

پلتفرم اختصاصی مهندسی کنترل



<https://controlengineers.ir>



<https://t.me/controlengineers>



<https://www.instagram.com/controlengineers.ir>



System modeling

۲- مدل از سیستم

ca بیان سیستم با استفاده از معادلات دیفرانسیل

سیستم بیسته با زمان محدود می شود (SISO) می توان استفاده از معادلات دیفرانسیل بیان کرد. حال اگر این معادله دیفرانسیل خطی باشد

با تبدیل لاپلاس رفتن از آن به مع تبدیل سیستم بدست می آید

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) = \frac{d}{dt}x(t) + 3x(t)$$

مثال: در معادله نقلی $x(t)$ نشان دهنده ورودی و $y(t)$ نشان دهنده خروجی سیستم می باشد. مع تبدیل این سیستم را بدست آورید.

از طرفین تبدیل لاپلاس میگیریم: $\Rightarrow (s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 3(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = sX(s) - x(0) + 3X(s)$

شروط اولیه برابر با صفر هستند:

$$(s^2 Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s)) = sX(s) + 3X(s)$$

$$\rightarrow (s^2 + 3s + 2)Y(s) = (s + 3)X(s) \rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2} = \text{Transfer function}$$

مثال: تابع ضربه را به تابع سیستم مثال قبل اعمال کنید.

تابع ضربه

$$G(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$$x(t) = \delta(t) \Rightarrow X(s) = 1 \Rightarrow Y(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2} X(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+3}{s^2+3s+2} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \right\}$$

$$\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} \quad A = \frac{s+3}{s+2} \Big|_{s=-1} = 2 \quad B = \frac{s+3}{s+1} \Big|_{s=-2} = -1$$

$$\rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+3}{s^2+3s+2} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} \right\} = 2e^{-t} - e^{-2t} = (2e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

مثال:

$$x(t) = u(t) \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2} \times \frac{1}{s} = \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)} \right\} \quad \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$

$$A = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \Big|_{s=0} = \frac{3}{2}$$

$$B = \frac{s+3}{s(s+2)} \Big|_{s=-1} = \frac{2}{-1 \times 1} = -2$$

$$C = \frac{s+3}{s(s+1)} \Big|_{s=-2} = \frac{1}{-2 \times (-1)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3}{2} \frac{1}{s} - 2 \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+2} \right\} = \frac{3}{2} u(t) - 2 e^{-t} u(t) + \frac{1}{2} e^{-2t} u(t) = \left(\frac{3}{2} - 2e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} \right) u(t)$$

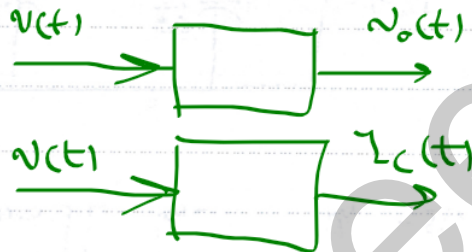
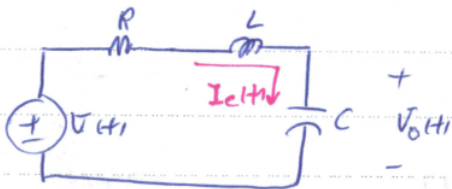


c) مدل‌سازی سیستم کنترلی:

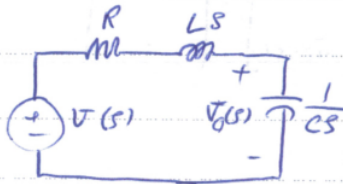
همان‌طور که از درس مدار الکتریکی دانستیم می‌توان با توجه به ورودی خروجی یک مدار (در صورت خطی بودن مدار) آن را تبدیل

در یک پیکان‌دهنده ورودی به خروجی آن مدار را نمایش داد.

مثال: در مدار RLC متغیر به تبدیل پیکان‌دهنده ورودی $V_i(t)$ به خروجی $V_o(t)$ تبدیل کنید.



مدار در حوزه فرکانس:



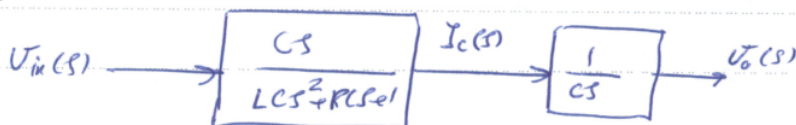
از تقسیم ولتاژ طبق:

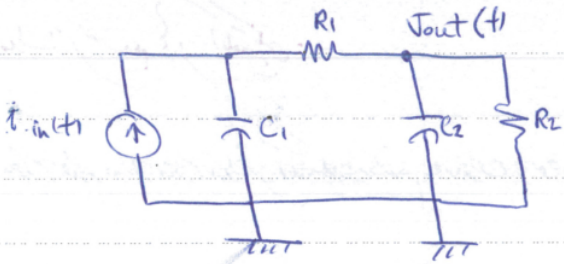
$$V_o(s) = \frac{1}{CS} \times V_i(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} V_i(s)$$



$$I_c(s) = \frac{V_o(s)}{1/CS} = CS V_o(s) \Rightarrow V_o(s) = \frac{1}{CS} I_c(s)$$

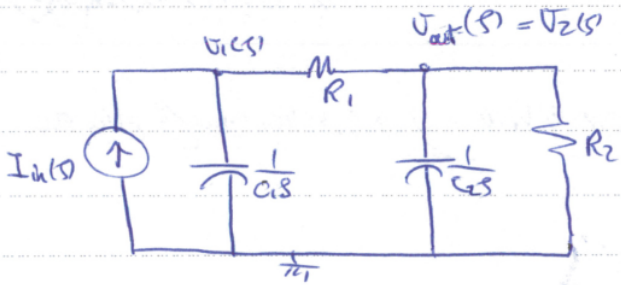
$$\frac{1}{CS} I_c(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \Rightarrow \frac{I_c(s)}{V_{in}} = \frac{CS}{LCs^2 + RCs + 1}$$





$G(s) = \frac{V_{out}(s)}{I_{in}(s)} = ?$: حل

در فضای لاپلاس:

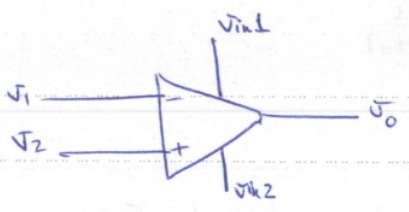


$$\begin{bmatrix} Cs + 1/R_1 & -1/R_1 \\ -1/R_1 & Cs + 1/R_1 + 1/R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{in}(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_2(s) = V_{out}(s) = \frac{\begin{vmatrix} Cs + 1/R_1 & I_{in}(s) \\ -1/R_1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Cs + 1/R_1 & -1/R_1 \\ -1/R_1 & Cs + 1/R_1 + 1/R_2 \end{vmatrix}} = \frac{1/R_1 I_{in}(s)}{(Cs + 1/R_1)(Cs + 1/R_1 + 1/R_2) - 1/R_1^2}$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{V_{out}(s)}{I_{in}(s)} = \frac{1/R_1}{(Cs + 1/R_1)(Cs + 1/R_1 + 1/R_2) - 1/R_1^2}$$

Controlengineers.ir

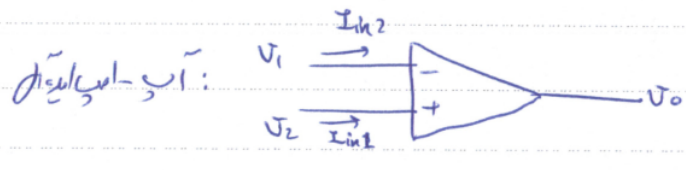


مشارکت داران آب-امپ

$$V_0 = A(V_2 - V_1)$$

در آب-امپ امپدانس ورودی A به سمت بی نهایت میل می کند.

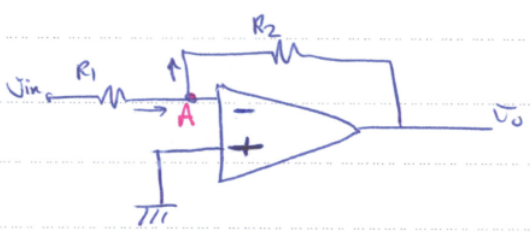
در انتقاریت جریان در مدار از سر مدار +، منفرجه $op-amp$ برابر با منفرجه $op-amp$ است و ولتاژ خروجی V_0 برابر $V_2 - V_1$ است.



$$V_1 = V_2$$

$$I_{in1} = I_{in2} = 0$$

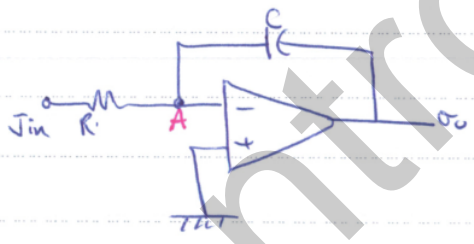
در آب-امپ امپدانس ورودی بی نهایت است و معادله مدار به صورت زیر می آید.



$$\frac{V_{in} - V_A}{R_1} = -\frac{V_A - V_0}{R_2}$$

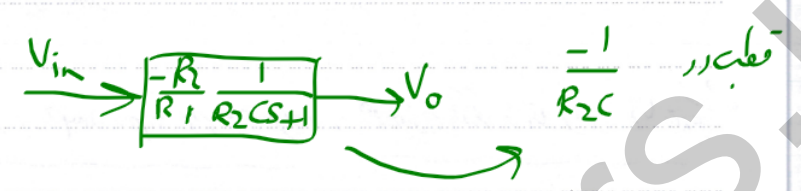
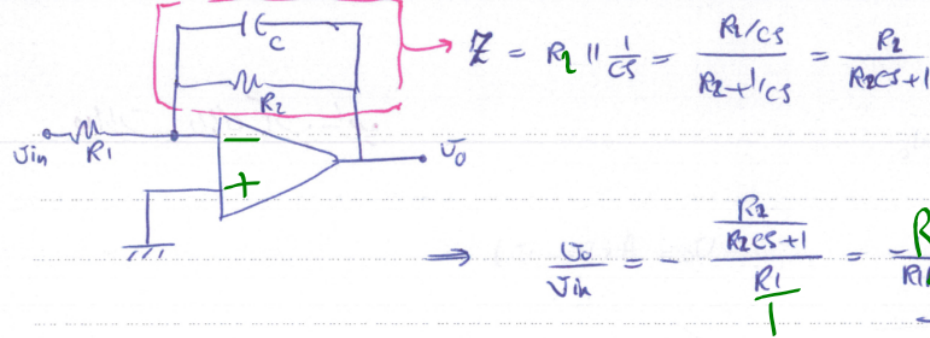
مثال:

KCL(A): $\frac{V_{in} - 0}{R_1} = 0 - \frac{V_0}{R_2} \rightarrow \frac{V_{in}}{R_1} = -\frac{V_0}{R_2} \Rightarrow \frac{V_0}{V_{in}} = \frac{-R_2}{R_1} = G(s)$

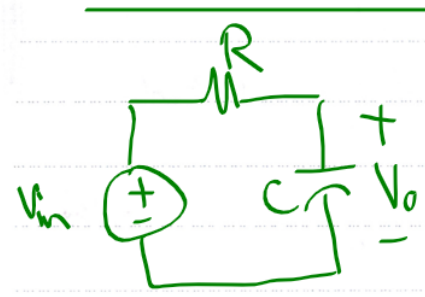


KCL(A): $\frac{V_{in} - 0}{R} = 0 - \frac{V_0}{1/s} \rightarrow \frac{V_{in}}{R} = -\frac{V_0}{1/s} \Rightarrow \frac{V_0}{V_{in}} = \frac{-1/s}{R} = \frac{-1}{RCS} = G(s)$

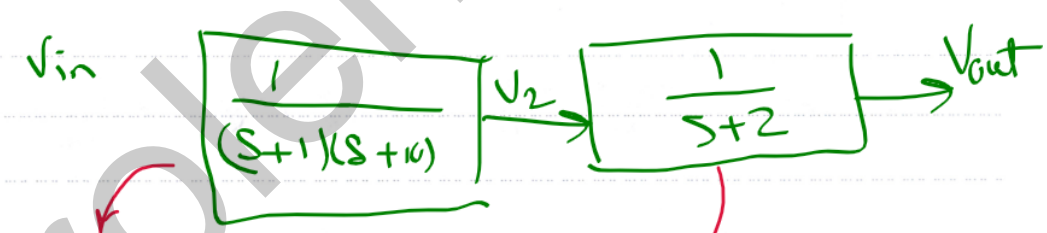
که تغییر می دهد



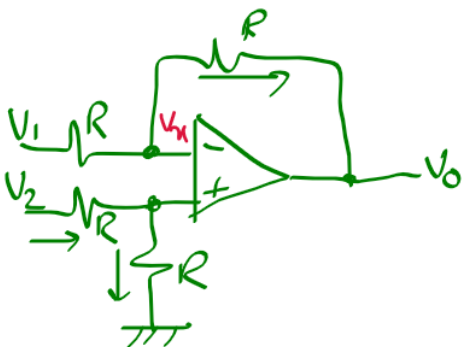
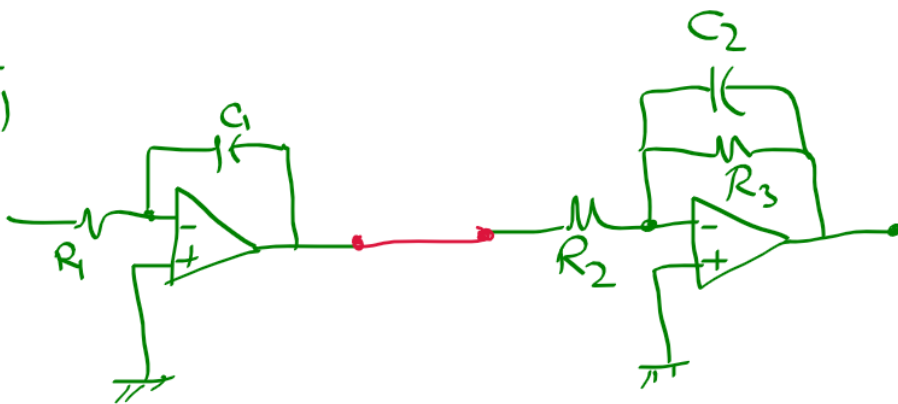
$R_2 = 1 \text{ M}\Omega \quad C = 1 \mu\text{F} \quad \leftarrow R_2 C = 1$



$\frac{V_0}{V_{in}} = \frac{\frac{1}{s}}{R + \frac{1}{s}} = \frac{1}{R s + 1}$



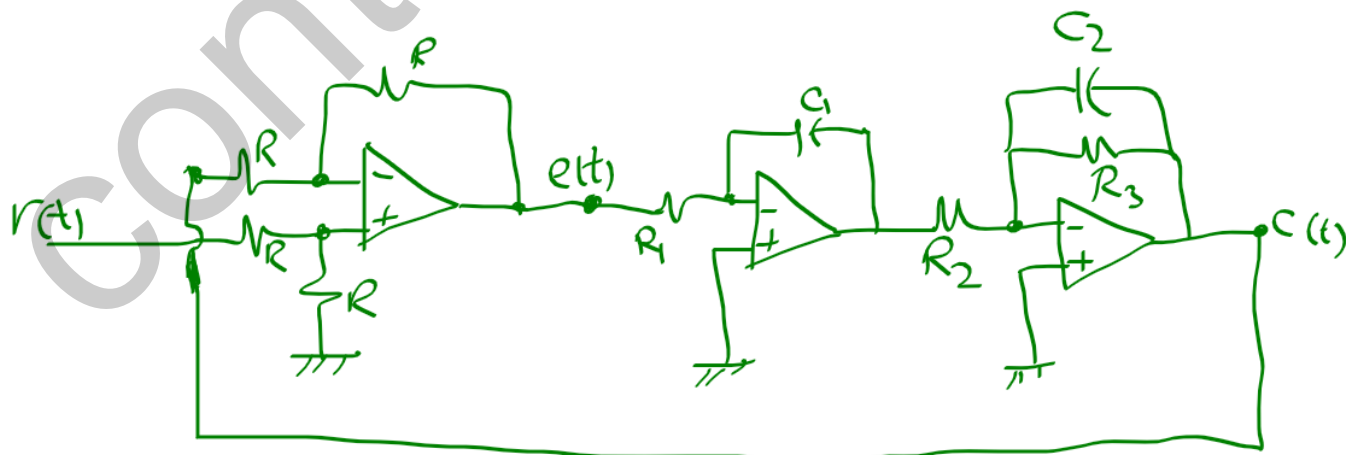
$$\frac{1}{s(s+1)}$$



$$\frac{V_2 - V_x}{R} = \frac{V_x - 0}{R} \quad V_x = \frac{1}{2} V_2$$

$$\frac{V_1 - V_x}{R} = \frac{V_x - V_o}{R} \quad V_1 = 2V_x - V_o = V_2 - V_o$$

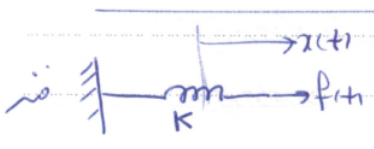
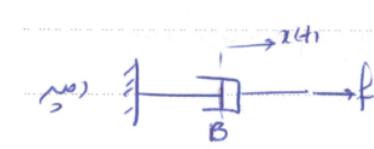
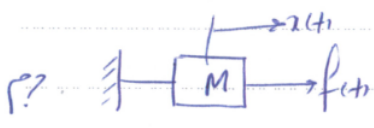
$$V_o = V_2 - V_1$$



مدلساز سیستم مکانیکی

برای آنالیز و مدل‌سازی سیستم مکانیکی نیاز داریم که مدلهای ریاضی این سیستم را داشته باشیم. اغلب سیستم مکانیکی از اجزای زیره جرم $mass$

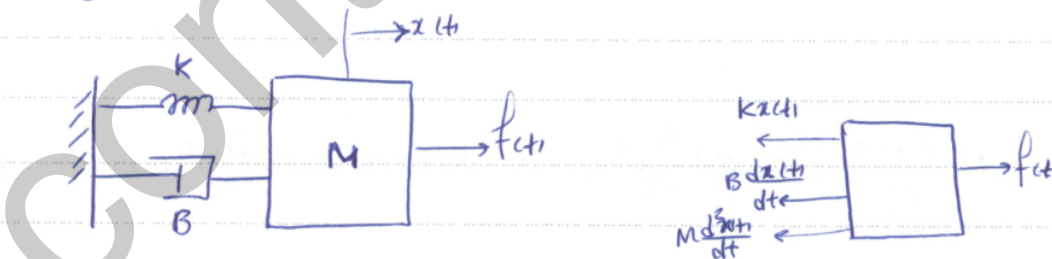
فنر و رسیور تشکیل می‌دهند. رابطه ریاضی این اجزا با مقدار حرکت آن‌ها صورت زیری باشد:

فرم مکانیکی	رابطه نیرو و سرعت	رابطه نیرو و تغییر مکان
	$f(t) = k \int v(t) dt$	$f(t) = kx(t)$
	$f(t) = Bv(t)$	$f(t) = B \frac{dx(t)}{dt}$
	$f(t) = M \frac{dv(t)}{dt}$	$f(t) = M \frac{d^2x(t)}{dt^2}$

با کشیدن نیروی آزاد (free-body diagram) و استفاده از قانون دوم نیوتن می‌توان معادله ریاضی سیستم مکانیکی

در دسترس به دست آورد. این سیستم را در دست آورده.

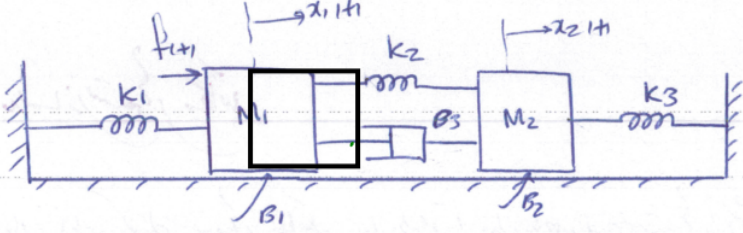
مثال: در سیستم مکانیکی نشان داده شده در تصویر ورودی $f(t)$ به جرم M اعمال می‌شود. $x(t)$ را به دست آوریم. $f(t) = \text{نیروی وارد سیستم}$ $x(t) = \text{تغییر مکان سیستم}$



نیروی آزاد جرم:

$$\Rightarrow M \frac{d^2x(t)}{dt^2} + B \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = f(t) \xrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس}} Ms^2X(s) + BSX(s) + kX(s) = F(s)$$

$$\Rightarrow (Ms^2 + BS + K)X(s) = F(s) \Rightarrow G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + BS + K}$$



$\frac{x_1(s)}{F(s)} = ?$, $\frac{x_2(s)}{F(s)} = ?$: das

بل هر جسم را با یک جسم آزاد را می بینیم

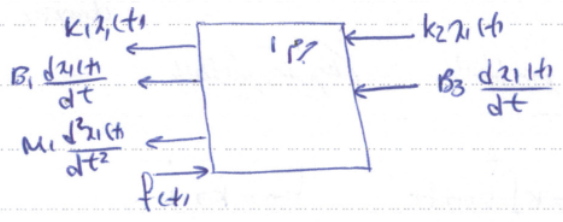
در اثر وارد نیروی $f(t)$ می بینیم

الف) فرض کنیم جسم M_1 ثابت کرده و جسم M_2

ثابت می باشد. نیروی وارد بر جسم M_1 صورت

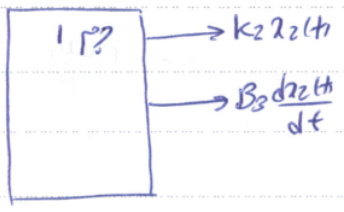
تقابل خواهد بود:

برای جسم M_1 :

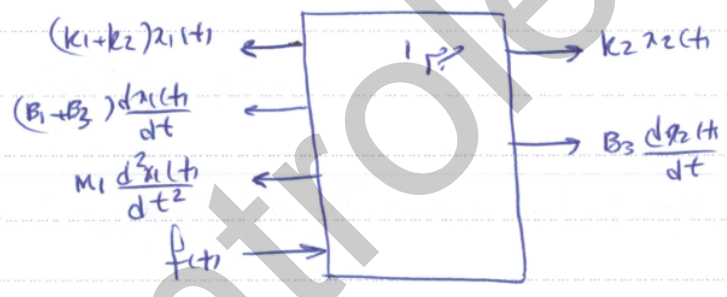


ب) فرض کنیم جسم M_1 ثابت ماند و جسم M_2 ثابت می ماند

نیروی وارد بر M_1 در اثر واکنش M_2 صورت تقابل خواهد بود:

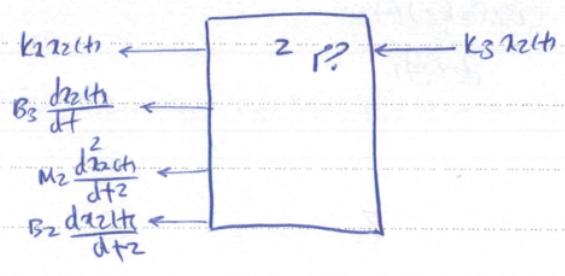


ج) نیزه را که داده بودیم برابر با عمل نیروی وارد بر M_1 در دو با یکدیگر با با در نظر گرفتن جهت مثبت را می بینیم:

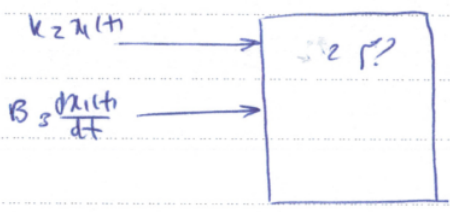


$$\Rightarrow M_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + (B_1 + B_3) \frac{dx_1(t)}{dt} + (k_1 + k_2)x_1(t) - B_3 \frac{dx_2(t)}{dt} - k_2 x_2(t) = f(t)$$

بلر جرم 2 طریم:

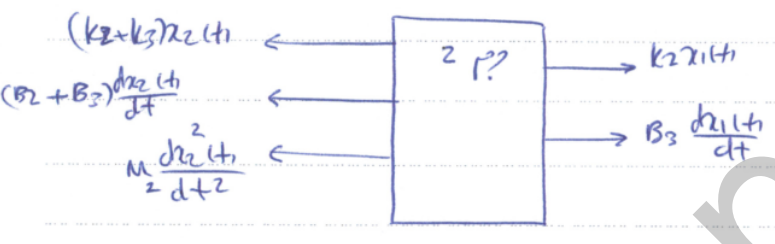


این فرض کنیم جرم M2 در اثر نیروی f(t) در سمت راست حرکت کرده و جرم M1 ثابت میماند. نیروی وارده بر M2 را بصورت معادله نوشتیم:



فرض کنیم جرم M2 ثابت بوده و جرم M1 در سمت راست حرکت کرده و در اثر حرکت M2 در اثر حرکت معادله نوشتیم:

چون نیروهای کل در دستگیر M1 در اثر نیروی اعمالی f(t) برابر با مجموع نیروهای دو درازم بالا با در نظر گرفتن جهت است پس:



$$\Rightarrow M_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + (B_2 + B_3) \frac{dx_2(t)}{dt} + (k_2 + k_3) x_2(t) - B_3 \frac{dx_1(t)}{dt} + k_2 x_1(t) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [M_1 s^2 + (B_1 + B_3)s + (k_1 + k_2)] X_1(s) - (B_3 s + k_2) X_2(s) = F(s) \\ -(B_3 s + k_2) X_1(s) + [M_2 s^2 + (B_2 + B_3)s + (k_2 + k_3)] X_2(s) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} M_1 s^2 + (B_1 + B_3)s + (k_1 + k_2) & -(B_3 s + k_2) \\ -(B_3 s + k_2) & M_2 s^2 + (B_2 + B_3)s + (k_2 + k_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} F(s) & -(B_3 s + k_2) \\ 0 & M_2 s^2 + (B_2 + B_3)s + (k_2 + k_3) \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{A(2,2) F(s)}{\det(A)} \Rightarrow \frac{X_1(s)}{F(s)} = G_1(s) = \frac{A(2,2)}{\det(A)}$$

$$X_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} N_1 s^2 + (B_1 + B_2)s + (k_1 + k_2) & F(s) \\ -(B_2 s + k_2) & 0 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{(B_2 s + k_2) F(s)}{\det(A)}$$

$$\Rightarrow G_2(s) = \frac{X_2(s)}{F(s)} = \frac{B_2 s + k_2}{\det(A)}$$

Controlengineers.ir

استفاده از مدارهای الکتریکی در مدارهای سیستم‌های مکانیکی:

حوزه تحلیل سیستم‌های الکتریکی برابر با استفاده از تحلیل سیستم‌های مکانیکی است. با استفاده از موازنه، پارامترهای سیستم‌های مکانیکی با

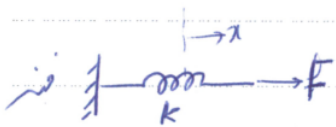
سیستم الکتریکی، معادله‌های سیستم‌های مکانیکی از لحاظ الکتریکی معادله‌های حرکت ماده را برپایه سیستم

مطابق این کار از موازنه جریان \equiv نیرو استفاده می‌کنیم. در تصویر داریم:

$$F \equiv i$$

سیستم مکانیکی	سیستم الکتریکی
نیروی F	جریان i
سرعت v	ولتاژ v
تغییر مکان	انرژی و شارژ $\int v dt$

جزء مکانیکی



ارتباط مکانیکی

$$F = kx$$

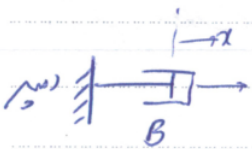
ارتباط معادله الکتریکی

$$i = k \int v dt \rightarrow \frac{di}{dt} = kv$$

$$\Rightarrow v = \frac{L}{k} \frac{di}{dt}$$

جزء الکتریکی معادله

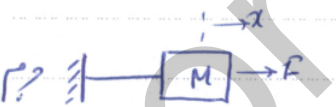
$$L = \frac{1}{k}$$



$$F = BV$$

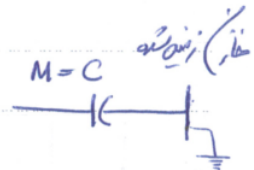
$$i = BV \Rightarrow v = \frac{1}{B} \frac{di}{dt} R$$

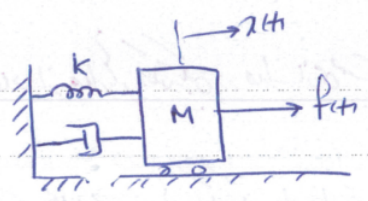
$$R = \frac{1}{B} \frac{v}{i}$$



$$F = M \frac{dv}{dt}$$

$$i = \frac{M}{C} \frac{dv}{dt}$$

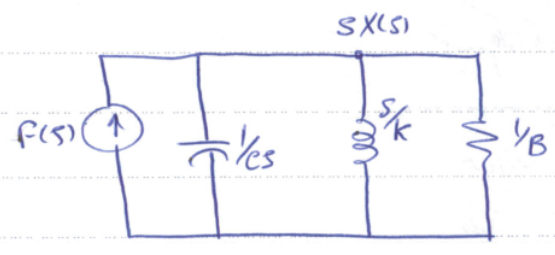
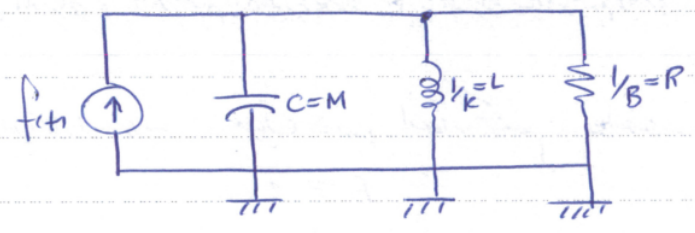




مسئله: معادلات

$$\frac{X(s)}{F(s)}$$

معادله حرکتی سیستم:

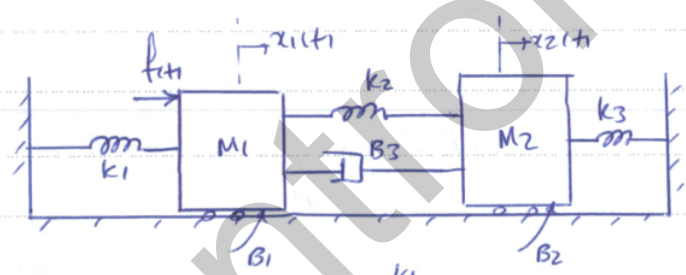
$$M \frac{d^2x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$


در صفحه کناری

از شکل در استفاده می‌کنیم:

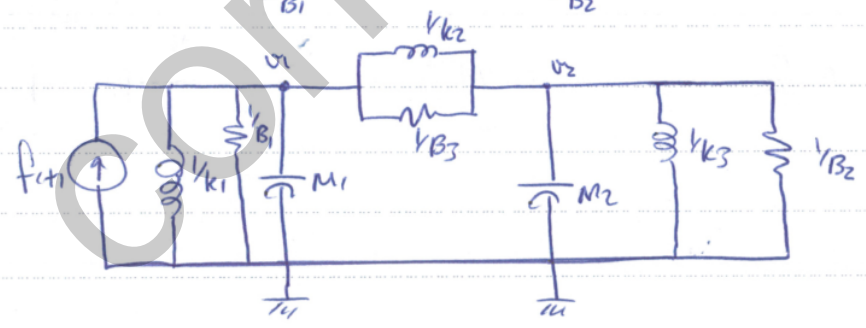
$$(CS + \frac{k}{s} + B) SX(s) = F(s) \quad (CS^2 + BS + k)X(s) = F(s)$$

$$\Rightarrow \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{CS^2 + BS + k}$$



مسئله: معادلات

$$\frac{X_2(s)}{F(s)}, \frac{X_1(s)}{F(s)}$$



معادله حرکتی سیستم:

$$\begin{bmatrix} M_1 s + \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s} + B_3 + B_1 & -(B_3 + \frac{k_2}{s}) \\ -(B_3 + \frac{k_2}{s}) & M_2 s + \frac{k_3}{s} + \frac{k_2}{s} + B_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sX_1 \\ sX_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_1 s^2 + (B_1 + B_3)s + (k_1 + k_2) & -(B_3 s + k_2) \\ -(B_3 s + k_2) & M_2 s^2 + (B_2 + B_3)s + (k_2 + k_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

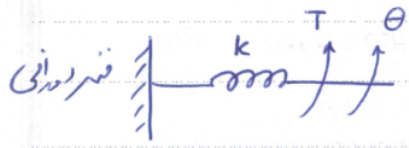
$$\Rightarrow X_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} F(s) & -(B_3 s + k_2) \\ 0 & M_2 s^2 + (B_2 + B_3)s + (k_2 + k_3) \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad X_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} M_1 s^2 + (B_1 + B_3)s + (k_1 + k_2) & F(s) \\ -(B_3 s + k_2) & 0 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

سیستم‌های مکانیکی دورانی: Rotational Mechanical Systems

سیستم‌های مکانیکی دورانی مشابه سیستم‌های مکانیکی خطی هستند و این تفاوت آن به جای نیرو (F) در حالت خطی، گشتاد (T) است.

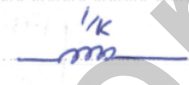
و به طایر تغییر مکان خطی (x)، تغییر مکان دورانی (θ) و به جای سرعت خطی (V) سرعت دورانی (ω) داریم.

رابطه اجزای مکانیکی دورانی بصورت زیر می‌باشد:



$$T = k \int \omega dt$$

$$T = k\theta$$



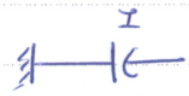
$$T = B\omega$$

$$T = k \frac{d\theta}{dt}$$

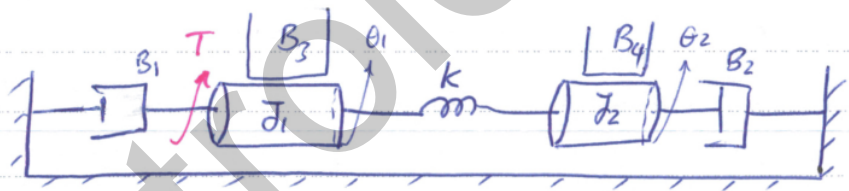


$$T = J \frac{d\omega}{dt}$$

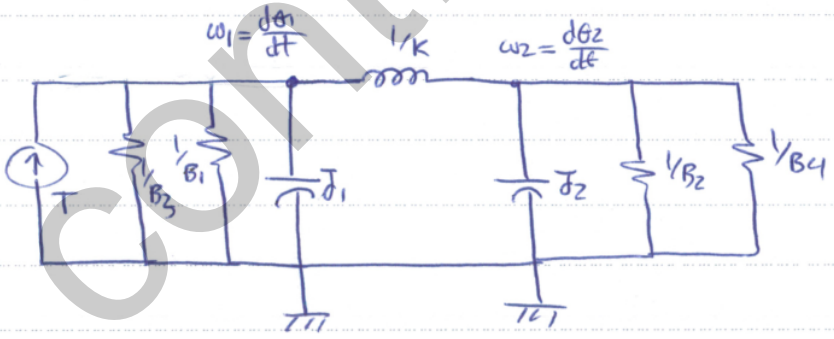
$$T = J \frac{d^2\theta}{dt^2}$$



برای تبدیل سیستم‌های مکانیکی دورانی به مدار الکتریکی، از معادله نیوتن استفاده می‌کنیم

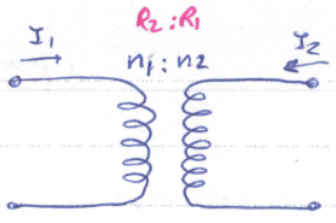


معدله:



$$\begin{bmatrix} J_1 s + (B_1 + B_3) & 0 \\ 0 & -k/s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1(s) \\ \theta_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

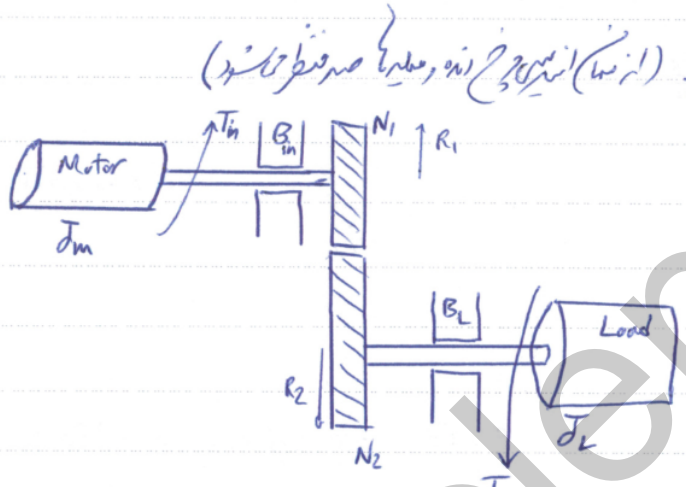
مخرج دینو = برابری فورم



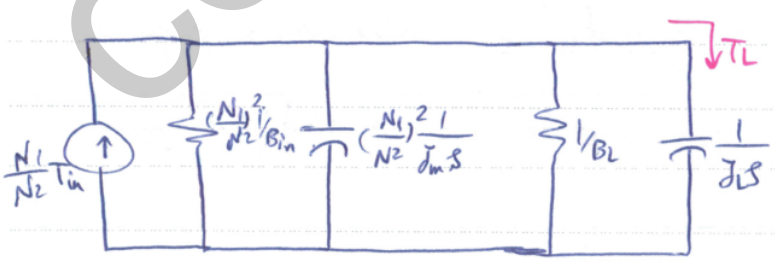
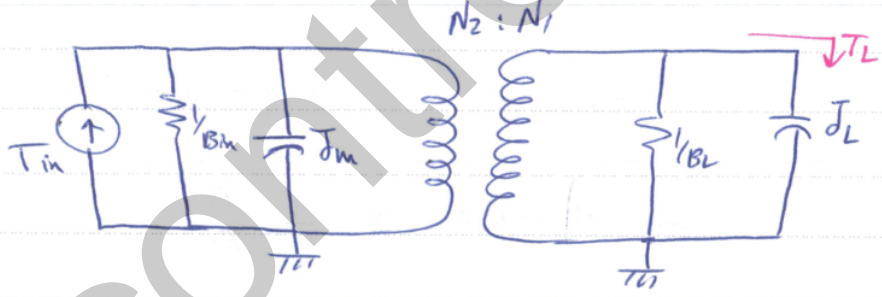
$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{R_2}{R_1}, \quad \frac{I_2}{I_1} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{n_1}{n_2}$$

مثال: در سیستم مکانیکی دو دانی زیر نشان داده شده و ولتاژها برابری است. این نشان دهنده اینست که ولتاژها برابر است.

