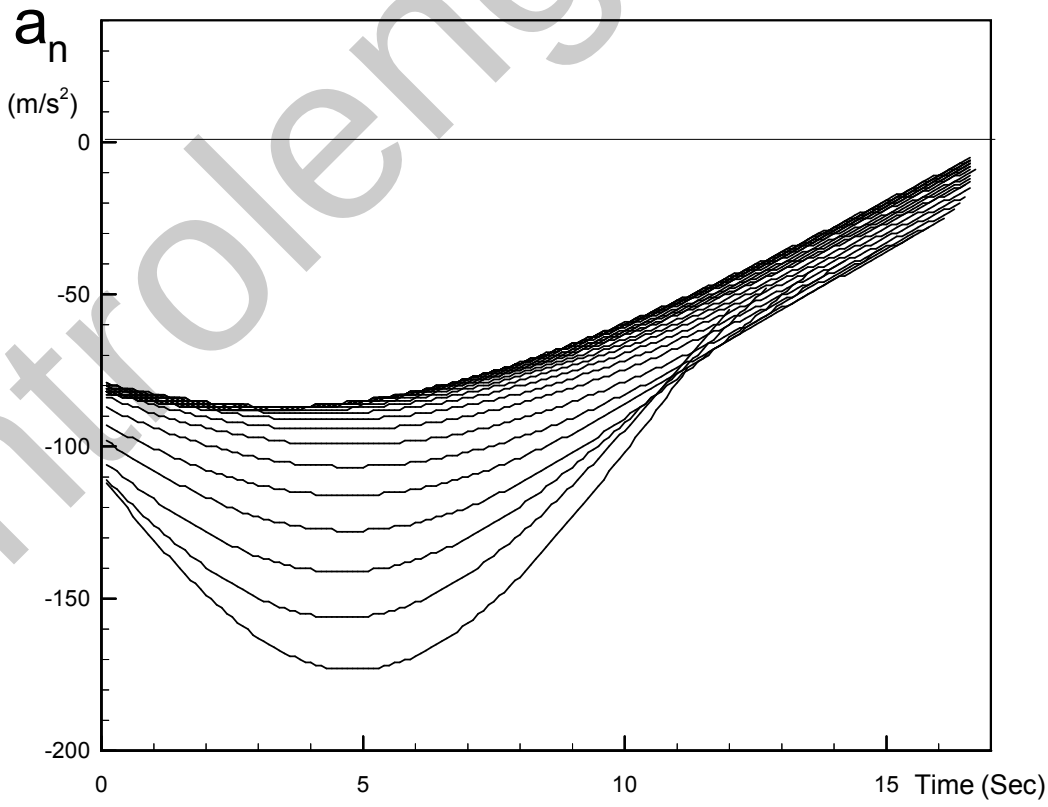
$$\theta_0 = 90^o,\ \beta_0 = 120^o,\ V_M = 600,\ V_T = 300,\ X_0 = 10000m$$

شکل (٥-۳) منحنی مسیر و شکل (٥-٤) منحنی شتاب را در تکرارهای متوالی نشان می‌دهد. همان‌گونه که از شکل‌ها مشاهده می‌شود پس از هر تکرار حل به مقدار بهینه نزدیک‌تر می‌شود البته شدت همگرائی در نزدیک جواب بهینه بسیار کند خواهد شد.



شکل (۵-۳) : منحنی مسیر در حل تکرارپذیر

$\theta_0 = 90^o,\ \beta_0 = 120^o,\ V_M = 600,\ V_T = 300,\ X_0 = 10000m$



شکل (۵-٤) : منحنی شتاب در حل تکرارپذیر

$\theta_0 = 90^o,\ \beta_0 = 120^o,\ V_M = 600,\ V_T = 300,\ X_0 = 10000m$

۵-۷-۲- بدست آوردن قانون هدایت و ناوبری متناسب از قوانین کنترل بهینه

قانون هدایت و ناوبری متناسب با فرض کوچک بودن زاویهٔ θ یعنی $(\sin\theta \approx \theta,\ \ \cos\theta = 1)$ بدست می‌آید. با این فرض معادلات (۱) تا (۳) در مختصات دو بعدی به صورت زیر خطی می‌شوند:

$$\dot{x} = V_T \cos\beta - V_M \qquad \text{(معادلات خطی حالت)} \tag{۲۶}$$

$$\dot{y} = V_T \sin\beta - V_M \theta \tag{۲۷}$$

$$\dot{\theta} = \frac{a_n}{V_M} \tag{۲۸}$$

شاخص عملکرد به همان صورت (٦) در نظر گرفته می‌شود. تابع هامیلتونی به صورت زیر در می‌آید:

$$H = \frac{1}{2} a_n^2 + \lambda_x \left(V_T \cos\beta - V_M\right) + \lambda_y \left(V_T \sin\beta - V_M \theta\right) + \lambda_\theta \left(\frac{a_n}{V_M}\right) \tag{۲۹}$$

معادلات اویلر لاگرانژ (کمک حالت) به صورت زیر در می‌آیند:

$$\dot{\lambda}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \rightarrow \lambda_x = \text{ثابت} \tag{۳۰}$$

$$\dot{\lambda}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \rightarrow \lambda_y = \text{ثابت} \tag{۳۱}$$

$$\dot{\lambda}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = V_M \lambda_y \tag{۳۲}$$

با انتگرال‌گیری از معادلهٔ (۳۲) در فاصلهٔ $[t, t_f]$ نتیجه می‌شود که:

$$\lambda_\theta(t) = \lambda_\theta(t_f) + (t - t_f) V_M \lambda_y \tag{۳۳}$$

شرط بهینه بودن آن است که:

$$0 = \frac{\partial H}{\partial a_n} = a_n + \frac{\lambda_\theta}{V_M} \rightarrow a_n = -\frac{\lambda_\theta}{V_M} \tag{۳٤}$$

با فرض $\phi = (\nu_x x_f + \nu_y y_y)$ از شرط مرزی، مقادیر انتهائی ضرائب لاگرانژی بدست می‌آیند:

$$\lambda_x(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial x_f} = \nu_x \tag{۳۵}$$

$$\lambda_y(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial y_f} = \nu_y \tag{۳۶}$$

$$\lambda_\theta(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial \theta_f} = 0 \tag{۳۷}$$

از (۳۳) و (۳۶) و (۳۷) نتیجه می‌شود که:

$$\lambda_\theta(t) = (t - t_f)V_M \lambda_y = (t - t_f)V_M \nu_y \tag{۳۸}$$

با استفاده از معادلهٔ (۲۸) و (۳٤):

$$a_n = -(t - t_f)\nu_y \tag{۳۹}$$

$$\dot{\theta} = \frac{a_n}{V_M} = -\frac{\lambda_\theta}{V_M^2} = \frac{-(t - t_f)\nu_y}{V_M} \tag{٤۰}$$

حال از رابطهٔ (٤۰) در فاصلهٔ $[t, t_f]$ انتگرال‌گیری می‌شود:

$$\theta(t) = \theta(t_f) - \frac{\nu_y (t - t_f)^2}{2V_M} \tag{٤۱}$$

با جاگذاری رابطهٔ اخیر در (۲۷):

$$\dot{y} = V_T \sin\beta - V_M \theta(t_f) + \frac{\nu_y (t - t_f)^2}{2} \tag{٤۲}$$

و انتگرال‌گیری در فاصلهٔ $[t, t_f]$ نتیجه می‌دهد که:

$$y - y_f = (V_T \sin\beta - V_M \theta_f)(t - t_f) + \frac{1}{6}\nu_y (t - t_f)^3 \tag{٤۳}$$

در هنگام اصابت $y_f = 0$ است. حال از (٤۱) مقدار θ_f حساب شده و در رابطهٔ اخیر قرار می‌گیرد.

$$\theta(t_f) = \theta(t) + \frac{\nu_y (t - t_f)^2}{2V_M} \tag{٤٤}$$

$$y = \left(V_T \sin\beta - V_M \left(\theta(t) + \frac{\nu_y (t - t_f)^2}{2V_M}\right)\right)(t - t_f) + \frac{1}{6}\nu_y (t - t_f)^3 \tag{٤٥}$$

$$y = \left(V_T \sin\beta - V_M \theta(t)\right)(t - t_f) - \frac{1}{3}\nu_y (t - t_f)^3 \tag{٤٦}$$

$$-\nu_y(t-t_f)=\frac{3y}{(t-t_f)^2}-\frac{3\left(V_T\sin\beta-V_M\theta(t)\right)}{(t-t_f)} \qquad (٤٧)$$

حال با استفاده از(۳۹) و رابطهٔ اخیر:

$$a_n=\frac{3y}{(t-t_f)^2}-\frac{3\left(V_T\sin\beta-V_M\theta(t)\right)}{(t-t_f)} \qquad (٤٨)$$

اکنون بایستی رابطه‌ای برای $1/(t-t_f)$ بدست آید لذا از (۲٦)در فاصلهٔ $[t,t_f]$ انتگرال گرفته می‌شود:

$$x-x_f=(V_T\cos\beta-V_M)(t-t_f) \qquad (٤٩)$$

در هنگام برخورد مقدار x_f به سمت صفر میل می‌کند. از آنجا خواهیم داشت:

$$\frac{1}{(t-t_f)}=\frac{(V_T\cos\beta-V_M)}{x} \qquad (٥٠)$$

مقدار رابطهٔ اخیر در (٤٨) جاگذاری می‌شود:

$$a_n=\frac{3y(V_T\cos\beta-V_M)^2}{x^2}-\frac{3\left(V_T\sin\beta-V_M\theta(t)\right)(V_T\cos\beta-V_M)}{x} \qquad (٥١)$$

$$a_n(x,y,\theta)=3(V_T\cos\beta-V_M)\left(\frac{y(V_T\cos\beta-V_M)}{x^2}-\frac{(V_T\sin\beta-V_M\theta(t))}{x}\right) \qquad (٥٢)$$

در رابطهٔ فوق، فرمان کنترل برحسب متغیرهای حالت(حل حلقه‌بسته) بدست آمد. با تغییراتی در این حل، فرم مناسب‌تری که همان هدایت و ناوبری متناسب است بدست می‌آید. با استفاده از رابطهٔ:

$$\tan\sigma=\frac{y}{x} \qquad (٥٣)$$

با فرض اینکه زاویهٔ خط‌دید[1] در طول مسیر کوچک باقی بماند،یعنی $\tan\sigma\approx\sigma$ از هردوطرف رابطهٔ فوق نسبت به زمان مشتق گرفته می‌شود:

$$\dot{\sigma}=\frac{x\dot{y}-\dot{x}y}{x^2} \qquad (٥٤)$$

آنگاه با استفاده از معادلات (۲٦) و (۲۷) نتیجهٔ زیر بدست می‌آید:

1. Line of Sight

$$\dot{\sigma} = -\left(\frac{y(V_T \cos\beta - V_M)}{x^2} - \frac{\left(V_T \sin\beta - V_M \theta(t)\right)}{x}\right) \qquad (۵۵)$$

با مقایسهٔ این معادله و معادلهٔ (۵۲) نتیجه می‌شود که:

$$a_n = K V_M \dot{\sigma} \qquad (۵۶)$$

که در آن K بنام ثابت ناوبری[1] شناخته شده و به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$K = 3\left(1 - \frac{V_T \cos\beta}{V_M}\right) \qquad (۵۷)$$

برای هدف ثابت یعنی $(V_T = 0)$ مقدار $K = 3$ می‌شود. در برخورد سربه‌سر مقدار K طبق رابطهٔ فوق بزرگتر از سه است. در حالتی که هدف متحرک باشد یعنی $(V_T \neq 0)$ آنگاه مقدار K از رابطهٔ اخیر بدست می‌آید. از آنجائی که سرعتهای V_M, V_T در بدست آوردن قانون ناوبری متناسب ثابت فرض شده‌اند بنابراین مقدار K هم ثابت خواهد بود.

در قانون ناوبری تناسبی خالص، شتاب موشک عمود بر بردار سرعت و از رابطهٔ (۵۶) بدست می‌آید امّا در قانون ناوبری تناسبی حقیقی، شتاب موشک، عمود بر خط‌دید بوده و از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$a_n = K' V_C \dot{\sigma} \qquad (۵۸)$$

که در آن V_C سرعت نزدیک شدن هدف و موشک و $\dot{\sigma}$ نرخ چرخش خط‌دید و K' ضریب ناوبری متناسب نامیده می‌شوند. در یک موشک، جهت اندازه‌گیری V_C از یک رادار دوپلر[2] استفاده می‌شود و یک جستجوگر[3] هدف را تعقیب[4] نموده و $\dot{\sigma}$ را اندازه می‌گیرد. مقدار K' جهت پایداری سیستم، بین سه تا پنج انتخاب میگردد.