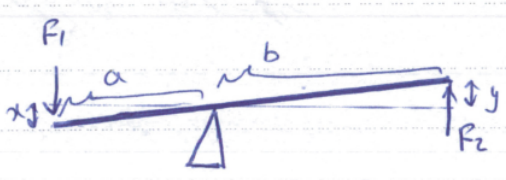


T_L در سمت بار می باشد. $\frac{T_L(s)}{T_{in}(s)}$ را بیابید. (اینجا اینترتینج زین و ولتاژها صرف نظر کنید)

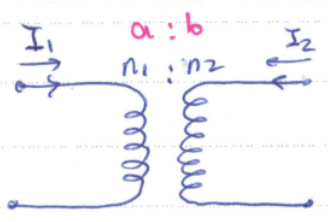


اولاً باید گینو به دستش میزنیم

اهم:



$$T_1 = T_2 \Rightarrow F_1 a = F_2 b \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{a}{b} = \frac{x}{y}$$

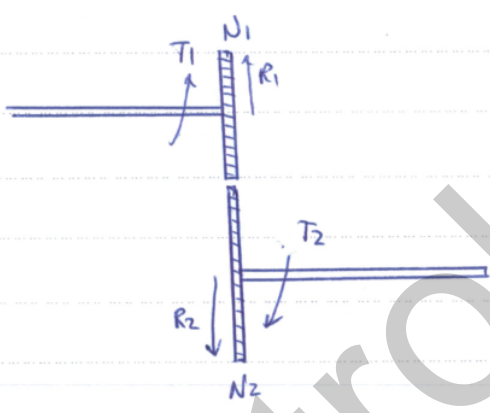


اهم = ترانسفور

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{n_1}{n_2}$$

موقع اندو:



در نقطه اتصال نیروها برابرند یعنی

$$F_1 = F_2 \Rightarrow \frac{T_1}{R_1} = \frac{T_2}{R_2} \rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{R_2}{R_1}$$

در نقطه اتصال سرعت خطی نیز برابرند یعنی

$$v_1 = v_2 \Rightarrow R_1 \omega_1 = R_2 \omega_2 \Rightarrow \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_2}$$

مکانیزم سرعت زاویه ای، متناسب با تغییرات زاویه ای است یعنی:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\theta_2}{\theta_1}$$

مکانیزم مقدار حرکت خطی، متناسب با شعاع \$R\$ است یعنی:

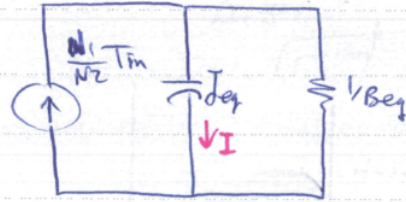
$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2}$$

یعنی نسبت روابط با \$v_1\$

$$J_{eq} = J_L + J_m \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2$$

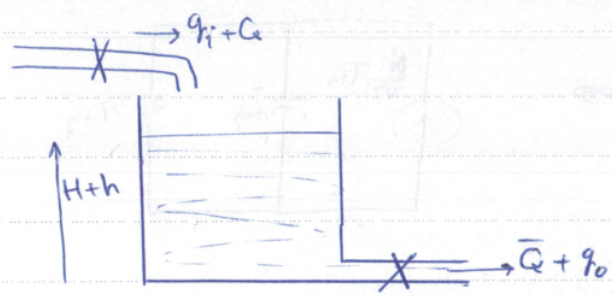
$$B_{eq} = B_L + B_m \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2$$



$$I = \frac{1/B_{eq}}{1/B_{eq} + 1/J_{eq} s} \times \frac{N_1}{N_2} T_m(s) = \frac{J_{eq} s}{J_{eq} s + B_{eq}} \times \frac{N_1}{N_2} T_m(s)$$

$$T_L = \frac{\left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \frac{1}{J_m s}}{\left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \frac{1}{J_m s} + \frac{1}{J_L s}} I = \frac{\left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \frac{1}{J_m s}}{\left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \frac{1}{J_m s} + \frac{1}{J_L s}} \times \frac{[J_L + J_m \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2] s}{[J_L + J_m \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2] s + B_L + B_m \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2} \frac{N_1}{N_2} T_m(s)$$

سیستم های سطح مانع:



سیستم نقطه ارتفاع قابل دسترس:

تفاوت سطح و ارتفاع مخزن صورت زیر تعریف می شود:

$$R_H = \frac{\text{تغییر در اختلاف سطح}}{\text{تغییر در دبی خروجی}}$$

Q: دبی حجمی = مقدار حجم عبوری در واحد زمان

H: ارتفاع آب

h: تغییرات کوچک ارتفاع

q: تغییرات کوچک دبی

معمولاً رابطه بین دبی جریان سطح و اختلاف سطح برای جریان آرام، متلاطم متفاوت است، در دو حالت زیر می توان این رابطه را تعیین کنیم:

جریان آرام:

رابطه بین دبی جریان مانده، اختلاف سطح مانده، $Q = B H$

$$R_H = \frac{dH}{dQ} \rightarrow dQ = B dH \Rightarrow \frac{dH}{dQ} = \frac{1}{B} = R_H$$

جریان متلاطم:

رابطه بین دبی جریان و اختلاف سطح:

$$Q = B \sqrt{H}$$

$$R_H = \frac{dH}{dQ} \rightarrow dQ = B \frac{1}{2\sqrt{H}} dH \Rightarrow \frac{dH}{dQ} = \frac{2\sqrt{H}}{B} = \frac{2\sqrt{H}}{B} \times \frac{\sqrt{H}}{\sqrt{H}} = \frac{2H}{Q}$$

$$\Rightarrow R_H = \frac{2H}{Q}$$

بین تفاوت در مقدار ارتفاع و دبی حجمی بگویم بار دیگر هر دو در حالت متلاطم می مانند

سپس در حالت کلی R تابعی از ارتفاع خواهد بود یعنی $R = R(H)$ ولی اگر تغییر در ارتفاع و دبی کوچک باشد $R \approx R_H$ ثابت در نظر گرفته می شود.

ظرفیت مخزن بصورت زیر تعریف می شود:

$$C_H = \frac{\text{تغییرات حجم}}{\text{تغییرات ارتفاع}} \quad \text{فازین صاف و صاف}$$

اگر سطح مقطع مخزن ثابت باشد: $M = HA$ ← $C_H = \frac{dM}{dH} = A$ ← تغییرات ثابت

برای مدل سازی سیستم هر سطح مقطع، از حالت پایدار (بی چون استاندارد کنیم) در انصورت ارتفاع در سیستم سطح مقطع، $i = q$ نقش دینامیک را در سیستم الکتریکی دارد.

$$Q = BH \Rightarrow H = \frac{1}{B} Q = \frac{1}{R_H} Q \quad H = R_H Q$$

$$V = R_H i$$

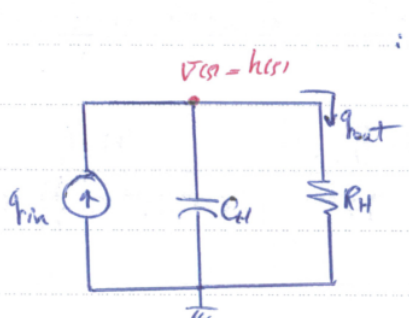
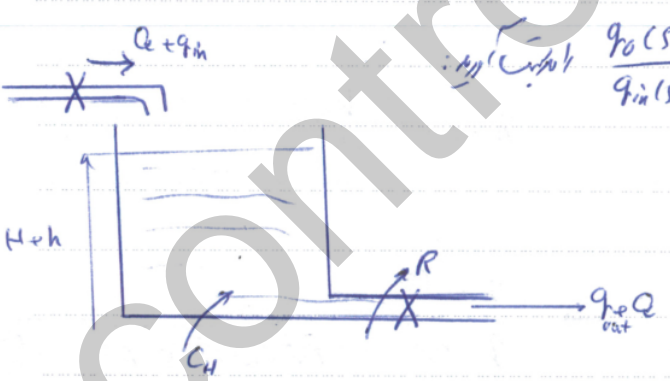
مکان تفاوت پتانسیل

$$Q = \frac{dM}{dt} = C_H \frac{dH}{dt} = C_H \frac{dH}{dt} \Rightarrow Q = C_H \frac{dH}{dt}$$

$$i = C_H \frac{dv}{dt}$$

مکان فازین

مدل: مکان الکتریکی سیستم قبل از این مورد به هیچ نرسیده است. $\frac{q_{in}(s)}{q_{out}(s)}$ نسبت است.

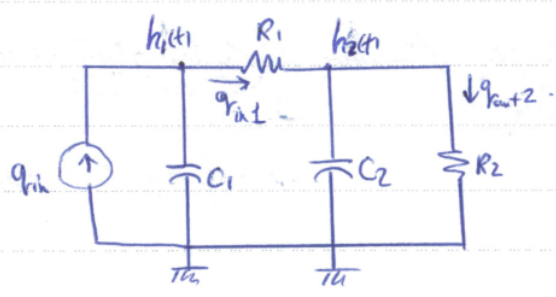
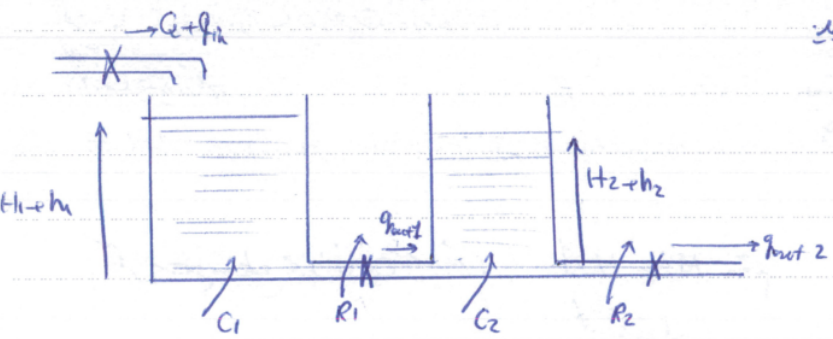


$$\Rightarrow q_{out}(s) = \frac{\frac{1}{C_H s} q_{in}(s)}{\frac{1}{C_H s} + R_H} = \frac{1}{R_H C_H s + 1} q_{in}(s)$$

$$\Rightarrow \frac{q_{out}(s)}{q_{in}(s)} = \frac{1}{R_H C_H s + 1}$$

$$h(s) = q_{out}(s) R_H \Rightarrow \frac{1}{R_H} h(s) = \frac{1}{R_H C_H s + 1} \Rightarrow \frac{h(s)}{q_{in}(s)} = \frac{R_H}{R_H C_H s + 1}$$

المخرج! $\frac{q_{out2}(s)}{q_{in}(s)}$ في (C) هو المطلوب : الجواب



$$\begin{bmatrix} C_1 s + 1/R_1 & -1/R_1 \\ -1/R_1 & C_2 s + 1/R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(s) \\ h_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{in}(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow h_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} C_1 s + 1/R_1 & q_{in}(s) \\ -1/R_1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_1 s + 1/R_1 & -1/R_1 \\ -1/R_1 & C_2 s + 1/R_2 \end{vmatrix}} = \frac{1/R_1 q_{in}(s)}{(C_1 s + 1/R_1)(C_2 s + 1/R_2) - 1/R_1^2}$$

$$\Rightarrow \frac{h_2(s)}{q_{in}(s)} = \frac{1}{R_1 C_1 C_2 s^2 + (1 + \frac{R_1}{R_2})s + (\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1})}$$

$$q_{out2}(s) = \frac{h_2(s)}{R_2}$$

$$\Rightarrow \frac{R_2 q_{out2}(s)}{q_{in}(s)} = \frac{1}{C_2 R_1 C_1 s^2 + (1 + \frac{R_1}{R_2})s + (\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1})} \Rightarrow \frac{q_{out2}(s)}{q_{in}(s)} = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_2 + R_1)s + (1 - \frac{R_2}{R_1})}$$

خط مماس در تابع:

تابع $y = f(x)$ را در نقطه x_0 در حالتی که f در آنجا غیر خطی است. نقطه a یا نقطه x_0 فرض کنید

بر خط مماس $f(x)$ در نقطه a کار می‌کنیم به طوری که $f(x)$ را در آن نقطه کار کنیم. از حالتی که بالاتر از a

همه فنون کنیم.

در نقطه (x_0, y_0) در تابع $f(x)$ در نقطه a در سوال نقطه (x_0, y_0) به خط مماس

آن تغییر در این تغییر حاصل می‌شود در حالتی که اگر $(x_0 - a)$ یک مقدار کوچک باشد یعنی x در نزدیکی x_0 .

تقریباً

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$$

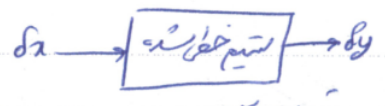
به شرطی که از توانها > 1 است.

$$\Delta y = f(x) - f(a) = f'(a)(x-a)$$

$$\Delta x \triangleq x - a$$

$$\Delta y \triangleq y - f(a)$$

$$\Delta y = f'(a) \Delta x$$



در صورتی که Δx را در نظر بگیریم و Δy را در نظر بگیریم. $\frac{\Delta y(x)}{\Delta x(x)} =$ تا چه حد سیستم خطی است. Δy و Δx هر دو کوچک باشند.

مثال: تابع غیر خطی $y = f(x) = x^2$ را در نقطه $x_0 = 1$ خط کشید

$$y = f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow dy = f'(x_0) \delta x = (2x)|_{x=2=1} \delta x = 2\delta x$$

تابع غیر خطی $y = x^2$ تابع خطی $dy = 2\delta x \Rightarrow y - y_0 = 2(x - x_0) \Rightarrow y = 2x - 1$

- $x = 1 \Rightarrow y = 1$
- $x = 1.1 \Rightarrow y = 1.21$
- $x = 1.2 \Rightarrow y = 1.44$
- \vdots
- $x = 2 \Rightarrow y = 4$

- $x = 1 \Rightarrow y = 1$
- $x = 1.1 \Rightarrow y = 1.1 \times 2 - 1 = 1.2$
- $x = 1.2 \Rightarrow y = 1.2 \times 2 - 1 = 1.4$
- \vdots
- $x = 2 \Rightarrow y = 2 \times 2 - 1 = 3$

تقریب خطی با در نظر گرفتن آن توابعی که دارای خطان تقریب افزاینده می‌باشد

خط منازع معادلات دیفرانسیل:

می‌دانیم که یک از روش‌های بیان رابطه بین دو درگاه و فرجه سیستم، معادلات دیفرانسیل می‌باشد. حال اگر سیستم مورد نظر را سیستم غیر خطی باشد، معادله دیفرانسیل بیان کننده آن سیستم نیز غیر خطی خواهد بود. به عنوان مثال معادله x نشان دهنده دو درگاه سیستم و y نشان دهنده فرجه سیستم باشد:

$$x = \sqrt{y} + x^2 \frac{dy}{dt} + y \frac{dx}{dt}$$

که معادله دیفرانسیل غیر خطی است.

تعریف نقطه تعادل سیستم: نقطه‌ای است که در آن تمام مشتقات صفر می‌باشد. نقطه‌ای که معادله سیستم، نقطه‌ای است که اگر شرایط سیستم در یک لحظه از زمان در آن نقطه قرار گیرد، در لحظاتی بعد نیز در صورت وارد شدن ورودی، در آن نقطه قرار خواهد گرفت.

مثال:

نقاط تعادل سیستم بیان شده با معادله دیفرانسیل بالا:

در نقطه تعادل: $x = \sqrt{y} \Rightarrow$ تمام مشتقات صفر

حال اگر مشخصات نقطه تعادل را با این فرمول می‌توانیم بدست آوریم:

$$\text{نقطه تعادل} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ \sqrt{x_0} \end{bmatrix}$$

برای خطی شدن معادله تفاضلی غیر خطی، از معادله استفاده می‌کنیم. بدین صورت که فرض می‌کنیم x و y تنها می‌توانند

تغییرات کوچکی در همگامی x_0 و y_0 داشته باشند یعنی: $x = x_0 + \delta x$
 $y = y_0 + \delta y$
 این بالا در محاسبه جملات نامعین حاصل می‌شود $\delta x, \delta y$ در $\frac{d^2}{dt^2}$ و $\frac{d}{dt}$
 و صورت نظر از جملات حاصل $\delta x, \delta y$ به معادله تفاضلی خطی تبدیل می‌شود.

$$y \frac{d^2 y}{dt^2} + x^2 \frac{dy}{dt} + \sqrt{y} = x$$

نقطه تعادل: $\begin{cases} x_0 \\ y_0 = \sqrt{x_0} \end{cases}$ فرض کنیم: $\begin{cases} x = x_0 + \delta x \\ y = y_0 + \delta y \end{cases}$

$$\Rightarrow (y_0 + \delta y) \frac{d^2}{dt^2} (y_0 + \delta y) + (x_0 + \delta x)^2 \frac{d}{dt} (y_0 + \delta y) + \sqrt{y_0 + \delta y} = x_0 + \delta x$$

$(y_0 + \delta y)^{1/2} = y_0^{1/2} + \binom{1/2}{1} y_0^{-1/2} \delta y + \dots$
 $= \sqrt{y_0} + \frac{1/2!}{-1/2! \cdot 1!} = \frac{1/2 \times (-1/2)!}{-1/2!}$

$$y_0 \frac{d^2}{dt^2} \delta y + \delta y \frac{d^2}{dt^2} y_0 + x_0^2 \frac{d}{dt} \delta y + 2x_0 \delta x \frac{d}{dt} y_0 + \delta x^2 \frac{d}{dt} y_0 + \sqrt{y_0} + \frac{1}{2\sqrt{y_0}} \delta y = x_0 + \delta x$$

$$y_0 \frac{d^2}{dt^2} \delta y + x_0^2 \frac{d}{dt} \delta y + \frac{1}{2\sqrt{y_0}} \delta y = \delta x$$



حالت متوازن $\delta x = 0$ و $\delta y = 0$ معادله خطی شده را به این صورت می‌نویسند:

$$\left(y_0 \cdot s^2 + x_0^2 s + \frac{1}{2\sqrt{y_0}} \right) \delta y(s) = \delta x(s)$$

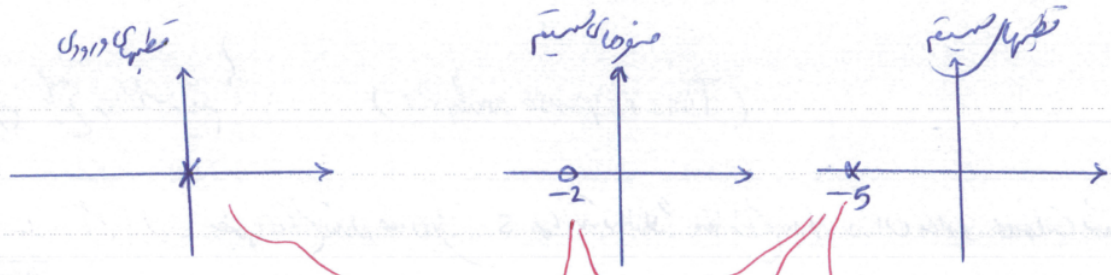
$$\Rightarrow \frac{\delta y(s)}{\delta x(s)} = \frac{1}{y_0 \cdot s^2 + x_0^2 s + \frac{1}{2\sqrt{y_0}}}$$

پول آدرین
 پل صومعه و آنتن معادله تفاضلی غیر خطی شده

برای آنتن، ضرایب عبارات دارای متغیر نیستند پس از نقطه تعادل داریم و تغییر جملات (جملات متغیر) را

در نقطه تعادل، خطی می‌کنیم (معادله خطی ساز می‌شود)

برای متغیر قبل: $y_0 \delta y + x_0^2 \delta y + \frac{1}{2\sqrt{y_0}} \delta y = \delta x$



تبدیل لاپلاس فردی $Y(s) = \frac{2/5}{s} + \frac{3/5}{s+5}$

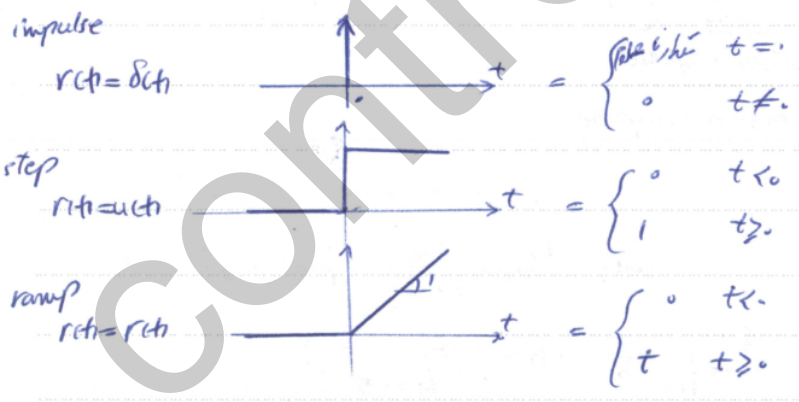
پایه زمانی فردی $y(t) = \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5} e^{-5t} \right) u(t)$

پایه ماندگار
پایه گذرا

- تسلیح:
- ۱- قطبها در 0 نوع پایه ماندگار را مشخص میکنند
 - ۲- قطبها در -5 نوع پایه گذرا را مشخص میکنند.
 - ۳- دامنه پایه گذرا و ماندگار همیشه در هر دو قطبها، ضریبها سیستمی باشد.

کسینالها هم:

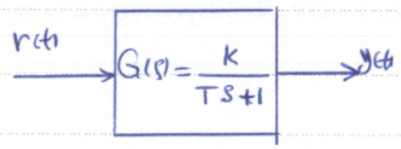
برای آنالیز پایه زمانی سیستم ها، همواره از کسینالها که برابر ضریب پایه استفاده می کنند



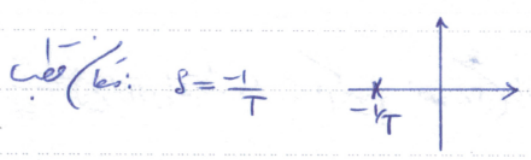
$$\frac{1}{\frac{1}{k}s+1} = \frac{k}{s+\frac{1}{T}}$$

$$\frac{1}{s+\frac{1}{T}} = \frac{1/T}{\frac{1}{T}s+1}$$

سیستم مرتبه اول
first-order systems



یک سیستم مرتبه اول که حالت گذر می‌دهد و زمان ماند:

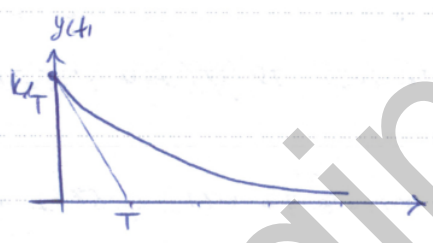


System gain: k
Time Constant: T

رشد $r(t) = \delta(t) \Rightarrow y(s) = R(s)G(s) = \frac{k}{Ts+1} = \frac{kT}{s+1/T}$

پول در نقطه $s = -1/T$

$$y(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}} u(t)$$

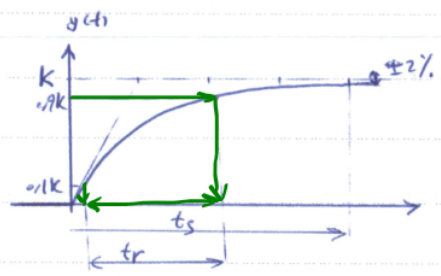


رشد $r(t) = u(t) \Rightarrow y(s) = R(s)G(s) = \frac{k}{s(Ts+1)} = \frac{kT}{s(s+1/T)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1/T}$

پول در $s=0$

$$A = \frac{kT}{s+1/T} \Big|_{s=0} = k \quad B = \frac{kT}{s} \Big|_{s=-1/T} = -k \Rightarrow y(s) = k \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1/T} \right)$$

$$\Rightarrow y(t) = k \left(1 - e^{-t/T} \right) u(t)$$



نشان ده:

$$\frac{d}{dt} y(t) \Big|_{t=+} = -k \times \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \Big|_{t=0} = \frac{k}{T} = \frac{k}{\tau} \Rightarrow \tau = T$$

الگوریتم تعیین τ در $t=+$ به سبب $k = \tau \times \frac{dy}{dt}$ در $t=T$ به سبب $y = 0.63k$

تساوی $t = T$:

$$\left. \frac{d}{dt} y(t) = \frac{d}{dt} \frac{k}{T} e^{-t/T} \right|_{t=0} = \frac{k}{T} \times \frac{-1}{T} e^{-t/T} \Big|_{t=0} = \frac{-k}{T^2} = \frac{-k/T}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{k}{T} \times \frac{T^2}{k} = T$$

از تساوی $t = T$ به دست می آید که در $t = T$ مقدار y نصف می شود.

۲- زمان نشست (Settling Time) (t_s) :

زمانی که سیستم به ۹۸٪ مقادیرهای خودی رسد، یعنی ۹۸٪، معیارهای مابقی می ماند.

برای $t_s = 4T$:

$$y(t=T) = k(1 - e^{-1}) = k(1 - 0.367) = 0.633k$$

$$y(t=2T) = k(1 - e^{-2}) = k(1 - 0.135) = 0.865k$$

$$y(t=4T) = k(1 - e^{-4}) = k(1 - 0.18) = 0.982k \approx 0.98k \quad \checkmark$$

$$t_s = 4T$$

$$\Rightarrow t_s = 4T$$

$$95\% \text{ معیار} \rightarrow t_s = 3T$$

$$99\% \text{ معیار} \rightarrow t_s = 5T$$

برای $t_s = 4T$:

$$t_s = 4T$$

۳- زمان t_r (Rise time) :

زمانی که سیگنال از ۱۰٪ مقادیر خودی به ۹۰٪ مقادیر خودی برسد :

۹۵٪

۵٪

$$t_r = 2.2T$$

4- سرعت پاسخ دهی:

هر چه t_d یا t_r کمتر باشد، سیستم زودتر به مقدار نهایی پاسخ می‌دهد و این سرعت عملی است که بین کاهش t_d و

t_r افزایش سرعت پاسخ دهی سیستم حاصل شود.

بسیار شدن سرعت پاسخ دهی سیستم \equiv کاهش t_d و t_r \equiv کاهش ثابت زمانی \equiv افزایش $\frac{1}{T}$ \equiv $\frac{1}{\text{دوره}}$ \equiv $\frac{1}{\text{تعداد دور}}$

این قطب بر روی محور حقیقی در کنار مبدأ قرار دارد، سرعت پاسخ دهی سیستم افزایش می‌یابد.

5- پهنای باند در $t=0$:

برای اینکه پاسخ ضربه سیستم در $t=0$ به دست آید، باید اختلاف درجه صورت وخرج نام باشد. مثال 2 با 2

با 1

با 0

بند = rch

پهنای باند:

$$\Rightarrow Y(s) = R(s)G(s) = \frac{1}{s^2} \frac{k}{s+1/T} = \frac{k/T}{s^2(s+1/T)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1/T}$$

$$A = \frac{d}{ds} \left(\frac{k/T}{s+1/T} \right) \Big|_{s=0} = \frac{-k/T}{(s+1/T)^2} \Big|_{s=0} = \frac{-k/T}{1/T^2} = -kT \quad B = \frac{k/T}{s+1/T} \Big|_{s=0} = k \quad C = \frac{k/T}{s^2} \Big|_{s=-1/T} = kT$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{-kT}{s} + \frac{k}{s^2} + \frac{kT}{s+1/T} \Rightarrow y_{ch} = (-kT + kt + kTe^{-t/T})u(t)$$

سیستم‌های مرتبه دوم:
Second-order systems

$\xi \rightarrow /ksi/$

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

در حالت کلی، یک سیستم مرتبه دوم، اصطلاحات تعریف شده در نظر می‌گیرد:

داده‌های مشخصه ضرایب s^2 و s با استفاده از ω_n و ξ این‌ها به شکل زیر نوشته می‌شوند:

خصوصیات سیستم‌های مرتبه دوم را با استفاده از فرآیند تغییرات ω_n و ξ بررسی کرد.

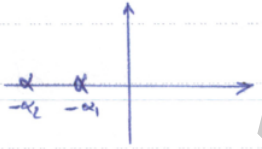
ω_n : فرکانس طبیعی (فرکانس طبیعی نامیده می‌شود) Natural Frequency

ξ : ضریب میرایی، نرخ میرایی - نسبت میرایی Damping Rate

تجزیه سیستم: $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \Rightarrow s = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$

۱- $\xi > 1$: حالت فوق میرایی (overdamped): دو قطب حقیقی متفاوت: $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} = -\alpha_1, -\alpha_2$

$\Rightarrow y(t) = k_1 e^{-\alpha_1 t} + k_2 e^{-\alpha_2 t}$ شکل حاصل جمع دو سیستم مرتبه اول می‌باشد.



۲- $\xi = 1$: حالت میرایی بحرانی (critical damped): دو قطب حقیقی برابر هم: $s_{1,2} = -\zeta\omega_n, -\zeta\omega_n = -\alpha_1 = -\alpha_2$

$\Rightarrow y(t) = k_1 e^{-\alpha_1 t} + k_2 t e^{-\alpha_1 t}$ شکل ضرایب:

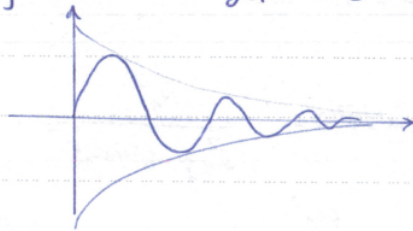
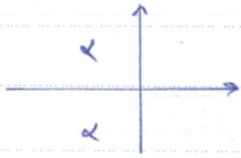


سیستم‌های مرتبه دوم با تغییر عمل می‌کنند. زمان رسیدن آن‌ها به حالت پایدار.

۳- $0 < \zeta < 1$: under damped : زیر میرایی : این حالت قطب مزدوج مختلط سمت چپ محور دلتا :

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d\sqrt{1-\zeta^2}$$

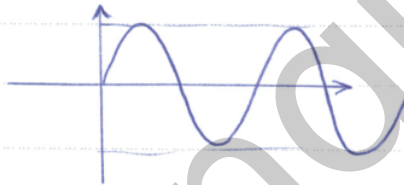
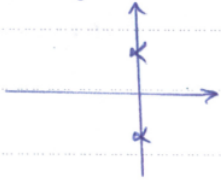
$$y(t) = k e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi) \quad \text{تخمین میرایی}$$



۴- $\zeta = 0$: حالت نوسانی : (undamped) oscillation : این حالت قطب مزدوج مختلط بر محور دلتا قرار می‌گیرد

$$s_{1,2} = \pm j\omega_n$$

$$\Rightarrow y(t) = \omega_n \sin(\omega_n t) \quad \text{تخمین نوسانی}$$



Control engineers.ir

برای صفت *underdamped* :
 پاسخ ضربه‌ای
 ۰۲۴۱

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

پاسخ ضربه‌ای

$$Y(s) = G(s)R(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2 - \zeta^2\omega_n^2}$$

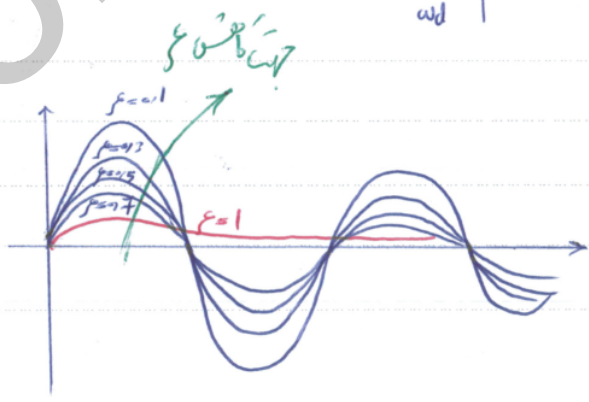
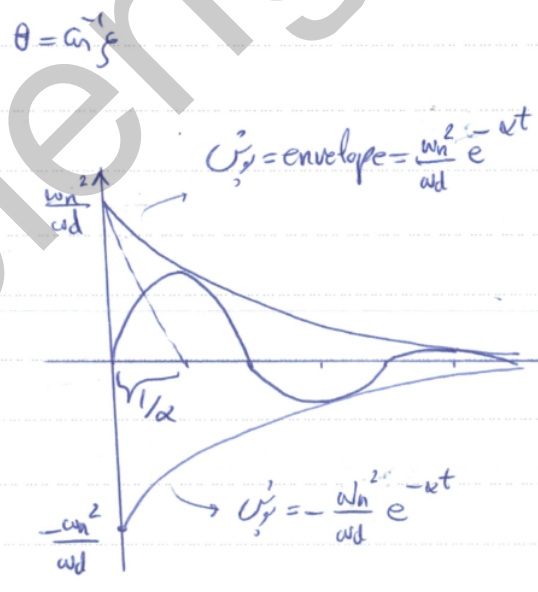
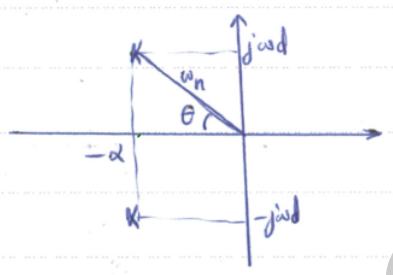
$$= \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2)} = \frac{\omega_n \cdot \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} / \sqrt{1-\zeta^2}}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2)}$$

$\frac{a}{s^2 + \omega^2} \rightarrow \sin at$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t)$$

$\zeta\omega_n \triangleq \alpha$: فرکانس میرایی مجازی
 exponential damping frequency
 $\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \triangleq \omega_d$ فرکانس طبیعی میرایی
 damped frequency

$$\Rightarrow y(t) = \frac{\omega_n^2}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t)$$



تا چه مقدار تغییرات میرایی پاسخ ضربه‌ای
 با کاهش میرایی شدن عرض بصری
 دامنه نوسانات افزایش پیدا می‌کند

$$Y(s) = G(s)R(s) = \frac{1}{s} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$A = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \Big|_{s=0} = 1$$

$$\omega_n^2 \equiv A(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) + (Bs + C)s$$

$$s=1 \Rightarrow \begin{cases} \omega_n^2 = 2\zeta\omega_n + \omega_n^2 + B + C \end{cases}$$

$$s=-1 \Rightarrow \underline{\omega_n^2 = -2\zeta\omega_n + \omega_n^2 + B - C}$$

$$2\omega_n^2 = 2\omega_n^2 + 2 + 2B \rightarrow B = \omega_n^2 - \omega_n^2 - 1 = -1$$

$$C = -2\zeta\omega_n - 1 - B = -2\zeta\omega_n - 1 + 1 = -2\zeta\omega_n$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{-2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{s} - \frac{(s + \zeta\omega_n)}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \zeta^2)} - \frac{\zeta\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} / \sqrt{1 - \zeta^2}}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \zeta^2)}$$

$$\rightarrow y(t) = u(t) - e^{-\zeta\omega_n t} \left[\cos(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t) \right] u(t)$$

$$= u(t) - e^{-\zeta\omega_n t} \left[\cos(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t) \right] u(t)$$

$$= u(t) - e^{-\zeta\omega_n t} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\right)^2} \cos(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi) \right] u(t)$$

$$\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{1 - \zeta^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \times \frac{\omega_n}{\omega_n} = \frac{\omega_n}{\omega_d}$$

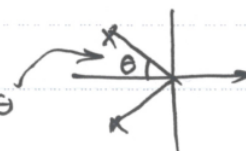
$$\tan^{-1} \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \tan^{-1} \frac{\zeta \omega_n}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \tan^{-1} \frac{\zeta \omega_n}{\omega_d}$$

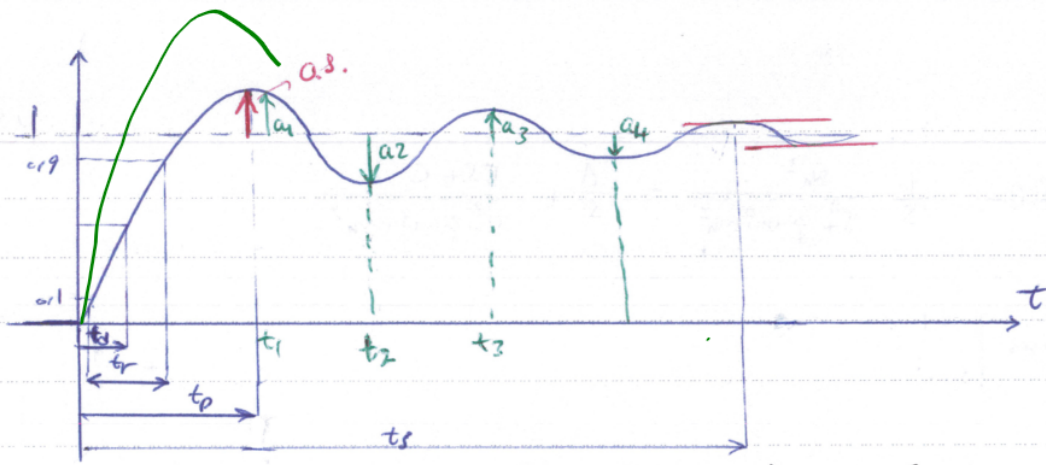
$$y(t) = 1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi), \quad \phi = \tan^{-1} \frac{\zeta \omega_n}{\omega_d}$$

سید علی

$$\text{مثال 6: } y(t) = 1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\zeta \omega_n}{\omega_d} = \theta$$





از قلاب پنجمین تکر: برای $0.4 < \zeta < 1$ یک تغییر خطی از td صورت $td = \frac{0.75 + 1}{\omega_n}$ می‌گیرد.
 برای $0.4 < \zeta < 1$ یک تغییر خطی از tr صورت $tr = \frac{2.55 + 0.8}{\omega_n}$ می‌گیرد.

t_d : Delay time = مدت زمان لازم برای رسیدن به 50% مقادیر پایایی : زمان تأخیر

t_r : rise time = زمان صعود = مدت زمان لازم برای رسیدن از 10% تا 90% مقادیر پایایی :
 $t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}$

این رابطه برای تعیین t_r بطور دقیق از 0.7 تا 100% ضریب ضریب است.

t_p : pick time = زمان اولین فراموشی :
 $t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$

t_s : settling time = زمان نشست = زمان که پاسخ سیستم به 98% مقادیر پایایی می‌رسد :
 $t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n}$

0.5 = $e^{-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = e^{-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \times \frac{\omega_n}{\omega_n}} = e^{-\frac{\zeta \pi}{\omega_d}} = e^{-\pi \zeta \omega_d}$: Overshoot = درصد فراموشی : 0.5 %

$$= \frac{y(t_p) - 1}{y(\infty)}$$

$$a_k = e^{-\frac{k\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}, \quad t_k = \frac{k\pi}{\omega_d}$$

۱- با کاهش ζ ، مقدار لرزش افزایش می‌یابد تا جایی که برای $\zeta = 0$ ، پاسخ سیستم صورت نوسانی می‌گیرد.

۲- از لحاظ سرعت پاسخ (ص)، سیستم زودتر به مقادیر پایایی می‌رسد و آن هم سریع‌تر از نوسان می‌باشد.

۳- عدد ω_n دو بار کمتر مستقل از هم می‌باشد.

۴- اگر زمان نشست صورت t_s زمان لازم برای رسیدن پاسخ به 95% مقادیر پایایی تعیین شود، در این صورت $t_s = \frac{3}{\zeta}$ ظاهر می‌شود.

۵- در جدول زیر (در صورت) آنها به بار آمده. عمده ترین بارها هستند و مستقل از بار دیگر در نظر گرفته می شود. مقدار تراکم بارها را با استفاده

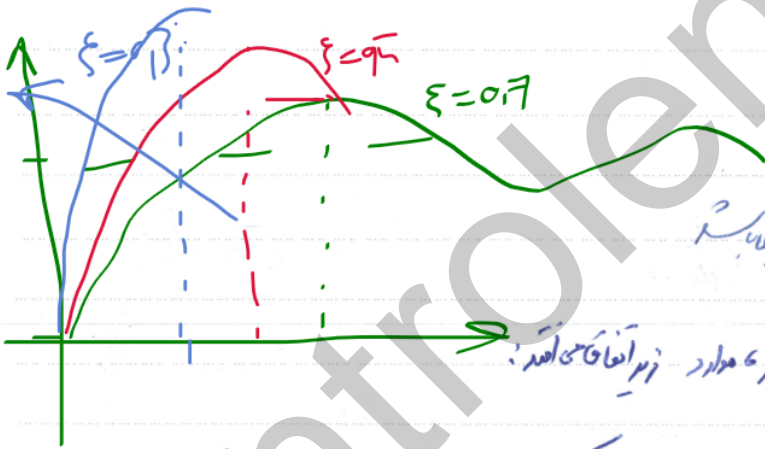
از رابطه داده شده در کتاب حساب کرد ولی به خاطر سیرک هند در جدول زیر با عمده ترین بارها، حالتی از لطف نمی باشد

ع	تقریب	واقع	ع	0.9%	0.9%
0.7	5%	4.61%	0.3	37%	37.23%
0.6	10%	9.48%	0.25	45%	44.43%
0.5	15%	16.3%	0.2	52%	52.66%
0.45	20%	20.93%	0.15	62%	62%
0.4	25%	26.38%	0.1	73%	72.92%
0.35	30%	30.92%	0.05	85%	85.44%

۶- رابطه نوشته شده آنها را با سیستم مرتبه دوم صورت $\frac{k \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$ مطابق کتاب در صورت جدول

قطرهای تغییر یافته و رابطه بین آنها را استخراج کرد. اگر بخواهیم سیستم های مرتبه دوم را نسبت به رابطه مخصوصی

۵- سیستم مرتبه دوم نمونه تقریب بزنیم



۷- برای $\omega = \omega_n$ مقدار لرزش برابر با $\frac{1}{2\zeta}$ می باشد

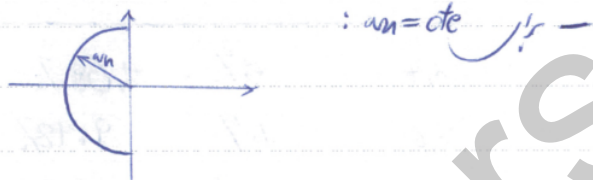
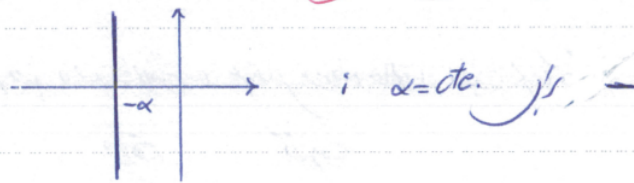
۸- با کاهش ζ و نزدیک شدن آن به مقدار $\frac{1}{2}$ به صفر، مقدار زیر آن افزایش می یابد

۹- فرکانس انتقالی برابر می آید. $\omega_c = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ (معمولاً با رابطه $\omega_c = \frac{\pi}{4\zeta}$ می توان کرد)

۱۰- کاهش پهنای باند (معمولاً با رابطه $\omega_c = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}$ می توان کرد) - $\omega_c = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}$ می توان کرد

سیستم کمتری مقود (معمولاً با رابطه $\omega_c = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}$ می توان کرد)

مکانی، زمانی برابر بارانهای ثابت



0.3 = alpha + j*omega_d = -zeta*omega_n + j*omega_n*sqrt(1-zeta^2) = -0.7 + j*7.1

$$G(s) = \frac{100}{s^2 + 14s + 100}$$

دسترسی برابر تابع تبدیل دایره مسجرت

احاطه بندی

$$\frac{100}{s^2 + 14s + 100} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \Rightarrow \omega_n^2 = 100 \rightarrow \omega_n = \sqrt{100} = 10$$

$$2\zeta\omega_n = 14 \Rightarrow \zeta = \frac{14}{2 \times 10} = \frac{14}{20} = \frac{14}{20} = 0.7$$

$$\zeta = 0.7 \Rightarrow 0.3 = e^{-\frac{\zeta T}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad \text{درخواست: } 0.3 = 5\%$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = 10 \times \sqrt{1-0.7^2} = 10 \times \sqrt{1-0.49} = 10 \times \sqrt{0.51} = 10 \times 0.71 = 7.1$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} = \frac{4}{0.7 \times 10} = \frac{4}{7} = 0.57 \quad t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} = \frac{\pi - \cos^{-1} \zeta}{\omega_d} = \frac{\pi - \pi/4}{7.1} = 0.33$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{7.1} = 0.44$$

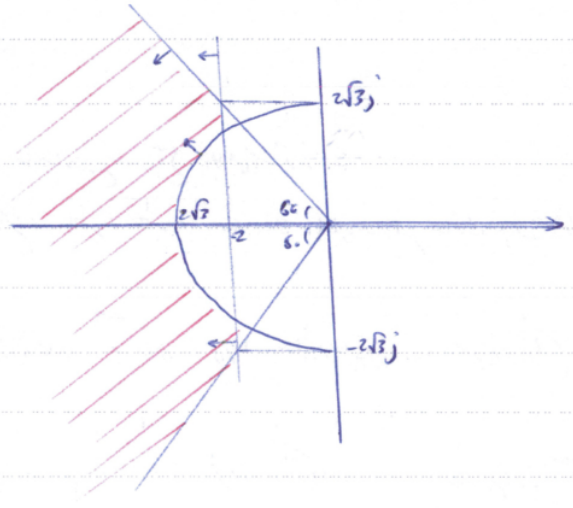
تعداد از تعداد

مسئله: محدود از صفحه s، اضعاف کننده در آن زمان نسبت به سیستم 2 sec، درصد تراش 15٪، توان طبیعی سیستم بیشتر

$$t_s = 2 = \frac{4}{\zeta} \Rightarrow \zeta = 2$$

$$\omega_n = 2\sqrt{2} \text{ rad/sec}$$

$$0.5 = 15\% \Rightarrow \zeta = 0.5 \Rightarrow \theta = \cos^{-1} 0.5 = 60^\circ$$



سیستم های مرتبه 3 و بالاتر:

سیستم های مرتبه 3 و بالاتر، از آن جهت که حاصل جمع سیستم های مرتبه اول و مرتبه دوم نیست. بنابراین، خروجی این سیستم ها به

در درگاه های مختلف، برابر حاصل جمع خروجی سیستم های مرتبه اول و دوم به آن درگاه ها خواهد بود. در حالت کلی از روابط گفته شده برابری

زمان نشست، زمان صعود و ... برابر سیستم های مرتبه اول و دوم، یعنی برای سیستم های مرتبه بالاتر استفاده کرد.

قطب های غالب
dominant poles

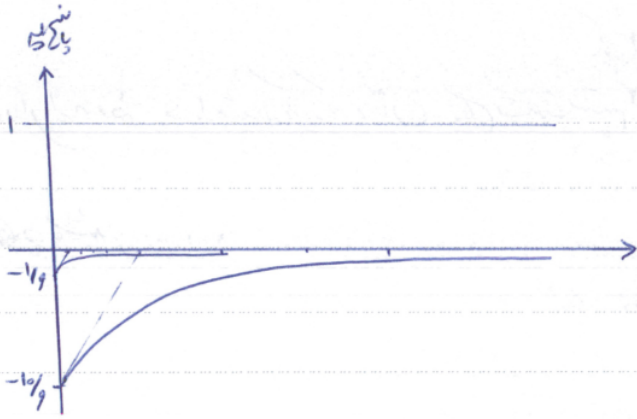
خروجی درگاه قطب های که نزدیک محور حقیقی هستند، آراسته از خروجی درگاه دورتر از محور حقیقی و بسیار کوچک شوند.

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+10)}$$

نتیجه:

$$Y(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+10)} = \frac{1}{s} - \frac{1/9}{s+1} - \frac{1/9}{s+10}$$

$$\Rightarrow y(t) = \left(1 - \frac{10}{9}e^{-t} - \frac{1}{9}e^{-10t}\right) u(t)$$



پایه سیستم برابر با مجموع سه پایه است. $s = -10$ خطی مستقیم به مقدار نهایی خود میل می کند. همچنین آنتی عمل e^{-10t} در $t=0$ رخ می دهد.

در حالیکه با اندازه e^{-t} در $t=0$ خطی کوچک است. پس می توانیم به عنوان تصویر مناسب، قطب $s = -10$ در قطب دورتر

را نادیده بگیریم (آنت شده). باین معادله های پایانه در تقویت و پاسخ تبدیل اصلی (یک) است در $t=0$ صورت

تقریب ما به این عدد ثابت میزنیم (تقریب $s = -1$ که مقدار سیستم را مشخص می کند، قطب غالب گویند. به قطب

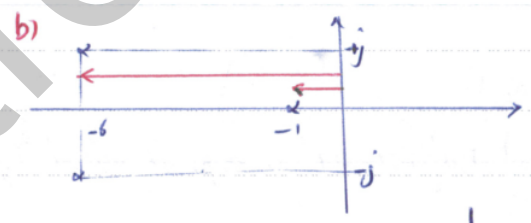
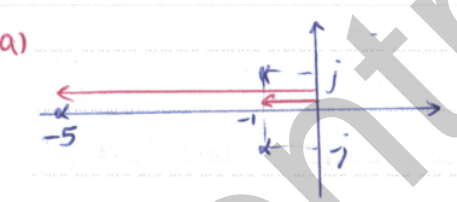
$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+10)} \approx \frac{1}{s+1}$$

-1 که تا آنتر حدی در $t=0$ سیستم ندارد، قطب غیر غالب گویند

مقدار حذف قطب غیر غالب:

در صورتی که در $t=0$ قطب غیر غالب وجود داشته باشد

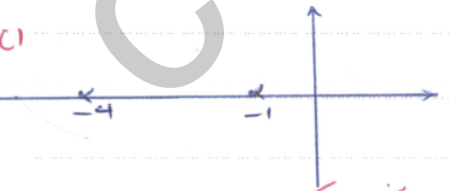
اگر ضریب ضریب قطب غیر غالب، 5 برابر با ضریب ضریب قطب دیگر باشد، می توانیم قطب غیر غالب را حذف کرد



مثال:

$$\frac{1}{(s+5)(s^2+2s+2)} \approx \frac{0.2}{s^2+2s+2}$$

$$\frac{1}{(s^2+72s+37)(s+1)} \approx \frac{1/37}{s+1}$$



d)

$$\frac{1}{(s+1)(s+10)(s+100)} \approx \frac{1/100}{(s+1)(s+10)} \approx \frac{1/1000}{s+1}$$

نمی توان حذف کرد

$$\frac{1}{(s+1)(s+4)}$$

بایداری به معنای BIBO

آنگاه خروجی سیستم به ازای تمام ورودی‌های کراندار و در تمام زنجیره‌ی $-\infty < t < +\infty$ ، کراندار باشد، آن سیستم را بایداری BIBO می‌گویند.

با استفاده از تابع ضربه سیستم‌های LTI، بایداری BIBO را می‌توان به صورت بیان کرد: یک سیستم LTI با تابع ضربه $g(t)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(\tau)| d\tau < \infty$$

مطلقاً کراندار خواهد بود. معنی

درستی این مطلب را می‌توان به صورت زیر تحقیق کرد:

همه سیستم‌های LTI با تابع ضربه $g(t)$ و ورودی $r(t)$ که کراندار است، خروجی $y(t)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$y(t) = r(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) r(t-\tau) d\tau$$

از طرفین این رابطه قدر مطلق می‌گیریم:

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) r(t-\tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\tau)| |r(t-\tau)| d\tau$$

فرض می‌کنیم ورودی سیستم محدود است. به عبارت دیگر، همان وجود دارد که برای تمامی زمانها $|r(t)| < \alpha$ است. واضح است که این صورت

کران‌پذیری عبارت $r(t-\tau)$ نیزه خواهد بود. پس:

$$|y(t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\tau)| |r(t-\tau)| d\tau \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\tau)| \alpha d\tau = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\tau)| d\tau$$

با توجه به آن‌که فوق، $y(t)$ زمانی کراندار است که عبارت سمت راست آن کراندار باشد یعنی $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(\tau)| d\tau < \beta < \infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(\tau)| d\tau < \beta < \infty$$

با استفاده از تبدیل لاپلاس با تابع ضربه سیستم می‌توان بایداری را بررسی کرد. در صورتی که می‌توان گفت که سیستم بایداری است که معادله مشخصه آن، برای

ریشه حذور، دشار و یا صحت است آن ثابت باشد. به عبارت دیگر تمامی ریشه معادله مشخصه سمت چپ محور دشار قرار گیرند. در این صورت مطلب را

می‌توان به صورت زیر بررسی کرد:

فرض کنید $G(s)$ تابع تبدیل یک سیستم می‌باشد. می‌توانیم تابع تبدیل یک سیستم همان تبدیل لاپلاس با تابع ضربه آن سیستم است. یعنی:

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-st} dt$$

پس با استفاده از $G(s)$ داریم:

$$|G(s)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-st} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| |e^{-st}| dt$$

در حالتی که s یک عدد مختلط است، می‌توان آن را به صورت $s = \sigma + j\omega$ نشان داد که در آن σ قسمت حقیقی و ω قسمت مجازی s هستند. با این نوشتار،

$$e^{-st} \text{ برابر با } |e^{-\omega t}| \text{ معروف است: } |e^{-st}| = |e^{-(\sigma + j\omega)t}| = |e^{-\sigma t}| |e^{-j\omega t}| = |e^{-\sigma t}| \cdot 1 = |e^{-\sigma t}|$$

$$|G(s)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| |e^{-\omega t}| dt$$

بنابراین:
 مثال فرض می‌کنیم s برابر قطب‌های $G(s)$ است. در این صورت مقدار $|G(s)|$ برابر ∞ خواهد شد یعنی:

$$\infty \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| |e^{-\omega t}| dt \quad \text{میزای } s = \text{قطب } G(s):$$

اگر σ بی‌نهایت باشد (یعنی قطب $G(s)$ سمت راست محور $j\omega$ باشد) مقدار $e^{-\omega t}$ هرگز کوچکتر از 1 است. اگر

نه برابر صفر باشد (یعنی قطب $G(s)$ روی محور $j\omega$ باشد) مقدار $e^{-\omega t}$ برابر 1 است. بنابراین اگر σ کوچکتر و یا مساوی صفر باشد

مقدار $e^{-\omega t}$ کوچکتر و یا مساوی 1 خواهد بود. بنابراین داریم:

$$\infty \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| |e^{-\omega t}| dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| |x| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که برای آن قطب‌های $G(s)$ که در سمت راست محور $j\omega$ است مقدار $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt$ بی‌نهایت است و

برهمین مفهوم پایایی BIBO سیستم نامیده می‌شود.

در مورد سیستم‌های خطی تغییر ناپذیر یا زمان از مفهوم پایداری BIBO (Bounded Input Bounded Output) استفاده می‌کنیم.

پایداری BIBO به این معناست که اگر ورودی محدود به سیستم وارد شود، خروجی نیز محدود باشد. اگر stable است.

در مقابل ورودی محدود، خروجی سیستم نامحدود باشد سیستم unstable است.

برای سیستم پایدار: $\forall t: x(t) < \infty \Rightarrow y(t) < \infty$

با استفاده از فرکانس می‌توانیم پایداری را به صورت زیر بررسی کنیم:

سیستم پایدار ضریب $h(t)$ باید داشته باشد که مطلقاً آنقدر بزرگ نباشد: $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$

با استفاده از تبدیل لاپلاس می‌توانیم پایداری را به صورت زیر بررسی کنیم:

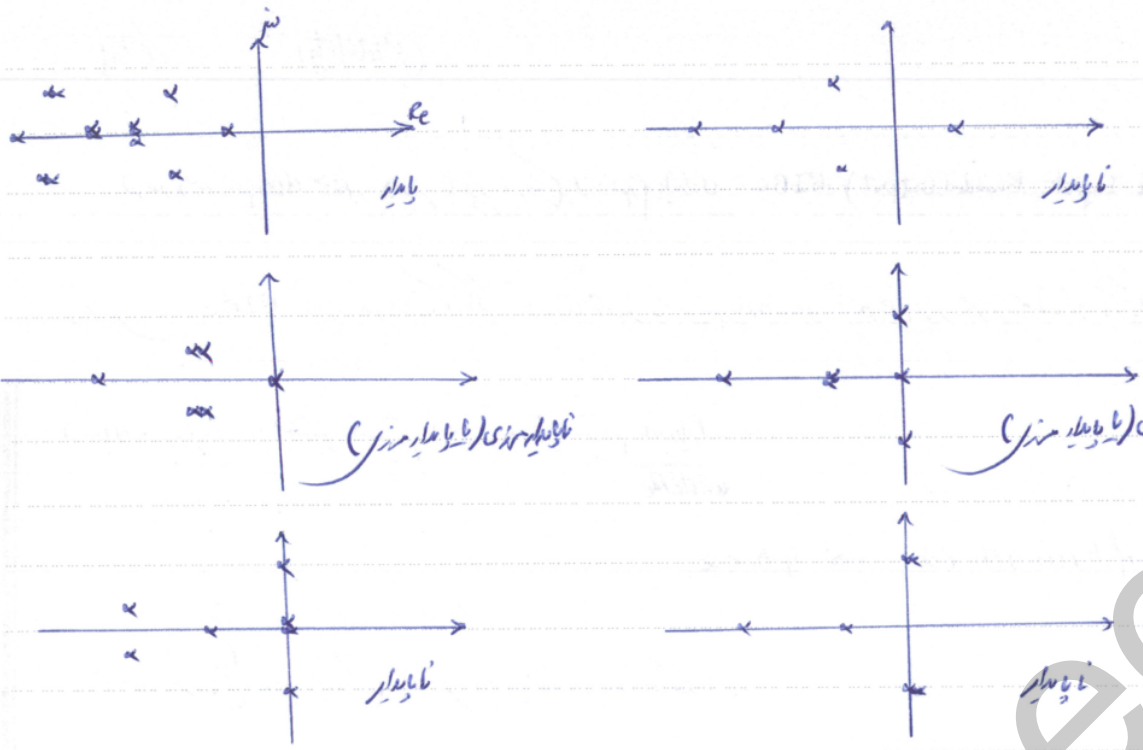
سیستم با معادله مشخصه $p(s)$ پایداری را بررسی می‌کنیم. سمت چپ محور دلتا واقع شده باشد. نکته: پایداری یک سیستم غیر خطی را نمی‌توانیم بررسی کنیم و باید همیشه ورودی را محدود نگه داریم. معادله زیر را در مورد پایداری در نظر بگیرید:

اگر تمام ریشه‌های معادله مشخصه سمت چپ محور دلتا باشند سیستم پایدار می‌باشد.

اگر تنها یکی از قطب‌های معادله مشخصه سمت راست محور دلتا باشد، سیستم نامایدار است.

اگر ریشه‌های معادله مشخصه سمت چپ محور دلتا و روی محور دلتا باشد، اگر ریشه‌های روی محور دلتا در سمت راست باشند، یعنی هیچ ریشه‌ای در روی محور دلتا وجود ندارد. سیستم نامایدار می‌باشد. (به عنوان سیستم پایدار مرزی marginal stable نیز گفته می‌شود). اگر قطب‌های روی محور دلتا در سمت چپ باشند، سیستم پایدار است. سیستم نامایدار به این معنی است که در حالت گذار، خروجی سیستم بی نهایت خواهد شد.

مثال:



حالا چند جمله‌واره ساده‌تر را در نظر بگیرید و در نتیجه می‌توانید آن را در یک قطب‌های سیستم با استفاده از روش روث-هورویتز بررسی کنید. برای مثال تعداد قطب‌های مثبت حقیقی و راست محور مختصات را با استفاده از روش روث-هورویتز بررسی کنید.

روش روث-هورویتز (Routh-Hurwitz):

چند جمله‌واره ساده‌تر را در نظر بگیرید:

$$p(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + a_3 s^{n-3} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

برای اینکه ریشه‌های این معادله در سمت چپ محور مختصات باشند:

- 1) ضرایب $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ باید هم‌علامت باشند.
- 2) ضرایب $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ هم‌علامت باشند.

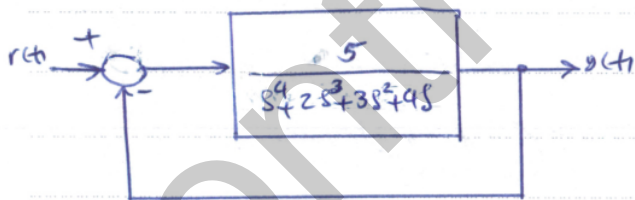
اگر یکی از ضرایب بالا صفر باشد، می‌تواند چند جمله‌واره $p(s)$ را به دو بخش تقسیم کند و با روی محور مختصات بررسی کند. بنابراین اگر ناپایداری عددی را در سیستم‌های ناپایدار رسته‌نویسی کنیم، می‌توان گفت که اگر معادله $p(s)$ را به دو بخش تقسیم کنیم، باید از شرایط فوق را نگاه داشته‌باشیم. آن سیستم ناپایدار است. هر شرط فوق، شرایط لازم گفته می‌شود. اگر معادله $p(s)$ را به دو بخش تقسیم کنیم، آن سیستم ناپایدار است (در اولین سیستم ناپایدار جزئی است).

s^n	a_0	a_2	a_4	$a_6 \dots$
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	$a_7 \dots$
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	\dots
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	\dots
\vdots				
s^0				

$$b_1 = \frac{-1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \quad b_2 = \frac{-1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}, \quad b_3 = \frac{-1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}, \dots$$

$$c_1 = \frac{-1}{b_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \quad c_2 = \frac{-1}{b_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \quad c_3 = \frac{-1}{b_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_7 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}$$

مقدار کامل شدن جدول راوی: تعداد قطبها را نسبت است محور دهن برابر تعداد تغییر علامتها در ستون اول جدول راوی باشد. اگر ستون اول جدول راوی تغییر علامتها نداشته باشد، پس علامتها در ستون اول راوی نسبت است محور دهن ندارد هیچ سیستم وایداری باشد.



مثال: وایداری سیستم حلقه بسته را بررسی کنید.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{5}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{5}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s}} = \frac{5}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5}$$

$$\Rightarrow p(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5$$

s^4	1	3	5
s^3	2	4	
s^2	1	5	
s^1	-6	0	
s^0	5		

- در ستون اول در تقسیم علامت داریم پس از 4 مرتبه علامت منفی

2 مرتبه سمت راست محور مثل محاسبه می کنیم علامت مثبت تا علامت مثبت

نکته: علامت را بدین ترتیب ها که در هم داریم در جدول هم برپایه شود.

نکته: در شکل جدول ثابت، المانها را در وسط می نویسیم عدد تقسیم با در یک عدد ضرب کرد.

علامت خاص جدول ثابت:

1) در این عضو یک سطح برای هم می شود ولی در این یکی از عناصر دیگر آن سطح غیر منفرجه است.

در صورتی که علامت در ستون اول را برای علامت در جدول ثابت را از این می رسم پس از آنجا جدول، علامت مثبت

در جدول ثابت علامت در ستون اول را مثبت می آوریم:

$$p(s) = s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3$$

مثال:

s^5	1	+	3	5
s^4	2	+	6	3
s^3	3	+	7/2	0
s^2	6E-7	-	3	
s^1	-6E^2+42E-49	+	0	
	12E-14			
	3	+		

$$\frac{6E-7}{E} \times \frac{7}{2} - 3E = \frac{7}{2} - \frac{3E}{\frac{6E-7}{E}} = \frac{7}{2} - \frac{3E^2}{6E-7} = \frac{7(6E-7) - 6E^2}{(6E-7)2} = \frac{-6E^2 + 42E - 49}{12E - 14}$$

$$p(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10 \quad (1)$$

ب) اگر این را که می بینیم علامت منفی است $p(s) = s^4 + s^3 + s^2 + s + k$ پس در تقسیم علامت در ستون اول با علامت در جدول ثابت علامت در ستون اول را مثبت می آوریم.

2) یک سطح جدول ثابت کلاً منفرجه است.

در این حالت از علامت کجی ایجاد شده توسط علامت در ستون اول استفاده می کنیم. علامت کجی را نوشتیم، از آن مشتق گرفته را به جدول منفرجه می رسم.

$p(s) = s^5 + 7s^4 + 6s^3 + 42s^2 + 8s + 56$ ضد:

s^5	1	6	8
s^4	7	42	56
s^3	$8 \rightarrow 28$	$8 \rightarrow 84$	0
s^2	21	56	
s^1	$\frac{28}{3}$	0	
s^0	56		

\rightarrow معادله کلی: $D(s) = 7s^4 + 42s^2 + 56$

$\frac{dD(s)}{ds} = 28s^3 + 84s$

خطی تغییر علامت در سمت اول جدول اولی رخ ندارد، پس تمام ریشه‌هاک $p(s)$ سمت چپ محور حقیقی قرار دارند.

نتیجه:

سطوحاً همگی در خط حقیقی قرار می‌دهند. معنی ملازمه کلی همواره از توان زوج می‌باشد.

ملازمه‌هاک $p(s)$ بر معادله کلی مابقی تقسیم است. معنی ریشه‌هاک ملازمه کلی اجزای ریشه‌هاک ملازمه‌هاک منفی می‌باشند.

ریشه‌هاک ملازمه کلی نسبت به مبدأ منفی است. بنابراین مابقی ریشه‌هاک ملازمه کلی در یک محور حقیقی قرار دارند یا بصورت



نتیجه: چهار ریشه‌هاک سمت چپ، سمت راست و یا در محور حقیقی قرار می‌گیرند. معنی ریشه‌هاک مثبت است.

$p(s) = s^6 + s^5 - 6s^4 - s^2 - s + 6$

s^6	1	-6	-1	6
s^5	1	6	-1	
s^4	$-6 \rightarrow -1$	0	$6 \rightarrow 1$	
s^3	-4	0		
s^2	$0 \rightarrow 4$	6		
s^1	$\frac{4}{3}$	0		
s^0	6			

\rightarrow معادله کلی: $D(s) = -s^4 + 1$

$\frac{dD(s)}{ds} = -4s^3$

دو تغییر علامت در سمت اول داریم \leftarrow از یک اسیب، دوری سمت راست محور دهنده می باشد.

$$D(s) = -s^4 + s^2 = 0 \Rightarrow -s^2(s^2 - 1) = 0 \Rightarrow s = 0, 1, -1$$

پس در کل ملاقات حضرات دوری سمت راست محور دهنده، دوری برابر محور دهنده $s=0$ ، دوری سمت چپ محور دهنده دارد.

مکان 4 قطب با استفاده از معادله کلی مشخص می شود. برابر دین آدراس (مکان) در قطب تغییر می توانیم ملاقات حضرات را بر

$$\begin{array}{r} s^6 + s^5 - 6s^4 - s^2 - s + 6 \\ \hline s^6 - s^2 \\ \hline s^5 - 6s^4 - s + 6 \\ \hline s^5 - s \\ \hline -6s^4 + 6 \\ \hline -6s^4 + 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

معادله کلی تقسیم کنیم:

$$\Rightarrow P(s) = (s^6 + s^5 - 6s^4 - s^2 - s + 6) = (s^4 - 1)(s^2 + s - 6) \quad \checkmark$$

$$P(s) = s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 \quad \text{مثال:}$$

s^5	1	24	-25
s^4	2	48	-50
s^3	$\rightarrow 8 \rightarrow 1$	$\rightarrow 96 \rightarrow 12$	
s^2	24	-50	
s^1	$\frac{288-50}{24}$	0	
s^0	-50		

$$\text{معادله کلی: } D(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50$$

$$\frac{dD(s)}{ds} = 8s^3 + 96s$$

یک تغییر علامت \leftarrow یک اسیب سمت راست محور دهنده

$$D(s) = s^4 + 24s^2 - 25 \Rightarrow (s^2 - 1)(s^2 + 25) = 0 \Rightarrow s = 1, -1, \pm 5j$$

تکلیف:

می دانیم اگر ریشه های معادله متخاصم و نامرئی مجزیه، نشان دهنده ریشه های روی محور دایره، ریشه های بیرون دایره صورت به سیستم پایدار مرزی (طی پایدار مرزی) گفته می شود. ولی اگر ریشه های روی محور دایره تکداری باشند (یعنی روی محور بیافزند) سیستم پایدار مرزی نیست. جدول اول و مقید پایدار مرزی، حالت آخر را نشان نمی دهد. مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$p(s) = (s+1)(s+z)^2 = s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + 1$$

با توجه به تجزیه این معادله متخاصم و با توجه به اینکه قطب های واقع در $s = \pm z$ تکداری هستند، سیستم پایدار است. جدول اول را شکل

s^5	1	2	1	
s^4	1	2	1	$\Rightarrow s^4 + 2s^2 + 1$ معادله تکلیفی
s^3	4	4		
s^2	1	1		$\Rightarrow s^2 + 1$ معادله تکلیفی
s^1	2	0		
s^0	1			

با توجه به نتایج جدول اول، سیستم پایدار است! می دانیم به دلیل تکداری بودن قطب های روی محور دایره، سیستم پایدار مرزی نیست. جدول اول نتیجه درستی درباره پایدار مرزی سیستم به ما ندارد! این حالت تنها زمانی ممکن است اتفاق بی افتد که قطب های سیستم بر روی محور دایره تکداری هستند. به عبارتی این اتفاق در حالتی محتمل است که این قطب کاملاً صفر در جدول اول ایجاد می شود. بنابراین در حالت خاص دوم، تنها به بررسی تغییر علامت ستون اول جدول اول اتفاق ندره و با توجه معادلات تکلیفی اینترم می کنیم.

در مثال فوق معادله تکلیفی اول یعنی $s^4 + 2s^2 + 1$ که بصورت $(s^2 + 1)^2$ نوشت. بنابراین مشخص است که ریشه های $s = \pm z$ را نشان

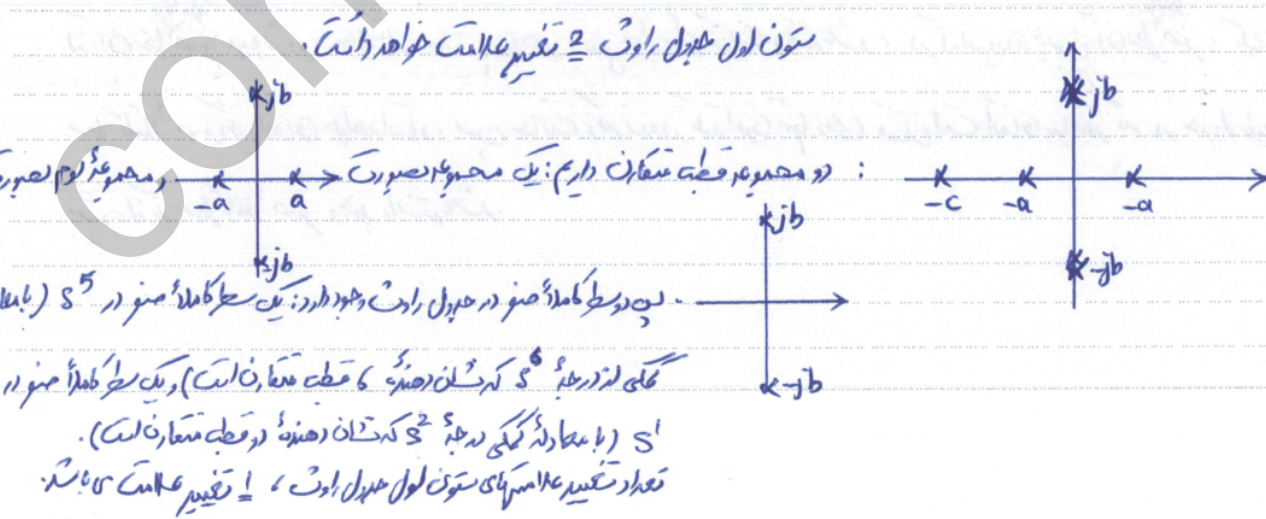
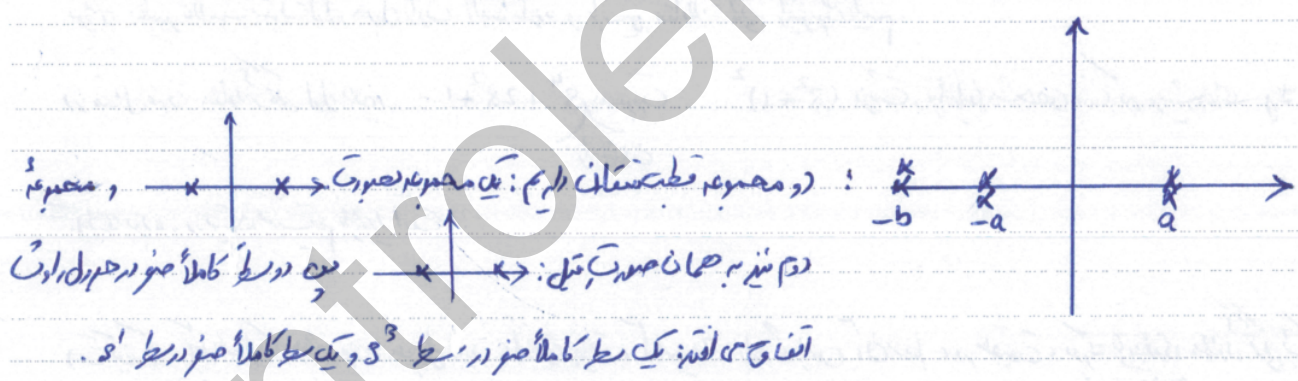
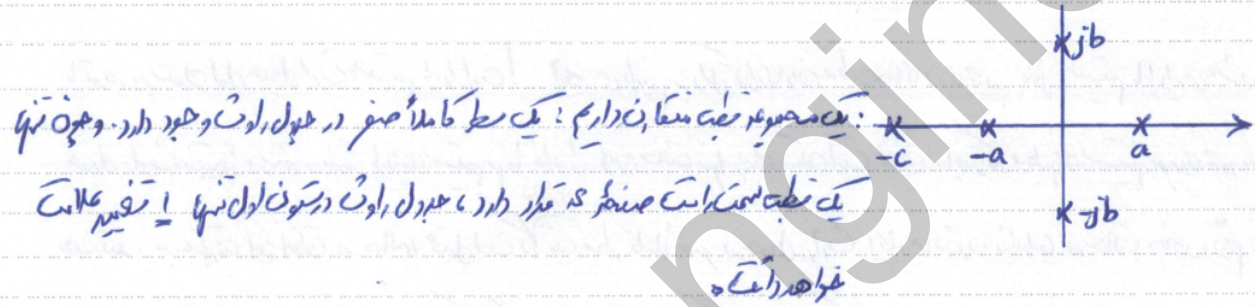
تکداری بوده و در نتیجه سیستم پایدار است.

متوجه کنید که اگر قطب کاملاً صفری در جدول اول اتفاق بی افتد، آنگاه قطب های روی دایره و بیرون آن سطح در حقیقت، هر یک باید روی معادله تکلیفی شکل شده از آن سطح صفر می شوند. مثال آنکه سیستم روی محور دایره قطب تکداری داشته باشد، در آنگاه قطب های بیرون آن سطح صفر، یک یا چندین سطح کاملاً صفری خواهد آمد. این حالت زنده زنده در ریشه فوق تنها زمانی ممکن است اتفاق بی افتد که در جدول اول بیرون ازین سطح کاملاً صفر وجود داشته باشد.

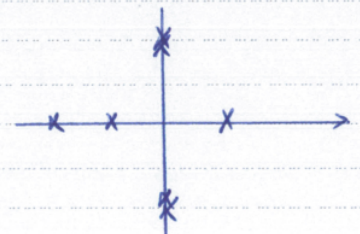
نکته: با توجه به توضیحات نکته قطب می توان گفت:

- هر محور از قطبهای ساده و متعارف در معادله مشخصه، باعث می شود یک سطح کاملاً صفر در جدول اوست ایجاد شود.
- وجود قطبهای ساده و مابعداری روی محور موهومی (که چون روی محور موهومی هستند پس مابعداری است به معنی مشخصه متعارف هستند) باعث تقسیم علامت در ستون اول جدول اوست نمی شوند. علاوه بر مابعداری بودن این قطبها را جهت تشخیص مابعداری و یا مابعداری سیستم را می توان از دو طریق مقاله کلمی و یا تعداد سطوح کاملاً صفر جدول مشخصه داد. اگر دو سطح از جدول اوست کاملاً صفر شود و ستون اول جدول مشخصه علامتی نداشته باشد، با توجه به نکات فوق، معادله مشخصه تماماً قطبهای تکواری هم روی محور موهومی دارد.

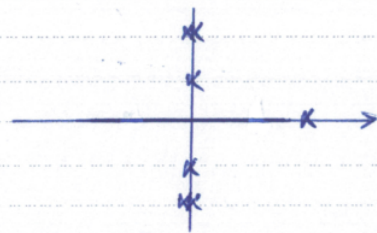
مثال: با توجه به مکان قطبهای تابع تبدیل که در زیر رسم شده اند، می توان تعداد تقسیم علامت های ستون اول جدول اوست و تکواری یا ساده بودن قطبهای روی محور موهومی را تشخیص داد.



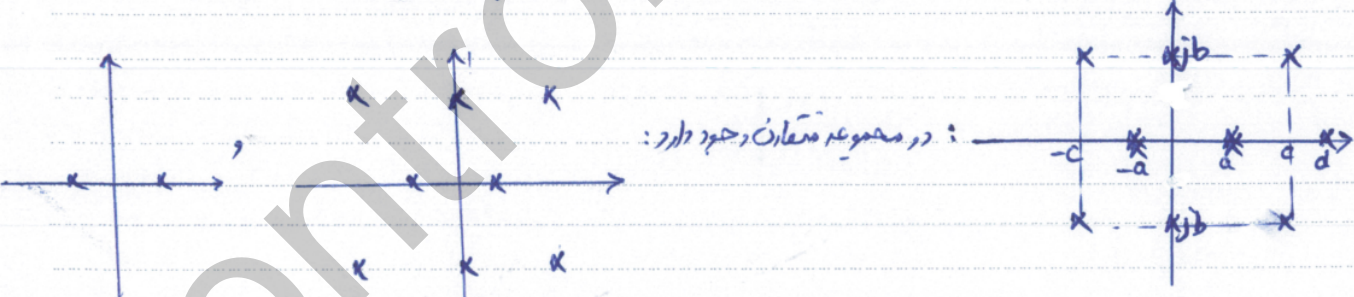
فرض کنید عددهای اطلاعات از رادیکال این سیستم، عددهای اولی را شکل داریم. ستون اولی یک تغییر علامت دارد، سطوحی s^5 ،
 s^4 کاملاً صفرند. با این اطلاعات می توان شکل رادیکال قطب این سیستم را آسان پیدا کرد: چون سطح s^5 صفرند است پس علامت کلی
 از رده s^4 است و سیستم حتماً s^4 قطب متعادل نیست به معنی دارد. چون تنها یک تغییر علامت وجود دارد پس با یکی از قطبهای
 متعادل سمت راست است و با قطب تنها (نامتعادل سیستم). اگر یکی از قطبهای متعادل سمت راست باشد پس 4 قطب از آن قطبهای
 متعادل روی محور دهن قرار دارند. و چون سطح s^4 نیز صفرند است پس ناچاراً قطبهای متعادل روی محور دهنی، تکراری هستند.
 یعنی رادیکال قطب سیستم بصورت زیر می باشد:



اگر قطب تنها (نامتعادل سیستم) سمت راست باشد، s^4 قطب متعادل باشد روی محور دهن قرار داشته باشد. و چون سطح s^4 نیز صفر
 است پس s^4 قطب متعادل، یک جفت تکراری هستند بنابراین رادیکال قطب های سیستم بصورت زیر خواهد بود:



وقتی گفته می شود توان مشخصه دارد رادیکال در دست، به رادیکال یک از شکل های فوق است. به عبارت دیگر، عددی رادیکال های قطب منفی،
 باعث می شوند سطوحی s^5 ، s^4 عددهای اولی صفر شود و عددهای اولی تنها یک تغییر علامت داشته باشد.

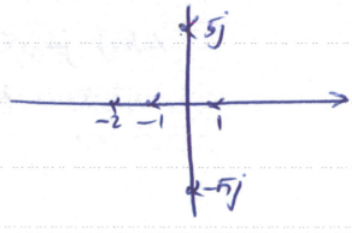


پس در سطح کاملاً صفر در عددهای اولی وجود دارد یعنی سطوحی s^4 و s^5 .
 چون سیستم s^4 قطب سمت راست دارد پس تغییر علامت در ستون اولی عددهای اولی می باشد.

$$s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 \quad | \quad \begin{array}{l} s^4 + 24s^2 - 25 \\ s + 2 \end{array}$$

$$\frac{s^5 + 24s^3 - 25s}{2s^4 + 48s - 50}$$

$$\frac{2s^4 + 48s - 50}{0} \Rightarrow p(s) = (s^4 + 24s^2 - 25)(s + 2)$$



نکته: اگر خواهم تعداد قطبها را بشمارم، سمت چپ، راست خط $s = a$ داریم، در معادله مشخصه به جای s قرار دهم

$s = a$ ، بین ترتیب این دو سمت راست و چپ، تعداد قطبها را بشمارم، این دو سمت راست و چپ خط $s = a$

مجموع مشخصه

تعداد قطبها را بشمارم: $T(s) = \frac{1}{s^3 + 8s^2 + 19s + 12}$ را در بازه $[-2, 0]$ مرتب آورید

$$p(s) = s^3 + 8s^2 + 19s + 12$$

s^3	1	19
s^2	8	12
s^1	140	0
s^0	12	

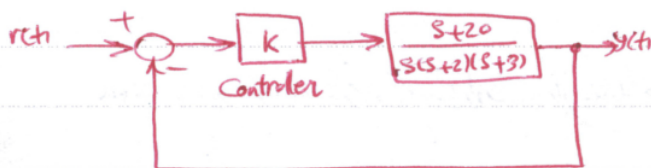
تمام اینها را معادله مشخصه سمت چپ خط $s = 0$ قرار دهم. برای اینکه بدانیم این معادله عدد تعداد اینها را بشمارم، سمت راست و چپ خط $s = -2$ را در s قرار دهم

$$\hat{p}(s) = p(s-2) = (s-2)^3 + 8(s-2)^2 + 19(s-2) + 12 = s^3 - 6s^2 + 12s - 8 + 8s^2 - 32s + 32 + 19s - 38 + 12 = s^3 + 2s^2 - s - 2$$

s^3	1	-1	
s^2	2	-2	$\rightarrow D(s) = 2s^2 - 2 \rightarrow \frac{dD(s)}{ds} = 4s$
s^1	4	0	
s^0	-2		

یک تغییر حالت داریم. یعنی از سه ریشه مفاد $p(s)$ یک ریشه مثبت است.
 خط $s = -2$ قرار دارد. ولی در این سیستم عموماً اینها یک ریشه مثبت محور مثل هرگز داریم.
 پس در کل ما یک تبدیل قطب بین $(-2, 0)$ و دو قطب مثبت خط $s = -2$ داریم

مثال در سیستم زیر، کنترلر یک کنترلر تناسبی می باشد. مقیوس k را برابر با مقدار موج سیستم مقدر کنیم مثبت آوریم



کنترلر تناسبی فقط یک بهره k است $(k(s) = k)$

تبدیل سیستم مقدر:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k(s+2)}{s(s+2)(s+3) + \frac{k(s+2)}{s(s+2)(s+3)}} = \frac{k(s+2)}{s^3 + 5s^2 + (k+6)s + 20k}$$

$$\Rightarrow p(s) = s^3 + 5s^2 + (k+6)s + 20k$$

s^3	1	$k+6$
s^2	5	$20k$
s^1	$20k-5k-30$	
	5	
s^0	$20k$	

$k+6$
 $20k$

$$\rightarrow \frac{15k-30}{5} > 0 \Rightarrow k < 2$$

$$20k > 0 \Rightarrow k > 0$$

برای پایداری: $0 < k < 2$

پایداری داخلی همه موارد

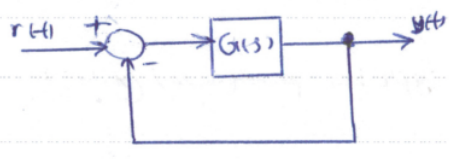
Steady-state error خطای حالت ماندگار:

تعریف: در یک سیستم کنترل، خطای برابر ورودی منهای خروجی است: $e(t) = r(t) - y(t)$

خطای حالت ماندگار: همان خطای وقتی که زمان به سمت بی نهایت میل دارد می شود: $e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s)$

محاسبه خطای حالت ماندگار، معیار ورودی طبقه اول، آنرا از آن در سیستم با ضریب واحد منفی:

سیستم کنترلی زیرا در نظر بگیرید. هر چه طبقه باز برای $G(s)$ و ضریب صورت واحد منفی می باشد:



$$Y(s) = R(s)T(s) = R(s) \frac{G(s)}{1+G(s)} \quad e(t) = r(t) - y(t) \Rightarrow E(s) = R(s) - Y(s)$$

$$\Rightarrow E(s) = R(s) - R(s) \frac{G(s)}{1+G(s)} = R(s) \left(1 - \frac{G(s)}{1+G(s)} \right) = R(s) \frac{1}{1+G(s)}$$

از تعریف خطای حالت ماندگار: $e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s R(s)}{1+G(s)}$

برای ورودی پله: $r(t) = u(t) \Rightarrow R(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \times \frac{1}{s}}{1+G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+G(s)} = \frac{1}{1+\lim_{s \rightarrow 0} G(s)}$

$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$ (ضریب خطای پله) $\Rightarrow e_{ss} = \frac{1}{1+k_p}$

اگر $G(s)$ قطبی در مبدأ داشته باشد، مقدار k_p به بی نهایت می رسد و خطای حالت ماندگار برابر صفر می باشد.