1. Navigation Constant
2. Doppler Radar
3. Seeker
4. Track

۵-۸- قیود انتهائی نرم و سخت در مسائل کنترل بهینه انتهائی

قیود انتهائی که بایستی دقیقاً ارضاء شوند بنام قیود سخت[1] نامیده می‌شوند اگر این قیود را بتوان بصورت تقریبی ارضا نمود آنگاه قیود نرم[2] خوانده می‌شوند. بعنوان مثال کنترل درجه حرارت اتاق با کمترین مصرف انرژی را در نظر گرفته و قیود آنرا در دو حالت سخت و نرم بیان می‌کنیم:

در نظر است اتاقی با کمترین مقدار مصرف انرژی گرم شود. در صورتی که $\theta(t)$ درجه حرارت اتاق، θ_a درجه حرارت محیط بیرونی(مقدار ثابت) و $u(t)$ نرخ تزریق حرارت به داخل اتاق باشد، معادلات دینامیکی حاکم عبارتند از:

$$\dot{\theta} = -a(\theta - \theta_a) + bu$$

ثابتهای a,b به عایق‌کاری و برخی دیگر از مشخصات اتاق وابسته می‌باشند. با تعریف متغیر حالت بصورت $x(t) = \theta(t) - \theta_a, \theta_a = 0^o$ معادلات حالت سیستم بصورت زیر در می‌آیند:

$$\dot{x} = -ax + bu$$

برای کنترل درجه حرارت در یک فاصلهٔ زمانی ثابت $[0,T]$ با حداقل انرژی تزریق شده، شاخص عملکرد (تابع معیار) بصورت زیر انتخاب می‌شود:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)dt$$

الف) قیود سخت: اگر بخواهیم دمای نهائی اتاق دقیقاً مقدار ثابت $x(T) = \theta(T) = 10^o$ باشد در این حالت $\phi = 0$ بوده و $\psi[x(t_f)] = x(T) - 10^o = 0$ خواهد بود در فصل سوم(مثال ٦) نشان داده شد که حل بهینه برای این سیستم بصورت زیر درمی‌آید.

$$u^*(t) = \frac{10ae^{at}}{b\sinh aT} \quad , \quad x^*(t) = 10\frac{\sinh at}{\sinh aT} \quad , \quad 0 \le t \le T$$

1. Hard Terminal Controllers
2. Soft Terminal Controllers

ب) قیود نرم: درصورتی که بخواهیم دمای نهائی اتاق نزدیک به $\theta(T)=10^{o}$ باشد در این صورت شاخص عملکرد را بصورت زیر در نظر می گیریم:

$$J=\frac{1}{2}S\left(x(T)-10\right)^2+\frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)dt$$

در این حالت $\phi=\frac{1}{2}S\left(x(T)-10\right)^2$ بوده و قید انتهائی نخواهیم داشت. نشان داده خواهد شد که حل بهینه برای این سیستم بصورت زیر خواهد بود[1]:

$$u(t)=\frac{10abSe^{at}}{ae^{aT}+Sb^2\sinh(aT)}$$

$$x(t)=\frac{10Sb^2\sinh(at)}{ae^{aT}+Sb^2\sinh(aT)} \quad \Rightarrow \quad X(T)=\frac{10Sb^2\sinh(aT)}{ae^{aT}+Sb^2\sinh(aT)}$$

با افزایش مقدار S یعنی $S\to\infty$ خواهیم داشت $x(T)\to 10$ لذا پاسخ‌های دو قسمت الف و ب مسئله با یکدیگر مساوی می‌شوند. اما مقدار شاخص عملکرد یا تابع هزینه با افزایش S، بصورت نامطلوب افزایش می‌یابد. بنابراین باید مصالحه‌ای بین رسیدن به مقدار نهایی و کمینه شدن شاخص عملکرد در حالت استفاده از قیود نرم صورت گیرد.

۵-۹- حل عددی کنترل بهینه در سیستم‌های دینامیکی غیرخطی با زمان انتهائی آزاد

نرم‌افزار MATLAB شامل جعبه‌ابزار بهینه‌سازی بنام OPTIM می‌باشد که در شاخهٔ فرعی TOOLBOX از شاخهٔ اصلی MATLAB قرار دارد. این جعبه‌ابزار دستورات مختلفی را دربر دارد. در اینجا دستور CONSTR استفاده شده این دستور برای اکثر مسائل بهینه‌سازی کافی می‌باشد. شکل این دستور به صورت زیر است:

```
X = CONSTR ('FUN',X0,OPTIONS)
```

X0 نقطهٔ آغازین برای شروع بهینه سازی می‌باشد. 'FUN' تابعی است که می‌بایست کمینه شود این تابع به همراه قیود تساوی یا ناتساوی و شرایط مرزی انتهائی (می‌توان توابعی از شرایط مرزی انتهائی را نیز در نظر

1. Lewis, Frank. L., & Syrmos, Vassilis, L., Optimal Control, 2ed, John Wiley & Sons Inc, 1995. Page 139, Temperature Control in a Room Using the Least Possible Energy

گرفت) در فایلی بنام FUN.M قرار می‌گیرد. این تابع بایستی دو آرگومان را بازگرداند یک آرگومان مربوط به تابع اسکالری است که کمینه می‌شود و آرگومان دوم ماتریسی از قیود می‌باشد. یعنی [F,G] = FUN(X) به عبارت دیگر تابع F کمینه می‌شود بطوری که $G \le 0$ برقرار باشد. OPTIONS نیز پارامترهای اختیاری بوده و برای اطلاع از جزئیات آن می‌توان از دستور HELP FOPTIONS استفاده نمود. ماتریس X مقدار کمینهٔ تابع F تحت قیود و شرایط مرزی انتهائی می‌باشد. آنچه که به‌عنوان قیود در FUN قرار می‌گیرند بایستی به صورت یک معادلهٔ جبری باشند اما معادلات حالت(قیود) در سیستم‌های دینامیکی به صورت دیفرانسیلی ظاهر می‌شوند. در صورتی که این قیود دیفرانسیلی خطی باشند یعنی $\dot{x} = Ax + Bu$ می‌توان از دستورات آماده‌ای همانند LQR در MATLAB استفاده نمود اما در اینجا معادلات حالت غیرخطی فرض می‌شوند یعنی:

$$\dot{x} = f[x(t), u(t), t]$$

که در آن f یک عملگر غیرخطی است. معادلهٔ اخیر به صورت فوق در FUN.M قابل استفاده نیست و بایستی به طریقی از حالت دیفرانسیلی خارج گردد. بدین منظور فضای حالت سیستم پیوسته (با روش تغییرناپذیری پله همراه با نگهدار مرتبهٔ صفر) به سیستم گسسته تبدیل می‌گردد و در این‌حالت کمیت X از بردار به ماتریس زیر تبدیل می‌شود[1]:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x(0) & u(0) \\ x(1) & u(1) \\ \dots & \dots \\ \dots & u(N-1) \\ x(N) & 0 \\ t_f & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(0) & x_2(0) & \dots & x_{Nx}(0) & u_1(0) & \dots & u_{Nu}(0) \\ x_1(1) & x_2(1) & \dots & x_{Nx}(1) & u_1(1) & \dots & u_{Nu}(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & u_1(N-1) & \dots & u_{Nu}(N-1) \\ x_1(N) & x_2(N) & \dots & x_{Nx}(N) & 0 & \dots & 0 \\ t_f & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

در رابطهٔ اخیر N تعداد فواصل زمانی گسسته، N_x تعداد متغیرهای حالت و N_u تعداد متغیرهای کنترل می‌باشند. در مسائلی که زمان انتهائی نامشخص است(مانند مسائل کمترین زمان)، متغیر t_f در سطر آخر اضافه

1. Franklin, G. F., and Powell, J. D., *Digital Control of Dynamic Systems,* Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1980.

می‌شود. این متغیر نیز در طی فرآیند بهینه‌سازی کمینه می‌شود. با استفاده از مطالب مذکور معادلهٔ حالت به صورت زیر در می‌آید:

$$x(k+1)-x(k)-f(x(k),u(k))(t_f/N)=0$$

شکل گسسته شاخص عملکرد نیز به صورت زیر در می‌آید:

$$J=\phi(x(N),t_f)+(t_f/N)\sum_{k=1}^{N}L(x(k),u(k))$$

نکته مهمی که در اینجا اشاره آن مفید به نظر می‌رسد آن است که، بهتر است معادلات حالت به صورت بی‌بعد درآیند. در این صورت متغیرهای حالت از لحاظ اندازه هم‌ارز بوده و سرعت جواب گرفتن از برنامهٔ بهینه‌سازی MATLAB افزایش قابل ملاحظه‌ای خواهد یافت. در برنامهٔ حاضر روش پیشنهادی در حل مسئله هدایت موشک‌های آشیانه‌یاب در تعقیب صفحه‌ای با قید انتهائی و در مقابل هدف مانورپذیر بکار گرفته شده است.

۵-۱۰-کنترل بهینه در برخورد صفحه‌ای با قید انتهائی

امروزه اغلب موشک‌های آشیانه‌یاب، از قانون هدایت و ناوبری متناسب استفاده می‌نمایند. دلیل این امر سودمندی و سهولت بکارگیری این قانون می‌باشد. در برخی از کاربردها، ناوبری متناسب با اشکالاتی همراه است. یکی از اشکالات این قانون آن است که اصابت به هدف تحت زاویهٔ خاصی صورت نمی‌پذیرد. در صورتی که بتوان ترتیبی داد تا موشک و هدف تحت زاویهٔ ۱۸۰ درجه و از روبرو به یکدیگر اصابت نمایند. آنگاه علاوه بر اینکه امکان اصابت افزایش خواهد یافت موشک نیز به نوک هدف برخورد نموده و مواد منفجره که معمولا در نوک قرار دارند کاملا منهدم می‌شوند. در اینجا مسئله برخورد صفحه‌ای که شامل قیدی بر روی زوایای انتهائی موشک و هدف می‌باشد تعریف و سپس حل می‌شود.

۵-۱۰-۱- معادلات حرکت در تعقیب صفحه‌ای با قید انتهائی

هندسهٔ استفاده شده در مسئلهٔ تعقیب صفحه‌ای در شکل (۵-۵) نمایش داده شده است مختصات **XY** نشانگر یک مرجع اینرسی است و محور **X** در لحظهٔ $t=0$ در امتداد خط‌دید[1] قرار دارد. در این لحظه هدف در $X_T = X_0$ قرار داشته و با سرعت ثابت در امتداد خطی که زاویهٔ β با محور **X** می‌سازد حرکت می‌کند. اندازهٔ سرعت موشک ثابت بوده و با زاویه اولیهٔ θ_0 نسبت به محور **X** شلیک می‌شود. جهت سرعت $\theta(t)$ به وسیلهٔ شتاب $a_n(t)$ که عمود بر جهت سرعت است تغییر می‌کند. بر حسب متغیرهای بی‌بعد[2]:

$$\xi=\left[(X_T - X_M)/X_0\right] \quad , \quad \eta=\left[(Y_T - Y_M)/X_0\right]$$

$$\alpha_n=\left[(a_n X_0)/V_M^2\right] \quad , \quad \tau=t(V_M/X_0) \quad , \quad \nu=(V_T/V_M) \tag{۱}$$

مسئلهٔ کنترل بهینه بصورت زیر تعریف می‌شود:

شتاب نرمال $\alpha_n(\tau)$ را طوری پیدا کنید که شاخص عملکرد زیر کمینه شود:

$$J = W(\tau_f - \tau_0) + \frac{1-W}{2}\int_{\tau_0}^{\tau_f} \alpha_n^2 d\tau \tag{۲}$$

شاخص عملکرد مجموع وزن‌دار از زمان انتهائی و انتگرال مجذور شتاب (هر دو بی‌بعد) می‌باشد. در معادلهٔ فوق W بین صفر و یک متغیر می‌باشد. در صورتی که $W=1$ شود مسئله بصورت کمترین زمان در می‌آید.

معادلات دیفرانسیل حالت عبارتند از:

$$\dot{\xi} = \nu\cos\beta - \cos\theta \tag{۳}$$

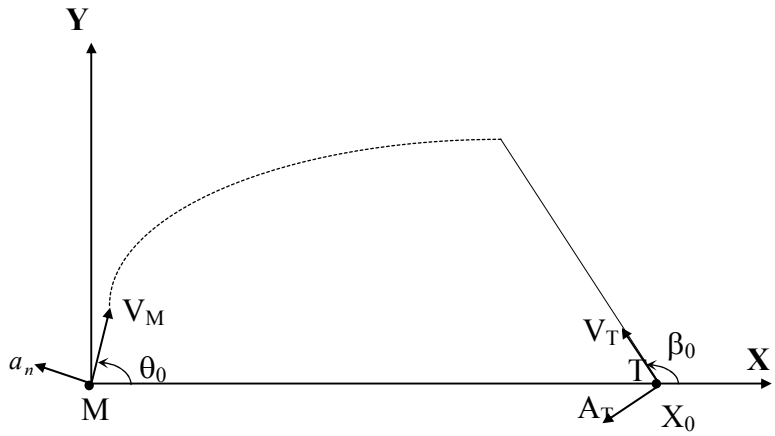
$$\dot{\eta} = \nu\sin\beta - \sin\theta \tag{٤}$$

$$\dot{\theta} = \alpha_n \tag{۵}$$

شرایط اولیه عبارتند از:

$$\tau_0 = 0 \,, \quad \xi_0 = 1, \quad \eta_0 = 0, \quad \theta(\tau_0) = \theta_0 \tag{٦}$$

1. Line of Sight
2. Hull, D. G., Radke, J. J., and Mack, R. E., "Time-to-Go Prediction for Homing Missiles Based on Minimum-Time Intercepts," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 14, No. 5, 1991, pp. 865-871.