برای ورودی مثلثی: $r(t) = t u(t) \Rightarrow R(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{s^2} \times s}{1+G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s(1+G(s))} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s G(s)}$

$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s)$ (ضریب خطای مثلثی) $\Rightarrow e_{ss} = 1/k_v$

اگر $G(s)$ ، دو قطب مابسته در سر مبدأ داشته باشد، مقدار ka بی نهایت می شود و در نتیجه خطای حالت ماندگار، صفر می شود.

$r(t) = \frac{1}{2} t^2 u(t) \Rightarrow R(s) = \frac{1}{s^3}$ بلور ورودی سیستم:

$$\Rightarrow e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{s^3} \times s}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 (1 + G(s))} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)}$$

$ka = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = \text{مقدار خطای ثابت}$ ، $e_{ss} = \frac{1}{ka}$

تعریف نوع (تایپ) سیستم (System type):

تعداد قطبها در سر مبدأ سیستم مقادیر n را تعیین می کند. برای مثال تایپ سیستم $\frac{1}{s^2(s+1)}$ برابر با 2 است.

با توجه به تعریف تایپ سیستم، روابط بین مقدار ka در ورودیهای مختلف، جدول زیر را می توان تشکیل داد.

تایپ سیستم	در ورودی $\frac{1}{1+kp}$	در ورودی $\frac{1}{kv}$	در ورودی $\frac{1}{ka}$	$\frac{1}{3!} t^3 u(t)$
0	$\frac{1}{1+kp}$	∞	∞	∞
1	0	$\frac{1}{kv}$	∞	∞
2	0	0	$\frac{1}{ka}$	∞
3	0	0	0	$\frac{1}{k_3}$

$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$ $k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$ $k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$ $k_3 = \lim_{s \rightarrow 0} s^3 G(s) \dots$

1 - در تکلیف که خطای حالت ماندگار فقط برابر سیستم باید باشد، قابل محبت است. برابر سیستم نباید باشد، برابر ورودی، خروجی یکدست زناش به نسبت بی نهایت میل کرد، و در نتیجه خطای حالت ماندگار برابر بی نهایت می شود.

۲- ماتریس سیم (معادلات قطب در صفر) سیستم می تواند ورودی های بیشتری را به سیستم خطای حالت ماندگار میدهد

کند. ولی افزایش قطب در صفر باعث نزدیک شدن سیستم به میزان ایده آل می شود

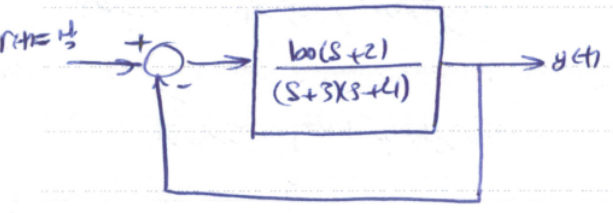
→ هر چقدر این نکتہ، نکتہ ذکر شده در صفحه ۱-۱۱ گفته شود.

۳- جدول قبل در اینجا مربوط به قطب برای سیستم با فرکانس واحد می باشد. اگر فرکانس نزدیک به ۱ نباشد، ما داریم

بر حسب خطای حالت ماندگار، از روابط اصلی و تعریف آن استفاده کنیم یعنی:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} (r(t) - y(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s)$$

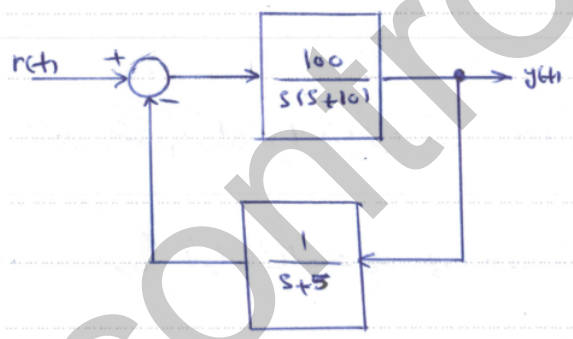
مثال: خطای حالت ماندگار سیستم زیر را به دوری علم به دست آورید:



$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{100(s+2)}{(s+3)(s+4) + 100(s+2)} = \frac{100(s+2)}{s^2 + 157s + 212} \quad p(s) = s^2 + 157s + 212 \rightarrow \text{پایدار}$$

$$\Rightarrow e_{ss} = \frac{1}{1+k_p} \quad k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{100(s+2)}{(s+3)(s+4)} = \frac{200}{3 \times 4} = \frac{50}{3} \rightarrow e_{ss} = \frac{3}{50}$$

مثال: خطای حالت ماندگار سیستم زیر را به دوری علم به دست آورید:



مشق: فرکانس واحد یعنی فرکانس ۱ را به دوری علم به دست آورید

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) \quad E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) - R(s)T(s) = R(s)(1 - T(s))$$

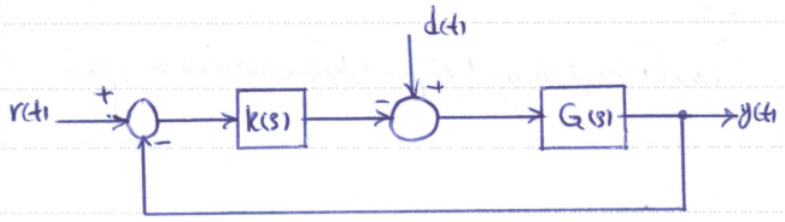
$$T(s) = \frac{100/s(s+10)}{1 + 100/(s(s+10)(s+5))} = \frac{100(s+5)}{s(s+5)(s+10) + 100}$$

برای خود که اگر سیستم حلقه باز نامی منظم فاز باشد سیستم حلقه بسته نیز منظم فاز خواهد بود. نامی منظم فاز خواهد بود.

$$\Rightarrow e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s R(s) (1 - T(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left(1 - \frac{100(s+5)}{s(s+5)(s+10)+100} \right)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left(\frac{s(s+5)(s+10)+100 - 100(s+5)}{s(s+5)(s+10)+100} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \frac{s^3 + 15s^2 + 50s + 100 - 100s - 500}{s(s+5)(s+10)+100}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-400}{100} = -4$$



فصل: سیستم‌های کنترل در نظر بگیرید:

خوش کنید سیستم حلقه بسته پایدار می باشد.

الف) فرض کنید $d(t) = 0$ می باشد. سیستم فوق ورودی $r(t)$ را بدین معنای حالت ماندگار، تعقیب می کند به شرط آنکه

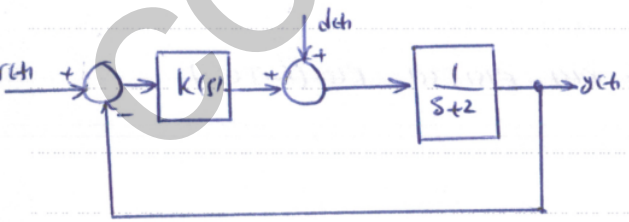
میز $k(s)G(s)$ شامل تمام قطب‌های نامایدار $R(s)$ باشد. (قطب‌های نامایدار مدنی قطب‌های در محور منفی و سمت راست آن)

ب) فرض کنید $r(t) = 0$ باشد. اگر اندک $d(t)$ در حالت ماندگار بر پهن خروجی $y(t)$ از این خواص در صورت $k(s)$

شامل تمام قطب‌های نامایدار $D(s)$ باشد.

داده: سیستم کنترلی زیر را در نظر گرفته، $k(s)$ ، آنبندی طراحی کنید. اولاً سیستم ورودی را بدین معنای حالت ماندگار تعقیب کند.

دوماً اگر اندک $d(t)$ در حالت ماندگار در خروجی از این برد. سوماً از انحراف برابر 15٪ باشد.



$$k(s) = \frac{k}{s}$$

از نیدلف برابریم:

$$\Rightarrow T(s) = \frac{k/s(s+2)}{s(s+2)+k} = \frac{k}{s^2+2s+k}$$

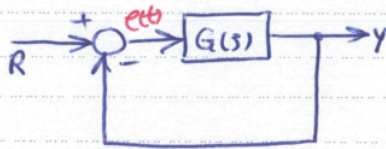
$$0.5 = 15\% \Rightarrow \zeta = 0.5 \quad 2\zeta\omega_n = 2 \Rightarrow$$

$$\omega_n = \frac{1}{\zeta} = 2 \Rightarrow k = \omega_n^2 = 4 \Rightarrow \boxed{k(s) = \frac{4}{s}}$$

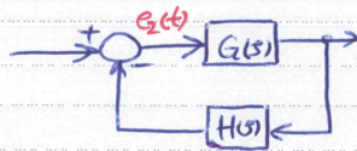
نقشه ۳- جدول قبل در رابط مربوط فقط برای سیستم کمی با فیدبک واحد منفی صادق هستند (سیستم الف) اگر بهره فیدبک برابر ۱ باشد (سیستم ب)

نمی توان برای محاسبه خطای خروجی از طریق رابطه $e_2(t) = r(t) - y(t)$ از جدول های گفته شده استفاده کرد.

الف:



ب:



در طبق این امر این است که سیگنال خروجی جمع کننده در بلوک را در اول همان سیگنال $e_2(t)$ تعریف نمود برای خطای حالت ماندگار است.

ولی سیگنال خروجی جمع کننده در بلوک را در اسم "ب" (سیگنال $e_2(t)$) در این سیگنال تعریف نمود در خطای حالت ماندگار نیست.

اگر در تعریف را در اسم "ب" هدف محاسبه خطای حالت ماندگار باشد، ناچاریم از رابط اصلی و تعریف خطای حالت ماندگار و قضیه مقدار نهایی

استفاده کنیم. ولی اگر در بلوک را در اسم "ب" هدف محاسبه خطای ماندگار سیگنال $e_2(t)$ باشد، می توان با مختصر قسیر در رابط k_p

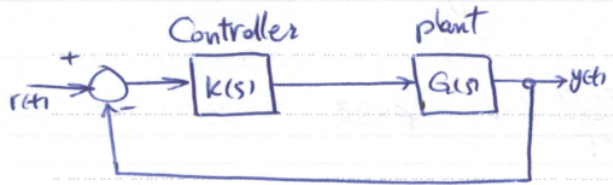
k_v ، k_a این مقدار را بصورت زیر در این حالت داریم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_2(t) = \frac{1}{1+k_p}, \quad k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) \quad \text{برای ورودی پله}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_2(t) = \frac{1}{k_v}, \quad k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s) \quad \text{برای ورودی شیب}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_2(t) = \frac{1}{k_a}, \quad k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s) \quad \text{برای ورودی شیب}$$

انواع کنترل کننده ها:



کنترل کننده تناسبی: Proportional Controller

تفاضل یک لایه ثابت می باشد: $K(s) = K_p$

کنترل کننده انتگرالی:

$K(s) = \frac{k_I}{s}$

مکانی یک قطب در مبدأ می باشد (در قطب در مبدأ می باشد)

کنترل کننده مشتقی:

$K(s) = k_D s$

مکانی یک صفر در مبدأ می باشد (در صفر در مبدأ می باشد)

کنترل کننده تناسب-انتگرالی: PI Controller

تفاضل یک لایه ثابت می باشد: $K(s) = k_p + \frac{k_I}{s} = \frac{k_p s + k_I}{s}$

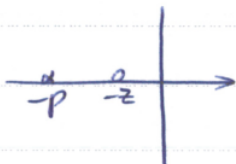
کنترل کننده تناسب-مشتقی: PD Controller

تفاضل یک لایه ثابت می باشد: $K(s) = k_p + k_D s$

کنترل کننده تناسب-مشتقی-انتگرالی: PID Controller

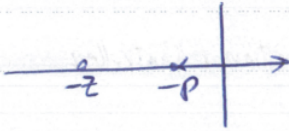
تفاضل یک لایه ثابت می باشد: $K(s) = k_p + \frac{k_I}{s} + k_D s = \frac{k_D s^2 + k_p s + k_I}{s}$

کنترل کننده پیش فاز: lead



$K(s) = \frac{k(s+z)}{s+p}, \quad z < p$

تندرکنده سبب فاز lag



$$K(s) = \frac{K(s+z)}{s+p}, \quad p < z$$

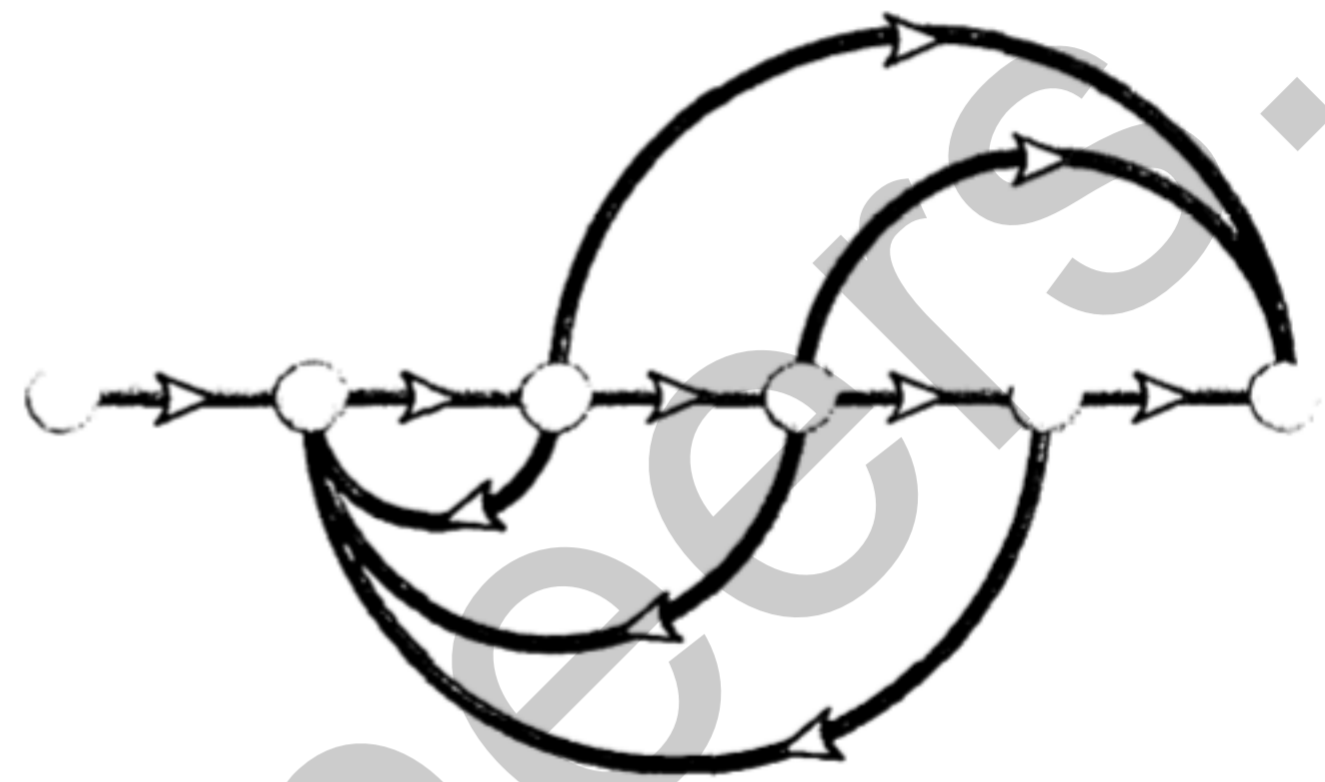
تندرکنده PI حالت خاص از تندرکنده lag سبب (تعبیر PI در صورت است)

تندرکنده PD حالت خاص از تندرکنده lead سبب (تعبیر آن بی نهایت است)

Control engineers.ir

Modeling in the Time Domain

3



This chapter covers only state-space methods.

State Space
SS

Chapter Learning Outcomes

After completing this chapter, the student will be able to:

- Find a mathematical model, called a *state-space* representation, for a linear, time-invariant system (Sections 3.1–3.3)
- Model electrical and mechanical systems in state space (Section 3.4)
- Convert a transfer function to state space (Section 3.5)
- Convert a state-space representation to a transfer function (Section 3.6)
- Linearize a state-space representation (Section 3.7)

Case Study Learning Outcomes

You will be able to demonstrate your knowledge of the chapter objectives with case studies as follows:

- Given the antenna azimuth position control system shown on the front endpapers, you will be able to find the state-space representation of each subsystem.
- Given a description of the way a pharmaceutical drug flows through a human being, you will be able to find the state-space representation to determine drug concentrations in specified compartmentalized blocks of the process and of the human body. You will also be able to apply the same concepts to an aquifer to find water level.

3.1 Introduction

Two approaches are available for the analysis and design of feedback control systems. The first, which we began to study in Chapter 2, is known as the *classical*, or *frequency-domain*, technique. This approach is based on converting a system's differential equation to a transfer function, thus generating a mathematical model of the system that *algebraically* relates a representation of the output to a representation of the input. Replacing a differential equation with an algebraic equation not only simplifies the representation of individual subsystems but also simplifies modeling interconnected subsystems.

The primary disadvantage of the classical approach is its limited applicability: It can be applied only to linear, time-invariant systems or systems that can be approximated as such.

A major advantage of frequency-domain techniques is that they rapidly provide stability and transient response information. Thus, we can immediately see the effects of varying system parameters until an acceptable design is met.

With the arrival of space exploration, requirements for control systems increased in scope. Modeling systems by using linear, time-invariant differential equations and subsequent transfer functions became inadequate. The *state-space* approach (also referred to as the *modern*, or *time-domain*, approach) is a unified method for modeling, analyzing, and designing a wide range of systems. For example, the state-space approach can be used to represent nonlinear systems that have backlash, saturation, and dead zone. Also, it can handle, conveniently, systems with nonzero initial conditions. Time-varying systems, (for example, missiles with varying fuel levels or lift in an aircraft flying through a wide range of altitudes) can be represented in state space. Many systems do not have just a single input and a single output. Multiple-input, multiple-output systems (such as a vehicle with input direction and input velocity yielding an output direction and an output velocity) can be compactly represented in state space with a model similar in form and complexity to that used for single-input, single-output systems. The time-domain approach can be used to represent systems with a digital computer in the loop or to model systems for digital simulation. With a simulated system, system response can be obtained for changes in system parameters—an important design tool. The state-space approach is also attractive because of the availability of numerous state-space software packages for the personal computer.

The time-domain approach can also be used for the same class of systems modeled by the classical approach. This alternate model gives the control systems designer another perspective from which to create a design. While the state-space approach can be applied to a wide range of systems, it is not as intuitive as the classical approach. The designer has to engage in several calculations before the physical interpretation of the model is apparent, whereas in classical control a few quick calculations or a graphic presentation of data rapidly yields the physical interpretation.

In this book, the coverage of state-space techniques is to be regarded as an introduction to the subject, a springboard to advanced studies, and an alternate approach to frequency-domain techniques. We will limit the state-space approach to linear, time-invariant systems or systems that can be linearized by the methods of Chapter 2. The study of other classes of systems is beyond the scope of this book. Since state-space analysis and design rely on matrices and matrix operations, you may want to review this topic in Appendix G, located at www.wiley.com/college/nise, before continuing.

3.2 Some Observations

We proceed now to establish the state-space approach as an alternate method for representing physical systems. This section sets the stage for the formal definition of the state-space representation by making some observations about systems and their variables. In the discussion that follows, some of the development has been placed in footnotes to avoid clouding the main issues with an excess of equations and to ensure that the concept is clear. Although we use two electrical networks to illustrate the concepts, we could just as easily have used a mechanical or any other physical system.

We now demonstrate that for a system with many variables, such as inductor voltage, resistor voltage, and capacitor charge, we need to use differential equations only to solve for a selected subset of system variables because all other remaining system variables can be evaluated algebraically from the variables in the subset. Our examples take the following approach:

1. We select a particular *subset* of all possible system variables and call the variables in this subset *state variables*.
2. For an n th-order system, we write n simultaneous, first-order differential equations in terms of the state variables. We call this system of simultaneous differential equations *state equations*.
3. If we know the initial condition of all of the state variables at t_0 as well as the system input for $t \geq t_0$, we can solve the simultaneous differential equations for the state variables for $t \geq t_0$.
4. We algebraically combine the state variables with the system's input and find all of the other system variables for $t \geq t_0$. We call this algebraic equation the *output equation*.
5. We consider the state equations and the output equations a viable representation of the system. We call this representation of the system a *state-space representation*.

Let us now follow these steps through an example. Consider the RL network shown in Figure 3.1 with an initial current of $i(0)$.

1. We select the current, $i(t)$, for which we will write and solve a differential equation using Laplace transforms.
2. We write the loop equation,

$$L \frac{di}{dt} + Ri = v(t) \quad (3.1)$$

3. Taking the Laplace transform, using Table 2.2, Item 7, and including the initial conditions, yields

$$L[sI(s) - i(0)] + RI(s) = V(s) \quad (3.2)$$

Assuming the input, $v(t)$, to be a unit step, $u(t)$, whose Laplace transform is $V(s) = 1/s$, we solve for $I(s)$ and get

$$I(s) = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{R}{L}} \right) + \frac{i(0)}{s + \frac{R}{L}} \quad (3.3)$$

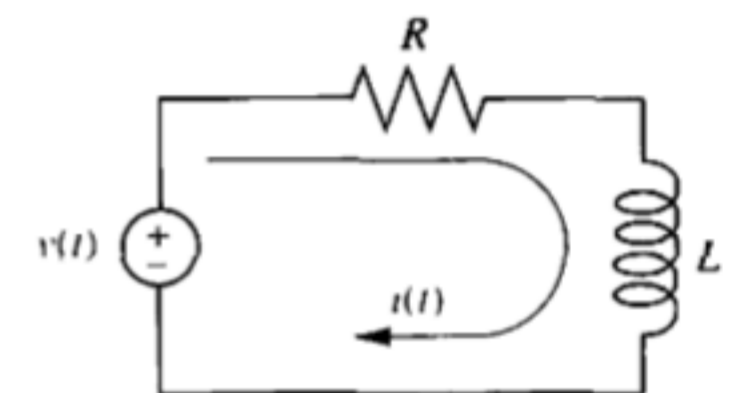


FIGURE 3.1 RL network

from which

$$i(t) = \frac{1}{R} \left(1 - e^{-(R/L)t} \right) + i(0)e^{-(R/L)t} \quad (3.4)$$

The function $i(t)$ is a subset of all possible network variables that we are able to find from Eq. (3.4) if we know its initial condition, $i(0)$, and the input, $v(t)$. Thus, $i(t)$ is a state variable, and the differential equation (3.1) is a *state equation*.

4. We can now solve for all of the other network variables *algebraically* in terms of $i(t)$ and the applied voltage, $v(t)$. For example, the voltage across the resistor is

$$v_R(t) = Ri(t) \quad (3.5)$$

The voltage across the inductor is

$$v_L(t) = v(t) - Ri(t) \quad (3.6)^1$$

The derivative of the current is

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L} [v(t) - Ri(t)] \quad (3.7)^2$$

Thus, knowing the state variable, $i(t)$, and the input, $v(t)$, we can find the value, or *state*, of any network variable at any time, $t \geq t_0$. Hence, the algebraic equations, Eqs. (3.5) through (3.7), are *output equations*.

5. Since the variables of interest are completely described by Eq. (3.1) and Eqs. (3.5) through (3.7), we say that the combined state equation (3.1) and the output equations (3.5 through 3.7) form a viable representation of the network, which we call a *state-space representation*.

Equation (3.1), which describes the dynamics of the network, is not unique. This equation could be written in terms of any other network variable. For example, substituting $i = v_R/R$ into Eq. (3.1) yields

$$\frac{L}{R} \frac{dv_R}{dt} + v_R = v(t) \quad (3.8)$$

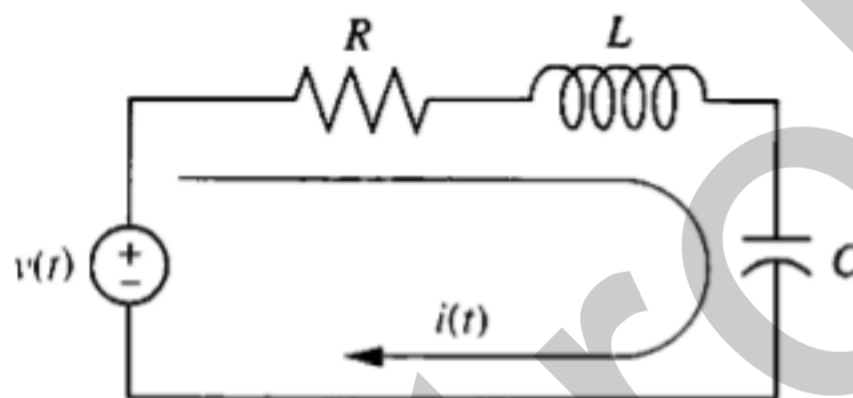


FIGURE 3.2 RLC network

which can be solved knowing that the initial condition $v_R(0) = Ri(0)$ and knowing $v(t)$. In this case, the state variable is $v_R(t)$. Similarly, all other network variables can now be written in terms of the state variable, $v_R(t)$, and the input, $v(t)$. Let us now extend our observations to a second-order system, such as that shown in Figure 3.2.

1. Since the network is of second order, two simultaneous, first-order differential equations are needed to solve for two state variables. We select $i(t)$ and $q(t)$, the charge on the capacitor, as the two state variables.
2. Writing the loop equation yields

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = v(t) \quad (3.9)$$

¹ Since $v_L(t) = v(t) - v_R(t) = v(t) - Ri(t)$.

² Since $\frac{di}{dt} = \frac{1}{L} v_L(t) = \frac{1}{L} [v(t) - Ri(t)]$.

Converting to charge, using $i(t) = dq/dt$, we get

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = v(t) \quad (3.10)$$

But an n th-order differential equation can be converted to n simultaneous first-order differential equations, with each equation of the form

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + b_i f(t) \quad (3.11)$$

where each x_i is a state variable, and the a_{ij} 's and b_i are constants for linear, time-invariant systems. We say that the right-hand side of Eq. (3.11) is a *linear combination* of the state variables and the input, $f(t)$.

We can convert Eq. (3.10) into two simultaneous, first-order differential equations in terms of $i(t)$ and $q(t)$. The first equation can be $dq/dt = i$. The second equation can be formed by substituting $\int i dt = q$ into Eq. (3.9) and solving for di/dt . Summarizing the two resulting equations, we get

$$\frac{dq}{dt} = i \quad (3.12a)$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{LC}q - \frac{R}{L}i + \frac{1}{L}v(t) \quad (3.12b)$$

3. These equations are the state equations and can be solved simultaneously for the state variables, $q(t)$ and $i(t)$, using the Laplace transform and the methods of Chapter 2, if we know the initial conditions for $q(t)$ and $i(t)$ and if we know $v(t)$, the input.
4. From these two state variables, we can solve for all other network variables. For example, the voltage across the inductor can be written in terms of the solved state variables and the input as

$$v_L(t) = -\frac{1}{C}q(t) - Ri(t) + v(t) \quad (3.13)^3$$

Equation (3.13) is an *output equation*; we say that $v_L(t)$ is a *linear combination* of the state variables, $q(t)$ and $i(t)$, and the input, $v(t)$.

5. The combined state equations (3.12) and the output equation (3.13) form a viable representation of the network, which we call a *state-space representation*.

Another choice of two state variables can be made, for example, $v_R(t)$ and $v_C(t)$, the resistor and capacitor voltage, respectively. The resulting set of simultaneous, first-order differential equations follows:

$$\frac{dv_R}{dt} = -\frac{R}{L}v_R - \frac{R}{L}v_C + \frac{R}{L}v(t) \quad (3.14a)^4$$

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{RC}v_R \quad (3.14b)$$

³Since $v_L(t) = L(di/dt) = -(1/C)q - Ri + v(t)$, where di/dt can be found from Eq. (3.9), and $\int i dt = q$.

⁴Since $v_R(t) = i(t)R$, and $v_C(t) = (1/C) \int i dt$, differentiating $v_R(t)$ yields $dv_R/dt = R(di/dt) = (R/L)v_L = (R/L)[v(t) - v_R - v_C]$, and differentiating $v_C(t)$ yields $dv_C/dt = (1/C)i = (1/RC)v_R$.

Again, these differential equations can be solved for the state variables if we know the initial conditions along with $v(t)$. Further, all other network variables can be found as a linear combination of these state variables.

Is there a restriction on the choice of state variables? Yes! Typically, the minimum number of state variables required to describe a system equals the order of the differential equation. Thus, a second-order system requires a minimum of two state variables to describe it. We can define more state variables than the minimal set; however, within this minimal set the state variables must be linearly independent. For example, if $v_R(t)$ is chosen as a state variable, then $i(t)$ cannot be chosen, because $v_R(t)$ can be written as a linear combination of $i(t)$, namely $v_R(t) = Ri(t)$. Under these circumstances we say that the state variables are *linearly dependent*. State variables must be *linearly independent*; that is, no state variable can be written as a linear combination of the other state variables, or else we would not have enough information to solve for all other system variables, and we could even have trouble writing the simultaneous equations themselves.

The state and output equations can be written in vector-matrix form if the system is linear. Thus, Eq. (3.12), the state equations, can be written as

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \tag{3.15}$$

where

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} dq/dt \\ di/dt \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/LC & -R/L \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} q \\ i \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}; \quad u = v(t)$$

Equation (3.13), the output equation, can be written as

$$y = \mathbf{Cx} + Du \tag{3.16}$$

where

$$y = v_L(t); \quad \mathbf{C} = [-1/C \quad -R]; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} q \\ i \end{bmatrix}; \quad D = 1; \quad u = v(t)$$

We call the combination of Eqs. (3.15) and (3.16) a *state-space representation* of the network of Figure 3.2. A state-space representation, therefore, consists of (1) the simultaneous, first-order differential equations from which the state variables can be solved and (2) the algebraic output equation from which all other system variables can be found. A state-space representation is not unique, since a different choice of state variables leads to a different representation of the same system.

In this section, we used two electrical networks to demonstrate some principles that are the foundation of the state-space representation. The representations developed in this section were for single-input, single-output systems, where y, D , and u in Eqs. (3.15) and (3.16) are scalar quantities. In general, systems have multiple inputs and multiple outputs. For these cases, y and u become vector quantities, and D becomes a matrix. In Section 3.3 we will generalize the representation for multiple-input, multiple-output systems and summarize the concept of the state-space representation.

3.3 The General State-Space Representation

Now that we have represented a physical network in state space and have a good idea of the terminology and the concept, let us summarize and generalize the representation for linear differential equations. First, we formalize some of the definitions that we came across in the last section.

Linear combination. A linear combination of n variables, x_i , for $i = 1$ to n , is given by the following sum, S :

$$S = K_n x_n + K_{n-1} x_{n-1} + \dots + K_1 x_1 \quad (3.17)$$

where each K_i is a constant.

Linear independence. A set of variables is said to be linearly independent if none of the variables can be written as a linear combination of the others. For example, given x_1 , x_2 , and x_3 , if $x_2 = 5x_1 + 6x_3$, then the variables are not linearly independent, since one of them can be written as a linear combination of the other two. Now, what must be true so that one variable cannot be written as a linear combination of the other variables? Consider the example $K_2 x_2 = K_1 x_1 + K_3 x_3$. If no $x_i = 0$, then any x_i can be written as a linear combination of other variables, unless all $K_i = 0$. Formally, then, variables x_i , for $i = 1$ to n , are said to be linearly independent if their linear combination, S , equals zero *only* if every $K_i = 0$ and no $x_i = 0$ for all $t \geq 0$.

System variable. Any variable that responds to an input or initial conditions in a system.

State variables. The smallest set of linearly independent system variables such that the values of the members of the set at time t_0 along with known forcing functions completely determine the value of all system variables for all $t \geq t_0$.

State vector. A vector whose elements are the state variables.

State space. The n -dimensional space whose axes are the state variables. This is a new term and is illustrated in Figure 3.3, where the state variables are assumed to be a resistor voltage, v_R , and a capacitor voltage, v_C . These variables form the axes of the *state space*. A trajectory can be thought of as being mapped out by the state vector, $\mathbf{x}(t)$, for a range of t . Also shown is the state vector at the particular time $t = 4$.

State equations. A set of n simultaneous, first-order differential equations with n variables, where the n variables to be solved are the state variables.

Output equation. The algebraic equation that expresses the output variables of a system as linear combinations of the state variables and the inputs.

Now that the definitions have been formally stated, we define the state-space representation of a system. A system is represented in state space by the following equations:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \quad (3.19)$$

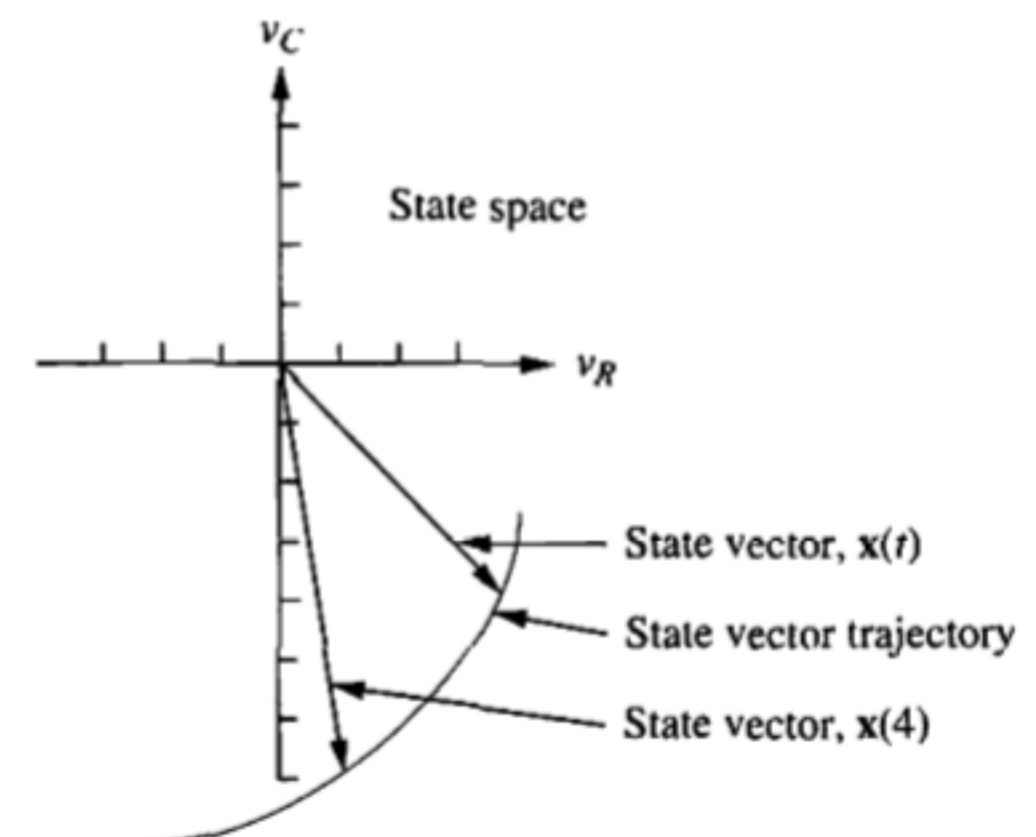


FIGURE 3.3 Graphic representation of state space and a state vector

for $t \geq t_0$ and initial conditions, $\mathbf{x}(t_0)$, where

- \mathbf{x} = state vector
- $\dot{\mathbf{x}}$ = derivative of the state vector with respect to time
- \mathbf{y} = output vector
- \mathbf{u} = input or control vector
- \mathbf{A} = system matrix
- \mathbf{B} = input matrix
- \mathbf{C} = output matrix
- \mathbf{D} = feedforward matrix

Equation (3.18) is called the *state equation*, and the vector \mathbf{x} , the *state vector*, contains the state variables. Equation (3.18) can be solved for the state variables, which we demonstrate in Chapter 4. Equation (3.19) is called the *output equation*. This equation is used to calculate any other system variables. This representation of a system provides complete knowledge of all variables of the system at any $t \geq t_0$.

As an example, for a linear, time-invariant, second-order system with a single input $v(t)$, the state equations could take on the following form:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1v(t) \quad (3.20a)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2v(t) \quad (3.20b)$$

where x_1 and x_2 are the state variables. If there is a single output, the output equation could take on the following form:

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + d_1v(t) \quad (3.21)$$

The choice of state variables for a given system is not unique. The requirement in choosing the state variables is that they be linearly independent and that a minimum number of them be chosen.

3.4 Applying the State-Space Representation

In this section, we apply the state-space formulation to the representation of more complicated physical systems. The first step in representing a system is to select the state vector, which must be chosen according to the following considerations:

1. A minimum number of state variables must be selected as components of the state vector. This minimum number of state variables is sufficient to describe completely the state of the system.
2. The components of the state vector (that is, this minimum number of state variables) must be linearly independent.

Let us review and clarify these statements.

Linearly Independent State Variables

The components of the state vector must be linearly independent. For example, following the definition of linear independence in Section 3.3, if x_1 , x_2 , and x_3 are chosen as state variables, but $x_3 = 5x_1 + 4x_2$, then x_3 is not linearly independent of x_1

and x_2 , since knowledge of the values of x_1 and x_2 will yield the value of x_3 . Variables and their successive derivatives are linearly independent. For example, the voltage across an inductor, v_L , is linearly independent of the current through the inductor, i_L , since $v_L = Ldi_L/dt$. Thus, v_L cannot be evaluated as a linear combination of the current, i_L .

Minimum Number of State Variables

How do we know the minimum number of state variables to select? Typically, the minimum number required equals the order of the differential equation describing the system. For example, if a third-order differential equation describes the system, then three simultaneous, first-order differential equations are required along with three state variables. From the perspective of the transfer function, the order of the differential equation is the order of the denominator of the transfer function after canceling common factors in the numerator and denominator.

In most cases, another way to determine the number of state variables is to count the number of independent energy-storage elements in the system.⁵ The number of these energy-storage elements equals the order of the differential equation and the number of state variables. In Figure 3.2 there are two energy-storage elements, the capacitor and the inductor. Hence, two state variables and two state equations are required for the system.

If too few state variables are selected, it may be impossible to write particular output equations, since some system variables cannot be written as a linear combination of the reduced number of state variables. In many cases, it may be impossible even to complete the writing of the state equations, since the derivatives of the state variables cannot be expressed as linear combinations of the reduced number of state variables.

If you select the minimum number of state variables but they are not linearly independent, at best you may not be able to solve for all other system variables. At worst you may not be able to complete the writing of the state equations.

Often the state vector includes more than the minimum number of state variables required. Two possible cases exist. Often state variables are chosen to be physical variables of a system, such as position and velocity in a mechanical system. Cases arise where these variables, although linearly independent, are also *decoupled*. That is, some linearly independent variables are not required in order to solve for any of the other linearly independent variables or any other dependent system variable. Consider the case of a mass and viscous damper whose differential equation is $M dv/dt + Dv = f(t)$, where v is the velocity of the mass. Since this is a first-order equation, one state equation is all that is required to define this system in state space with velocity as the state variable. Also, since there is only one energy-storage element, mass, only one state variable is required to represent this system in state space. However, the mass also has an associated position, which is linearly independent of velocity. If we want to include position in the state vector along with velocity, then we add position as a state variable that is linearly independent of the other state variable, velocity. Figure 3.4 illustrates what is happening. The first block is the transfer

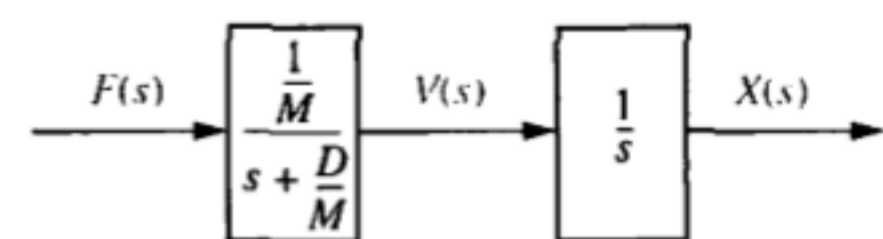


FIGURE 3.4 Block diagram of a mass and damper

⁵ Sometimes it is not apparent in a schematic how many independent energy-storage elements there are. It is possible that more than the minimum number of energy-storage elements could be selected, leading to a state vector whose components number more than the minimum required and are not linearly independent. Selecting additional dependent energy-storage elements results in a system matrix of higher order and more complexity than required for the solution of the state equations.

function equivalent to $M dv(t)/dt + Dv(t) = f(t)$. The second block shows that we integrate the output velocity to yield output displacement (see Table 2.2, Item 10). Thus, if we want displacement as an output, the denominator, or characteristic equation, has increased in order to 2, the product of the two transfer functions. Many times, the writing of the state equations is simplified by including additional state variables.

Another case that increases the size of the state vector arises when the added variable is not linearly independent of the other members of the state vector. This usually occurs when a variable is selected as a state variable but its dependence on the other state variables is not immediately apparent. For example, energy-storage elements may be used to select the state variables, and the dependence of the variable associated with one energy-storage element on the variables of other energy-storage elements may not be recognized. Thus, the dimension of the system matrix is increased unnecessarily, and the solution for the state vector, which we cover in Chapter 4, is more difficult. Also, adding dependent state variables affects the designer's ability to use state-space methods for design.⁶

We saw in Section 3.2 that the state-space representation is not unique. The following example demonstrates one technique for selecting state variables and representing a system in state space. Our approach is to write the simple derivative equation for each energy-storage element and solve for each derivative term as a linear combination of any of the system variables and the input that are present in the equation. Next we select each differentiated variable as a state variable. Then we express all other system variables in the equations in terms of the state variables and the input. Finally, we write the output variables as linear combinations of the state variables and the input.

Example 3.1

Representing an Electrical Network

PROBLEM: Given the electrical network of Figure 3.5, find a state-space representation if the output is the current through the resistor.

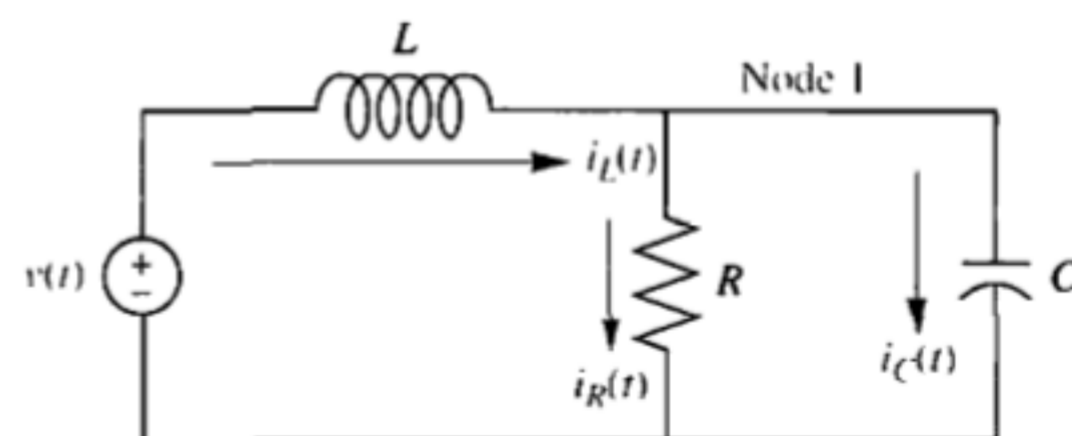


FIGURE 3.5 Electrical network for representation in state space

SOLUTION: The following steps will yield a viable representation of the network in state space.

Step 1 Label all of the branch currents in the network. These include i_L , i_R , and i_C , as shown in Figure 3.5.

⁶ See Chapter 12 for state-space design techniques.

Step 2 Select the state variables by writing the derivative equation for all energy-storage elements, that is, the inductor and the capacitor. Thus,

$$C \frac{dv_C}{dt} = i_C \quad (3.22)$$

$$L \frac{di_L}{dt} = v_L \quad (3.23)$$

From Eqs. (3.22) and (3.23), choose the state variables as the quantities that are differentiated, namely v_C and i_L . Using Eq. (3.20) as a guide, we see that the state-space representation is complete if the right-hand sides of Eqs. (3.22) and (3.23) can be written as linear combinations of the state variables and the input.

Since i_C and v_L are not state variables, our next step is to express i_C and v_L as linear combinations of the state variables, v_C and i_L , and the input, $v(t)$.

Step 3 Apply network theory, such as Kirchhoff's voltage and current laws, to obtain i_C and v_L in terms of the state variables, v_C and i_L . At Node 1,

$$\begin{aligned} i_C &= -i_R + i_L \\ &= -\frac{1}{R}v_C + i_L \end{aligned} \quad (3.24)$$

which yields i_C in terms of the state variables, v_C and i_L .

Around the outer loop,

$$v_L = -v_C + v(t) \quad (3.25)$$

which yields v_L in terms of the state variable, v_C , and the source, $v(t)$.

Step 4 Substitute the results of Eqs. (3.24) and (3.25) into Eqs. (3.22) and (3.23) to obtain the following state equations:

$$C \frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{R}v_C + i_L \quad (3.26a)$$

$$L \frac{di_L}{dt} = -v_C + v(t) \quad (3.26b)$$

or

$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{RC}v_C + \frac{1}{C}i_L \quad (3.27a)$$

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{L}v_C + \frac{1}{L}v(t) \quad (3.27b)$$

Step 5 Find the output equation. Since the output is $i_R(t)$,

$$i_R = \frac{1}{R}v_C \quad (3.28)$$

The final result for the state-space representation is found by representing Eqs. (3.27) and (3.28) in vector-matrix form as follows:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/(RC) & 1/C \\ -1/L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} v(t) \quad (3.29a)$$

$$i_R = [1/R \quad 0] \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} \quad (3.29b)$$

where the dot indicates differentiation with respect to time.

In order to clarify the representation of physical systems in state space, we will look at two more examples. The first is an electrical network with a dependent source. Although we will follow the same procedure as in the previous problem, this problem will yield increased complexity in applying network analysis to find the state equations. For the second example, we find the state-space representation of a mechanical system.

Example 3.2

Representing an Electrical Network with a Dependent Source

PROBLEM: Find the state and output equations for the electrical network shown in Figure 3.6 if the output vector is $\mathbf{y} = [v_{R_2} \ i_{R_2}]^T$, where T means transpose.⁷

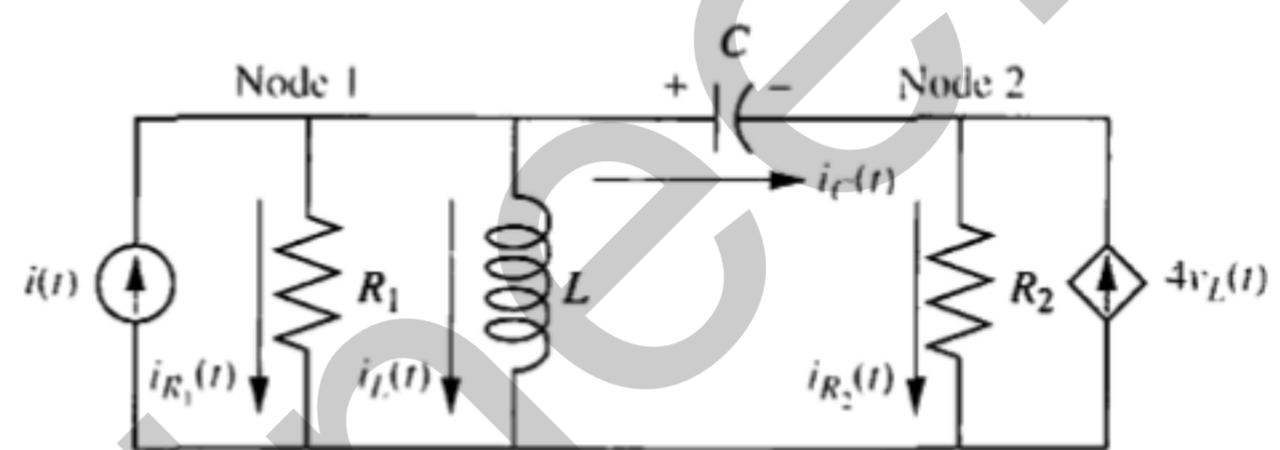


FIGURE 3.6 Electrical network for Example 3.2

SOLUTION: Immediately notice that this network has a voltage-dependent current source.

Step 1 Label all of the branch currents on the network, as shown in Figure 3.6.

Step 2 Select the state variables by listing the voltage-current relationships for all of the energy-storage elements:

$$L \frac{di_L}{dt} = v_L \quad (3.30a)$$

$$C \frac{dv_C}{dt} = i_C \quad (3.30b)$$

From Eqs. (3.30) select the state variables to be the differentiated variables. Thus, the state variables, x_1 and x_2 , are

$$x_1 = i_L; \quad x_2 = v_C \quad (3.31)$$

Step 3 Remembering that the form of the state equation is

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (3.32)$$

we see that the remaining task is to transform the right-hand side of Eq. (3.30) into linear combinations of the state variables and input source current. Using Kirchhoff's voltage and current laws, we find v_L and i_C in terms of the state variables and the input current source.

⁷See Appendix G for a discussion of the transpose. Appendix G is located at www.wiley.com/college/nise.

Around the mesh containing L and C ,

$$v_L = v_C + v_{R_2} = v_C + i_{R_2}R_2 \quad (3.33)$$

But at Node 2, $i_{R_2} = i_C + 4v_L$. Substituting this relationship for i_{R_2} into Eq. (3.33) yields

$$v_L = v_C + (i_C + 4v_L)R_2 \quad (3.34)$$

Solving for v_L , we get

$$v_L = \frac{1}{1 - 4R_2}(v_C + i_C R_2) \quad (3.35)$$

Notice that since v_C is a state variable, we only need to find i_C in terms of the state variables. We will then have obtained v_L in terms of the state variables.

Thus, at Node 1 we can write the sum of the currents as

$$\begin{aligned} i_C &= i(t) - i_{R_1} - i_L \\ &= i(t) - \frac{v_{R_1}}{R_1} - i_L \\ &= i(t) - \frac{v_L}{R_1} - i_L \end{aligned} \quad (3.36)$$

where $v_{R_1} = v_L$. Equations (3.35) and (3.36) are two equations relating v_L and i_C in terms of the state variables i_L and v_C . Rewriting Eqs. (3.35) and (3.36), we obtain two simultaneous equations yielding v_L and i_C as linear combinations of the state variables i_L and v_C :

$$(1 - 4R_2)v_L - R_2i_C = v_C \quad (3.37a)$$

$$-\frac{1}{R_1}v_L - i_C = i_L - i(t) \quad (3.37b)$$

Solving Eq. (3.37) simultaneously for v_L and i_C yields

$$v_L = \frac{1}{\Delta}[R_2i_L - v_C - R_2i(t)] \quad (3.38)$$

and

$$i_C = \frac{1}{\Delta}\left[(1 - 4R_2)i_L + \frac{1}{R_1}v_C - (1 - 4R_2)i(t)\right] \quad (3.39)$$

where

$$\Delta = -\left[(1 - 4R_2) + \frac{R_2}{R_1}\right] \quad (3.40)$$

Substituting Eqs. (3.38) and (3.39) into (3.30), simplifying, and writing the result in vector-matrix form renders the following state equation:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{v}_C \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_2/(L\Delta) & -1/(L\Delta) \\ (1 - 4R_2)/(C\Delta) & 1/(R_1C\Delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -R_2/(L\Delta) \\ -(1 - 4R_2)/(C\Delta) \end{bmatrix} i(t) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Step 4 Derive the output equation. Since the specified output variables are v_{R_2} and i_{R_2} , we note that around the mesh containing C , L , and R_2 ,

$$v_{R_2} = -v_C + v_L \quad (3.42a)$$

$$i_{R_2} = i_C + 4i_L \quad (3.42b)$$

Substituting Eqs. (3.38) and (3.39) into Eq. (3.42), v_{R_2} and i_{R_2} are obtained as linear combinations of the state variables, i_L and v_C . In vector-matrix form, the output equation is

$$\begin{bmatrix} v_{R_2} \\ i_{R_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_2/\Delta & -(1 + 1/\Delta) \\ 1/\Delta & (1 - 4R_1)/(\Delta R_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -R_2/\Delta \\ -1/\Delta \end{bmatrix} i(t) \quad (3.43)$$

In the next example, we find the state-space representation for a mechanical system. It is more convenient when working with mechanical systems to obtain the state equations directly from the equations of motion rather than from the energy-storage elements. For example, consider an energy-storage element such as a spring, where $F = Kx$. This relationship does not contain the derivative of a physical variable as in the case of electrical networks, where $i = C dv/dt$ for capacitors, and $v = L di/dt$ for inductors. Thus, in mechanical systems we change our selection of state variables to be the position and velocity of each point of linearly independent motion. In the example, we will see that although there are three energy-storage elements, there will be four state variables; an additional linearly independent state variable is included for the convenience of writing the state equations. It is left to the student to show that this system yields a fourth-order transfer function if we relate the displacement of either mass to the applied force, and a third-order transfer function if we relate the velocity of either mass to the applied force.

Example 3.3

Representing a Translational Mechanical System

PROBLEM: Find the state equations for the translational mechanical system shown in Figure 3.7.

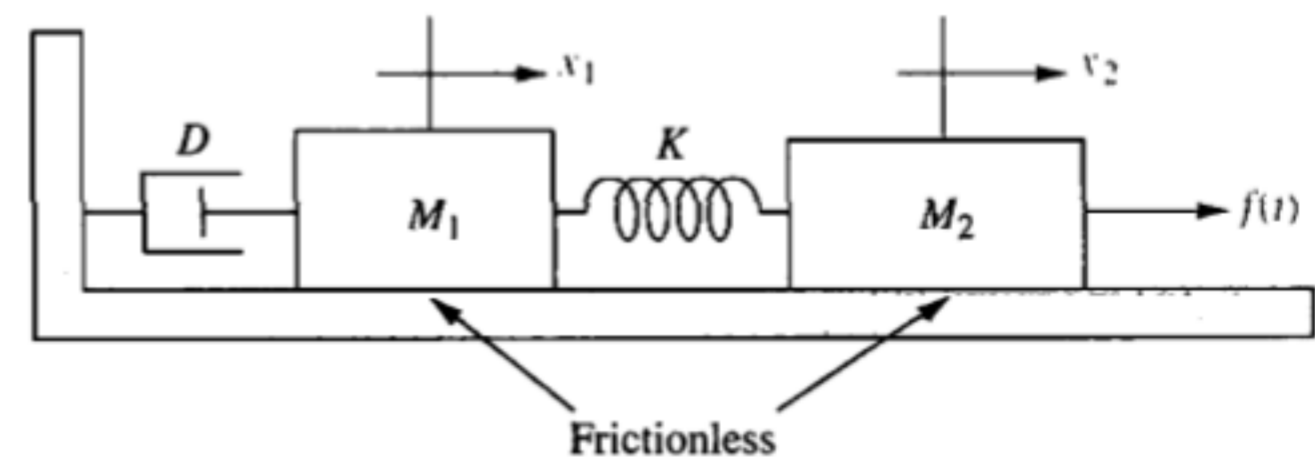


FIGURE 3.7 Translational mechanical system

SOLUTION: First write the differential equations for the network in Figure 3.7, using the methods of Chapter 2 to find the Laplace-transformed equations of motion. Next take the inverse Laplace transform of these equations, assuming zero

initial conditions, and obtain

$$M_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + D \frac{dx_1}{dt} + Kx_1 - Kx_2 = 0 \quad (3.44)$$

$$-Kx_1 + M_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + Kx_2 = f(t) \quad (3.45)$$

Now let $d^2 x_1/dt^2 = dv_1/dt$, and $d^2 x_2/dt^2 = dv_2/dt$, and then select x_1 , v_1 , x_2 , and v_2 as state variables. Next form two of the state equations by solving Eq. (3.44) for dv_1/dt and Eq. (3.45) for dv_2/dt . Finally, add $dx_1/dt = v_1$ and $dx_2/dt = v_2$ to complete the set of state equations. Hence,

$$\frac{dx_1}{dt} = \quad \quad \quad +v_1 \quad (3.46a)$$

$$\frac{dv_1}{dt} = -\frac{K}{M_1}x_1 - \frac{D}{M_1}v_1 + \frac{K}{M_1}x_2 \quad (3.46b)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \quad \quad \quad +v_2 \quad (3.46c)$$

$$\frac{dv_2}{dt} = +\frac{K}{M_2}x_1 \quad -\frac{K}{M_2}x_2 \quad +\frac{1}{M_2}f(t) \quad (3.46d)$$

In vector-matrix form,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -K/M_1 & -D/M_1 & K/M_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ K/M_2 & 0 & -K/M_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ v_1 \\ x_2 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/M_2 \end{bmatrix} f(t) \quad (3.47)$$

where the dot indicates differentiation with respect to time. What is the output equation if the output is $x(t)$?

Skill-Assessment Exercise 3.1

PROBLEM: Find the state-space representation of the electrical network shown in Figure 3.8. The output is $v_o(t)$.

WileyPLUS
WPCS
 Control Solutions

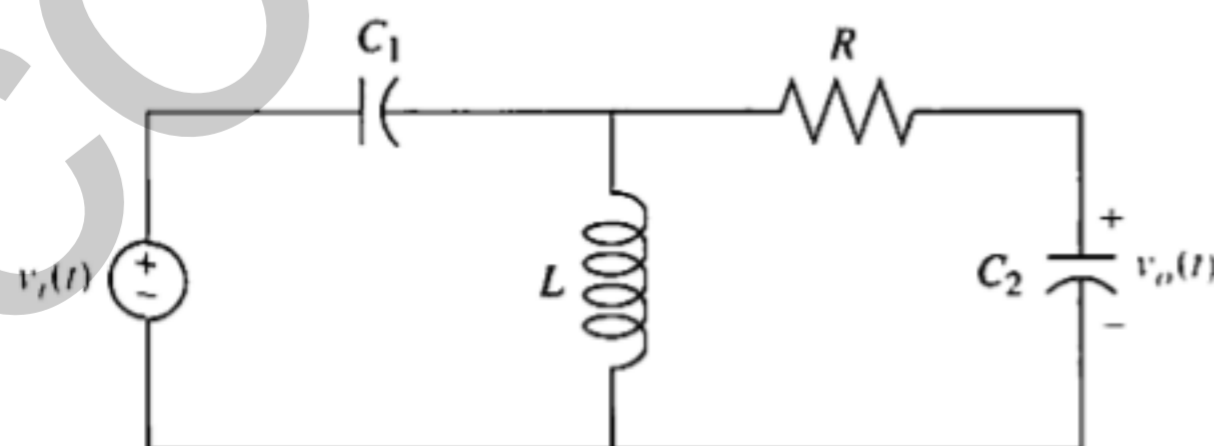


FIGURE 3.8 Electric circuit for Skill-Assessment Exercise 3.1

ANSWER:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1/C_1 & 1/C_1 & -1/C_1 \\ -1/L & 0 & 0 \\ 1/C_2 & 0 & -1/C_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} v_i(t)$$

$$y = [0 \ 0 \ 1] \mathbf{x}$$

The complete solution is at www.wiley.com/college/nise.

Skill-Assessment Exercise 3.2

PROBLEM: Represent the translational mechanical system shown in Figure 3.9 in state space, where $x_3(t)$ is the output.

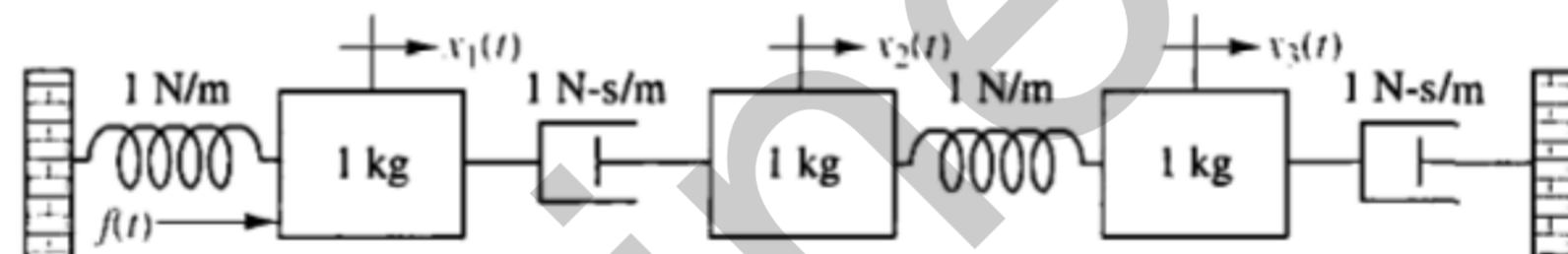


FIGURE 3.9 Translational mechanical system for Skill-Assessment Exercise 3.2

ANSWER:

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} f(t)$$

$$y = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] \mathbf{z}$$

where

$$\mathbf{z} = [x_1 \ \dot{x}_1 \ x_2 \ \dot{x}_2 \ x_3 \ \dot{x}_3]^T$$

The complete solution is at www.wiley.com/college/nise.

3.5 Converting a Transfer Function to State Space

In the last section, we applied the state-space representation to electrical and mechanical systems. We learn how to convert a transfer function representation to a state-space representation in this section. One advantage of the state-space

representation is that it can be used for the simulation of physical systems on the digital computer. Thus, if we want to simulate a system that is represented by a transfer function, we must first convert the transfer function representation to state space.

At first we select a set of state variables, called *phase variables*, where each subsequent state variable is defined to be the derivative of the previous state variable. In Chapter 5 we show how to make other choices for the state variables.

Let us begin by showing how to represent a general, *n*th-order, linear differential equation with constant coefficients in state space in the phase-variable form. We will then show how to apply this representation to transfer functions.

Consider the differential equation

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u \quad (3.48)$$

A convenient way to choose state variables is to choose the output, $y(t)$, and its $(n - 1)$ derivatives as the state variables. This choice is called the *phase-variable choice*. Choosing the state variables, x_i , we get

$$x_1 = y \quad (3.49a)$$

$$x_2 = \frac{dy}{dt} \quad (3.49b)$$

$$x_3 = \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (3.49c)$$

⋮

$$x_n = \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} \quad (3.49d)$$

and differentiating both sides yields

$$\dot{x}_1 = \frac{dy}{dt} \quad (3.50a)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (3.50b)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{d^3 y}{dt^3} \quad (3.50c)$$

⋮

$$\dot{x}_n = \frac{d^n y}{dt^n} \quad (3.50d)$$

where the dot above the x signifies differentiation with respect to time.

Substituting the definitions of Eq. (3.49) into Eq. (3.50), the state equations are evaluated as

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3.51a)$$

$$\dot{x}_2 = x_3 \quad (3.51b)$$

⋮

$$\dot{x}_{n-1} = x_n \quad (3.51c)$$

$$\dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 \dots - a_{n-1} x_n + b_0 u \quad (3.51d)$$

where Eq. (3.51d) was obtained from Eq. (3.48) by solving for $d^n y/dt^n$ and using Eq. (3.49). In vector-matrix form, Eq. (3.51) become

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & -a_5 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u \tag{3.52}$$

Equation (3.52) is the phase-variable form of the state equations. This form is easily recognized by the unique pattern of 1's and 0's and the negative of the coefficients of the differential equation written in reverse order in the last row of the system matrix.

Finally, since the solution to the differential equation is $y(t)$, or x_1 , the output equation is

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \tag{3.53}$$

In summary, then, to convert a transfer function into state equations in phase-variable form, we first convert the transfer function to a differential equation by cross-multiplying and taking the inverse Laplace transform, assuming zero initial conditions. Then we represent the differential equation in state space in phase-variable form. An example illustrates the process.

Example 3.4

Converting a Transfer Function with Constant Term in Numerator

PROBLEM: Find the state-space representation in phase-variable form for the transfer function shown in Figure 3.10(a).

SOLUTION:

Step 1 Find the associated differential equation. Since

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{24}{(s^3 + 9s^2 + 26s + 24)} \tag{3.54}$$

cross-multiplying yields

$$(s^3 + 9s^2 + 26s + 24)C(s) = 24R(s) \tag{3.55}$$

The corresponding differential equation is found by taking the inverse Laplace transform, assuming zero initial conditions:

$$\ddot{c} + 9\dot{c} + 26c + 24c = 24r \tag{3.56}$$

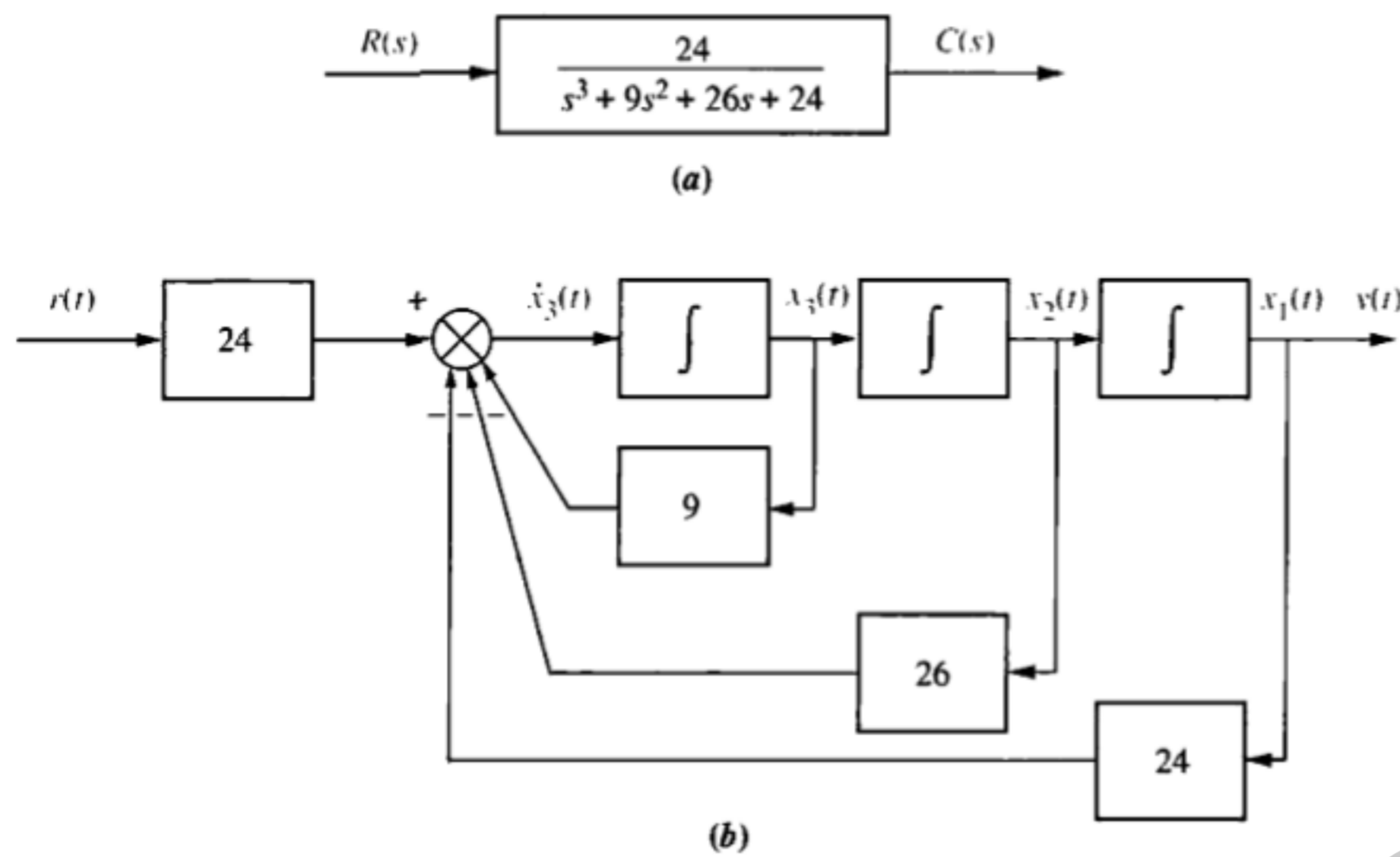


FIGURE 3.10 a. Transfer function; b. equivalent block diagram showing phase variables.
 Note: $y(t) = c(t)$.

Step 2 Select the state variables.

Choosing the state variables as successive derivatives, we get

$$x_1 = c \quad (3.57a)$$

$$x_2 = \dot{c} \quad (3.57b)$$

$$x_3 = \ddot{c} \quad (3.57c)$$

Differentiating both sides and making use of Eq. (3.57) to find \dot{x}_1 and \dot{x}_2 , and Eq. (3.56) to find $\ddot{c} = \dot{x}_3$, we obtain the state equations. Since the output is $c = x_1$, the combined state and output equations are

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3.58a)$$

$$\dot{x}_2 = x_3 \quad (3.58b)$$

$$\dot{x}_3 = -24x_1 - 26x_2 - 9x_3 + 24r \quad (3.58c)$$

$$y = c = x_1 \quad (3.58d)$$

In vector-matrix form,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 24 \end{bmatrix} r \quad (3.59a)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (3.59b)$$

Notice that the third row of the system matrix has the same coefficients as the denominator of the transfer function but negative and in reverse order.

At this point, we can create an equivalent block diagram of the system of Figure 3.10(a) to help visualize the state variables. We draw three integral blocks as shown in Figure 3.10(b) and label each output as one of the state variables, $x_i(t)$, as shown. Since the input to each integrator is $x_i(t)$, use Eqs. (3.58a), (3.58b), and (3.58c) to determine

the combination of input signals to each integrator. Form and label each input. Finally, use Eq. (3.58d) to form and label the output, $y(t) = c(t)$. The final result of Figure 3.10 (b) is a system equivalent to Figure 3.10(a) that explicitly shows the state variables and gives a vivid picture of the state-space representation.

MATLAB
ML

Students who are using MATLAB should now run ch3p1 through ch3p4 in Appendix B. You will learn how to represent the system matrix **A**, the input matrix **B**, and the output matrix **C** using MATLAB. You will learn how to convert a transfer function to the state-space representation in phase-variable form. Finally, Example 3.4 will be solved using MATLAB.

The transfer function of Example 3.4 has a constant term in the numerator. If a transfer function has a polynomial in s in the numerator that is of order less than the polynomial in the denominator, as shown in Figure 3.11(a), the numerator and denominator can be handled separately. First separate the transfer function into two cascaded transfer functions, as shown in Figure 3.11(b); the first is the denominator, and the second is just the numerator. The first transfer function with just the denominator is converted to the phase-variable representation in state space as demonstrated in the last example. Hence, phase variable x_1 is the output, and the rest of the phase variables are the internal variables of the first block, as shown in Figure 3.11(b). The second transfer function with just the numerator yields

$$Y(s) = C(s) = (b_2s^2 + b_1s + b_0)X_1(s) \quad (3.60)$$

where, after taking the inverse Laplace transform with zero initial conditions,

$$y(t) = b_2 \frac{d^2x_1}{dt^2} + b_1 \frac{dx_1}{dt} + b_0x_1 \quad (3.61)$$

But the derivative terms are the definitions of the phase variables obtained in the first block. Thus, writing the terms in reverse order to conform to an output equation,

$$y(t) = b_0x_1 + b_1x_2 + b_2x_3 \quad (3.62)$$

Hence, the second block simply forms a specified linear combination of the state variables developed in the first block.

From another perspective, the denominator of the transfer function yields the state equations, while the numerator yields the output equation. The next example demonstrates the process.

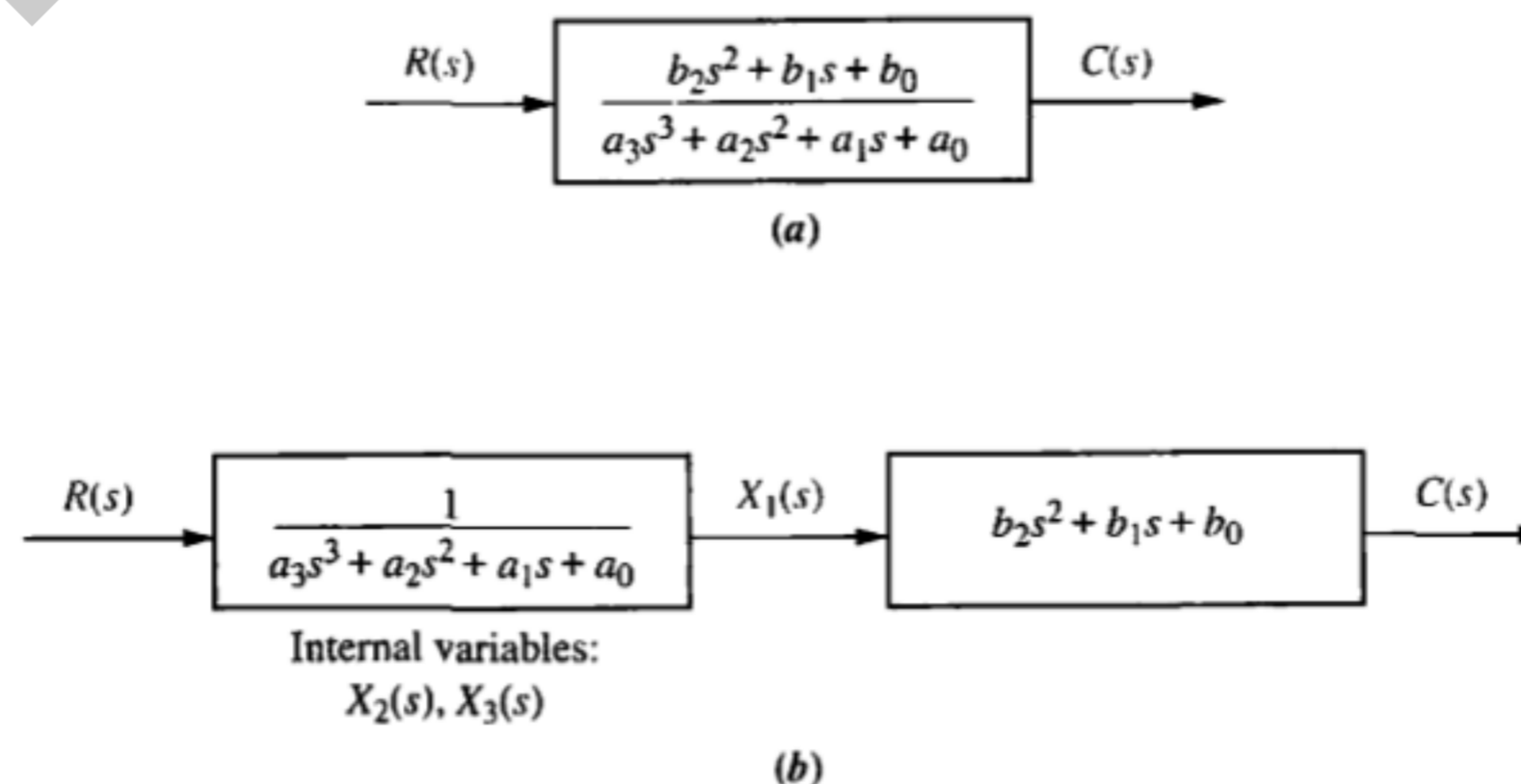


FIGURE 3.11 Decomposing a transfer function

Example 3.5

Converting a Transfer Function with Polynomial in Numerator

PROBLEM: Find the state-space representation of the transfer function shown in Figure 3.12(a).

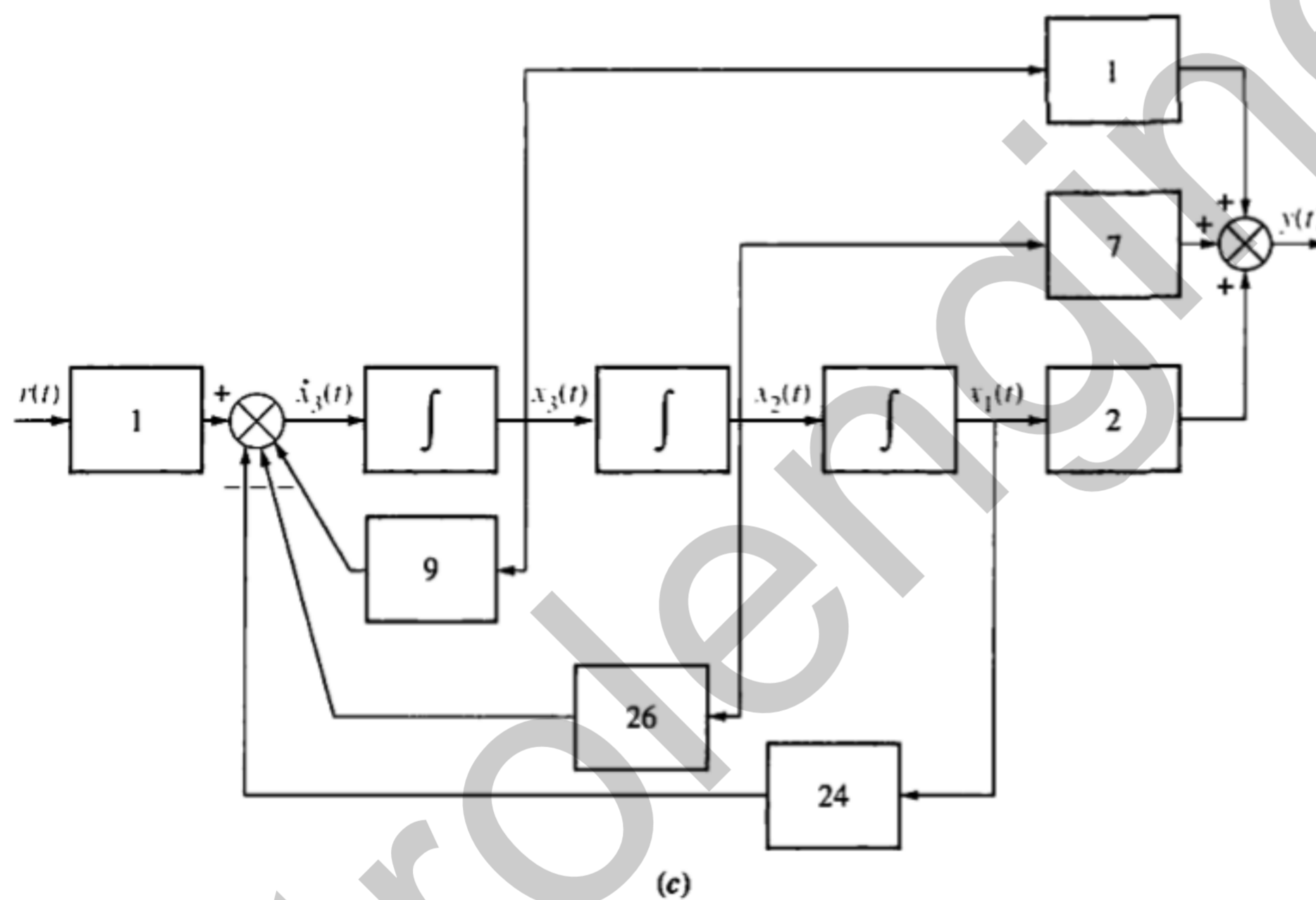
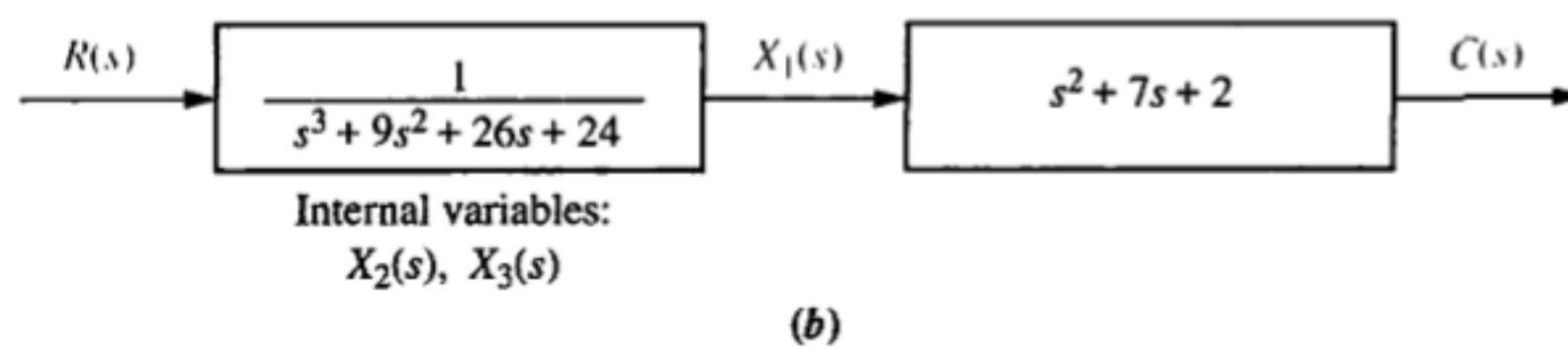
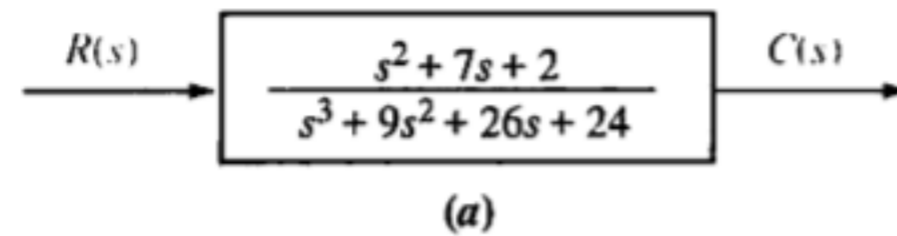


FIGURE 3.12 a. Transfer function; b. decomposed transfer function; c. equivalent block diagram Note: $y(t) = c(t)$.

SOLUTION: This problem differs from Example 3.4 since the numerator has a polynomial in s instead of just a constant term.

Step 1 Separate the system into two cascaded blocks, as shown in Figure 3.12(b). The first block contains the denominator and the second block contains the numerator.