شکل(۵-۵) : هندسهٔ تعقیب موشک و هدف در صفحه

اصابت(شرایط مرزی یا انتهائی) هنگامی صورت می‌پذیرد که:

$$\xi_f = 0, \qquad \eta_f = 0 \tag{۷}$$

قید زاویهٔ انتهائی مسیر پرواز برای موشک و هدف بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\cos(\theta_f - \beta_f) = \cos\Gamma_f \tag{۸}$$

که در آن Γ_f زاویهٔ مورد نظر می‌باشد. بعنوان مثال $\Gamma_f = \pi$ نشانگر برخورد سر به سر[1] خواهد بود. علامت cos مشکل تقارن حول محور طولی موشک و همچنین ابهام 2π را برطرف می‌کند. بنابراین برای هدف بدون مانور(سرعت ثابت):

$$\cos(\theta_f - \beta) + 1 = 0 \tag{۹}$$

۵-۱۰-۲- حل حلقه‌باز با استفاده از قوانین کنترل بهینه

با استفاده از معادلات (۲) و (۳) تا (۵) تابع هامیلتونی H بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$H = \frac{1-W}{2}\alpha_n^2 + \lambda_\xi(\nu\cos\beta - \cos\theta) + \lambda_\eta(\nu\sin\beta - \sin\theta) + \lambda_\theta(\alpha_n) \tag{۱۰}$$

که در آن $\lambda_\xi, \lambda_\eta, \lambda_\theta$ ضرائب لاگرانژی‌هستند. شرایط لازم برای حل بهینه(معادلات‌اویلر لاگرانژ)، عبارتند از:

1 Head-on Interception

$$\dot{\lambda}_{\xi} = -H_{\xi} = 0 \qquad (۱۱)$$

$$\dot{\lambda}_{\eta} = -H_{\eta} = 0 \qquad (۱۲)$$

$$\dot{\lambda}_{\theta} = -H_{\theta} = -\lambda_{\xi}\sin\theta + \lambda_{\eta}\cos\theta \qquad (۱۳)$$

$$0 = H_{\alpha_n} = (1-W)\alpha_n + \lambda_{\theta} \qquad (۱٤)$$

معادلات (۱۱) و (۱۲) بیان می‌کنند که $\lambda_{\xi},\lambda_{\eta}$ در طول مسیر بهینه ثابت هستند. همچنین با فرض:

$$\phi = W(\tau_f - \tau_0) + \nu_{\xi}\xi_f + \nu_{\eta}\eta_f + \nu_{\theta}(\cos(\theta_f - \beta) + 1) \qquad (۱٥)$$

شرایط مرزی از (۲۰-۲) و (۱۹-۲) بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$H_f = -\phi_{\tau f} = -W \qquad (۱٦)$$

$$\lambda_{\xi_f} = \phi_{\xi_f} = \nu_{\xi} \qquad (۱۷)$$

$$\lambda_{\eta_f} = \phi_{\eta_f} = \nu_{\eta} \qquad (۱۸)$$

$$\lambda_{\theta_f} = \phi_{\theta_f} = -\nu_{\theta}\sin(\theta_f - \beta) \qquad (۱۹)$$

از آنجائی که هامیلتون تابع صریحِ زمان نیست پس ثابت است یعنی:

$$H = H_f \qquad (۲۰)$$

در صورتی که(۱۰) در معادلهٔ(۱٦) جایگزین شود عبارت زیر برای کنترل بهینه بدست می‌آید:

$$\alpha_n = \pm\sqrt{\left[2/(1-W)\right](a + b\sin\theta + c\cos\theta)} \qquad (۲۱)$$

$$sign(\alpha_n) = sign(-\lambda_{\theta}) \qquad (۲۲)$$

که در آن:

$$a = W + \lambda_{\xi}\nu\cos\beta + \lambda_{\eta}\nu\sin\beta \qquad (۲۳)$$

$$b = -\lambda_{\eta} \qquad (۲٤)$$

$$c = -\lambda_{\xi} \qquad (۲٥)$$

با توجه به (۲۱)، انتخاب $W=1$ نیازمند شتاب بینهایت می‌باشد. با انتخاب مناسب W حداکثر شتاب نرمال موشک تنظیم خواهد شد. در آخرین مرحله می‌بایست شرایط مرزی ارضا شوند. همانگونه که از معادلهٔ (۲۱) مشاهده می‌گردد، فرمان کنترل، تابعی از متغیرهای $\lambda_\xi, \lambda_\eta$ می‌باشد و این متغیرها، بایستی طوری انتخاب شوند که (٦) و (۷) و (۸) برقرار باشند. از آنجائی که معادلات حالت غیرخطی هستند، حل تحلیلی برای این مسئله وجود ندارد و می‌بایست جواب را با تکرار متوالی و از طریق عددی، به‌دست آورد.

نمودار سناریوی فوق با مقادیر مختلف از W به صورت منحنی مسیر در شکل (۵-٦) و بصورت منحنی شتاب در شکل (۵-۷) مشاهده می‌گردد. سایر اطلاعات در جدول (۱) آورده شده است. همانطوری که ملاحظه می‌شود با افزایش W حداکثر شتاب مورد نیاز موشک افزایش یافته و با نزدیک شدن به $W=1$ به سمت منفی بی‌نهایت میل خواهد نمود. البته بدلیل محدودیت، تامین شتاب موشک، امکان پذیر نیست. یعنی مسئلهٔ کمترین زمان در این مسئله جواب فیزیکی ندارد. در مسئلهٔ کمترین زمان ابتدا با یک شتاب بی‌نهایت موشک در مسیر برخورد(بدون قید انتهائی) قرار می‌گیرد و تا نزدیکی هدف، میسر یک خط راست خواهد بود در انتهای مسیر مجدداً شتاب بینهایت به موشک اعمال می‌شود تا زاویهٔ آنرا در جهت تامین قید انتهائی تغییر دهد. معمولاً در مسائل تعقیب با کمترین زمان، اندازهٔ شتاب ثابت فرض شده و جهت آن بعنوان فرمان کنترل در نظر گرفته می‌شود. در این مسئله جهت شتاب ثابت بوده(عمود بر سرعت) و اندازهٔ آن به عنوان فرمان کنترل می‌باشد. همچنین از جدول(۱) مشاهده می‌شود که با افزایش W زمان پرواز کاهش می‌یابد اما این امر به قیمت افزایش در مقدار انتگرال مجذور شتاب تمام خواهد شد. در منحنی‌های فوق در $W=0$ شتاب در طول مسیر بطور متوسط توزیع شده است و حداکثر آن نسبت به سایر مقادیر W کمتر می‌باشد.

جدول ۱ : نتایج شبیه‌سازی برای مقادیر مختلف از W

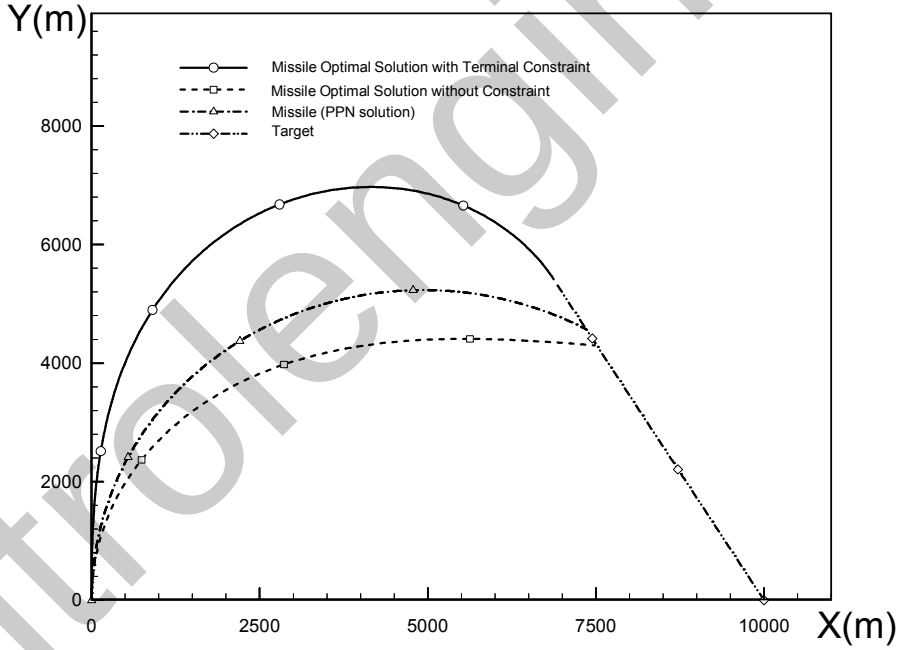
θ_0 (deg)	β_0 (deg)	W	ν	λ_ξ	λ_η	θ_f (deg)	t_f (Sec)	$\int_{\tau_0}^{\tau_f} \alpha_n^2 d\tau$
90	120	0	0.5	-3.37821	1.46950	-59.98	20.65	6.757
90	120	0.5	0.5	-1.09621	1.22899	-59.98	20.04	6.791
90	120	0.9	0.5	0.596555	0.809688	-59.99	18.18	7.707
90	120	0.95	0.5	0.762986	0.686269	-59.98	17.35	9.043

۵-۱۰-۳- مقایسهٔ مسیر پرواز در تعقیب صفحه‌ای بدون قید و با قید انتهائی

در این قسمت مسیر حرکت در تعقیب صفحه‌ای بدون قید انتهائی و مسیر با قید انتهائی با یکدیگر مقایسه شده است. بدین منظور یک سناریو با ورودی‌های زیر شبیه‌سازی می‌گردد:

$$W=0,\ \theta_0=90^o,\ \beta=120^o,\ X_0=10000m,\ V_M=600m/s,\ V_T=300m/s$$

شکل (۵-۸) مسیر دو روش مذکور بعلاوه مسیر ناوبری تناسبی خالص را نشان می‌دهد. همانطوری که از شکل پیداست مسیر با قید انتهائی، طولانی‌تر از مسیر بدون‌قید می‌باشد این موضوع قابل پیش‌بینی است. در هر صورت در حالت‌های واقعی معمولاً هدف به سمت موشک در حرکت می‌باشد. در این مواقع تفاوت مسیرها کاهش می‌یابد. سایر اطلاعات جهت مقایسه در جدول (۲) آورده شده است.



شکل (۵-۸) :مقایسهٔ مسیر پرواز موشک در تعقیب صفحه‌ای بدون قید و با قید انتهائی

جدول (۲) : مقایسهٔ سه روش هدایتی مختلف

Scenario Inputs	Optimal Solution Method	t_f (sec)	θ_f (deg)	$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} a_n^2 dt$ (m^2/s^3)
$W=0,\ \theta_0=90^o$ $\beta_0=120^o,\ X_0=10000m$ $V_M=600,\ V_T=300$	With Constraint PPN No Constraint	20.65 17.57 16.55	-60 -30.3 -4.8	70240 45304 36240

۵-۱۰-٤- حل حلقه‌باز با استفاده از جعبه‌ابزار بهینه‌سازی نرم‌افزار MATLAB

در این قسمت از جعبه‌ابزار بهینه‌سازی نرم‌افزار MATLAB برای حل مسائل کنترل بهینه در سیستم‌های دینامیکی غیرخطی استفاده شده است. بدین منظور با توجه به مطالب بخش قبل تغییراتی بر روی معادلات دیفرانسیلی حالت پیشنهاد گردید تا بتوان از جعبه‌ابزار بهینه‌سازی MATLAB استفاده نمود. سپس روش پیشنهاد شده در حل کنترل بهینهٔ موشک‌های آشیانه‌یاب در برخورد صفحه‌ای با قید انتهائی و در مقابل هدف مانورپذیر بکار گرفته شد مسئلهٔ فوق جزء مسائلی می‌باشند که زمان انتهائی در آنها نامشخص می‌باشد. مقادیر ورودی به شبیه‌سازی $W, \theta_0, \beta_0, V_M, V_T, X_0, A_T$ می‌باشند. مثال نخست با مقادیر زیر حل گردید:

$$W=0,\ \theta_0=0^o,\ \beta_0=90^o,\ V_M=600m/s,\ V_T=300m/s,\ X_0=10000m,\ A_T=0.5g$$

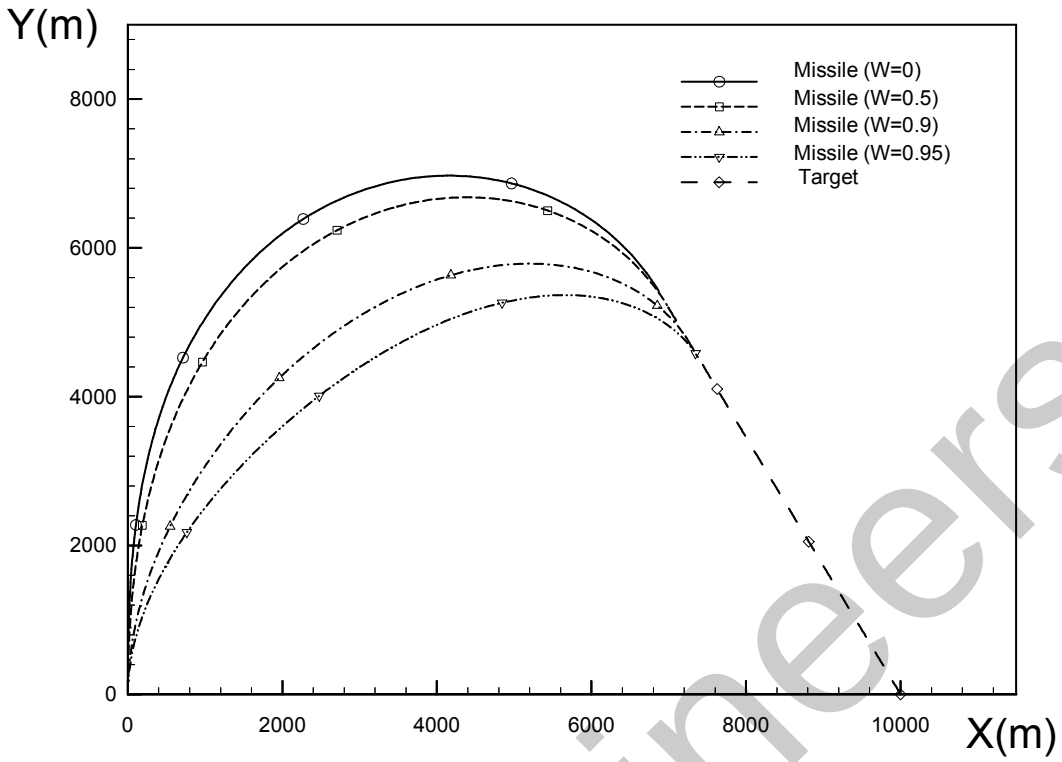
نمودار سناریوی فوق بصورت منحنی مسیر در شکل (۵-۸) و بصورت منحنی شتاب در شکل (۵-۹) نشان داده شده است. از آنجائی که با افزایش W حداکثر شتاب مورد نیاز موشک افزایش یافته و با نزدیک شدن به $W=1$ به سمت منفی بی‌نهایت میل خواهد نمود(مسئلهٔ کمترین زمان). بنابراین بدلیل محدودیت در تامین شتاب، در این حالت بایستی قیدی بر روی اندازهٔ شتاب موشک اعمال نمود. در مثال بعدی فرض شده است که $|a_n| \le 250(m/s^2)$ باشد لذا مثال قبل با تغییر $W=0.99$ مجدداً حل شده و منحنی‌های مسیر و شتاب موشک در اشکال (۵-۱۰) و (۵-۱۱) نمایش داده شده است. مثال سوم با ورودی‌های زیر شبیه‌سازی و حل شده است:

$$W=0,\ \theta_0=90^o,\ \beta_0=210^o,\ V_M=600m/s,\ V_T=300m/s,\ X_0=10000m,\ A_T=-g$$