Step 2 Find the state equations for the block containing the denominator. We notice that the first block's numerator is $1/24$ that of Example 3.4. Thus, the state equations are the same except that this system's input matrix is $1/24$ that of Example 3.4. Hence, the state equation is

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (3.63)$$

Step 3 Introduce the effect of the block with the numerator. The second block of Figure 3.12(b), where $b_2 = 1$, $b_1 = 7$, and $b_0 = 2$, states that

$$C(s) = (b_2s^2 + b_1s + b_0)X_1(s) = (s^2 + 7s + 2)X_1(s) \quad (3.64)$$

Taking the inverse Laplace transform with zero initial conditions, we get

$$c = \ddot{x}_1 + 7\dot{x}_1 + 2x_1 \quad (3.65)$$

But

$$x_1 = x_1$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\ddot{x}_1 = x_3$$

Hence,

$$y = c(t) = b_2x_3 + b_1x_2 + b_0x_1 = x_3 + x_2 + 2x_1 \quad (3.66)$$

Thus, the last box of Figure 3.11(b) “collects” the states and generates the output equation. From Eq. (3.66),

$$y = [b_0 \quad b_1 \quad b_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [2 \quad 7 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

Although the second block of Figure 3.12(b) shows differentiation, this block was implemented without differentiation because of the partitioning that was applied to the transfer function. The last block simply collected derivatives that were already formed by the first block.

Once again we can produce an equivalent block diagram that vividly represents our state-space model. The first block of Figure 3.12(b) is the same as Figure 3.10(a) except for the different constant in the numerator. Thus, in Figure 3.12(c) we reproduce Figure 3.10(b) except for the change in the numerator constant, which appears as a change in the input multiplying factor. The second block of Figure 3.12(b) is represented using Eq. (3.66), which forms the output from a linear combination of the state variables, as shown in Figure 3.12(c).

TryIt 3.1

Use the following MATLAB statements to form an LTI state-space representation from the transfer function shown in Figure 3.12(a). The **A** matrix and **B** vector are shown in Eq. (3.63). The **C** vector is shown in Eq. (3.67).

```
num=[1 7 2];
den=[1 9 26 24];
[A,B,C,D]=tf2ss...
(num,den);
P=[0 0 1;0 1 0;1 0 0];
A=inv(P)*A*P
B=inv(P)*B
C=C*P
```

Skill-Assessment Exercise 3.3

WileyPLUS

WPCS

Control Solutions

PROBLEM: Find the state equations and output equation for the phase-variable representation of the transfer function $G(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 7s + 9}$.

ANSWER:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -7 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

$$y = [1 \quad 2] \mathbf{x}$$

The complete solution is at www.wiley.com/college/nise.

3.6 Converting from State Space to a Transfer Function

In Chapters 2 and 3, we have explored two methods of representing systems: the transfer function representation and the state-space representation. In the last section, we united the two representations by converting transfer functions into state-space representations. Now we move in the opposite direction and convert the state-space representation into a transfer function.

Given the state and output equations

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3.68a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (3.68b)$$

take the Laplace transform assuming zero initial conditions:⁸

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (3.69a)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \quad (3.69b)$$

Solving for $\mathbf{X}(s)$ in Eq. (3.69a),

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (3.70)$$

or

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (3.71)$$

where \mathbf{I} is the identity matrix.

Substituting Eq. (3.71) into Eq. (3.69b) yields

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{U}(s) \quad (3.72)$$

We call the matrix $[\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]$ the transfer function matrix, since it relates the output vector, $\mathbf{Y}(s)$, to the input vector, $\mathbf{U}(s)$. However, if $\mathbf{U}(s) = U(s)$ and $\mathbf{Y}(s) = Y(s)$ are scalars, we can find the transfer function,

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (3.73)$$

Let us look at an example.

⁸ The Laplace transform of a vector is found by taking the Laplace transform of each component. Since $\dot{\mathbf{x}}$ consists of the derivatives of the state variables, the Laplace transform of $\dot{\mathbf{x}}$ with zero initial conditions yields each component with the form $sX_i(s)$, where $X_i(s)$ is the Laplace transform of the state variable. Factoring out the complex variable, s , in each component yields the Laplace transform of $\dot{\mathbf{x}}$ as $s\mathbf{X}(s)$, where $\mathbf{X}(s)$ is a column vector with components $X_i(s)$.

$sX(s) - AX(s) = BU(s)$
 $sIX(s)$
 $(sI - A)X(s) = BU(s)$
 $\frac{Y(s)}{U(s)} = \dots$

Example 3.6

State-Space Representation to Transfer Function

PROBLEM: Given the system defined by Eq. (3.74), find the transfer function, $T(s) = Y(s)/U(s)$, where $U(s)$ is the input and $Y(s)$ is the output.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (3.74a)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x} \quad (3.74b)$$

SOLUTION: The solution revolves around finding the term $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ in Eq. (3.73).⁹ All other terms are already defined. Hence, first find $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1 & 2 & s+3 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

Now form $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} = \frac{\begin{bmatrix} (s^2 + 3s + 2) & s + 3 & 1 \\ -1 & s(s + 3) & s \\ -s & -(2s + 1) & s^2 \end{bmatrix}}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1} \quad (3.76)$$

Substituting $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, \mathbf{B} , \mathbf{C} , and \mathbf{D} into Eq. (3.73), where

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0]$$

$$\mathbf{D} = 0$$

we obtain the final result for the transfer function:

$$T(s) = \frac{10(s^2 + 3s + 2)}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1} \quad (3.77)$$

MATLAB

ML

Students who are using MATLAB should now run ch3p5 in Appendix B. You will learn how to convert a state-space representation to a transfer function using MATLAB. You can practice by writing a MATLAB program to solve Example 3.6.

Symbolic Math

SM

Students who are performing the MATLAB exercises and want to explore the added capability of MATLAB's Symbolic Math Toolbox should now run ch3sp1 in Appendix F located at www.wiley.com/college/nise. You will learn how to use the Symbolic Math Toolbox to write matrices and vectors. You will see that the Symbolic Math Toolbox yields an alternative way to use MATLAB to solve Example 3.6.

⁹ See Appendix G. It is located at www.wiley.com/college/nise and discusses the evaluation of the matrix inverse.

مقادیر مشخصه $\rightarrow \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \dots$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s+4 & +1.5 \\ -4 & s \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = s(s+4) + 4 \times 1.5 = s^2 + 4s + 6$$

Skill-Assessment Exercise 3.4

PROBLEM: Convert the state and output equations shown in Eq. (3.78) to a transfer function.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -4 & -1.5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (3.78a)$$

$$y = [1.5 \quad 0.625] \mathbf{x} \quad (3.78b)$$

ANSWER:

$$G(s) = \frac{3s + 5}{s^2 + 4s + 6}$$

The complete solution is located at www.wiley.com/college/nise.

TryIt 3.2

Use the following MATLAB and the Control System Toolbox statements to obtain the transfer function shown in Skill-Assessment Exercise 3.4 from the state-space representation of Eq. (3.78).

```
A=[-4 -1.5; 4 0];
B=[2 0]';
C=[1.5 0.625];
D=0;
T=ss(A,B,C,D);
T=tf(T)
```

In Example 3.6, the state equations in phase-variable form were converted to transfer functions. In Chapter 5, we will see that other forms besides the phase-variable form can be used to represent a system in state space. The method of finding the transfer function representation for these other forms is the same as that presented in this section.

3.7 Linearization

A prime advantage of the state-space representation over the transfer function representation is the ability to represent systems with nonlinearities, such as the one shown in Figure 3.13. The ability to represent nonlinear systems does not imply the ability to solve their state equations for the state variables and the output. Techniques do exist for the solution of some nonlinear state equations, but this study is beyond the scope of this course. However, in Appendix H, located at www.wiley.com/college/nise,

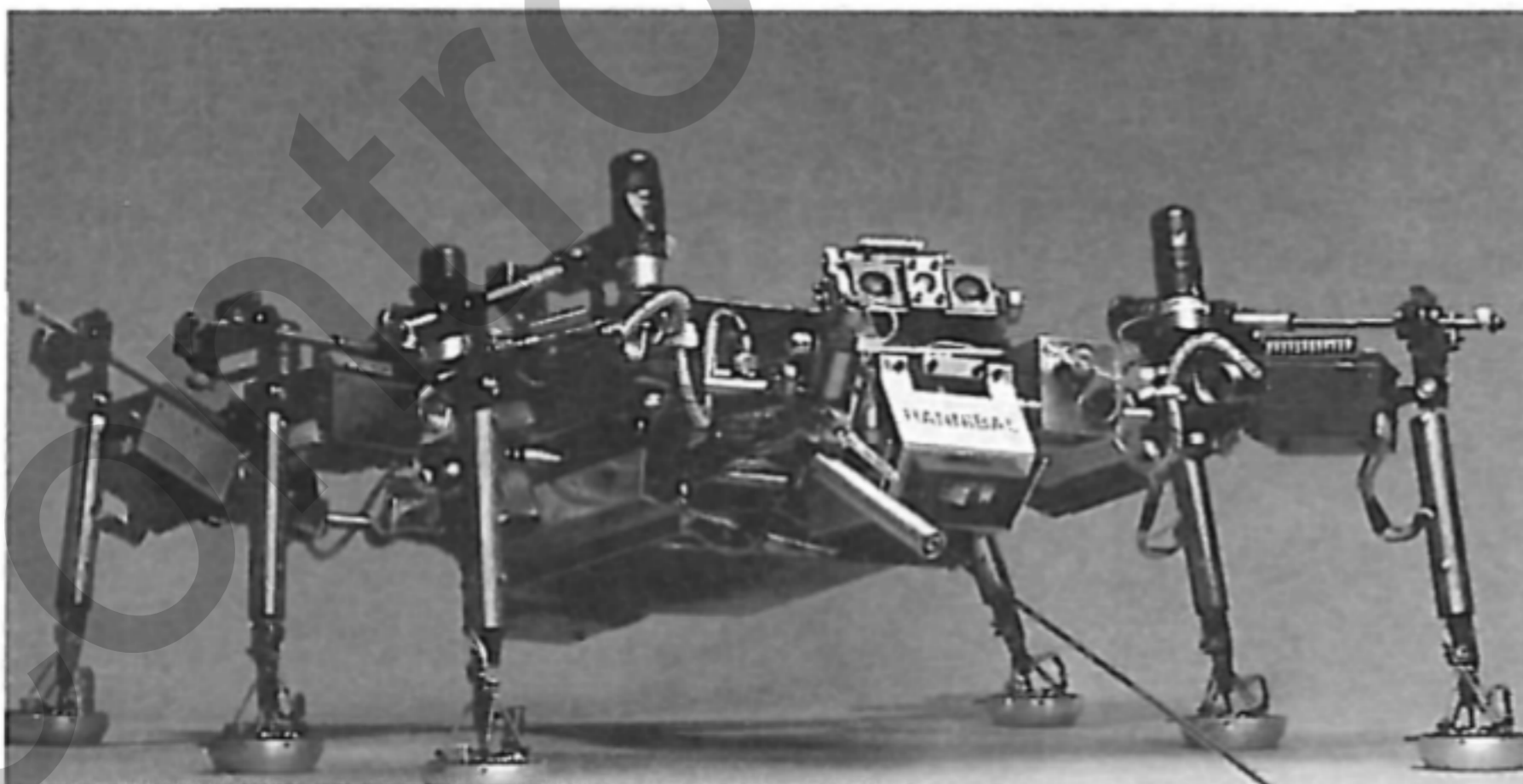


FIGURE 3.13 Walking robots, such as *Hannibal* shown here, can be used to explore hostile environments and rough terrain, such as that found on other planets or inside volcanoes.

which is chosen to allow us to see vividly the effects of backlash in the gears driven by the motor. As the motor reverses direction, the output shaft remains stationary while the motor begins to reverse. When the gears finally connect, the output shaft itself begins to turn in the reverse direction. The resulting response is quite different from the linear response without backlash.

Skill-Assessment Exercise 4.8

PROBLEM: Use MATLAB's Simulink to reproduce Figure 4.31.

Simulink
SL

ANSWER: See Figure 4.31.

Now that we have seen the effects of nonlinearities on the time response, let us return to linear systems. Our coverage so far for linear systems has dealt with finding the time response by using the Laplace transform in the frequency domain. Another way to solve for the response is to use state-space techniques in the time domain. This topic is the subject of the next two sections.

4.10 Laplace Transform Solution of State Equations

In Chapter 3, systems were modeled in state space, where the state-space representation consisted of a state equation and an output equation. In this section, we use the Laplace transform to solve the state equations for the state and output vectors.

Consider the state equation

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (4.92)$$

and the output equation

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (4.93)$$

Taking the Laplace transform of both sides of the state equation yields

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (4.94)$$

In order to separate $\mathbf{X}(s)$, replace $s\mathbf{X}(s)$ with $s\mathbf{I}\mathbf{X}(s)$, where \mathbf{I} is an $n \times n$ identity matrix, and n is the order of the system. Combining all of the $\mathbf{X}(s)$ terms, we get

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (4.95)$$

Solving for $\mathbf{X}(s)$ by premultiplying both sides of Eq. (4.95) by $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, the final solution for $\mathbf{X}(s)$ is

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(s) &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \\ &= \frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}[\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)] \end{aligned} \quad (4.96)$$

$$\varphi(t) \triangleq \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}$$

$n \times n$

$$\vec{x}(t) = \varphi(t)\vec{x}(0) + \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\vec{u}(s)\}$$

State Space
SS

Taking the Laplace transform of the output equation yields

$$\boxed{\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}U(s)} \quad (4.97)$$

Eigenvalues and Transfer Function Poles

We saw that the poles of the transfer function determine the nature of the transient response of the system. Is there an equivalent quantity in the state-space representation that yields the same information? Section 5.8 formally defines the roots of $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$ (see the denominator of Eq. (4.96)) to be *eigenvalues* of the system matrix, \mathbf{A} .⁶ Let us show that the eigenvalues are equal to the poles of the system's transfer function. Let the output, $\mathbf{Y}(s)$, and the input, $U(s)$, be scalar quantities $Y(s)$ and $U(s)$, respectively. Further, to conform to the definition of a transfer function, let $\mathbf{x}(0)$, the initial state vector, equal $\mathbf{0}$, the null vector. Substituting Eq. (4.96) into Eq. (4.97) and solving for the transfer function, $Y(s)/U(s)$, yields

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{U(s)} &= \mathbf{C} \left[\frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \right] \mathbf{B} + \mathbf{D} \\ &= \frac{\mathbf{C} \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B} + \mathbf{D} \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \end{aligned} \quad (4.98)$$

The roots of the denominator of Eq. (4.98) are the poles of the system. Since the denominators of Eqs. (4.96) and (4.98) are identical, the system poles equal the eigenvalues. Hence, if a system is represented in state-space, we can find the poles from $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$. We will be more formal about these facts when we discuss stability in Chapter 6.

The following example demonstrates solving the state equations using the Laplace transform as well as finding the eigenvalues and system poles.

Example 4.11

Laplace Transform Solution; Eigenvalues and Poles

PROBLEM: Given the system represented in state space by Eqs. (4.99),

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} \quad (4.99a)$$

$$y = [1 \quad 1 \quad 0] \mathbf{x} \quad (4.99b)$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (4.99c)$$

⁶Sometimes the symbol λ is used in place of the complex variable s when solving the state equations without using the Laplace transform. Thus, it is common to see the characteristic equation also written as $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$.

do the following:

- Solve the preceding state equation and obtain the output for the given exponential input.
- Find the eigenvalues and the system poles.

SOLUTION:

- We will solve the problem by finding the component parts of Eq. (4.96), followed by substitution into Eq. (4.97). First obtain \mathbf{A} and \mathbf{B} by comparing Eq. (4.99a) to Eq. (4.92). Since

$$s\mathbf{I} = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \quad (4.100)$$

then

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 24 & 26 & s+9 \end{bmatrix} \quad (4.101)$$

and

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} (s^2 + 9s + 26) & (s+9) & 1 \\ -24 & s^2 + 9s & s \\ -24s & -(26s + 24) & s^2 \end{bmatrix}}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24} \quad (4.102)$$

Since $\mathbf{U}(s)$ (the Laplace transform for e^{-t}) is $1/(s+1)$, $\mathbf{X}(s)$ can be calculated. Rewriting Eq. (4.96) as

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}[\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)] \quad (4.103)$$

and using \mathbf{B} and $\mathbf{x}(0)$ from Eqs. (4.99a) and (4.99c), respectively, we get

$$X_1(s) = \frac{(s^3 + 10s^2 + 37s + 29)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)} \quad (4.104a)$$

$$X_2(s) = \frac{(2s^2 - 21s - 24)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)} \quad (4.104b)$$

$$X_3(s) = \frac{s(2s^2 - 21s - 24)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)} \quad (4.104c)$$

The output equation is found from Eq. (4.99b). Performing the indicated addition yields

$$Y(s) = [1 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ X_3(s) \end{bmatrix} = X_1(s) + X_2(s) \quad (4.105)$$

or

$$Y(s) = \frac{(s^3 + 12s^2 + 16s + 5)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)} \quad (4.106)$$

$$= \frac{-6.5}{s+2} + \frac{19}{s+3} - \frac{11.5}{s+4}$$

where the pole at -1 canceled a zero at -1 . Taking the inverse Laplace transform,

$$y(t) = -6.5e^{-2t} + 19e^{-3t} - 11.5e^{-4t} \quad (4.107)$$

- b.** The denominator of Eq. (4.102), which is $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$, is also the denominator of the system's transfer function. Thus, $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$ furnishes both the poles of the system and the eigenvalues -2 , -3 , and -4 .

Students who are performing the MATLAB exercises and want to explore the added capability of MATLAB's Symbolic Math Toolbox should now run `ch4sp1` in Appendix F at www.wiley.com/college/nise. You will learn how to solve state equations for the output response using the Laplace transform. Example 4.11 will be solved using MATLAB and the Symbolic Math Toolbox.

Symbolic Math

SM

Skill-Assessment Exercise 4.9

WileyPLUS

WPCS

Control Solutions

PROBLEM: Given the system represented in state space by Eqs. (4.108),

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} \quad (4.108a)$$

$$y = [1 \quad 3]\mathbf{x} \quad (4.108b)$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.108c)$$

TryIt 4.5

Use the following MATLAB and Symbolic Math Toolbox statements to solve Skill-Assessment Exercise 4.9.

```
Syms s
A=[0 2;-3 -5]; B=[0;1];
C=[1 3]; X0=[2;1];
U=1/(s+1);
I=[1 0;0 1];
X=((s*I-A)^-1)*...
(X0+B*U);
Y=C*X; Y=simplify(Y);
y=ilaplace(Y);
pretty(y)
eig(A)
```

do the following:

- Solve for $y(t)$ using state-space and Laplace transform techniques.
- Find the eigenvalues and the system poles.

ANSWERS:

- $y(t) = -0.5e^{-t} - 12e^{-2t} + 17.5e^{-3t}$
- $-2, -3$

The complete solution is located at www.wiley.com/college/nise.

4.11 Time Domain Solution of State Equations

We now look at another technique for solving the state equations. Rather than using the Laplace transform, we solve the equations directly in the time domain using a method closely allied to the classical solution of differential equations. We will find that the final solution consists of two parts that are different from the forced and natural responses.

The solution in the time domain is given directly by

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

$$= \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

(4.109)

where $\Phi(t) = e^{At}$ by definition, and which is called the state-transition matrix. Eq. (4.109) is derived in Appendix I located at www.wiley.com/college/nise. Readers who are not familiar with this equation or who may want to refresh their memory should consult Appendix I before proceeding.

Notice that the first term on the right-hand side of the equation is the response due to the initial state vector, $\mathbf{x}(0)$. Notice also that it is the only term dependent on the initial state vector and not the input. We call this part of the response the *zero-input response*, since it is the total response if the input is zero. The second term, called the *convolution integral*, is dependent only on the input, \mathbf{u} , and the input matrix, \mathbf{B} , not the initial state vector. We call this part of the response the *zero-state response*, since it is the total response if the initial state vector is zero. Thus, there is a partitioning of the response different from the forced/natural response we have seen when solving differential equations. In differential equations, the arbitrary constants of the natural response are evaluated based on the initial conditions and the initial values of the forced response and its derivatives. Thus, the natural response's amplitudes are a function of the initial conditions of the output and the input. In Eq. (4.109), the zero-input response is not dependent on the initial values of the input and its derivatives. It is dependent only on the initial conditions of the state vector. The next example vividly shows the difference in partitioning. Pay close attention to the fact that in the final result the zero-state response contains not only the forced solution but also pieces of what we previously called the natural response. We will see in the solution that the natural response is distributed through the zero-input response and the zero-state response.

Before proceeding with the example, let us examine the form the elements of $\Phi(t)$ take for linear, time-invariant systems. The first term of Eq. (4.96), the Laplace transform of the response for unforced systems, is the transform of $\Phi(t)\mathbf{x}(0)$, the zero-input response from Eq. (4.109). Thus, for the unforced system

$$\mathcal{L}[\mathbf{x}(t)] = \mathcal{L}[\Phi(t)\mathbf{x}(0)] = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) \tag{4.110}$$

from which we can see that $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ is the Laplace transform of the state-transition matrix, $\Phi(t)$. We have already seen that the denominator of $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ is a polynomial in s whose roots are the system poles. This polynomial is found from

State Space
SS

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0)$$

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t)$$

$$\mathbf{X}(t) = \Phi(t)\mathbf{X}(0)$$

$$\downarrow$$

$$e^{At}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

$$At = \begin{bmatrix} t & 2t \\ 0 & 3t \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = e^{\begin{bmatrix} t & 2t \\ 0 & 3t \end{bmatrix}}$$

~~$$\begin{bmatrix} e^t & e^{2t} \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$~~

the equation $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$. Since

$$\mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}\right] = \Phi(t) \quad (4.111)$$

each term of $\Phi(t)$ would be the sum of exponentials generated by the system's poles.

Let us summarize the concepts with two numerical examples. The first example solves the state equations directly in the time domain. The second example uses the Laplace transform to solve for the state-transition matrix by finding the inverse Laplace transform of $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$.

Example 4.12

Time Domain Solution

PROBLEM: For the state equation and initial state vector shown in Eqs. (4.112), where $u(t)$ is a unit step, find the state-transition matrix and then solve for $\mathbf{x}(t)$.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.112a)$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.112b)$$

SOLUTION: Since the state equation is in the form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (4.113)$$

find the eigenvalues using $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$. Hence, $s^2 + 6s + 8 = 0$, from which $s_1 = -2$ and $s_2 = -4$. Since each term of the state-transition matrix is the sum of responses generated by the poles (eigenvalues), we assume a state-transition matrix of the form

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} (K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-4t}) & (K_3 e^{-2t} + K_4 e^{-4t}) \\ (K_5 e^{-2t} + K_6 e^{-4t}) & (K_7 e^{-2t} + K_8 e^{-4t}) \end{bmatrix} \quad (4.114)$$

In order to find the values of the constants, we make use of the properties of the state-transition matrix derived in Appendix J located at www.wiley.com/college/nise.

$$\Phi(0) = \mathbf{I} \quad (4.115)$$

$$K_1 + K_2 = 1 \quad (4.116a)$$

$$K_3 + K_4 = 0 \quad (4.116b)$$

$$K_5 + K_6 = 0 \quad (4.116c)$$

$$K_7 + K_8 = 1 \quad (4.116d)$$

Handwritten notes:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$Y(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(t) = ? = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (sI - A)^{-1} \right\}$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 8 & s+6 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 6s + 8} \begin{bmatrix} s+6 & 1 \\ -8 & s \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+6}{(s+2)(s+4)} & \frac{1}{(s+2)(s+4)} \\ \frac{-8}{(s+2)(s+4)} & \frac{s}{(s+2)(s+4)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{s+2} + \frac{-1}{s+4} & \frac{1/2}{s+2} + \frac{-1/2}{s+4} \\ \frac{-4}{s+2} + \frac{4}{s+4} & \frac{-1}{s+2} + \frac{2}{s+4} \end{bmatrix}$$

$$\varphi(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (sI - A)^{-1} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-2t} - e^{-4t} & \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t} \\ -4e^{-2t} + 4e^{-4t} & -e^{-2t} + 2e^{-4t} \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}(t) = \varphi(t) \vec{X}(0) = \varphi(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} - e^{-4t} \\ -4e^{-2t} + 4e^{-4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

حالت به ازای شرط اولیه:

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} & -e^{-4t} \\ -4e^{-2t} & +4e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-2t} & -\frac{1}{2}e^{-4t} \\ -e^{-2t} & +2e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \int_0^t \varphi(t-\tau) Bu(\tau) d\tau$$

ماتریس انتقال (رد)

$$= \int_0^t \varphi(t-\tau) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_1 d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-2(t-\tau)} & -\frac{1}{2}e^{-4(t-\tau)} \\ -e^{-2(t-\tau)} & +2e^{-4(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4}e^{-2(t-\tau)} & -\frac{1}{8}e^{-4(t-\tau)} \\ -\frac{1}{2}e^{-2(t-\tau)} & +\frac{1}{2}e^{-4(t-\tau)} \end{bmatrix} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{8}e^{-4t} \right) \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-4t} \right) \end{bmatrix}$$

Control Engineering

and since

$$\dot{\Phi}(0) = \mathbf{A} \quad (4.117)$$

then

$$-2K_1 - 4K_2 = 0 \quad (4.118a)$$

$$-2K_3 - 4K_4 = 1 \quad (4.118b)$$

$$-2K_5 - 4K_6 = -8 \quad (4.118c)$$

$$-2K_7 - 4K_8 = -6 \quad (4.118d)$$

The constants are solved by taking two simultaneous equations four times. For example, Eq. (4.116a) can be solved simultaneously with Eq. (4.118a) to yield the values of K_1 and K_2 . Proceeding similarly, all of the constants can be found. Therefore,

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} (2e^{-2t} - e^{-4t}) & \left(\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t}\right) \\ (-4e^{-2t} + 4e^{-4t}) & (-e^{-2t} + 2e^{-4t}) \end{bmatrix} \quad (4.119)$$

Also,

$$\Phi(t - \tau)\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}e^{-2(t-\tau)} - \frac{1}{2}e^{-4(t-\tau)}\right) \\ (-e^{-2(t-\tau)} + 2e^{-4(t-\tau)}) \end{bmatrix} \quad (4.120)$$

Hence, the first term of Eq. (4.109) is

$$\Phi(t)\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} (2e^{-2t} - e^{-4t}) \\ (-4e^{-2t} + 4e^{-4t}) \end{bmatrix} \quad (4.121)$$

The last term of Eq. (4.109) is

$$\begin{aligned} \int_0^t \Phi(t - \tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-2t} \int_0^t e^{2\tau}d\tau - \frac{1}{2}e^{-4t} \int_0^t e^{4\tau}d\tau \\ -e^{-2t} \int_0^t e^{2\tau}d\tau + 2e^{-4t} \int_0^t e^{4\tau}d\tau \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{8} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{8}e^{-4t} \\ \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.122)$$

Notice, as promised, that Eq. (4.122), the zero-state response, contains not only the forced response, $1/8$, but also terms of the form Ae^{-2t} and Be^{-4t} that are part of

what we previously called the natural response. However, the coefficients, A and B , are not dependent on the initial conditions.

The final result is found by adding Eqs. (4.121) and (4.122). Hence,

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} + \frac{7}{4}e^{-2t} - \frac{7}{8}e^{-4t} \\ -\frac{7}{2}e^{-2t} + \frac{7}{2}e^{-4t} \end{bmatrix} \quad (4.123)$$

Example 4.13

State-Transition Matrix via Laplace Transform

PROBLEM: Find the state-transition matrix of Example 4.12, using $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$.

SOLUTION: We use the fact that $\Phi(t)$ is the inverse Laplace transform of $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$. Thus, first find $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ as

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 8 & (s+6) \end{bmatrix} \quad (4.124)$$

from which

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s+6 & 1 \\ -8 & s \end{bmatrix}}{s^2 + 6s + 8} = \begin{bmatrix} \frac{s+6}{s^2 + 6s + 8} & \frac{1}{s^2 + 6s + 8} \\ \frac{-8}{s^2 + 6s + 8} & \frac{s}{s^2 + 6s + 8} \end{bmatrix} \quad (4.125)$$

Expanding each term in the matrix on the right by partial fractions yields

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \left(\frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+4}\right) & \left(\frac{1/2}{s+2} - \frac{1/2}{s+4}\right) \\ \left(\frac{-4}{s+2} + \frac{4}{s+4}\right) & \left(\frac{-1}{s+2} + \frac{2}{s+4}\right) \end{bmatrix} \quad (4.126)$$

Finally, taking the inverse Laplace transform of each term, we obtain

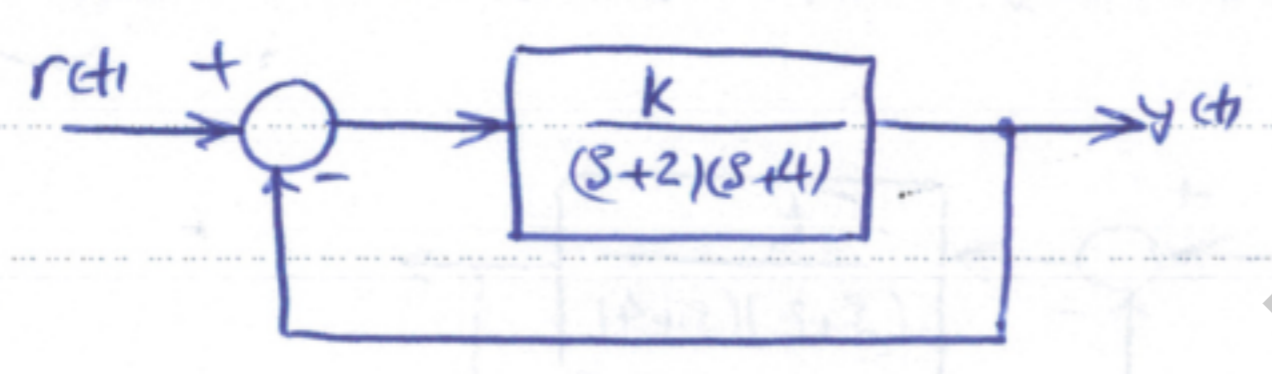
$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} (2e^{-2t} - e^{-4t}) & \left(\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t}\right) \\ (-4e^{-2t} + 4e^{-4t}) & (-e^{-2t} + 2e^{-4t}) \end{bmatrix} \quad (4.127)$$

Students who are performing the MATLAB exercises and want to explore the added capability of MATLAB's Symbolic Math Toolbox should now run ch4sp2 in Appendix F at www.wiley.com/college/nise. You will learn how to solve state equations for the output response using the convolution integral. Examples 4.12 and 4.13 will be solved using MATLAB and the Symbolic Math Toolbox.

مکان هندسی ریشه : Root Locus

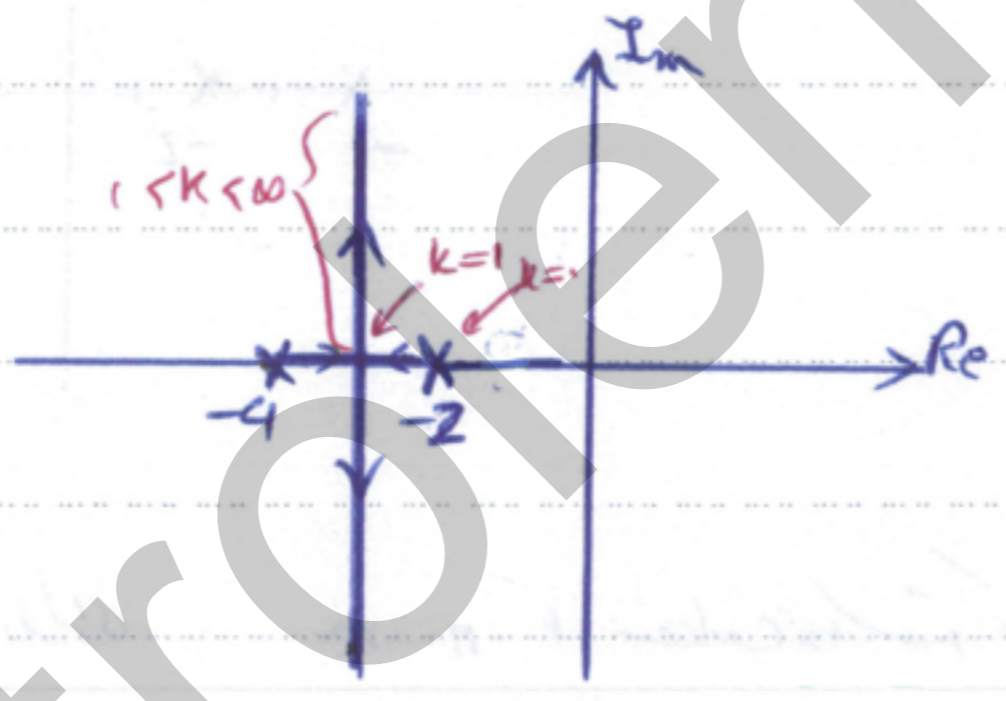
روش مکان هندسی ریشه یک روش قدرتمند برای تحلیل سیستم‌های پهن باند است. با استفاده از این روش می‌توانیم عملکرد سیستم را از دیدگاه گسترده بررسی کرد. به عنوان مثال، با استفاده از روش ناآیتر تغییرات بهره سیستم بر روی ادمپانانس، زمان نشست، زمان رسیدن به دامنه و ... خصوصیات برای سیستم‌های با مرتبه بالاتر از 2 را خوبی تر از روش نشان داد.

منظور از مکان هندسی ریشه، رسم مکان هندسی قطب‌های تابع تبدیل سیستم حلقه بسته بر حسب تغییرات بهره k می‌باشد.



روش:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + 6s + 8 + K} \Rightarrow p(s) = s^2 + 6s + 8 + K \rightarrow s = -3 \pm \sqrt{1 - K}$$



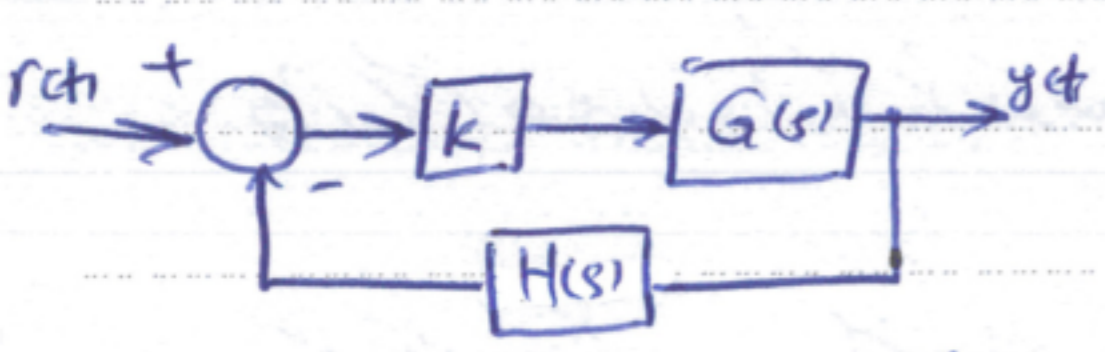
داشته‌ایم که برای مقادیر مشخصه از ریشه بالاتر از 2، خصوصیات بار خود را با رسم k در مقادیر حل می‌کنیم و به دست می‌آوریم مکان دقیق

قطب‌های حلقه بسته پیدا می‌کنیم.

می‌خواهیم با دانستن مکان قطب‌ها در منبر سیستم حلقه باز و مکان هندسی قطب‌های حلقه بسته را بر حسب تغییرات k بررسی کنیم

حل مقادیر مشخصه سیستم حلقه بسته می‌کنیم

قواعد رسم قطب هندسی:



۱- قطب منفرجه، قطبهای لایه حلقه، اما در صفت به هم می پیوندند.

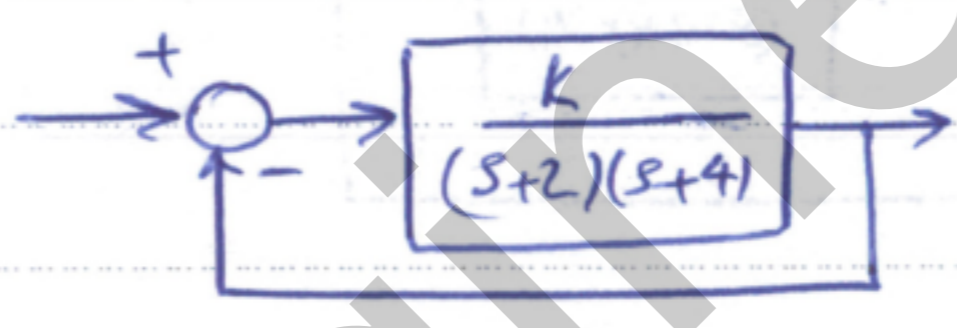
قطب هندسی قطبهای منفرجه برای $k=0$ از قطبهای حلقه باز شروع می شود و به ازای

$$G(s)H(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)}$$

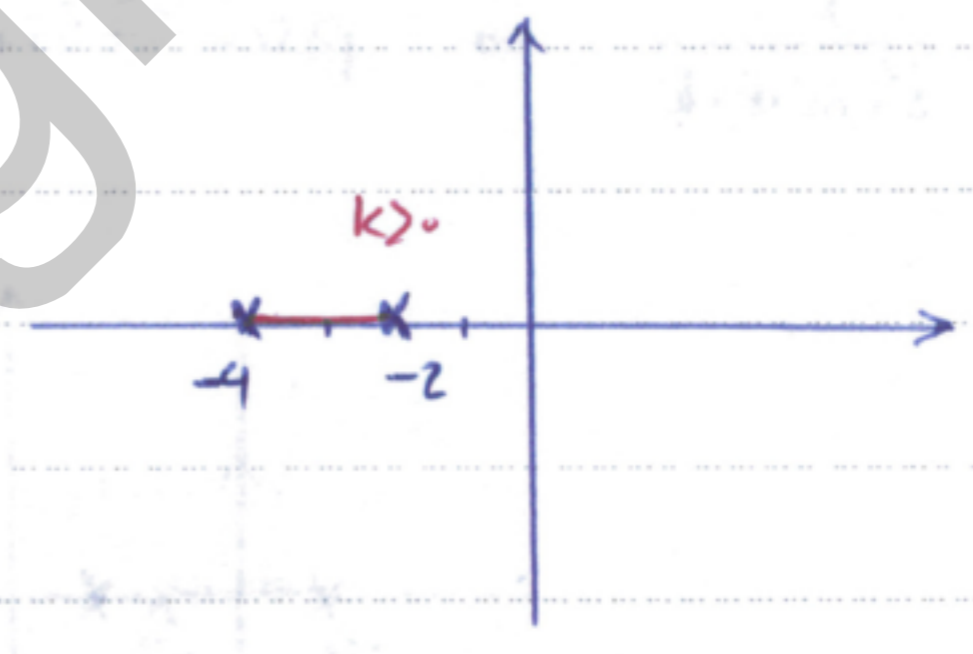
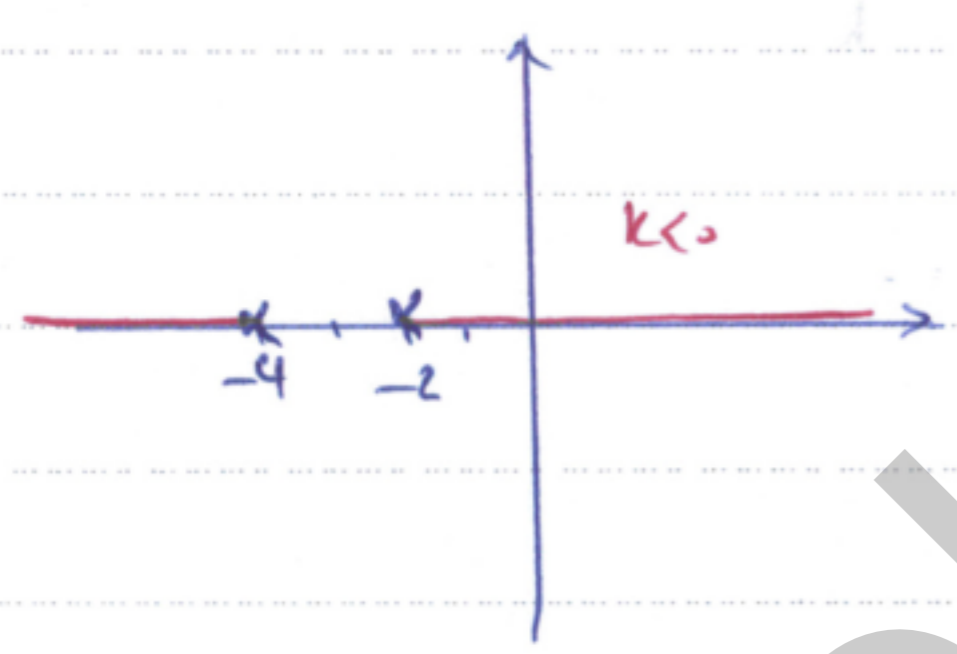
$k \rightarrow \infty$ ، به منفرجه حلقه از میله خواهد کرد.

۲- برای $k > 0$ قسمتی از حلقه منفرجه از سمت راست آن، تعداد فردی قطب، صفرها

برای $k < 0$ از چپ



مسئله:



۳- قطب هندسی را برای $n-m$ جانبی که در آن n (در خروجی $G(s)H(s)$)، m در صفرها

$G(s)H(s)$ به k ، $k > 0$ ، $k < 0$ از زاویه

$$\phi = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m}$$

منظور از جانب، خطی است که قطب هندسی برای $k \rightarrow \infty$ به آن می رود.

۴- زاویه جانبی ها: برای $k > 0$:

$$\phi = \frac{180(29-1)}{n-m}$$

$$q = 0, \pm 1, \dots$$

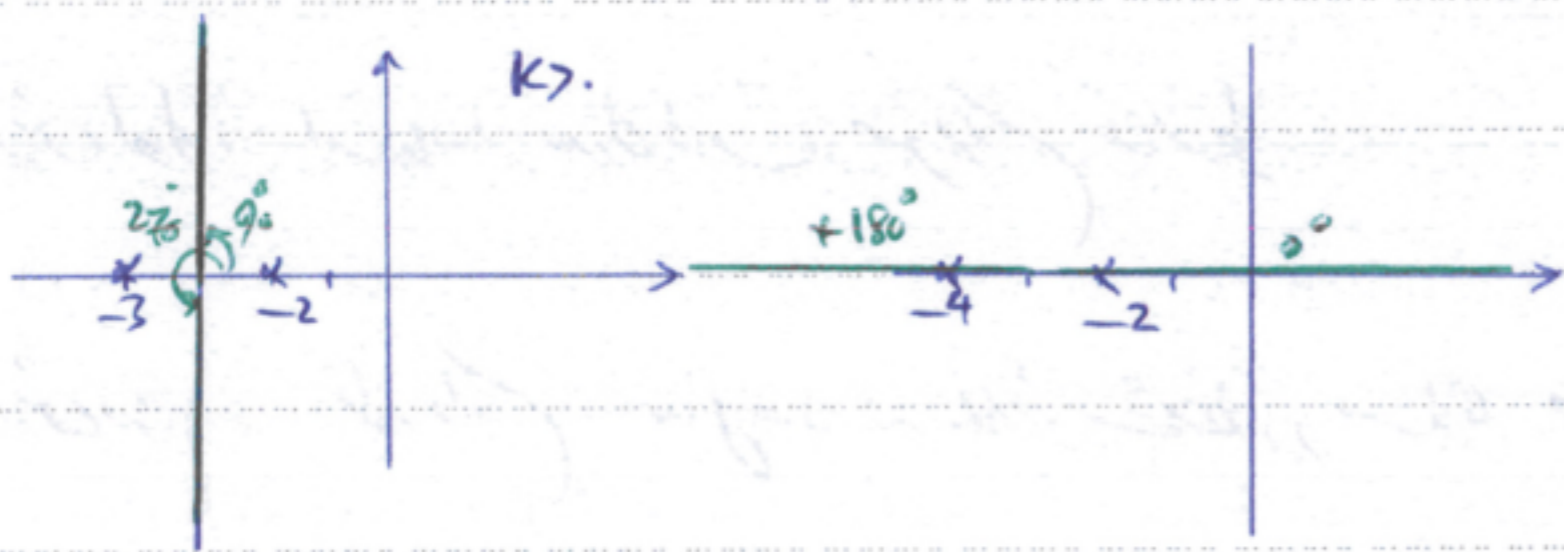
برای $k < 0$:

$$\phi = \frac{180(29)}{n-m}$$

$$\Delta = \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$\gamma = \frac{180(2q+1)}{2} = \begin{matrix} \nearrow 90 \\ \searrow 270 \end{matrix} : k > 0$$

$$\gamma = \frac{180(2q)}{2} = \begin{matrix} \nearrow 0 \\ \searrow 180 \end{matrix} : k < 0$$



۴- نقاط تقاطع: در نقاطی که نمودار به خط عمودی در آن دچار خیزش افقی می‌شود. نقاط تقاطع به طایفه حقیقی و یا چتر می‌باشند.

واژه رابطه $\frac{dk}{ds} = 0$ بدست می‌آید. $1 + kG(s)H(s) = 0 \Rightarrow k = \frac{-1}{H(s)G(s)} \rightarrow \frac{dk}{ds} \left[\frac{-1}{H(s)G(s)} \right] = 0$

- برابر است با حقیقی ماندن $\frac{dk}{ds} = 0$ ، نقاط قابل قبول است که با توجه به بند ۲، از خط عمودی عبور کند.

- اگر $\frac{dk}{ds} = 0$ دکلار در s مگر به خط عمودی در s عبور کند، پس بدست آمده را در علامت حقیقی حقیقی می‌باشد.

وارد می‌شود اگر تقارن k حقیقی می‌باشد، نقطه تقاطع بدست آمده در عمود تقاطع است. اگر

k عدد حقیقی نباشد، بنابراین نقطه مورد نظر قابل قبول نیست.

$$1 + k(s+2)(s+4) = 0 \rightarrow k = \frac{-1}{(s+2)(s+4)} = \frac{-1}{s^2+6s+8} \rightarrow \frac{dk}{ds} = \frac{2s+6}{(s^2+6s+8)^2} = 0$$

$$\Rightarrow s = -3$$

اگر $k > 0$ قابل قبول است

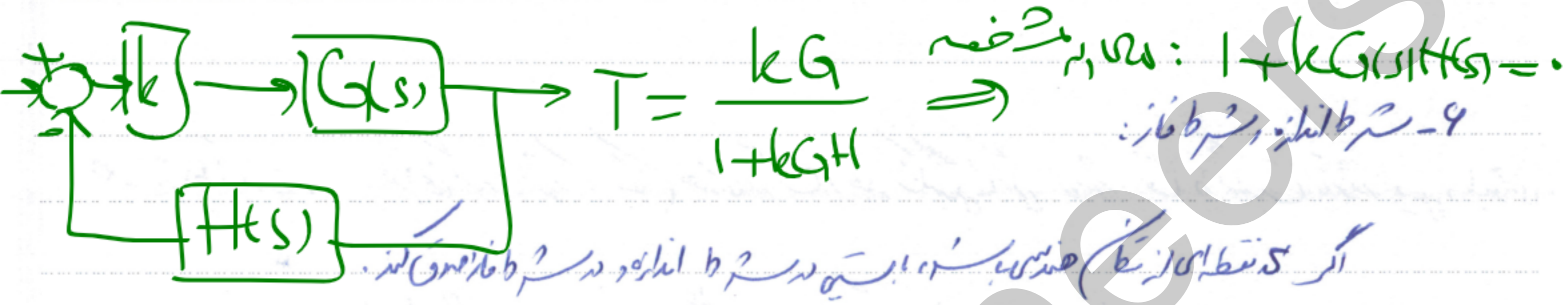
اگر $k < 0$ غیر قابل قبول است

۵- تعیین نقاط قطب خود را محاسبه کنید:

(نهایتاً در صورت نیاز این کار را انجام دهید)

روش اول: استفاده از صورت کسری و صورت فرک

روش دوم: قرار دادن $s=0$ در علامت مشخصه و استفاده از صورت کسری نسبت به علامت مشخصه



نکات مهم: $1 + kG(s)H(s) = 0 \Rightarrow kG(s)H(s) = -1$

\Rightarrow if $|kG(s)H(s)| = 1$, $\angle kG(s)H(s) = -180(2q+1)$

$\angle G(s)H(s) = -180(2q+1)$ $k > 0$
 $\angle G(s)H(s) = -180(2q)$ $k < 0$

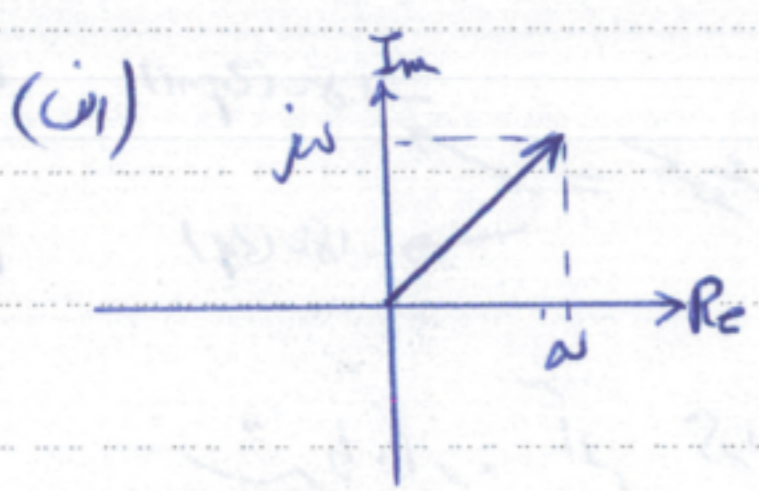
$$G(s)H(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} \Rightarrow \left| \frac{k(s+z_1)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)\dots(s+p_n)} \right| = 1$$

$$\Rightarrow |k| = \frac{|s+p_1||s+p_2|\dots|s+p_n|}{|s+z_1||s+z_2|\dots|s+z_m|} \quad (b)$$

$$\angle kG(s)H(s) = \angle \frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)\dots(s+p_n)} = \begin{matrix} \nearrow -180(2q+1) \\ \searrow -180(2q) \end{matrix} \quad (c)$$

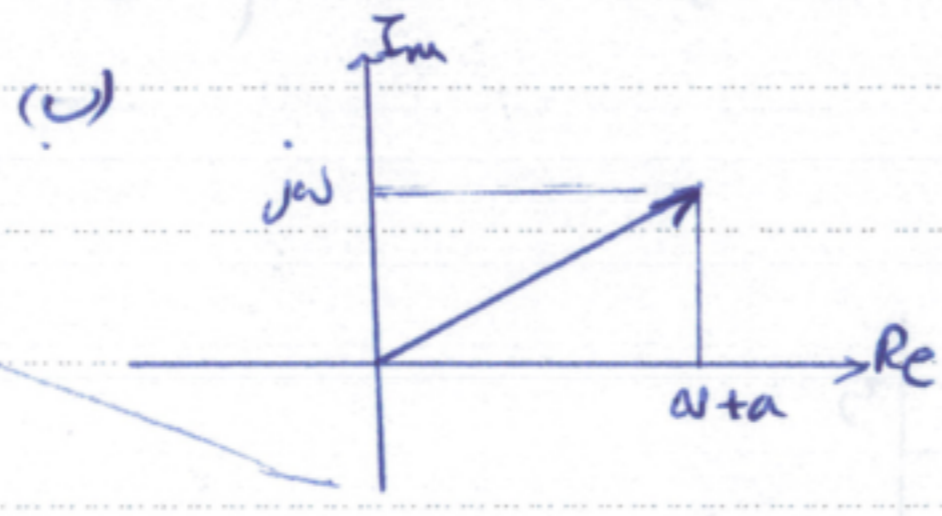
برای تعیین این مقدار باید موارد زیر را در نظر بگیریم:

* براب $s = \sigma + j\omega$ را در نظر بگیرید. این بردار می‌توان در صفحه s صورت زیر نشان داد:

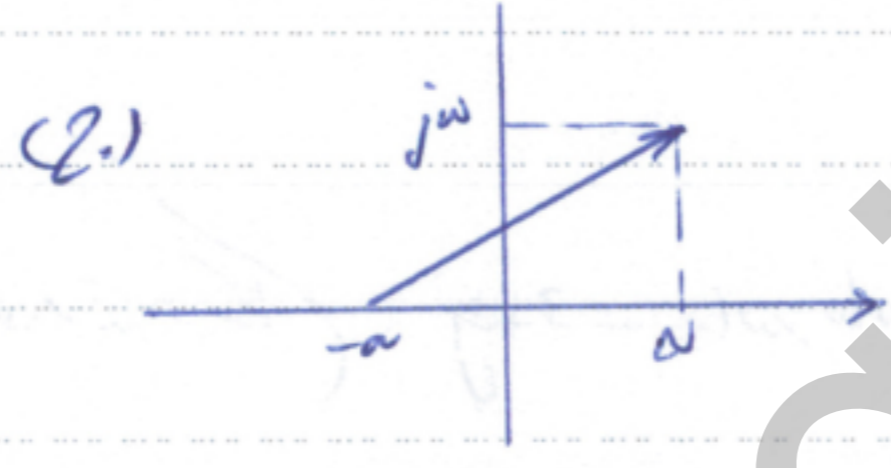


حال فرض کنید s را با a جمع کنیم. $s+a$ خود را برابری است

که در صفحه s صورت زیر نشان داده می‌شود:



حال برابری (ج) را در نظر بگیرید:



این بردار $a - s$ شروع در نقطه $s = \sigma + j\omega$ ختم می‌شود. در بردار شکل (ب) و (ج) همگامی دارند

بدین معنی که عمود بر آنها می‌تواند صورت این معنی $|s+a|$ و $|s-a|$ در دو شکل (ب) و (ج) بیان کنند.

پس باید بیان می‌توان کرد که $s+a$ بردار است که از سر این عبارت یعنی $a - s$ شروع می‌شود و $s = \sigma + j\omega$

ختم می‌شود. *

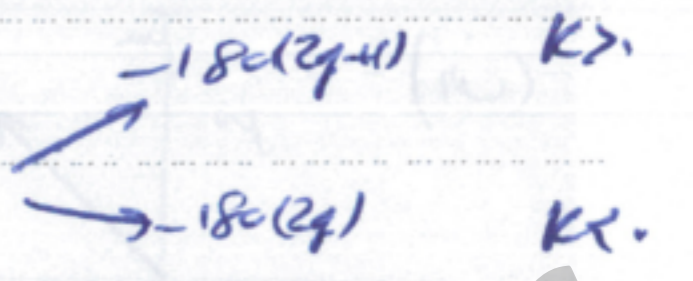
عبارت رابطه: $(s-p_1)(s-p_2) \dots (s-p_n)$ و $(s-z_1)(s-z_2) \dots (s-z_m)$

$$|k| = \frac{|s+p_1||s+p_2| \dots |s+p_n|}{|s+z_1||s+z_2| \dots |s+z_m|} = \frac{(\text{طول بردار پoles}) \times (s-p_2) \dots (s-p_n)}{(\text{طول بردار zeros}) \times (s-z_2) \dots (s-z_m)}$$

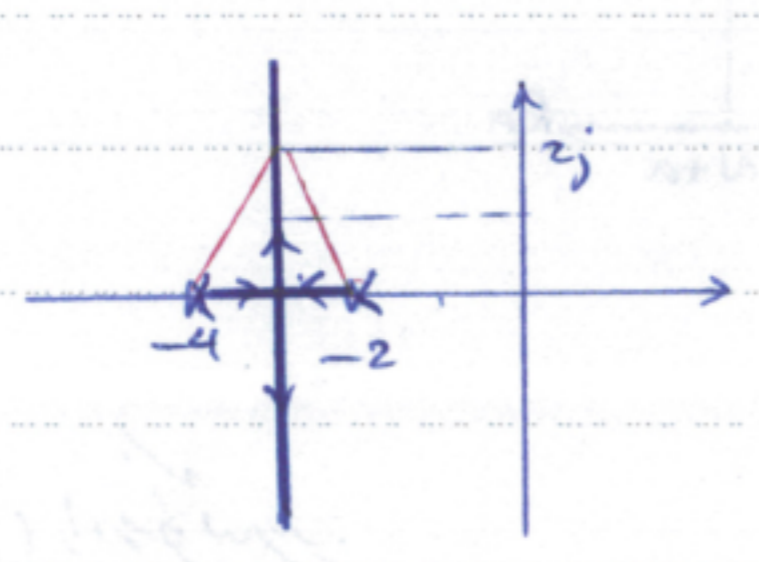
نشان دهنده: اگر هر نقطه از سطح ختم می‌شود
 $|k| = \frac{\text{حاصلضرب طول بردارهای پoles از نقطه s}}{\text{حاصلضرب طول بردارهای zeros از نقطه s}}$

$$\angle G(s)H(s) = \angle \frac{(s+z_1) \dots (s+z_m)}{(s+p_1) \dots (s+p_n)} = (\angle s+z_1 + \angle s+z_2 \dots + \angle s+z_m) - (\angle s+p_1 + \angle s+p_2 \dots + \angle s+p_n)$$

= مجموع زوایای سهم شده از قطبها بر s - مجموع زوایای سهم شده از صفرها بر s

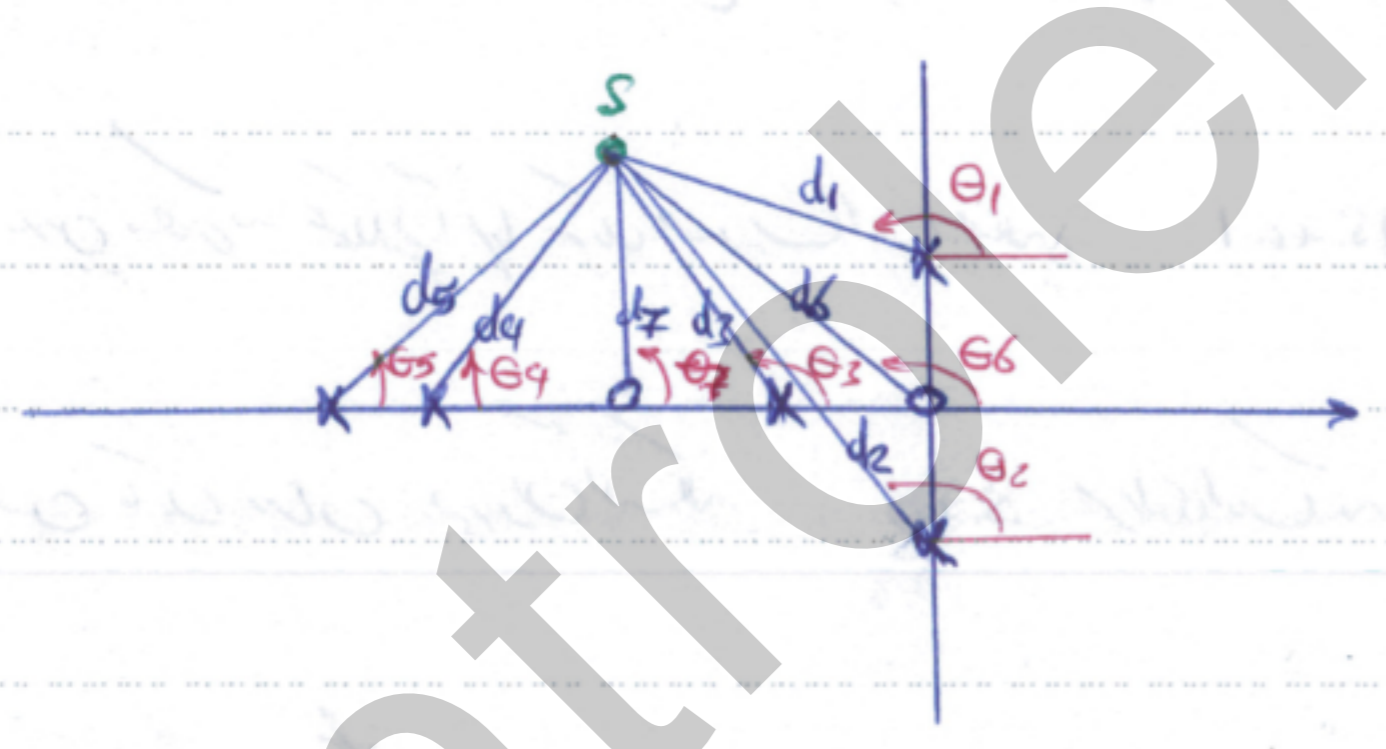


شماره فاز: اگر نقطه‌ای از سطح حقیقی باشد به سمت راست از محور حقیقی است



$$k = \sqrt{1+4} \sqrt{1+4} = 5$$

مقدار k برابر آنکه قطبهای حلقه بسته در نقطه $s = -3$ بیافتد باید:



$$k = \frac{d_1 d_2 d_3 d_4 d_5}{d_6 d_7}$$

$$\theta_6 + \theta_7 - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5) = -180$$

زوایای خودی از قطبها بر s و صفرها بر s

نکته: در کتاب نیست، اضافه شده است. هندسی احمد حقیقی زوایای $\frac{180^\circ}{n}$ تشکیل می دهند. در آن n تعداد قطبهای حلقه بسته است. در کتاب نیست برادر احمد حقیقی هم می آیند یا از هم دور می شوند. (Kuo, 1991): بر روی صفحه از کتاب Nise صفحه 441

مقاله‌ها را نگاه کنید و بنویسید:

$$G(s)H(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+13} \quad -1$$

مجزا: $s = -2$ قطبها: $s = -2 \pm \sqrt{4-13} = -2 \pm j3$

زاویه فاز در $s = -2$: $\angle = \frac{-2-2-(-2)}{1} = \frac{-4+2}{1} = -2$

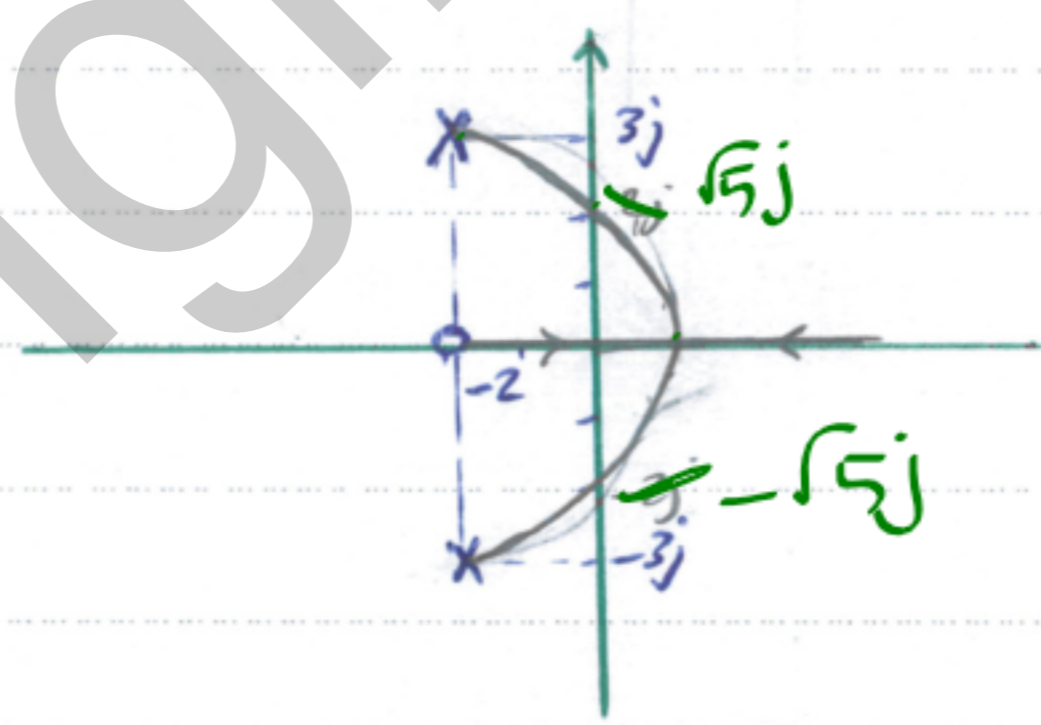
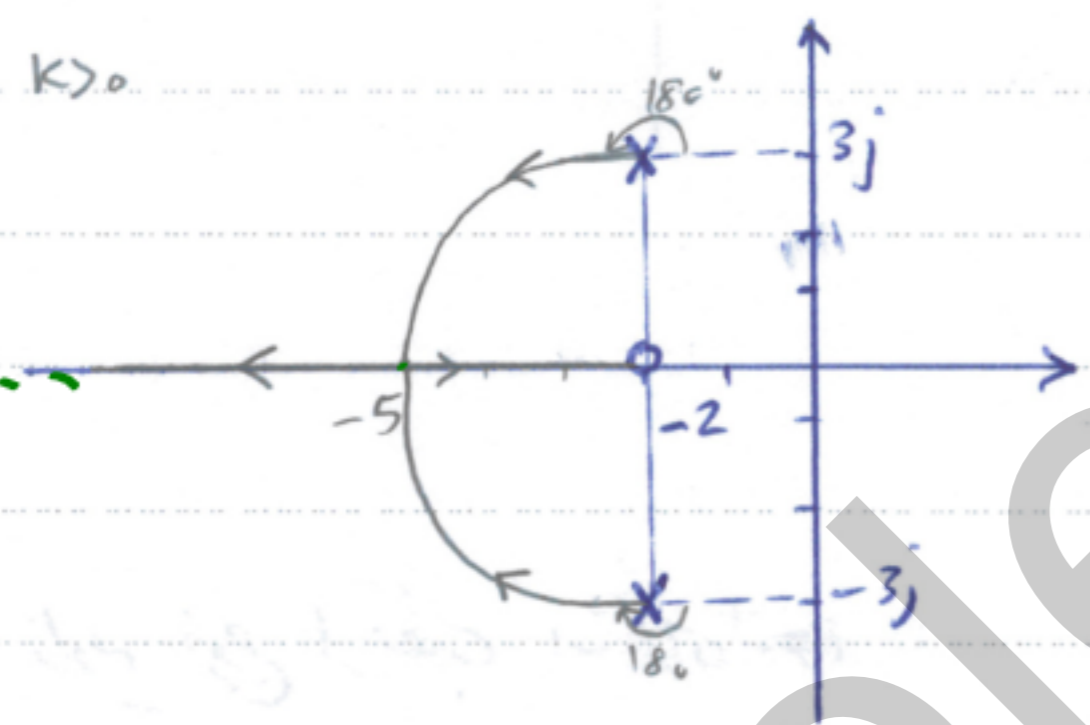
زاویه فاز در $s = -2 \pm j3$:
 $\angle = \frac{180(29+1)}{1} = 180$
 $\angle = \frac{180(29)}{1} = 0$

نقطه کسب:

$$1 + \frac{k(s+2)}{s^2+4s+13} = 0 \Rightarrow k = -\frac{s^2+4s+13}{s+2}$$

$$\frac{dk}{ds} = \frac{(2s+4)(s+2) - (s^2+4s+13)}{(s+2)^2} = \frac{2s^2+8s+8 - s^2-4s-13}{(s+2)^2} = \frac{s^2+4s-5}{(s+2)^2} = 0$$

$$\Rightarrow s^2+4s-5 = 0 \Rightarrow (s+5)(s-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} s=1 & k < 0 \\ s=-5 & k > 0 \end{cases}$$



زاویه خروج از قطب برای $k > 0$:

$$90 - (\theta + 90) = -180 \Rightarrow 90 - \theta - 90 = -180 \Rightarrow \theta = 180$$

زاویه ورود به قطب برای $k < 0$:

$$90 - (\theta + 90) = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

$$1 + \frac{k(s+2)}{s^2+4s+13} = 0 \Rightarrow s^2+4s+13+k(s+2) = 0$$

$$\Rightarrow s^2 + (4+k)s + 13+2k = 0$$

حل ریشه با کدها: $k < 0$

s^2	1	$13+2k$
s^1	$4+k$	0
s^0	$13+2k$	

$$\Rightarrow k = -4 \Rightarrow D(s) = s^2 + 13 + 2k = s^2 + 5 = 0$$

$$s = j\omega \Rightarrow -\omega^2 + 5 = 0 \Rightarrow \omega = \pm \sqrt{5}$$

$$G(s)H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)} \quad -2$$

صورت:

$$قطب: s = -1, -3$$

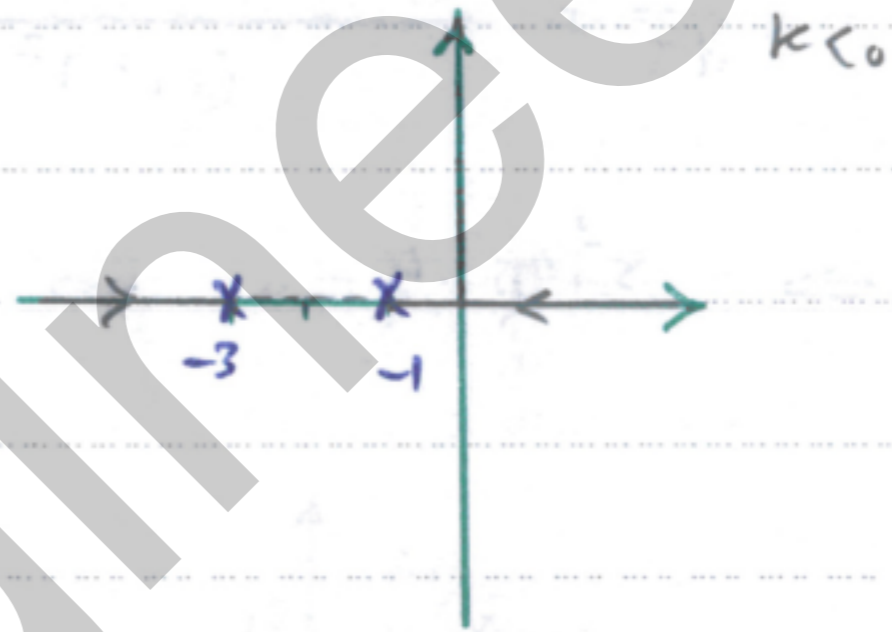
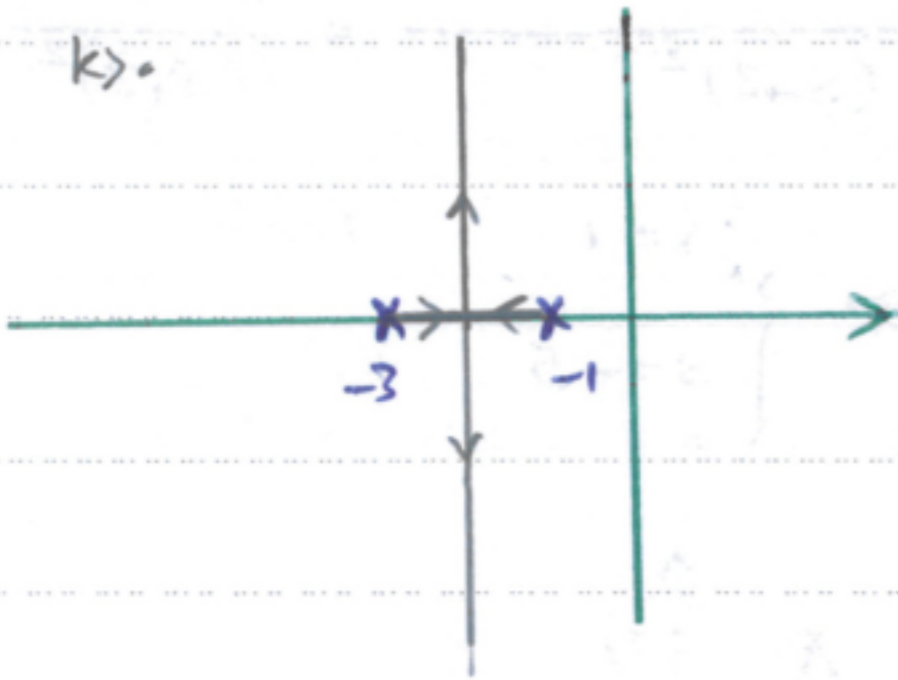
$$d = \frac{-1-3}{2} = -2$$

$$\gamma = \begin{cases} \frac{180(2q+1)}{2} = \begin{cases} 90 \\ 270 \end{cases} \\ \frac{180(2q)}{2} = \begin{cases} 0 \\ 180 \end{cases} \end{cases}$$

محل قطب:

$$1 + \frac{k}{(s+1)(s+3)} = 0 \Rightarrow k = -(s+1)(s+3) = -(s^2+4s+3)$$

$$\frac{dk}{ds} = -(2s+4) = 0 \Rightarrow s = -2 \quad \text{برابر } k$$



زاویه خروج از قطب 1 - برای $k > 0$:

$$0 - (\theta + 0) = -180 \Rightarrow \theta = 180$$

زاویه خروج از قطب 3 - برای $k > 0$:

$$0 - (\theta + 180) = -180 \Rightarrow \theta = 0$$

زاویه ورود به قطب 1 - برای $k < 0$:

$$0 - (\theta + 0) = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

زاویه ورود به قطب 3 - برای $k < 0$:

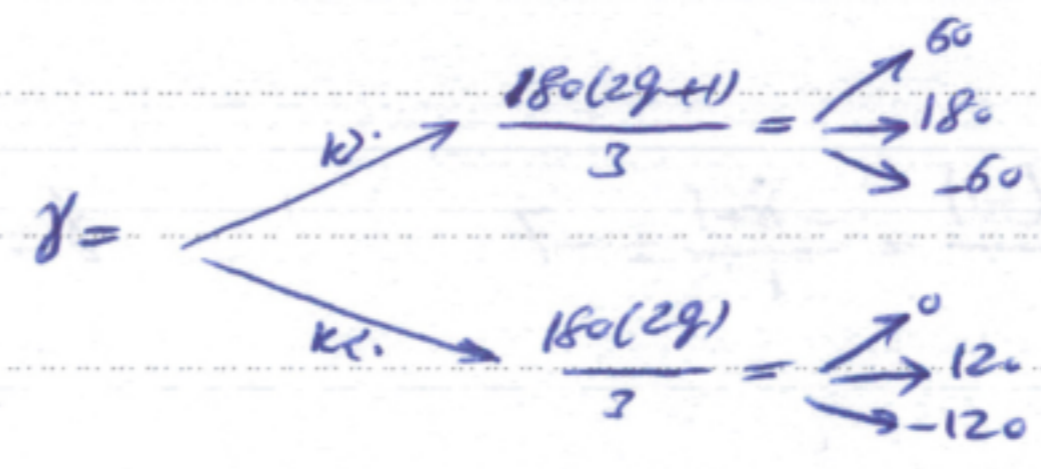
$$0 - (\theta + 180) = 0 \Rightarrow \theta = -180$$

$$G(s)H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)(s+5)}$$

صفرها: $s = -1, -3, -5$

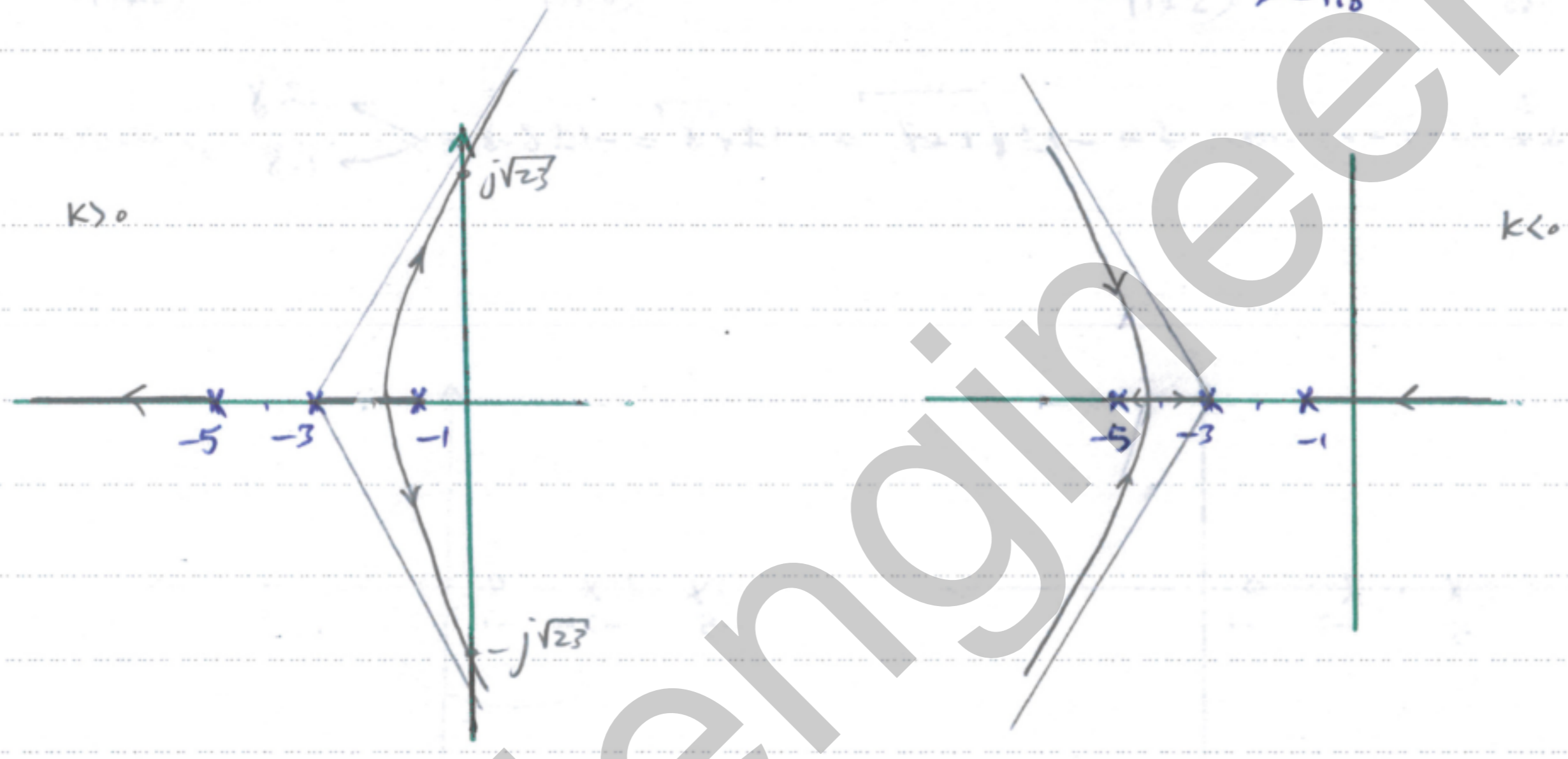
قطبها: $s = -1, -3, -5$

$$N = \frac{-1-3-5}{3} = \frac{-9}{3} = -3$$



حل اولی: $1 + \frac{k}{(s+1)(s+3)(s+5)} = 0 \Rightarrow k = -(s+1)(s+3)(s+5) = -(s^3 + 8s^2 + 15s + 15)$

$$\frac{dk}{ds} = -(3s^2 + 18s + 23) = 0 \Rightarrow s = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 69}}{3} = \frac{-9 \pm \sqrt{12}}{3} \Rightarrow -4.1, -1.8$$



نقطه برخورد را محدد نمودیم برای $k > 0$

$$1 + \frac{k}{(s+1)(s+3)(s+5)} = 0 \Rightarrow (s+1)(s+3)(s+5) + k = 0$$

$$\Rightarrow s^3 + 9s^2 + 23s + 15 + k = 0$$

s^3	1	23
s^2	9	15+k
s^1	$\frac{207-15-k}{9}$	0
s^0	15+k	

$$\rightarrow 207 - 15 - k = 0 \rightarrow k = 192 \Rightarrow D(s) = 9s^2 + 15 + k = 0$$

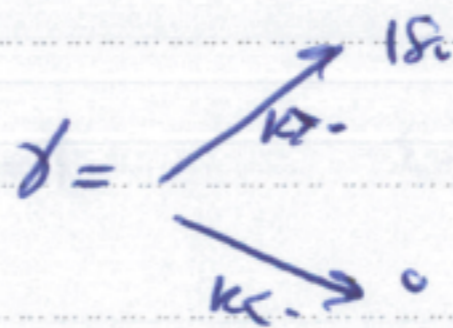
$$9s^2 + 15 + 192 = 9s^2 + 207 = 0 \Rightarrow s^2 + 23 = 0$$

$$s = j\omega \Rightarrow -\omega^2 + 23 = 0 \rightarrow \omega = \pm\sqrt{23}$$

$$G(s)H(s) = \frac{s+1}{(s+3)(s+5)} \quad -4$$

جزء: $s = -1$ کتب: $s = -3, -5$

$$\Delta = \frac{-3-5-(-1)}{1} = \frac{-8+1}{1} = -7$$

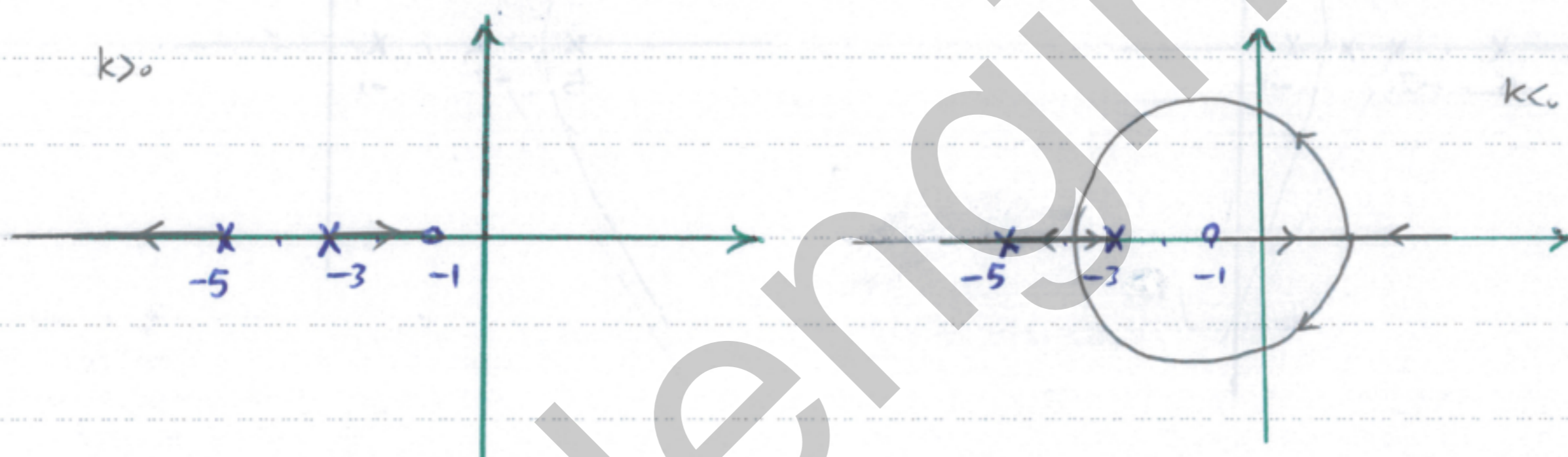


تجزیه:

$$1 + \frac{k(s+1)}{(s+3)(s+5)} = 0 \rightarrow k = -\frac{s^2+8s+15}{s+1}$$

$$\frac{dk}{ds} = -\frac{(2s+8)(s+1) - (s^2+8s+15)}{(s+1)^2} = -\frac{(2s^2+10s+8) - (s^2+8s+15)}{(s+1)^2} = -\frac{s^2+2s-7}{(s+1)^2} = 0$$

$$s^2+2s-7=0 \rightarrow s = -1 \pm \sqrt{1+7} = -1 \pm \sqrt{8} = -1 \pm 2.8 = \begin{matrix} -3.8 \\ 1.8 \end{matrix} \quad \text{کتاب}$$