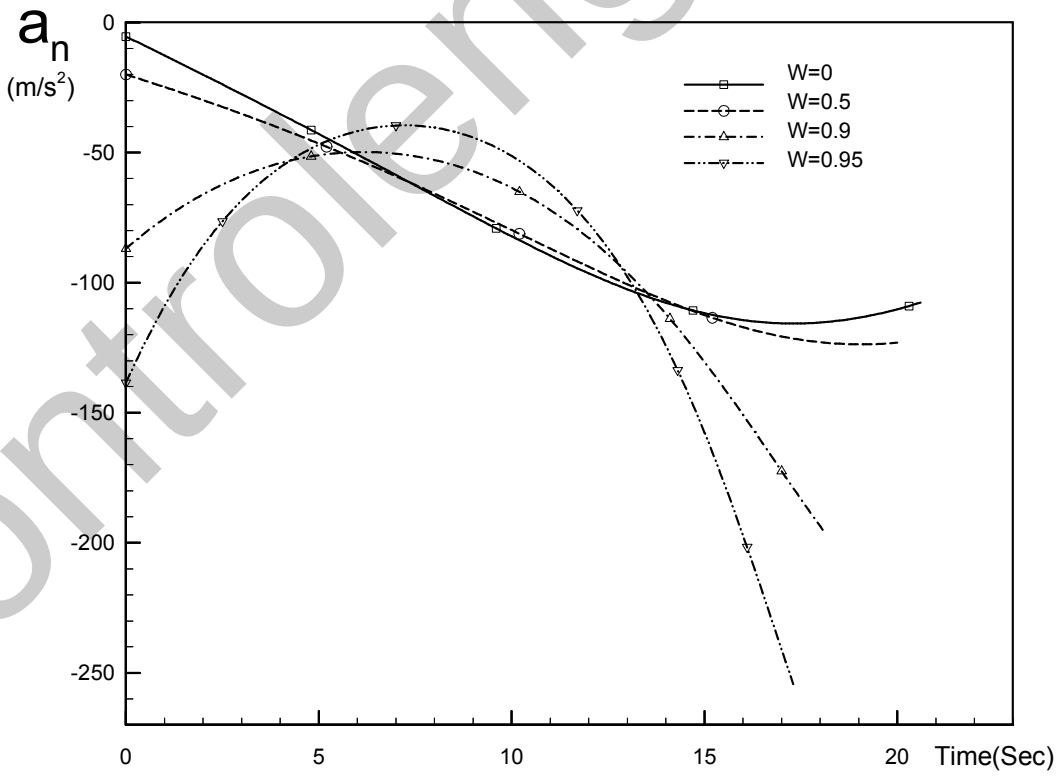
نمودارهای (۵-۱۲) و (۵-۱۳) منحنی‌های مسیر و شتاب این سناریو را نشان می‌دهند سایر اطلاعات در جدول (۳) آورده شده است. همانگونه که از نمودارها پیداست حل مسائل کنترل بهینه در سیستم‌های دینامیکی غیرخطی بسادگی با استفاده از جعبه‌ابزار بهینه‌سازی MATLAB و روش پیشنهاد شده امکان‌پذیر می‌باشد. نتایج بدست آمده کارآئی مطلوب روش پیشنهادی را در حل مسائل پیچیده در مسائل کنترل بهینه در سیستم‌های دینامیکی غیرخطی با استفاده از نرم‌افزار MATLAB را نشان می‌دهد.

جدول (۳) : مقایسهٔ نتایج شبیه‌سازی در سناریوهای مختلف

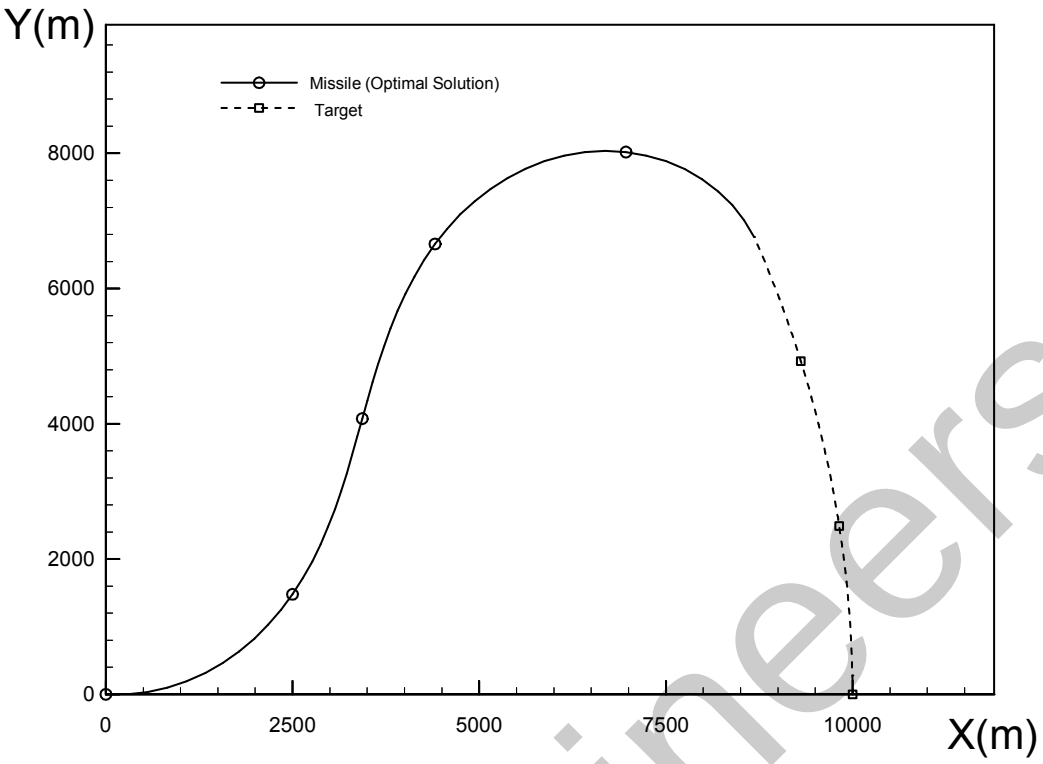
W	ν	θ_0 (deg)	β_0 (deg)	A_T	θ_f (deg)	β_f (deg)	Index (m^2/s^3)	t_f (sec)
0	0.5	0	90	0.5g	-68.35	111.6	147740	23.11
0.99	0.5	0	90	0.5g	-71	109	27955	20.39
0	0.5	90	210	-g	-4.96	184.9	185420	13.37



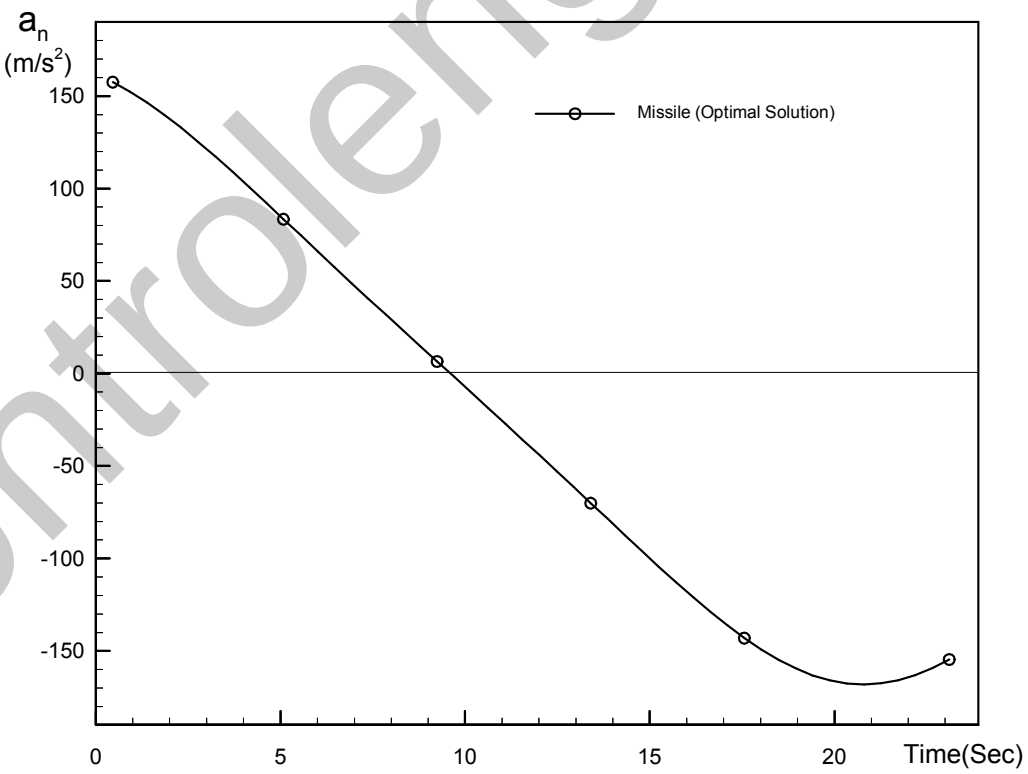
شکل(۵-٦) :منحنی مسیر حرکت موشک و هدف در تعقیب صفحه‌ای با قید انتهائی برای مقادیر مختلف از W



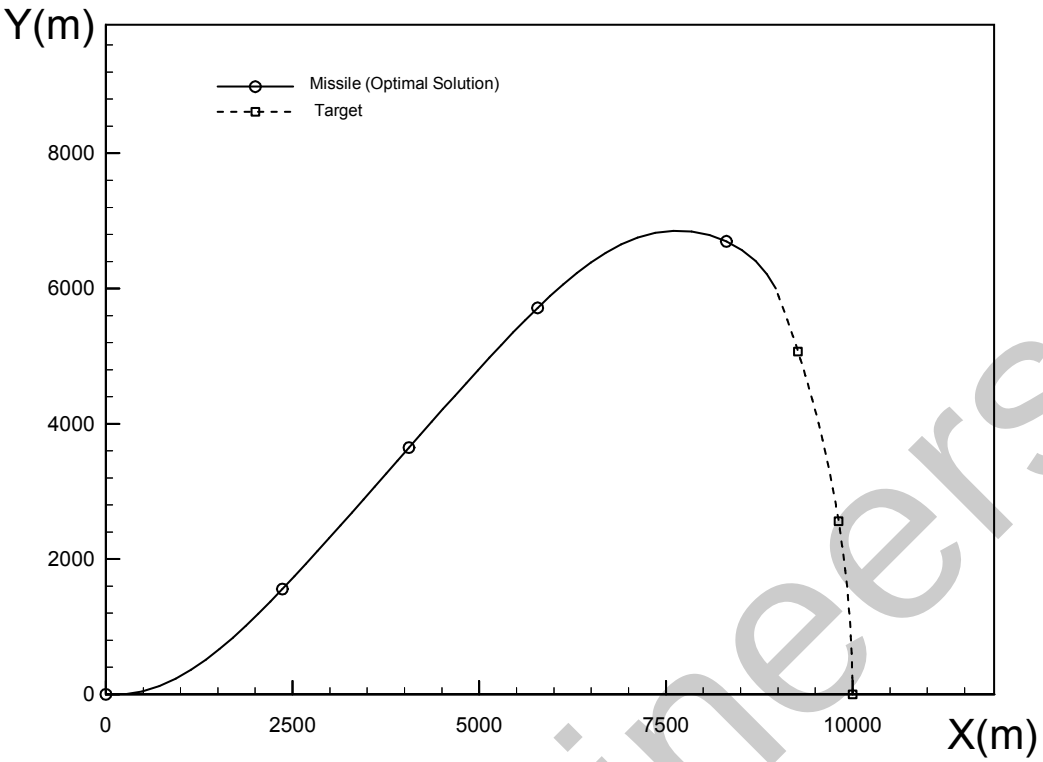
شکل(۵-۷) :منحنی شتاب موشک در تعقیب صفحه‌ای با قید انتهائی برای مقادیر مختلف از W



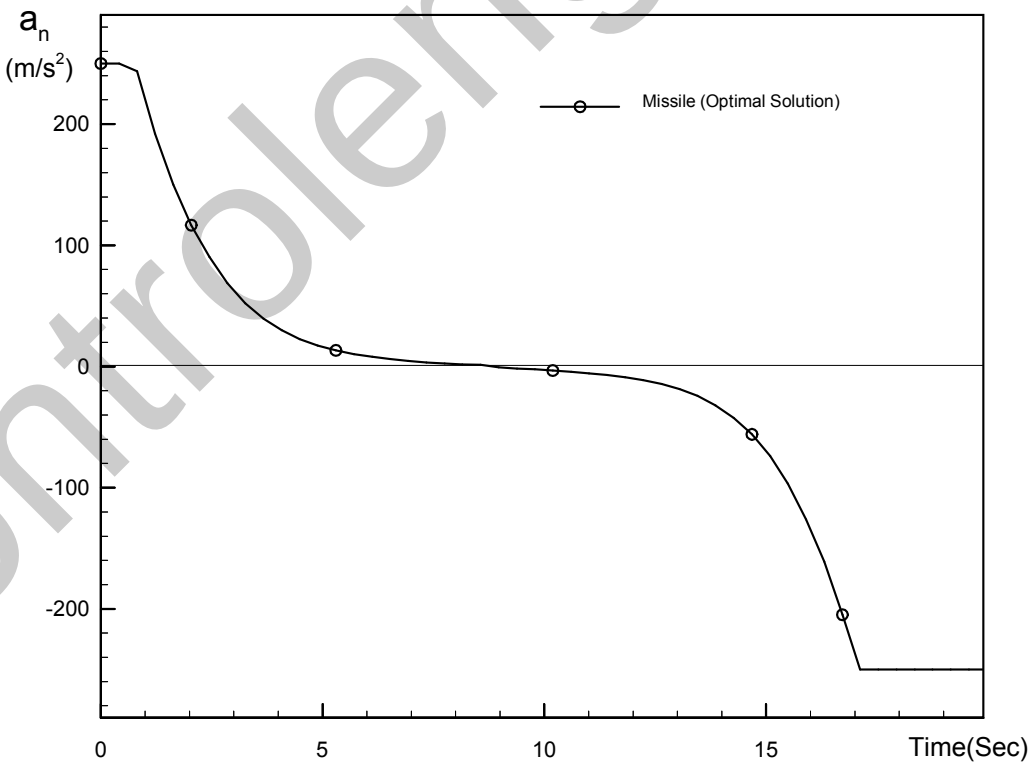
شکل(۵-۸) :منحنی مسیر حرکت موشک و هدف مانورپذیر در تعقیب صفحه‌ای با قید انتهائی



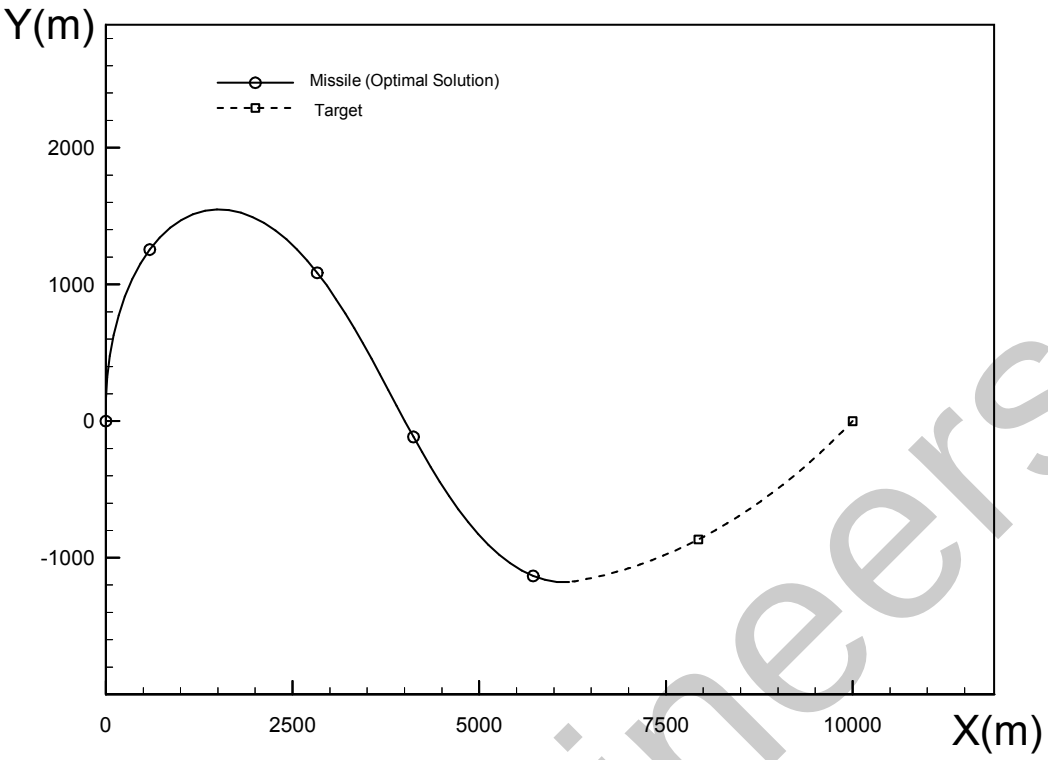
شکل(۵-۹) :منحنی شتاب موشک(اندازهٔ شتاب محدودیت ندارد)



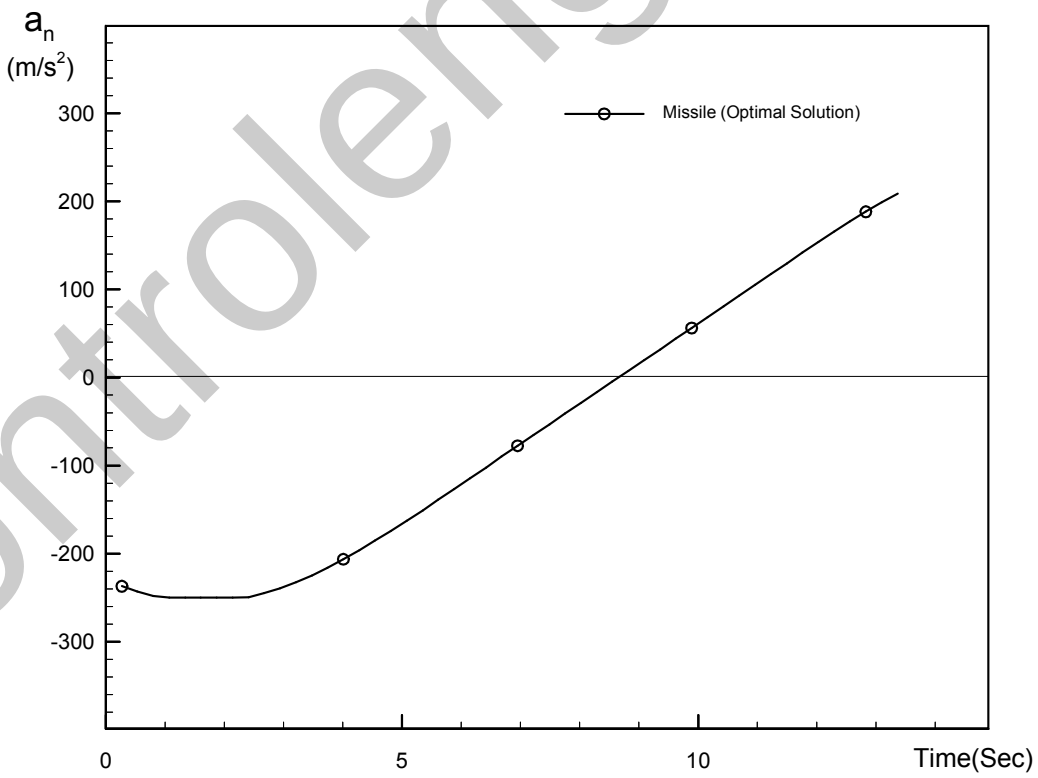
شکل(۵-۱۰) :منحنی مسیر حرکت موشک و هدف مانورپذیر در تعقیب صفحه‌ای با قید انتهائی



شکل(۵-۱۱) :منحنی شتاب موشک(اندازهٔ شتاب محدودیت دارد)



شکل(۵-۱۲) :منحنی مسیر حرکت موشک و هدف مانورپذیر در تعقیب صفحه‌ای با قید انتهائی



شکل(۵-۱۳) :منحنی شتاب موشک(اندازهٔ شتاب محدودیت ندارد)

فهرست برنامه Matlab

```
% This is an Optimal Control Problem for Homing Missile
% in Terminal Guidance
% The performance index is the weighted sum of the final time and the
% integral of the normal acceleration(control effort) squared.
% The three first order ordinary non-linear differential equations
% for Interception model are:
%         dxi/dtou=nu*cos(beta)-cos(theta)
%         deta/dtou=nu*sin(beta)-sin(theta)
%         d(theta)/dtou=alfan
% and for maneuvering target we will have
%         d(beta)/dt=At/vt
%*********************************************************
  echo off; clc; clear;
  global w theta0 beta0 vm vt xt0 alfan_min alfan_max At
  w=0; theta0=90; beta0=120; xt0=10000; vm=600; vt=300;
%  w=1; theta0=90; beta0=120; xt0=10000; vm=600; vt=300;
  At=0*9.81; alfan_max=1000*xt0/(vm*vm); alfan_min=-alfan_max;
  file1='xy.plt'; file2='an.plt';
%*********************************************************
  sav=0;     % sav=1 for saving results, other values for skip saving
  N=10; Nu=1; Nx=3;
  p1=[N Nx Nu];              % Few elements of C
  options(1)=0;              % Display parameter (Default:0). 1 displays
some results.
  options(13)=Nx*(N+2);      % Number of equality constraint
  options(14)=10000;         % Maximum number of iterations
%*********************************************************
% This section make a guess at the X0
  theta0=theta0*pi/180; beta0=beta0*pi/180;
  X0=zeros(N+2,Nx+Nu);X0(N+2,1)=1; X0(1,1)=1; X0(1,2)=0; X0(1,3)=theta0;
%*********************************************************
% Starting to the minimization with the MATLAB optimization toolbox
  flops(0);
  [X, options]=constr('fun',X0, options,[],[],[],p1);
  Flops=flops
  touf=X(N+2,1); Tf=touf*xt0/vm, disp('(Sec)'),
  Index=options(8)*(vm^3)/xt0, disp('(m2/s3)');
  Theta_f=X(N+1,3)*180/pi,disp('(deg)')
  anm=X(1:N+1,Nx+1)*(vm*vm)/xt0;
%*********************************************************
% Plot of simulation results
  Xt(1)=xt0; Yt(1)=0; Xm(1)=0; Ym(1)=0; t=[0]; dt=Tf/N;
  for k=2:N+1
      t(k)=(k-1)*dt;                  beta=beta0+(k-1)*dt*At/vt;
     Xt(k)=Xt(k-1)+dt*vt*cos(beta); Yt(k)=Yt(k-1)+dt*vt*sin(beta);
     Xm(k)=Xt(k)-xt0*X(k,1);         Ym(k)=Yt(k)-xt0*X(k,2);
  end
  Beta_f=beta*180/pi,disp('(deg)')
  subplot(2,1,1); plot(Xm',Ym',Xt',Yt');
  title('Trajectories of Missile and Target');
  xlabel('Down Range(m)'); ylabel('Ordinate(m)');
 subplot(2,1,2); plot(t(1:N),anm(1:N));xlabel('Time(Sec)');
ylabel('an(m/s2)');
%*********************************************************
% Saving of simulation results on ascii files.
  if sav==1
     fid1=fopen(file1,'w');
```

```
        fprintf(fid1,'Zone \r\n'); fprintf(fid1,'%8.1f %8.1f \r\n',[Xm'
Ym']');
        fprintf(fid1,'Zone \r\n'); fprintf(fid1,'%8.1f %8.1f \r\n',[Xt'
Yt']');
     fclose(fid1);
     fid2=fopen(file2,'w');
        fprintf(fid2,'Zone \r\n'); fprintf(fid2,'%6.2f %8.1f \r\n',[t'
anm]');
     fclose(fid2);
  end
disp('Normal Termination of GUIDANCE.M');
-------------------------------------------------------------
function [index,C]=fun(X,p1)
  global w theta0 beta0 vm vt xt0 alfan_min alfan_max At
  nu=vt/vm; Umin=alfan_min; Umax=alfan_max; % Umin<=u<=Umax
%*******************************************************
% Consider the following problem with additional equality and inequality
constraint
%                                    touf
% Minimize  index=w*touf+((1-w)/2)*int(U'*U*dtou)
%                                     0
% Subject to:    dX/dtou-a(x(tou),u(tou))=0
%                X(0)-x0=0
%                X(touf)-xf=0
%                Umin<=u(t)<=Umax
%*******************************************************
%  X = State variable.
%  Nx= Number of state variable.
%  u = Control input.
%  Nu= Number of control input.
%  N = Number of time steps, 0 , dtou , 2dtou , ... , Ndtou(N=touf/dtou).
%*******************************************************
% X=[ X1(0)   X2(0)   ...   XNx(0)  u1(0)    ...   uNu(0)
%     X1(1)   X2(1)   ...   XNx(1)  u1(1)    ...   uNu(1)
%     .       .       ...   .       .                .
%     .       .       ...   .       u1(N-1)  ...   uNu(N-1)
%     X1(N)   X2(N)   ...   XNx(N)  0        ...   0
%     touf    0       ...   0       0        ...   0       ]
%*******************************************************
  N=p1(1); Nx=p1(2); Nu=p1(3); touf=X(N+2,1); dtou=touf/N;
dt=dtou*(xt0/vm);
  index=w*X(N+2,1)+.5*(1-w)*X(1:N,Nx+Nu)'*X(1:N,Nx+Nu)*dtou;
  % State equations or equality constraints
    % dX/dt=a(X(t),u(t))
    % X(1)=xi, X(2)=eta, X(3)=theta
    % d(beta)/dt=(At/vt)
    for k=1:N
        beta=beta0+(k-1)*dt*(At/vt);
        a1=nu*cos(beta)-cos(X(k,3));
        a2=nu*sin(beta)-sin(X(k,3));
        a3=X(k,4);
        % ...
        % a(Nx) = ...
        %
        C(k)     =X(k+1,1)-X(k,1)-a1*dtou;
        C(N+k)   =X(k+1,2)-X(k,2)-a2*dtou;
        C(2*N+k)=X(k+1,3)-X(k,3)-a3*dtou;
        % ...
      % C((Nx-1)*N+k)=X(k+1,Nx)-X(k,Nx)-a(Nx)*dtou;
    end
  % Initial value for X(0) for Nx=3 are:
```

```
  X10=1; X20=0; X30=theta0;
  C(Nx*N+1)=X(1,1)-X10;
  C(Nx*N+2)=X(1,2)-X20;
  C(Nx*N+3)=X(1,3)-X30;
% Final state value for X(f) are:
  NN=Nx*N+Nx;
  X1f=0;          C(NN+1)=X(N+1,1)-X1f;
  X2f=0;          C(NN+2)=X(N+1,2)-X2f;
  X3f=-pi+beta;  C(NN+3)=X(N+1,3)-X3f;
% Inequality Constraints  Umin<=u<=Umax
  NN=Nx*(N+2);
  for j=1:Nu
      for k=1: N
          C(NN+(j-1)*N+k)=X(k,Nx+j)-Umax;
      end
  end
  NN=NN+N*Nu;
  for j=1:Nu
      for k=1:N
          C(NN+(j-1)*N+k)=Umin-X(k,Nx+j);
      end
  end
% touf>=0
  C(NN+N*Nu+1)=-X(N+2,1);
```

تکلیف T11: مسائل کنترل بهینه با زمان انتهائی آزاد(حل تحلیلی و عددی)

۱- مطلوبست یافتن معادلهٔ منحنی‌ای را که فاصلهٔ بین خط $x_0 = t_0$ و سهمی $x_f^2 - t_f + 1 = 0$ را کمینه نماید. معادلهٔ حالت را $\dot{x} = u$ در نظر بگیرید. نشان دهید که[1]:

$$u = -1 \ , \ t_0 = x_0 = \frac{7}{8} \ , \ t_f = \frac{5}{4} \ , \ x_f = \frac{1}{2}$$

۲- حل عددی کنترل بهینه در تعقیب صفحه‌ای بدون قید انتهائی (پاسخ حلقه‌باز) را با استفاده از دستور FMINCON بدست آورید. هندسهٔ استفاده شده در مسئله تعقیب صفحه‌ای در شکل (۱) نمایش داده شده است مختصات **XY** نشانگر یک مرجع اینرسی است. اندازهٔ سرعت موشک ثابت بوده و با زاویه اولیهٔ[2] θ_0 نسبت به محور **X** شلیک می‌شود. جهت سرعت $\theta(t)$ به وسیلهٔ شتاب $a_n(t)$ که عمود بر جهت سرعت است تغییر می‌کند. هدف بدون شتاب بوده و لذا اندازهٔ سرعت و زاویهٔ آن در طول مسیر ثابت باقی می‌ماند. با فرض $x = x_T - x_M \ , \ y = y_T - y_M$ معادلات حرکت در صفحه عبارتند از:

$$\dot{x} = V_T \cos\beta - V_M \cos\theta \qquad \text{(معادلات غیرخطی حالت)} \tag{۱}$$

$$\dot{y} = V_T \sin\beta - V_M \sin\theta \tag{۲}$$

$$\dot{\theta} = \frac{a_n}{V_M} \tag{۳}$$

شرایط اولیه عبارتند از:

$$t_0 = 0 \ , \ \theta(t_0) = \theta_0 \ , \ x_T(t_0) = X_0 \ , \ x_M(t_0) = 0 \ , \ y_T(t_0) = Y_0 \ , \ y_M(t_0) = 0 \tag{٤}$$

اصابت در زمان انتهائی t_f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x(t_f) = 0 \ , \ y(t_f) = 0 \tag{۵}$$

شاخص عملکرد شامل انتگرال مجذور شتاب (فرمان کنترل) می‌باشد که بایستی حداقل گردد و به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

1. Hull, David. G., *Optimal Control Theory for Applications*, Springer, 2003. Problem 15.2, Page 273
2. Off-Boresight Angle

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} a_n^2 \, dt \qquad (٦)$$

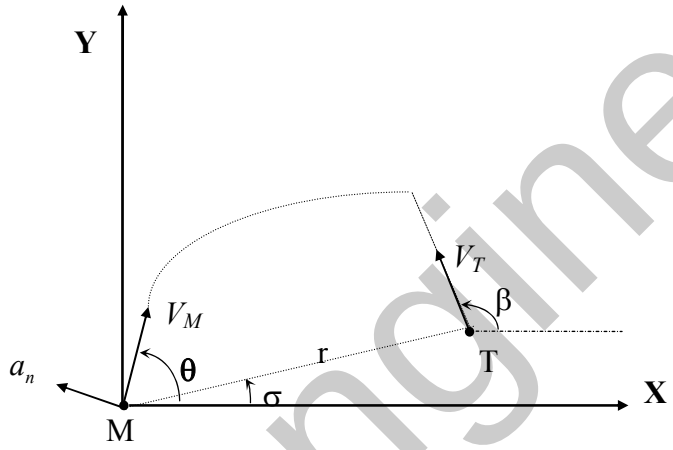
برای حل عددی یک سناریو با ورودی‌های زیر شبیه‌سازی می گردد:

$$\theta_0 = 90^o,\ \beta = 120^o, X_0 = 10000m\ ,\ Y_0 = 0m,\ V_M = 600m/s,\ V_T = 300m/s$$

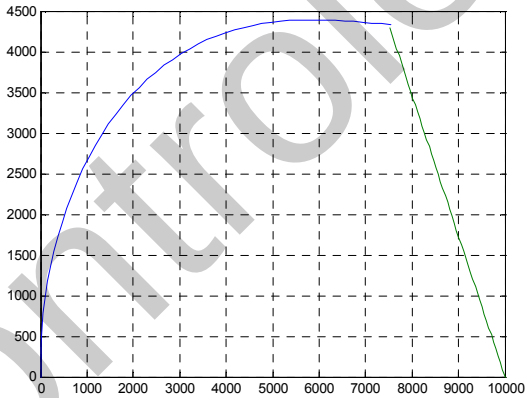
نشان دهید که در هنگام اصابت:

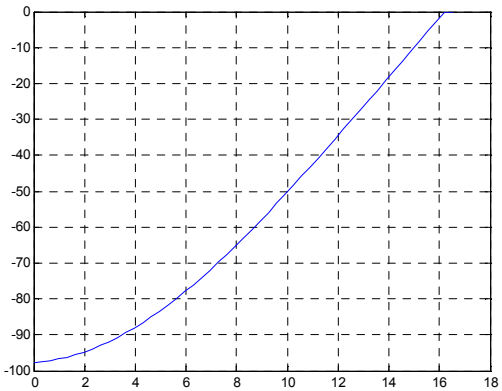
$$t_f = 16.55\sec\ ,\ \ \theta_f = -4.8\deg\ \ ,\ \ J = 36240\frac{m^2}{S^2}$$

مسیر حرکت موشک و هدف از ابتدا تا هنگام اصابت و همچنین شتاب موشک نسبت به زمان را ترسیم نمایید.



شکل ۱ : هندسهٔ موشک و هدف در تعقیب صفحه‌ای





مسیر حرکت موشک و هدف و منحنی شتاب موشک بر حسب زمان از ابتدا تا هنگام اصابت

تکلیف T12: بدست آوردن پاسخ حلقه بسته در مسائل کنترل بهینه

شاخص عملکرد زیر را در نظر بگیرید[1]:

$$J = \int_0^{\infty} [x^2(t) + u^2(t)]dt$$

معادله حالت (قید دیفرانسیلی مرتبه اول) عبارتست از:

$$\dot{x}(t) = -3x(t) + u(t)$$

که در آن $x(0) = 1$ و حالت نهائی $x(\infty) = 0$ می‌باشد. نشان دهید که:

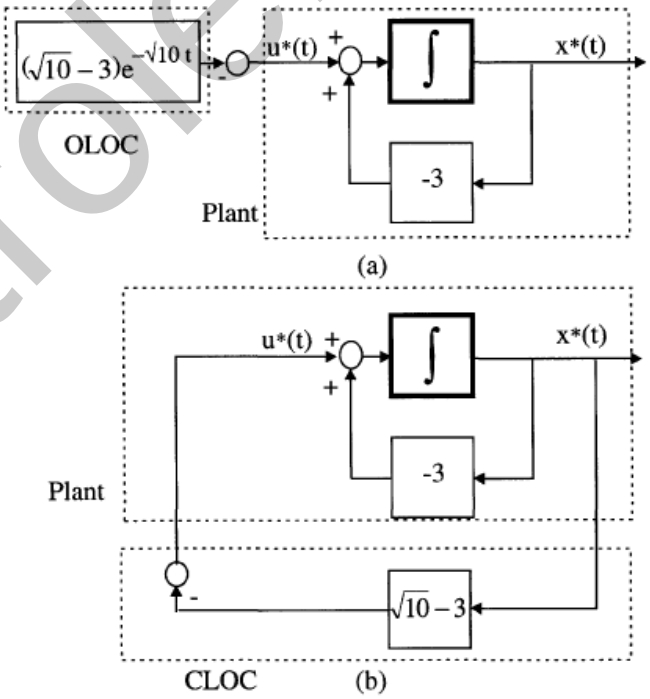
الف) حل حلقه‌باز برای این سیستم بصورت زیر در می‌آید:

$$u^*(t) = -(\sqrt{10} - 3)e^{-\sqrt{10}\,t}$$

ب) حل حلقه‌بسته عبارت است از:

$$u^*(x) = -(\sqrt{10} - 3)x$$

در شکل زیر حالت (a) بلوک دیاگرام حل حلقه باز و شکل (b) بلوک دیاگرام حل حلقه بسته را نمایش می‌دهند.



1. Naidu, D. S., Optimal Control Systems, Graduate Level Textbook, CRC Press, 2003. Page 141

تکلیف T13:حل عددی مسئله واندرپل[1]

۱- مسئله‌ی واندرپل واداشته زیر را در نظر بگیرید[2]. این مسئله نشانگر یک سیستم دینامیکی غیرخطی است و لذا حل تحلیلی برای این مسئله پیچیده بوده و بایستی از طریق عددی حل گردد. مسئله را با کمک جعبه ابزار بهینه‌سازی Matlab به روش عددی با استفاده از دستور FMINCON حل کرده و منحنی‌های متغیرهای حالت و فرمان کنترل را در طول زمان ترسیم و مقدار نهایی شاخص عملکرد را محاسبه نمایید دینامیک سیستم عبارت‌است از:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + (1 - x_1^{\,2})x_2 + u \end{cases}$$

شرایط اولیه و مقدار نهایی نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند:

شرایط اولیه $x_1(0) = 1 \quad , \quad x_2(0) = 0$

مقدار نهایی $x_2(5) - x_1(5) = 1$

مسئله کنترل بهینه، کمینه کردن شاخص عملکرد زیر به صورتی که معادلات دینامیکی بالا ارضا شوند، می‌باشد:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^5 \left(x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)\right)dt$$

در گزارش ارائه شده لیست برنامه کامپیوتری به همراه پرینت منحنی‌ها الزامی می باشد.(محور افقی منحنی‌ها بر حسب زمان ترسیم شوند)

۲- مسئله حل عددی کنترل بهینه در برخورد صفحه‌ای با قید انتهائی را مجدداً با استفاده از دستور FMINCON حل کنید. فهرست برنامه Matlab با دستور CONSTR از طریق ایمیل ارسال خواهد شد.

---

1. The forced VanDerPol Oscillator
2. Milam & Mushambi & Murray., A New Computational Approach to Real-Time Trajectory, Generation for Constrained Mechanical Systems, Proceedings of the 39" IEEE. Conference on Decision and Control Sydney, Australia December, 2000, P845-851

۳- حل عددی کنترل بهینه در تعقیب صفحه‌ای بدون قید انتهائی(پاسخ حلقه‌باز) را با استفاده از دستور FMINCON بدست آورید. هندسهٔ استفاده شده در مسئله تعقیب صفحه‌ای در شکل (۱) نمایش داده شده است مختصات **XY** نشانگر یک مرجع اینرسی است. اندازهٔ سرعت موشک ثابت بوده و با زاویه اولیهٔ[1] θ_0 نسبت به محور **X** شلیک می‌شود. جهت سرعت $\theta(t)$ به وسیلهٔ شتاب $a_n(t)$ که عمود بر جهت سرعت است تغییر می‌کند. هدف بدون شتاب بوده و لذا اندازهٔ سرعت و زاویهٔ آن در طول مسیر ثابت باقی می‌ماند. با فرض $x = x_T - x_M$, $y = y_T - y_M$ معادلات حرکت در صفحه عبارتند از:

$$\dot{x} = V_T \cos\beta - V_M \cos\theta \qquad \text{(معادلات غیرخطی حالت)} \tag{۱}$$

$$\dot{y} = V_T \sin\beta - V_M \sin\theta \tag{۲}$$

$$\dot{\theta} = \frac{a_n}{V_M} \tag{۳}$$

شرایط اولیه عبارتند از:

$$t_0 = 0 \ , \ \theta(t_0) = \theta_0 \ , \ x_T(t_0) = X_0 \ , \ x_M(t_0) = 0 \ , \ y_T(t_0) = Y_0 \ , \ y_M(t_0) = 0 \tag{٤}$$

اصابت در زمان انتهائی t_f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x(t_f) = 0 \ , \ y(t_f) = 0 \tag{٥}$$

شاخص عملکرد شامل انتگرال مجذور شتاب (فرمان کنترل) می‌باشد که بایستی حداقل گردد و به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} a_n^2 \, dt \tag{٦}$$

برای حل عددی یک سناریو با ورودی‌های زیر شبیه‌سازی می‌گردد:

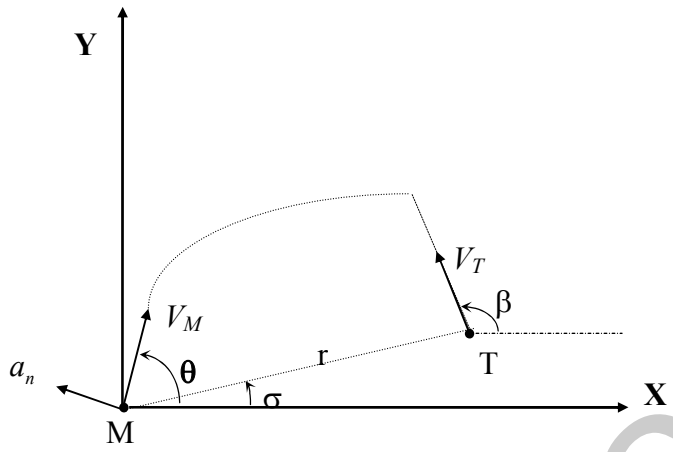
$$\theta_0 = 90^o, \ \beta = 120^o, X_0 = 10000m \ , \ Y_0 = 0m, \ V_M = 600m/s, \ V_T = 300m/s$$

نشان دهید که در هنگام اصابت:

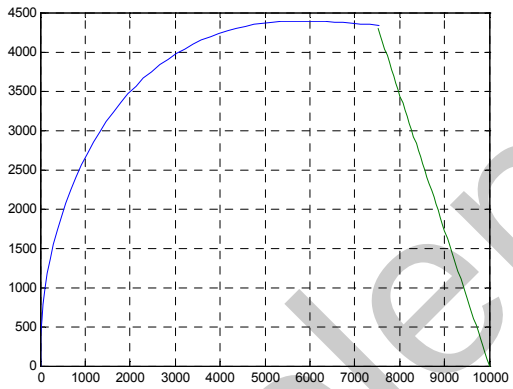
1. Off-Boresight Angle

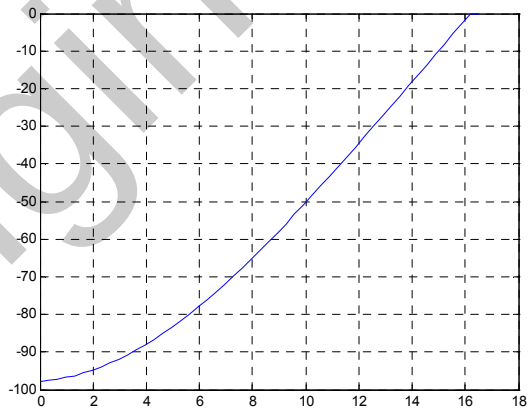
$$t_f = 16.55\,\text{sec}\ ,\ \ \theta_f = -4.8\,\text{deg}\ ,\ \ J = 36240\frac{m^2}{S^2}$$

مسیر حرکت موشک و هدف از ابتدا تا هنگام اصابت و همچنین شتاب موشک نسبت به زمان را ترسیم نمایید.



شکل ۱ : هندسهٔ موشک و هدف در تعقیب صفحه‌ای





مسیر حرکت موشک و هدف و منحنی شتاب موشک بر حسب زمان از ابتدا تا هنگام اصابت

فصل ششم:

کنترل بهینه با قیود ناتساوی

٦-١- مسائل با ورودی(فرمان کنترل) مقید

تا اینجا فرمان کنترل بعنوان یک تابع صریح از متغیرهای حالت و کمک حالت بدست آمد. در حالتی که توابع $f(x,u,t)$ و $L(x,u,t)$ بصورت هموار(مشتق پذیر)[1] فرض شوند، آنگاه با حل مسئله با شرایط مرزی در دو نقطهٔ مجزا (TPBVP) فرمان کنترل هم تابع هموار از زمان بدست خواهد آمد. در این فصل مطالب پیشین به حالتی که در آن متغیرهای حالت و فرمان کنترل مقید (در محدودهٔ مجاز) باشند[2] بسط داده می‌شود.

۶-۲- اصل کمینه پونتریاگین[3]

معادلهٔ حالت زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x} = f(x,u,t) \qquad (۱)$$

شاخص عملکرد بصورت زیر می‌باشد:

$$J(t_0) = \phi(x(T),T) + \int_{t_0}^{T} L(x,u,t)dt \qquad (۲)$$

$x(t_0)$ داده شده و حالت انتهائی بایستی بصورت زیر ارضاء گردد:

$$\psi(x(T),T) = 0 \qquad (۳)$$

در صورتیکه فرمان کنترل نامقید باشد مسئله با کمک روابط بدست آمده در فصول قبلی قابل حل است بطوری که شرط بهینه‌گی از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \qquad (٤)$$

که در آن:

$$H(x,u,\lambda,t) = L(x,u,t) + \lambda^T f(x,u,t) \qquad (٥)$$

1. Smoothness
2. Constrained Input Problem, Lewis, Frank. L., & Syrmos, Vassilis, L., *Optimal Control*, 2ed, John Wiley & Sons Inc, 1995. Page 281
3. Pontryagin's Minimum Principle

حال فرض شود که بایستی فرمان کنترل در محدودهٔ مجاز[1] قرار گیرد، مثلاً بدلیل برخی محدودیت‌ها اندازه آن کمتر از مقدار مشخصی مقید شود. در این حالت در سال ۱۹۶۲ توسط پونتریاگین و همکاران نشان داده شد که فرمولهای بدست آمده در فصل قبل (جدول زیر) هنوز هم برقرار می‌باشند:

Continuous Nonlinear Optimal Controller with Function of Final State Fixed		
1	System Model (State Equation)	$\dot{x} = f(x,u,t)\ ,\ t \ge t_0\ ,\ t_0$ fixed
2	Performance Index	$J(t_0) = \phi(x(T),T) + \int_{t_0}^{T} L(x,u,t)dt$
3	Final-State Constraint	$\psi(x(T),T) = 0$
4	Hamiltonian	$H(x,u,\lambda,t) = L(x,u,t) + \lambda^T f(x,u,t)$
5	Costate Equation	$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\left(\frac{\partial f^T}{\partial x}\lambda + \frac{\partial L}{\partial x}\right),\quad t \le T$
6	Optimality Condition	$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial L}{\partial u} + \frac{\partial f^T}{\partial u}\lambda$
7	Initial Condition	$x(t_0)$ given
8	Boundary Condition	$\left(\phi_x + \psi_x^T \nu - \lambda\right)^T\Big\|_T dx(T) + \left(\phi_t + \psi_t^T \nu + H\right)\Big\|_T dT = 0$

لیکن معادله ایستائی $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ را بایستی بوسیلهٔ شرط عمومی‌تر زیر جایگزین نمود:

$$H(x^*,u^*,\lambda^*,t) \le H(x^*,u^* + \delta u,\lambda^*,t),\quad \text{all admissible } \delta u \qquad (۶)$$

که در آنجا علامت ستاره (*) مربوط به مقادیر بهینه می‌باشد. یعنی هر تغییر در کنترل بهینه در زمان t در حالی که متغیر حالت و کمک حالت مقدار بهینه خودشان را در زمان t حفظ نمایند آنگاه مقدار هامیلتونین H افزایش خواهد یافت.این شرط را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$H(x^*,u^*,\lambda^*,t) \le H(x^*,u,\lambda^*,t),\quad \text{all admissible } u \qquad (۷)$$

1. Admissible Region

شرط بهینه بودن (۷) بنام **اصل کمینه پونتریاگین** نامیده می‌شود. این بدان معنی است که هامیلتونین بایستی روی تمامی مقادیر مجاز u برای مقادیر بهینه متغیر حالت و کمک حالت کمینه شود. ما بزودی سودمندی اصل کمینه فوق را خواهیم دید. مخصوصاً توجه شود در حالت بهینه همچنین خواهیم داشت:

$$H(x^*,u^*,\lambda^*,t) \le H(x,u,\lambda,t) \qquad (۸)$$

مثال ۱: بهینه‌سازی با قیود:

فرض کنید که می‌خواهیم شاخص عملکرد زیر را کمینه نماییم:

$$L = \frac{1}{2}u^2 - 2u + 1 \qquad (۹)$$

بطوری که داریم:

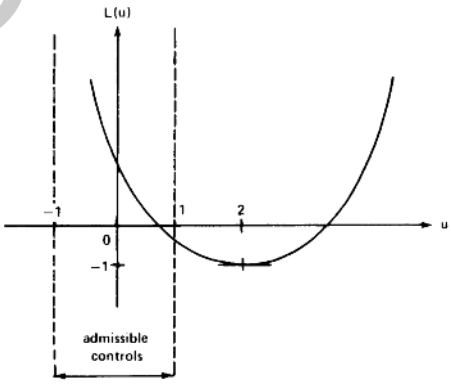
$$|u| \le 1 \qquad (۱۰)$$

شکل (۱) را ملاحظه نمایید. اصل کمینه پونتریاگین می گوید:

$$L(u^*) \le L(u), \quad \text{all admissible } u \qquad (۱۱)$$

لذا بطور واضح نشان می‌دهد که مقدار بهینه u عبارتست از:

$$u^* = 1 \qquad (۱۲)$$



شکل ۱: بهینه سازی تحت فرمان کنترل مقید

مقدار بهینهٔ L عبارتست از:

$$L^* = L(1) = -\frac{1}{2} \qquad (۱۳)$$

مقدار کمینهٔ نامقید از حل رابطهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial L}{\partial u} = u - 2 = 0 \qquad (۱٤)$$

و از آنجا خواهیم داشت:

$$u = 2 \qquad (۱٥)$$

و:

$$L(2) = -1 \qquad (۱٦)$$

ملاحظه می‌شود که $L(2) < L(1)$ ولی $u = 2$ داخل محدودهٔ قابل قبول جواب یعنی $|u| \le 1$ قرار ندارد.

۶-۳- کنترل بنگ-بنگ[1]

در اینجا می‌خواهیم مسئله خطی کمترین زمان را در حالتی که فرمان کنترل از لحاظ اندازه مقید است بررسی نماییم. معادله حالت در دستگاه خطی بصورت زیر است:

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad (۱۷)$$

شاخص عملکرد نیز بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$J = \int_0^T 1\, dt \qquad (۱۸)$$

زمان نهائی T آزاد است. فرض شود که اندازه فرمان کنترل بایستی برای تمامی $t \in [t_0, T]$ در محدوده مجاز زیر قرار گیرد:

$$|u(t)| \le 1 \qquad (۱۹)$$

این قید بدان معنی است که اندازهٔ هر یک از m مولفه بردار $u(t)$ نبایستی از یک بزرگتر شود.

1. Bang-Bang Control

مسئلهٔ کنترل بهینه بدین صورت تعریف می‌شود که فرمان کنترل $u(t)$ برای تمامی $t \in [t_0, T]$ در محدوده مجاز $|u(t)| \le 1$ طوری بدست آورید که شاخص عملکرد J را کمینه نموده و $x(t_0)$ را به سمت $x(T)$ رسانده و ضمناً تابع $\psi(x(T), T) = 0$ مفروض را هم ارضاء نماید.

شرط $|u(t)| \le 1$ در بسیاری از مسائلی که در آن اندازهٔ فرمان کنترل بوسیلهٔ ملاحظات فیزیکی محدود می‌شود بوجود می‌آید. بعنوان مثال نیروی رانش(تراست) یک راکت دارای یک مقدار حداکثر می‌باشد.

معمولاً مسائل کمترین زمان برای سیستم‌های غیرخطی مطرح می‌شوند دلیل آن در ادامه مشخص می‌شود. تابع هامیلتونی برای مسئله اخیر عبارتست از:

$$H = L + \lambda^T f = 1 + \lambda^T (Ax + Bu) \qquad (۲۰)$$

اگر ما بطور ساده از شرط ایستائی استفاده کنیم خواهیم داشت:

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = B^T \lambda \qquad (۲۱)$$

در این رابطه u ظاهر نخواهد شد. این بدان علت است که تابع هامیلتون تابع خطی از u است. واضح است که برای کمینه نمودن H بایستی $u(t)$ را طوری انتخاب کنیم که تا جائی که ممکن است مقدار $\lambda^T(t) Bu(t)$ کوچک شود(مقدار کوچک بدان معنی است که در روی خط محور حقیقی تا جائی که ممکن است به سمت چپ برود بعبارت دیگر $-\infty$ کوچکترین مقداری است که $\lambda^T Bu$ می‌تواند اختیار کند). اگر هیچ قیدی روی $u(t)$ نباشد آنگاه متغیر کنترل مقدار بینهایت مثبت یا منفی را اختیار خواهد نمود. به این دلیل برای مسائل کمترین زمان در سیستم‌های خطی سعی می‌شود قیدی از لحاظ اندازه روی فرمان کنترل اعمال شود. در مسائل کمترین زمان معمولاً اگر قیدی روی فرمان کنترل نباشد اندازه فرمان کنترل به سمت بی‌نهایت میل می‌کند و تامین این فرمان بدلیل محدودیت‌های موجود در سیستم، از لحاظ فیزیکی ممکن نیست. به همین دلیل در اینگونه مسائل، علی‌الخصوص مسائلی که معادلات حالت آنها خطی هستند معمولاً فرمان کنترل در مسئله

بصورت مقید بیان می‌شود. در اینجا مثال ساده‌ای را جهت احساس نمودن علت فرمان کنترل مقید را ارائه می‌دهیم:

مثال ۱: مسئله برخورد یک بعدی[1]

با توجه به شکل (۲) یک هواپیمای تعقیب‌گر از حالت سکون و به فاصلهٔ h در پشت هدف شروع به حرکت می‌کند. هدف نیز از حالت سکون شروع به حرکت نموده و دارای شتابی که بصورت رابطهٔ زیر توصیف می‌شود می‌باشد.

$$y_T(t) = h + 0.1t^3 \qquad (۲۲)$$

شکل ۲: یک مسئله تعقیب یک بعدی

معادلات حرکت تعقیب‌گر(معادلات حالت) طبق قوانین نیوتن عبارتند از:

$$\dot{y} = \upsilon \qquad (۲۳)$$

$$\dot{\upsilon} = u \qquad (۲٤)$$

که در آن $\upsilon(t)$ سرعت تعقیب‌گر و $u(t)$ شتاب آن می‌باشد. اندازهٔ شتاب طبق رابطهٔ زیر مقید(محدود) شده است:

$$|u(t)| \le 1 \qquad (۲۵)$$

در مسئله کمترین زمان میخواهیم فرمان کنترل را طوری معین نماییم که شاخص عملکرد زیر کمینه شود.

$$J = \int_0^T 1\, dt \qquad (۲٦)$$

1. A One-Dimensional Intercept Problem (Kirk 1970)

واضح است که این شاخص عملکرد هنگامی کمینه خواهد شد که فرمان کنترل در طول مسیر حداکثر مقدار خود را دارا باشد. بنابر این:

$$u^*(t) = 1 \qquad (۲۷)$$

با استفاده از این فرمان کنترل و حالتهای اولیه $\upsilon(0) = 0$, $y(0) = 0$ از معادلات حالت (۲۳) و (۲٤) انتگرال‌گیری نموده و به روابط زیر می‌رسیم:

$$\upsilon(t) = t \qquad (۲۸)$$

$$y(t) = \frac{t^2}{2} \qquad (۲۹)$$

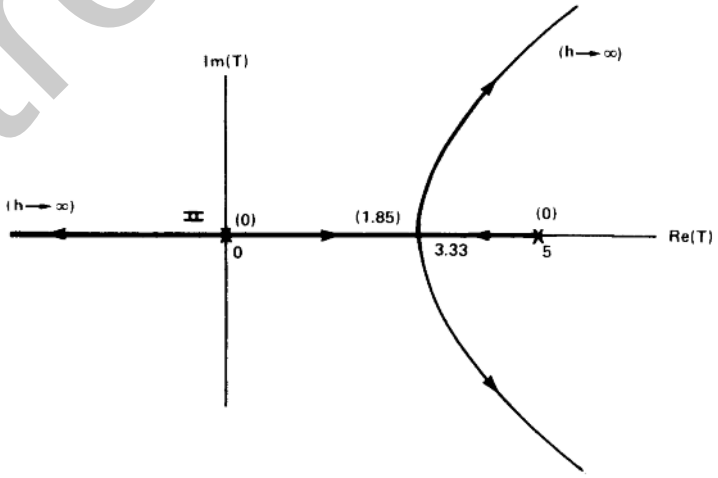
در هنگام برخورد موقعیت هدف y_T و موقعیت تعقیب‌گر y یکی خواهند شد:

$$y_T(T) = y(T) \qquad (۳۰)$$

لذا T بایستی رابطهٔ زیر را ارضاء کند:

$$0.1T^3 - 0.5T^2 + h = 0 \qquad (۳۱)$$

مکان هندسی ریشه‌های معادله اخیر برای مقادیر $0 \le h < \infty$ در شکل(۳) نشان داده شده است. مقادیر h داخل پرانتز ذکر شده‌اند.



شکل ۳ : مکان هندسی ریشه‌های معادلهٔ زمان نهائی

اگر بخواهیم در مسئله تعقیب اصابت رخ دهد، بایستی معادله (۲۶) ریشه حقیقی مثبت داشته باشد و این هنگامی که $h \le 1.85$ باشد صورت می‌پذیرد. اگر تعقیب‌گر در شروع حرکت فاصله بزرگتری نسبت به هدف داشته باشد رسیدن تعقیب‌گر به هدف و اصابت به آن امکان‌پذیر نخواهد بود. برای $h > 1.85$ معادله (۲۶) دو ریشهٔ حقیقی مثبت خواهد داشت. ریشه کوچکتر هنگامی است که تعقیب‌گر برای نخستین بار به هدف رسیده و از آن جلو میزند و ریشهٔ بزرگتر هنگامی است که هدف مجدداً به تعقیب‌گر رسیده و از آن جلو می‌زند.

از این مثال ما دو ویژگی مهم مسائل خطی کمترین زمان را می‌آموزیم، نخست آنکه مسئله ممکن است جواب نداشته باشد و اگر جواب وجود داشته باشد فرمان کنترل بهینه حداکثر مقدار خود(با علامت مثبت یا منفی) را در تمامی طول مسیر اختیار خواهد نمود. هنگامی که کنترل مقدار مرزی محدودهٔ مجاز خود را اختیار می‌کند گفته می‌شود که به حالت اشباع[1] رسیده است.

حال می‌خواهیم نشان دهیم که چگونه می‌توان قانون کنترل کمترین زمان در مسائل خطی را بدست آورد.

برای مسئله فرموله شده در (۱۷) تا (۱۹) تابع هامیلتونی بوسیلهٔ (۲۰) داده می‌شود. بر طبق اصل کمینه پونتریاگین $H(x^*,u^*,\lambda^*,t) \le H(x^*,u,\lambda^*,t),\ \text{all admissible } u$ می‌باشد لذا فرمان کنترل بهینهٔ $u^*(t)$ بایستی رابطهٔ زیر را ارضاء نماید:

$$1+(\lambda^*)^T(Ax^*+Bu^*) \le 1+(\lambda^*)^T(Ax^*+Bu) \qquad (۳۲)$$

اکنون ما به اهمیت داشتن متغیر حالت و کمک حالت در هر دو طرف ناتساوی پی می‌بریم. به این دلیل ما می‌توانیم بگوییم که برای بهینه بودن، کنترل $u^*(t)$ بایستی رابطه زیر را برای تمامی $u(t)$ مجاز ارضاء نماید:

$$(\lambda^*)^T Bu^* \le (\lambda^*)^T Bu \qquad (۳۳)$$

این شرط به ما اجازه می‌دهد که $u^*(t)$ را بر حسب متغیر کمک حالت بیان نماییم. برای مشاهده این موضوع ابتدا اجازه دهید ما حالت تک ورودی را مورد بحث قرار دهیم.

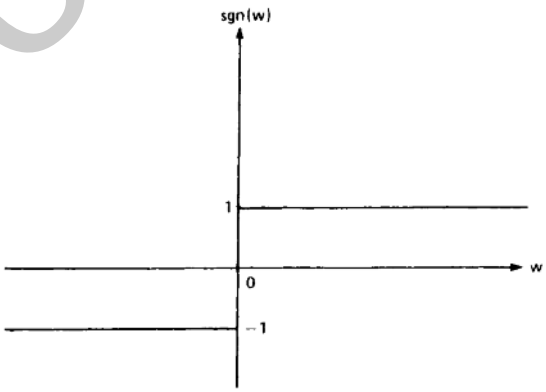
1. Saturated

فرض کنید $u(t)$ یک اسکالر باشد و b نشانگر بردار ورودی باشد در این حالت آسان است که $u^*(t)$ را برای کمینه نمودن مقدار $\lambda^T(t)bu(t)$ انتخاب نماییم(توجه شود که کمینه کردن بدان معنی است که ما می‌خواهیم $\lambda^T(t)bu(t)$ تا جائی که ممکن است مقداری نزدیک به $-\infty$ اختیار کند). اگر $\lambda^T(t)b$ مثبت باشد آنگاه بایستی $u(t)=-1$ انتخاب شود تا بزرگترین مقدار منفی ممکن برای $\lambda^T(t)bu(t)$ بدست آید. به عبارت دیگر اگر $\lambda^T(t)b$ منفی باشد بایستی فرمان کنترل بزرگترین مقدار مجاز یعنی $u(t)=1$ را اختیار کند تا بزرگترین مقدار منفی ممکن برای $\lambda^T(t)bu(t)$ بدست آید. اگر $\lambda^T(t)b$ در لحظه‌ای از زمان صفر باشد فرمان کنترل $u(t)$ هر مقداری از زمان را می‌تواند اختیار کند چونکه در این حالت $\lambda^T(t)bu(t)$ برای تمامی مقادیر $u(t)$ صفر خواهد شد.

رابطهٔ بین کنترل بهینه و کمک حالت را می‌توان بصورت نظام‌مند با تابع علامت $\mathrm{sgn}(w)$[1] بصورت زیر تعریف نمود:

$$\mathrm{sgn}(w)=\begin{cases}1, & w>0\\ \text{indeterminate}, & w=0\\ -1, & w<0\end{cases} \qquad (۳٤)$$

شکل زیر نمایشی از این تابع را نشان می‌دهد:



شکل ٤ : نمایش تابع علامت

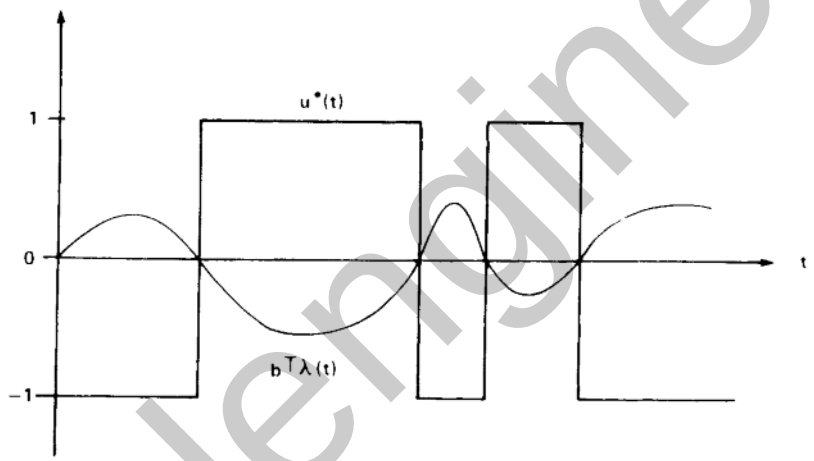
1. Signum Function

بنابراین فرمان کنترل بوسیلهٔ رابطهٔ زیر داده خواهد شد:

$$u^*(t) = -\mathrm{sgn}(b^T \lambda(t)) \qquad (۳۵)$$

در سیستم‌هائی که معادلات حالت خطی و شاخص عملکرد درجه دوم باشد نشان داده می‌شود که فرمان کنترل بهینه از رابطهٔ $u(t) = -R^{-1}B^T\lambda(t)$ بدست خواهد آمد[1]. لذا رابطهٔ (۳۵) را با این رابطه می‌توان مورد مقایسه قرار داد.

کمیت $b^T\lambda(t)$ بنام تابع راهگزین یا سویچینگ[2] نامیده می‌شود. یک تابع سوئیچینگ نمونه و فرمان کنترل که آنرا تعیین می‌کند در شکل زیر نمایش داده شده است.



شکل ۵ : نمایش تابع سوئیچینگ ساده و کنترل بهینه مربوط به آن

هنگامی که تابع سوئیچینگ تغییر علامت می‌دهد کنترل نیز از یک مقدار حداکثری به مقدار حداکثری با علامت مخالف تعویض خواهد شد. در شکل (۵) چهار بار این تغییر مشاهده می‌گردد. در مسائل خطی با شاخص عملکرد کمترین زمان، فرمان کنترل بهینه همواره در حالت اشباع قرار گرفته و بین مقادیر حداکثری مثبت و منفی جابجا می‌شود. این عمل کنترل بنگ بنگ[3] نامیده می‌شود.

1. Lewis, Frank. L., & Syrmos, Vassilis, L., *Optimal Control*, 2ed, John Wiley & Sons Inc, 1995. Page 162
2. Switching Function
3. Bang-Bang Control

تکلیف T14: کنترل بهینه با قیود ناتساوی

۱- مسئله نوسان کنندهٔ هارمونیک[1] زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

می‌خواهیم در کمترین زمان T در صفحه فازی از نقطهٔ $x(0)=5$, $\dot{x}(0)=1$ به مبدا برسیم. در صورتی که اندازهٔ شتاب طبق رابطهٔ $|u(t)| \le 1$ مقید(محدود) شده باشد، مطلوبست:

الف) ترسیم منحنی فرمان کنترل $u(t)$ نسبت به زمان $(0 \le t \le T)$

ب) ترسیم منحنی متغیر حالت $x(t)$ نسبت به $\dot{x}(t)$ در صفحه فازی برای $(0 \le t \le T)$

راهنمائی: حل مسئله به یکی از دو صورت تحلیلی و یا عددی با استفاده از دستور FMINCON قابل قبول می‌باشد. همچنین صفحه فازی صفحه‌ای است که محور افقی آن تغییر مکان و محور عمودی آن سرعت می‌باشد. مقدار $\omega_n = 4$ در نظر بگیرید.

1. Minimum-Time Control of Harmonic Oscillator

منابع و مراجع:

[۱] Bryson, Arthur. E., *Dynamic Optimization*, Addison Wesley, 1999.

[۲] Bryson, A. E., Jr., and Ho, Yu-Chi., *Applied Optimal Control Optimization, Estimation and Control,* New York: Hemisphere, 1975

[۳] Kirk, Donald E., *Optimal Control Theory: An Introduction*, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1970.

[۴] نیک‌روش، سید کمال‌الدین -*مقدمه‌ای بر تئوری کنترل بهینه* - ناشر مرکز نشر دانشگاه صنعتی امیرکبیر-۱۳۶۹

[۵] Hull, David. G., *Optimal Control Theory for Applications*, Springer, 2003.

[۶] Lewis, Frank. L., & Syrmos, Vassilis, L., *Optimal Control*, 2ed, John Wiley & Sons Inc, 1995.

[۷] Ogata, Katsuhiko, *Modern Control Engineering,* 4ed, Prentice-Hall Inc, 2002

[۸] Naidu, D. S., *Optimal Control Systems,* Graduate Level Textbook, CRC Press, 2003.

پیوست ۱: معرفی اسامی نمادها:

α	Alfa	θ	Theta	σ	Sigma
β	Beta	κ	Kappa	Σ	Capital sigma
γ	Gamma	λ	Lambda	τ	Tou
Γ	Capital gamma	Λ	Capital lambda	ϕ	Phi
δ	Delta	μ	Mu	χ	Chi خی
Δ	Capital delta	ν	Nu	ψ	Psi
ε	Epsilon	ξ	Xi	ω	Omega
ζ	Zeta	π	Pi	Ω	Capital omega
η	Eta	ρ	Rho	Φ	Capital phi