Geçit Hesabı = $\frac{1}{s^2 + 2s + 2} - 5$

çözüm: $\omega = 1$

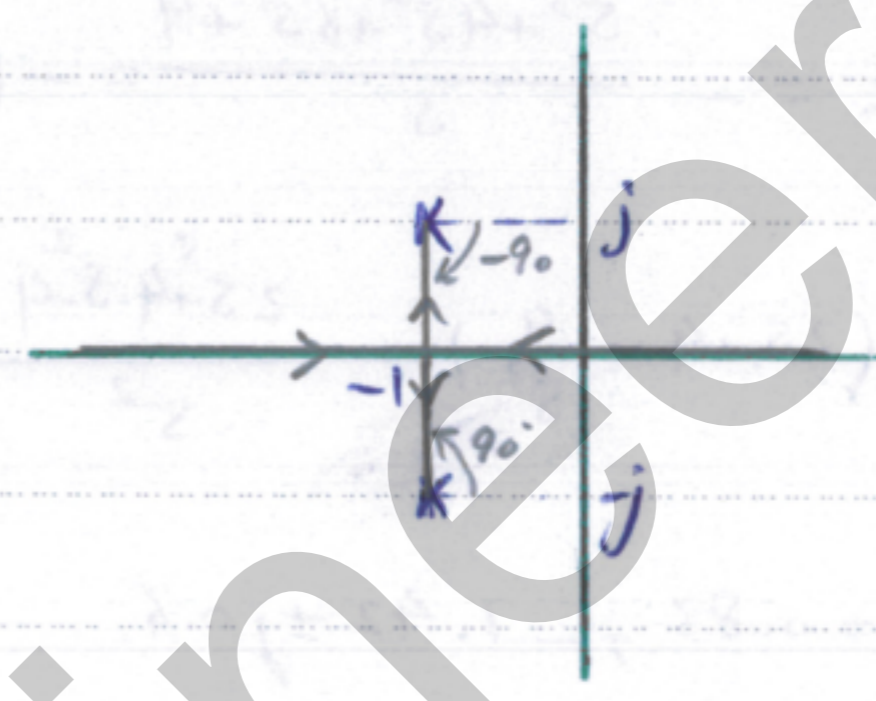
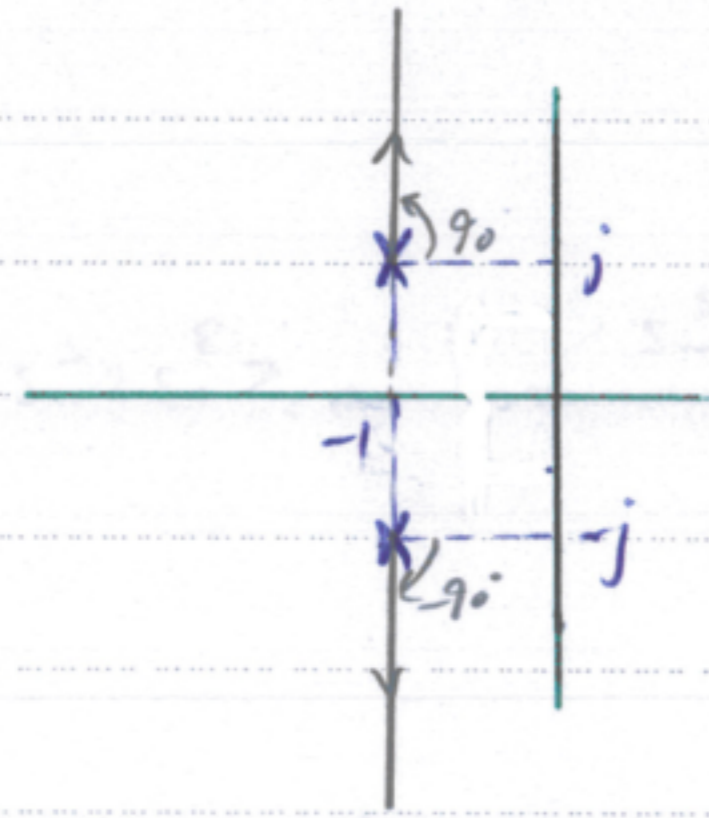
çözüm: $s = -1 \pm j$

$\Delta = \frac{-1-1}{2} = -1$

$\delta = \begin{cases} k > 0 \rightarrow \frac{180(2q+1)}{2} = \begin{cases} 90 \\ -90 \end{cases} \\ k < 0 \rightarrow \frac{180(2q)}{2} = \begin{cases} 0 \\ 180 \end{cases} \end{cases}$

çözüm: $1 + \frac{k}{s^2 + 2s + 2} = 0$

$\Rightarrow k = -(s^2 + 2s + 2) \rightarrow \frac{dk}{ds} = -(2s + 2) = 0 \rightarrow s = -1$



çözüm: $k = +$ için köklerin yerini bulalım

$0 - (\theta + 90) = -180 \rightarrow \theta = 90$

çözüm: $k = -$ için köklerin yerini bulalım

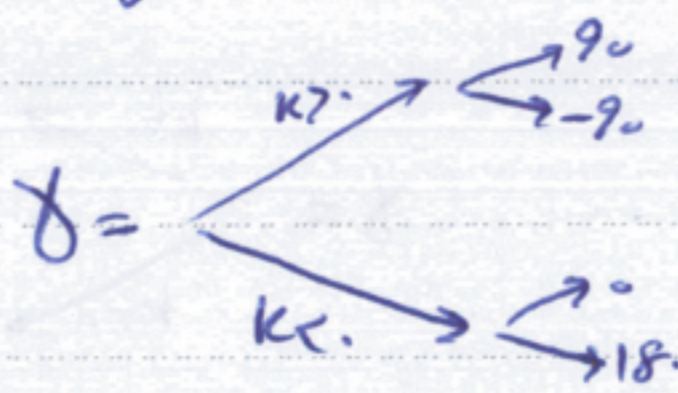
$0 - (\theta + 90) = 0 \rightarrow \theta = -90$

$$G(s)H(s) = \frac{s}{(s+2)(s^2+2s+2)} \quad -6$$

لوزو: $s=0$

لوزو: $s=-2, -1 \pm j$

$$\omega = \frac{-2-1-1-0}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$



مساواة:

$$1 + \frac{ks}{(s+2)(s^2+2s+2)} = 0 \rightarrow k = -\frac{(s+2)(s^2+2s+2)}{s} = -\frac{s^3+2s^2+2s^2+4s+4}{s}$$

$$k = -\frac{s^3+4s^2+6s+4}{s} = -(s^2+4s+6+\frac{4}{s})$$

$$\frac{dk}{ds} = -(2s+4-\frac{4}{s^2}) = -\frac{2s^3+4s^2-4}{s^2} = -2 \frac{s^3+2s^2-2}{s^2} = 0 \Rightarrow s^3+2s^2-2=0$$

$$\Rightarrow s = 0.83, -1.42 \pm j0.6$$



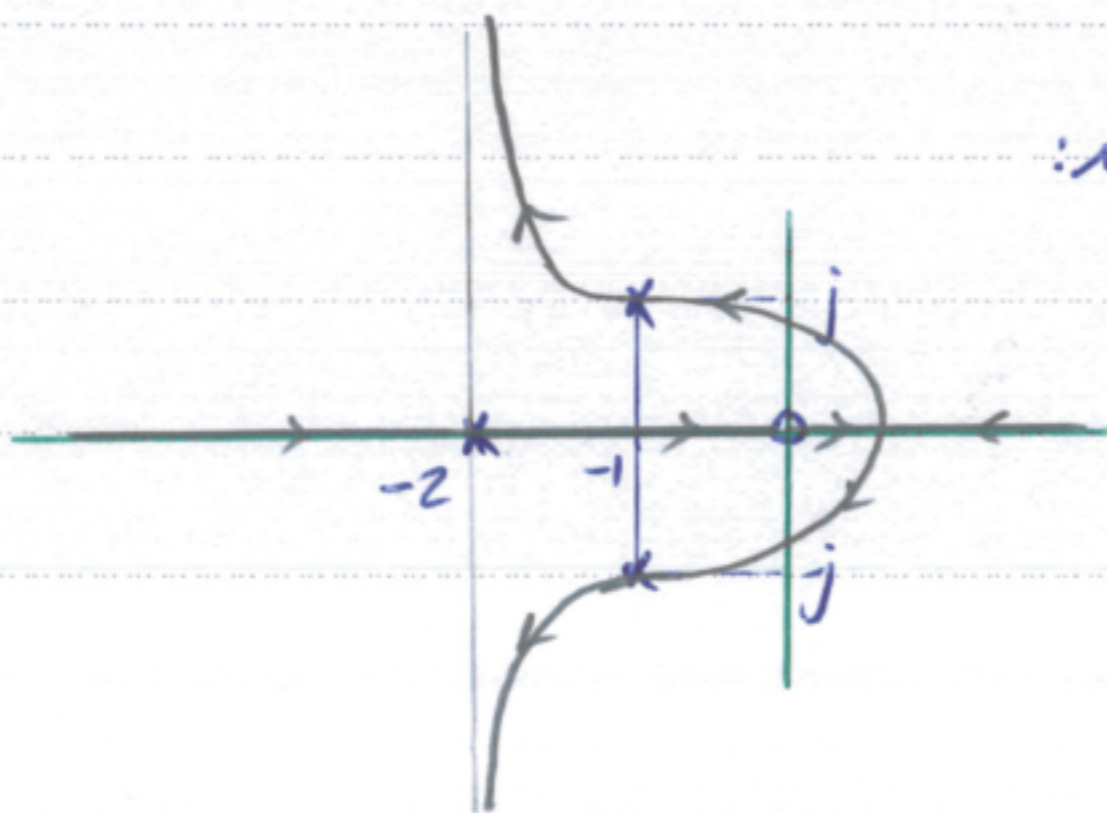
زاوية خروج از قطب خردج براب $k=+$

$$135 - (\theta + 90 + 45) = -180 \Rightarrow \theta = 180$$

زاوية ورود به قطب خردج براب $k=-$:

$$135 - (\theta + 90 + 45) = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

براب $0 < k < \infty$ - دو گنجل با ميل صاف هستند:

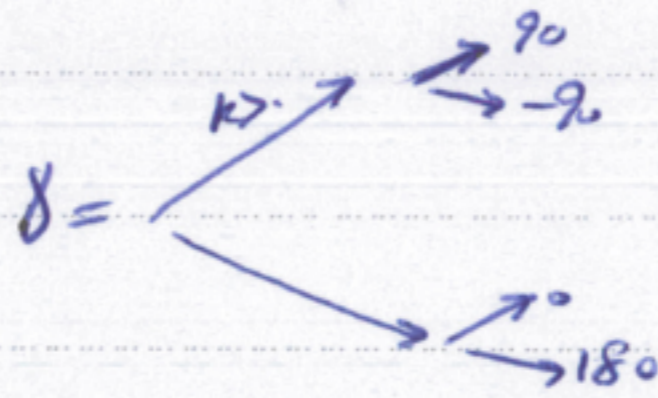


$$G(s)H(s) = \frac{s}{(s+4)(s^2+2s+2)} \quad -7$$

نقطه: $s=0$

قطب: $s=-4, -1 \pm j$

$$N = \frac{-4-1-1-0}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$



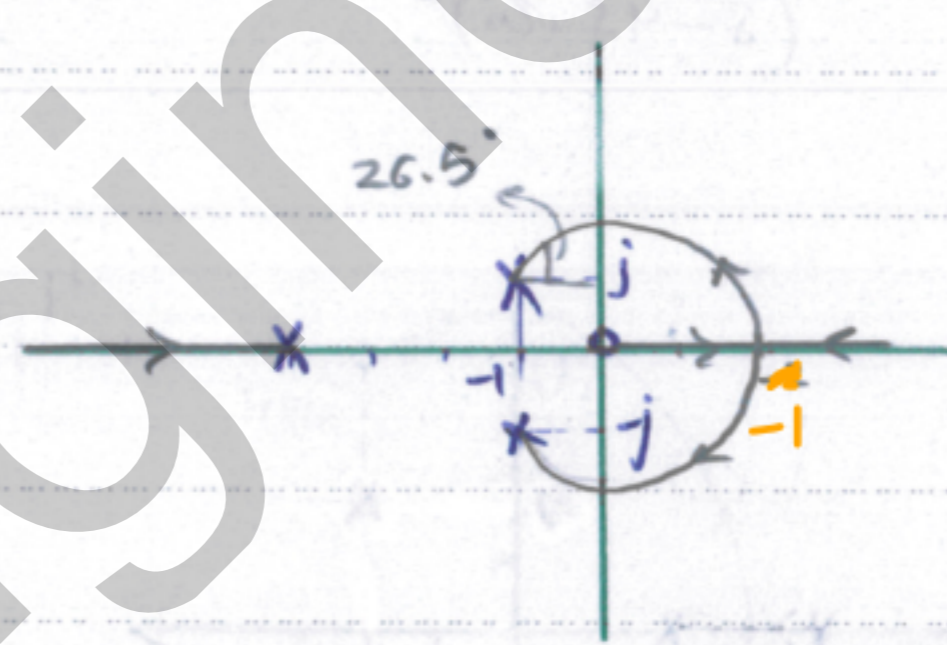
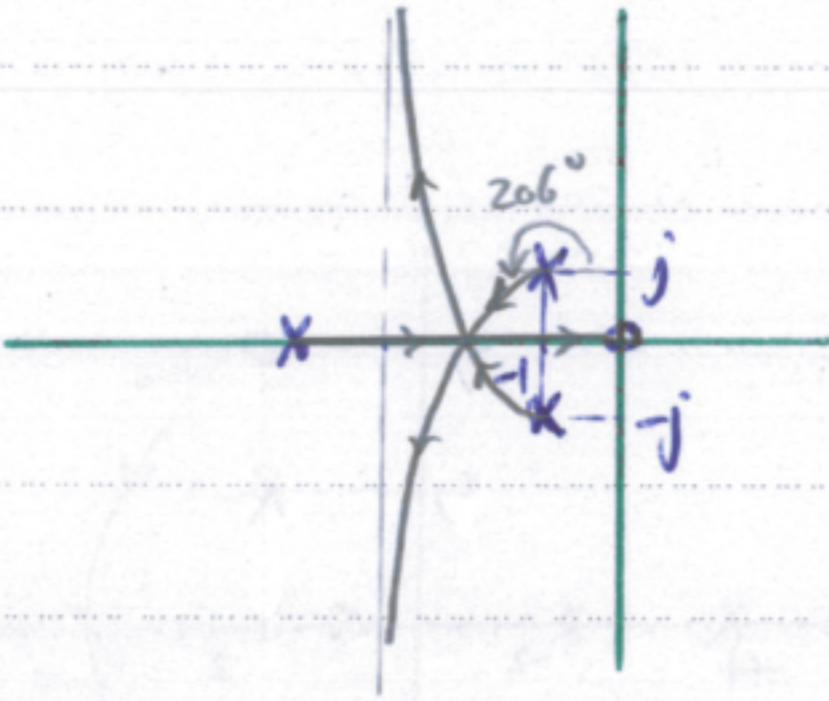
مقدار: k

$$1 + \frac{k s}{(s+4)(s^2+2s+2)} = 0 \rightarrow k = \frac{(s+4)(s^2+2s+2)}{s} = \frac{s^3+2s^2+2s+4s^2+8s+8}{s}$$

$$k = \frac{s^3+6s^2+10s+8}{s} = s^2+6s+10+\frac{8}{s}$$

$$\frac{dk}{ds} = 2s+6 - \frac{8}{s^2} = \frac{2s^3+6s^2-8}{s^2} = 2 \frac{s^3+3s^2-4}{s^2} = 0 \Rightarrow s^3+3s^2-4=0 \Rightarrow s = +1, -2, -2$$

$$= (s-1)(s+2)^2 = 0$$



زاویه خروج از نقطه کانونی برای $k=+$:

$$135 - (\theta + 90 + \tan^{-1} \frac{1}{3}) = -180 \Rightarrow \theta = 206.5^\circ$$

زاویه ورود به نقطه کانونی برای $k=-$:

$$135 - (\theta + 90 + \tan^{-1} \frac{1}{3}) = 0 \Rightarrow \theta = 26.5^\circ$$

$$G(s)H(s) = \frac{s^2 - 4s + 20}{(s+2)(s+4)} \quad -8$$

صورت: $s = 2 \pm 4j$

قطبها: $s = -2, -4$

خطی در هر صورت، خروجی مکان است پس مجانب نداریم.

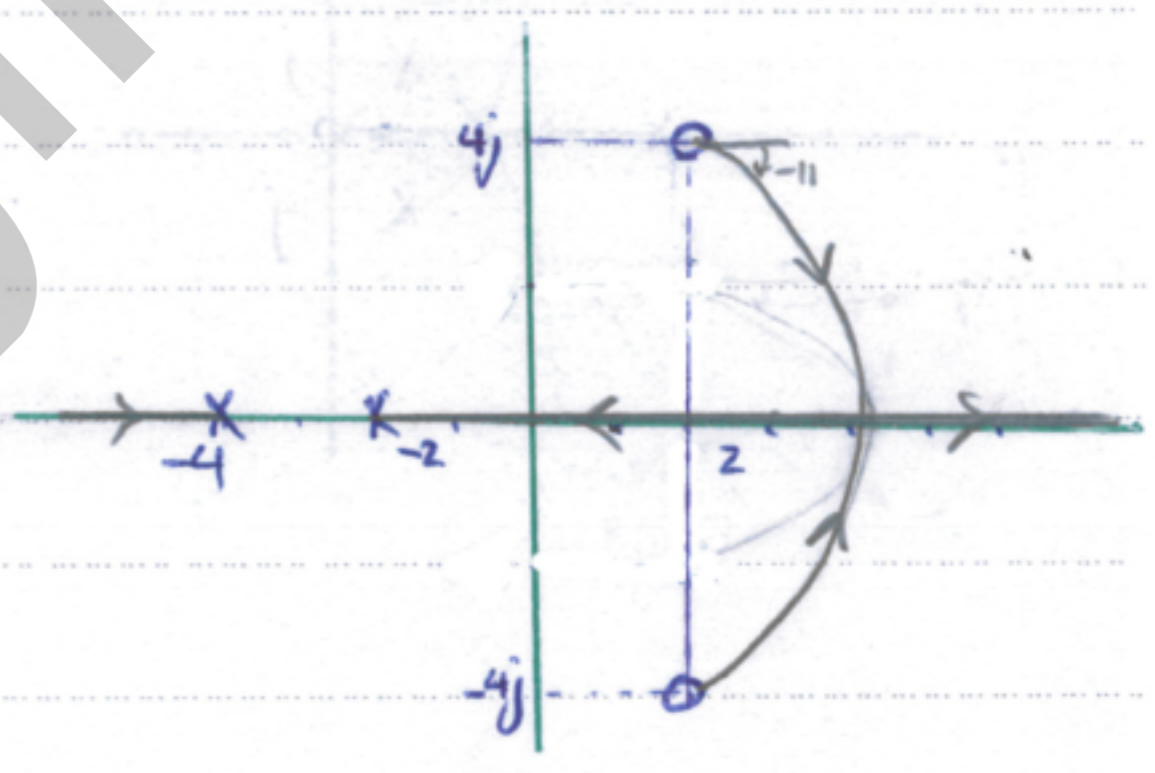
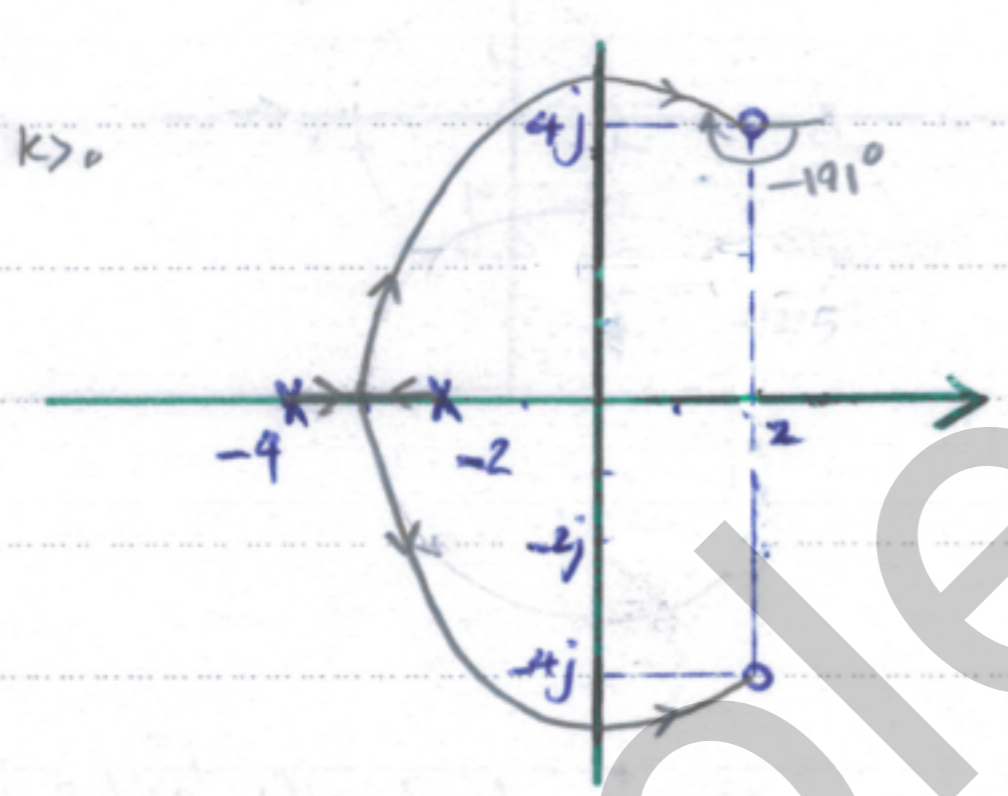
تکاملت: $1 + \frac{k(s^2 - 4s + 20)}{(s+2)(s+4)} = 0 \Rightarrow k = -\frac{s^2 + 6s + 8}{s^2 - 4s + 20}$

$$\frac{dk}{ds} = -\frac{(2s+6)(s^2 - 4s + 20) - (s^2 - 4s + 20)(2s-4)}{(s^2 - 4s + 20)^2} = -$$

$$= \frac{2s^3 - 8s^2 + 40s + 6s^2 - 24s + 120 - 2s^3 + 12s^2 - 16s + 4s^2 + 24s + 32}{(s^2 - 4s + 20)^2}$$

$$= \frac{-10s^2 + 24s + 152}{(s^2 - 4s + 20)^2} = 0 \Rightarrow s = 5.27, -2.87$$

$k < 0$ $k > 0$



زاویه در هر صورت، نزدیک برابر صاف k :

$$\theta + 90 - (45^\circ + \tan^{-1} \frac{4}{6}) = -180 \Rightarrow \theta = -191^\circ$$

زاویه خروج از صفر نزدیک به از صفر $k \rightarrow -$:

$$\theta + 90 - (45 + \tan^{-1} \frac{4}{6}) = 0 \Rightarrow \theta = -11^\circ$$

$$G(s)H(s) = \frac{1}{s^2(s+3)} \quad -10$$

بجز:

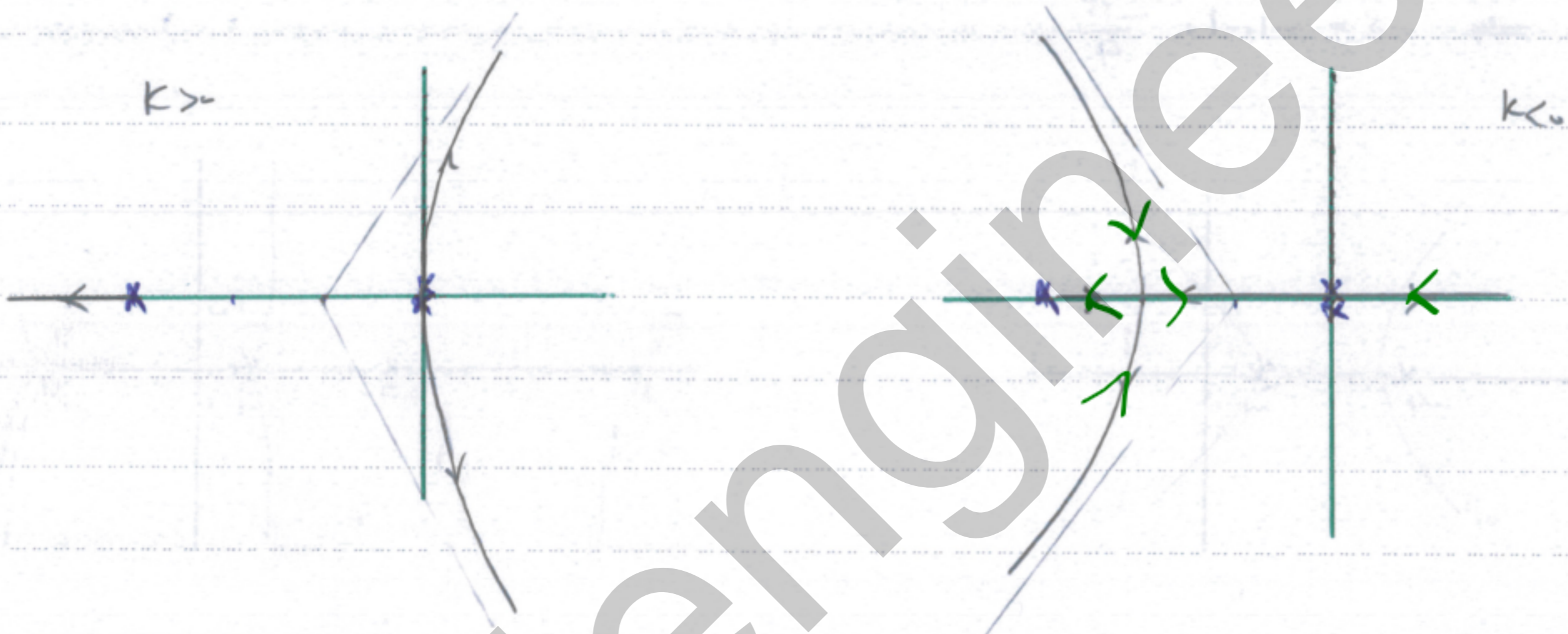
$$p: s=0, 0, -3$$

$$N = \frac{-3}{3} = -1$$

$$z = \begin{cases} K_2 \rightarrow 60, -60, 180 \\ K_C \rightarrow 0, 120, -120 \end{cases}$$

تساوی: $1 + \frac{k}{s^2(s+3)} = 0 \rightarrow k = -s^2(s+3) = -(s^3+3s^2)$

$$\frac{dk}{ds} = 0 \Rightarrow -(3s^2+6s) = 0 \rightarrow -3s(s+2) = 0 \Rightarrow s = 0, -2$$



$G(s)H(s) = \frac{1}{(s+1)^3(s+4)}$ -9

logio: 2/3

lykio: $s = -1, -1, -1, -4$

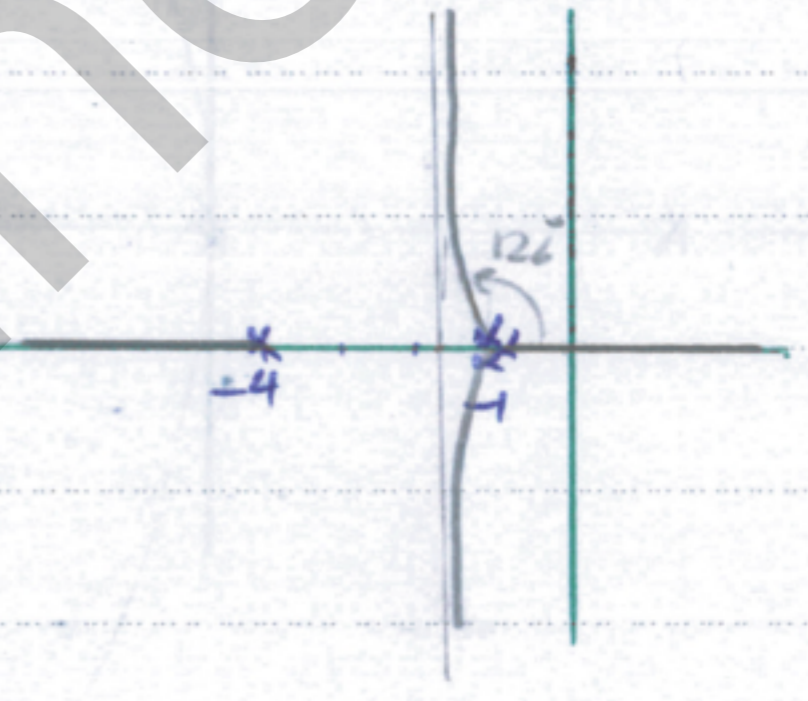
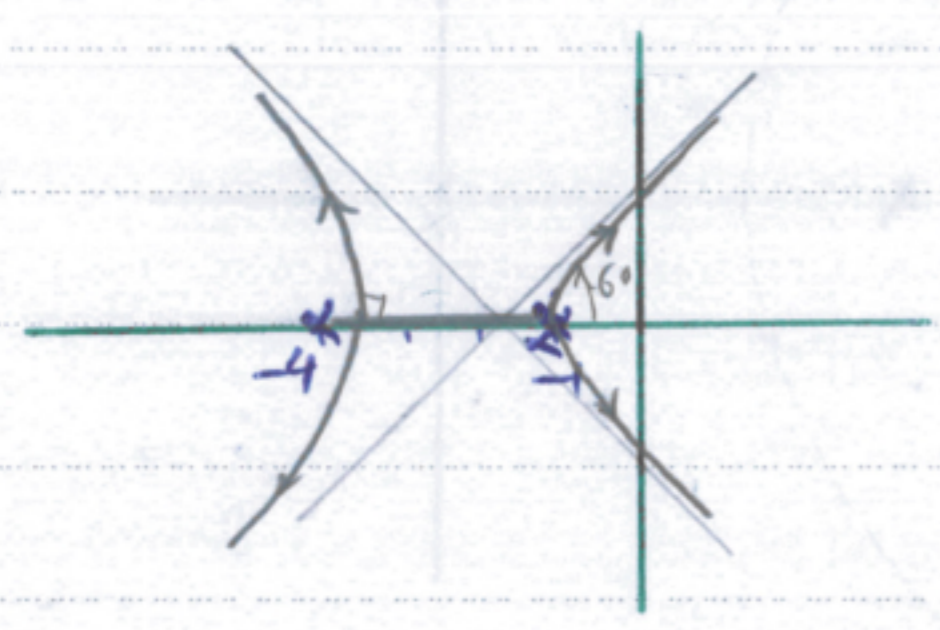
$N = \frac{-1-1-1-4}{4} = \frac{-7}{4}$

$y = \begin{cases} k> \rightarrow \frac{180(29+1)}{4} = 45, 135, -45, -135 \\ k< \rightarrow \frac{180(29)}{4} = 0, 90, 180, 270 \end{cases}$

Condition: $1 + \frac{k}{(s+1)^3(s+4)} = 0 \Rightarrow k = -(s+1)^3(s+4)$

$\frac{dk}{ds} = -[3(s+1)^2(s+4) + (s+1)^3] = -(s+1)^2(3s+12+s+1) = -(s+1)^2(4s+13) = 0$

$\Rightarrow s = -1, -1, -\frac{13}{4}$
k> 0, k< 0



زاویه خروجی انتظاب - برای $k = +$

$0 - (0 + 3\theta) = -180 \Rightarrow \theta = 60$

ControlEngineers.ir

نکته: هندسی تقسیم پلیمه

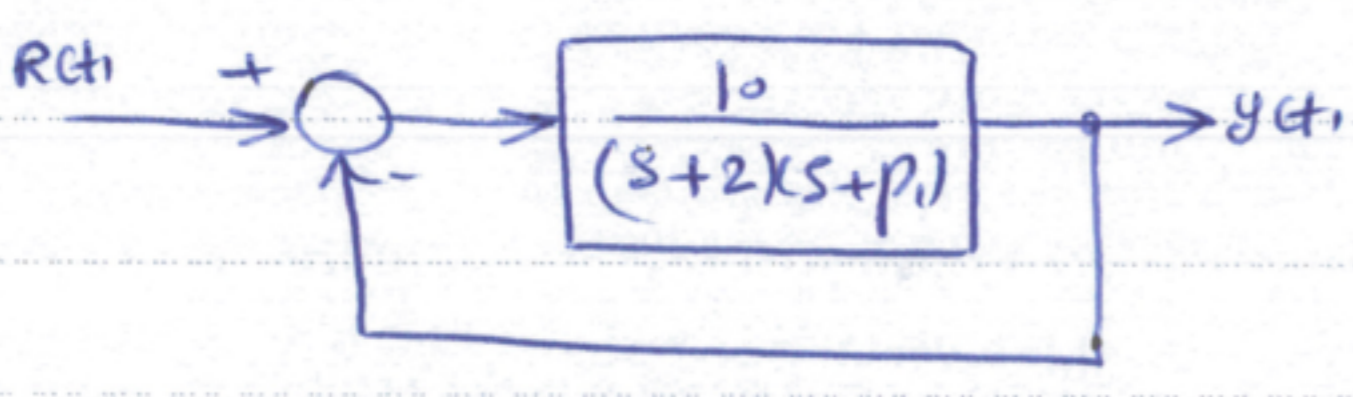
تا این قسمت سیستم کمی را بررسی کردیم که در آنجا K بهره مستقیم بود. حال فرض کنید خواصیم یک سیستم هندسی را بررسی کنیم

پلیمه را به ازای تغییرات پلیمه از پارامترهاک خود تابع بهره حلیمه $G(s)H(s)$ را میگیریم. در این حالت سعی خواهیم کرد

سیستم را بصورت سیستم هاکی بیان کنیم در صورتی که پارامترهای تغییراتی، پارامتر مورد نیاز بهره حلیمه $G(s)H(s)$

اصول بهره حلیمه بیان کنیم

مثال: یک سیستم هندسی را به ازای تغییرات پارامتر p_1 از 0 تا 100 رسم کنید

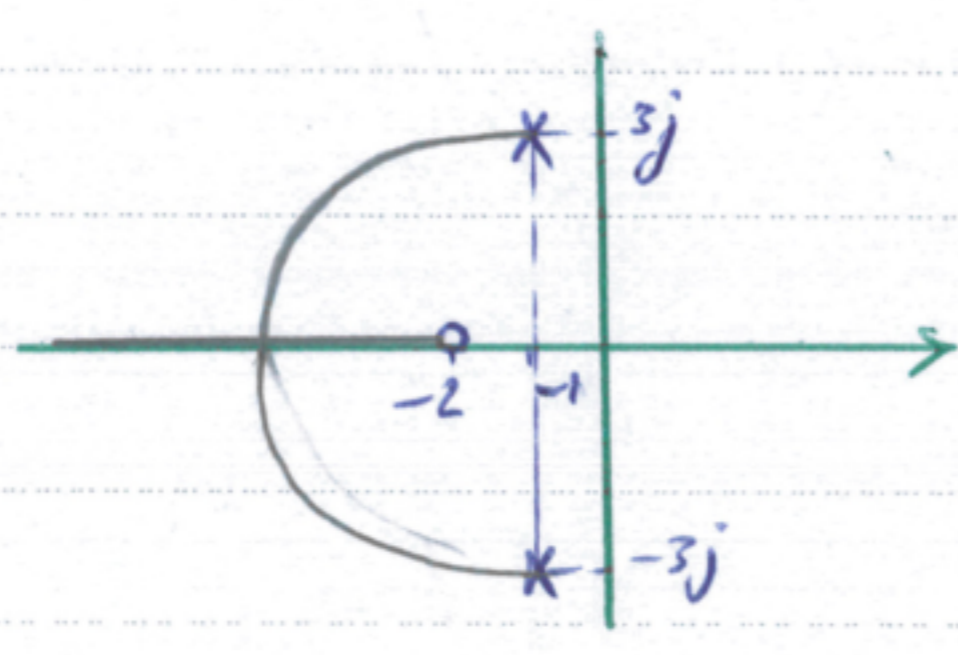
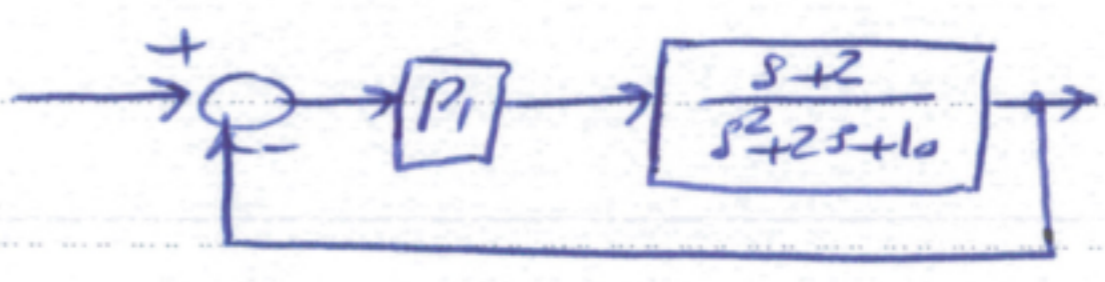


معادله سیستم: $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{10}{(s+2)(s+p_1)+10}$ → معادله مشخصه: $p(s) = (s+2)(s+p_1)+10$

→ $p(s) = s^2 + (2+p_1)s + 2p_1+10 = s^2 + 2s + 10 + p_1(s+2) = 0$

→ $1 + \frac{p_1(s+2)}{s^2+2s+10} = 0$

→ $G(s)H(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+10}$



مقاله هندسه سیستم‌ها ابتدایی دست ۲:

برای $K=0.5$

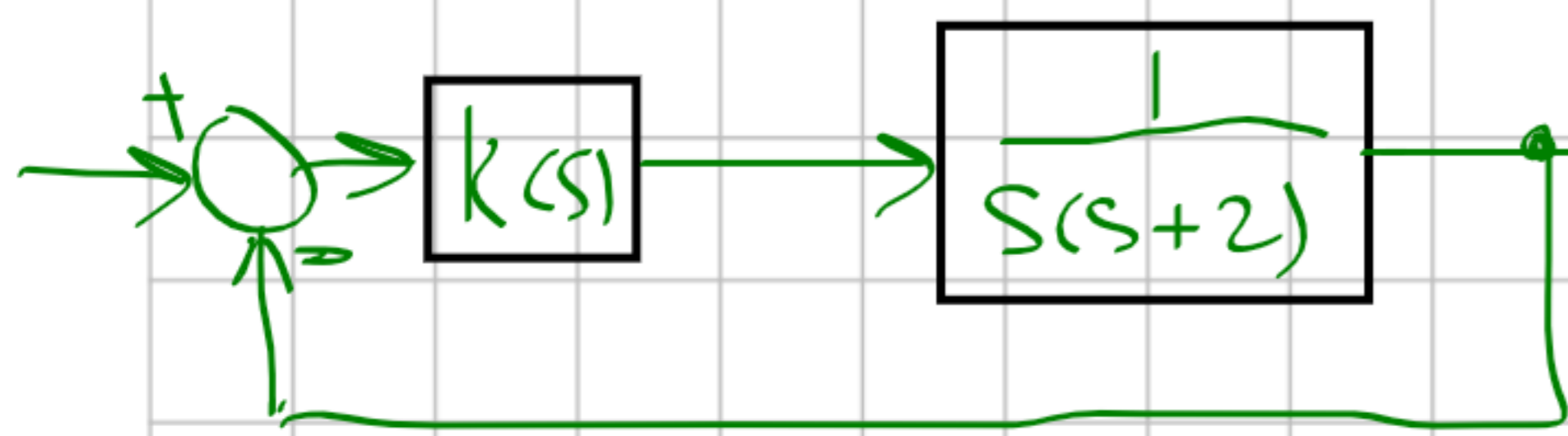
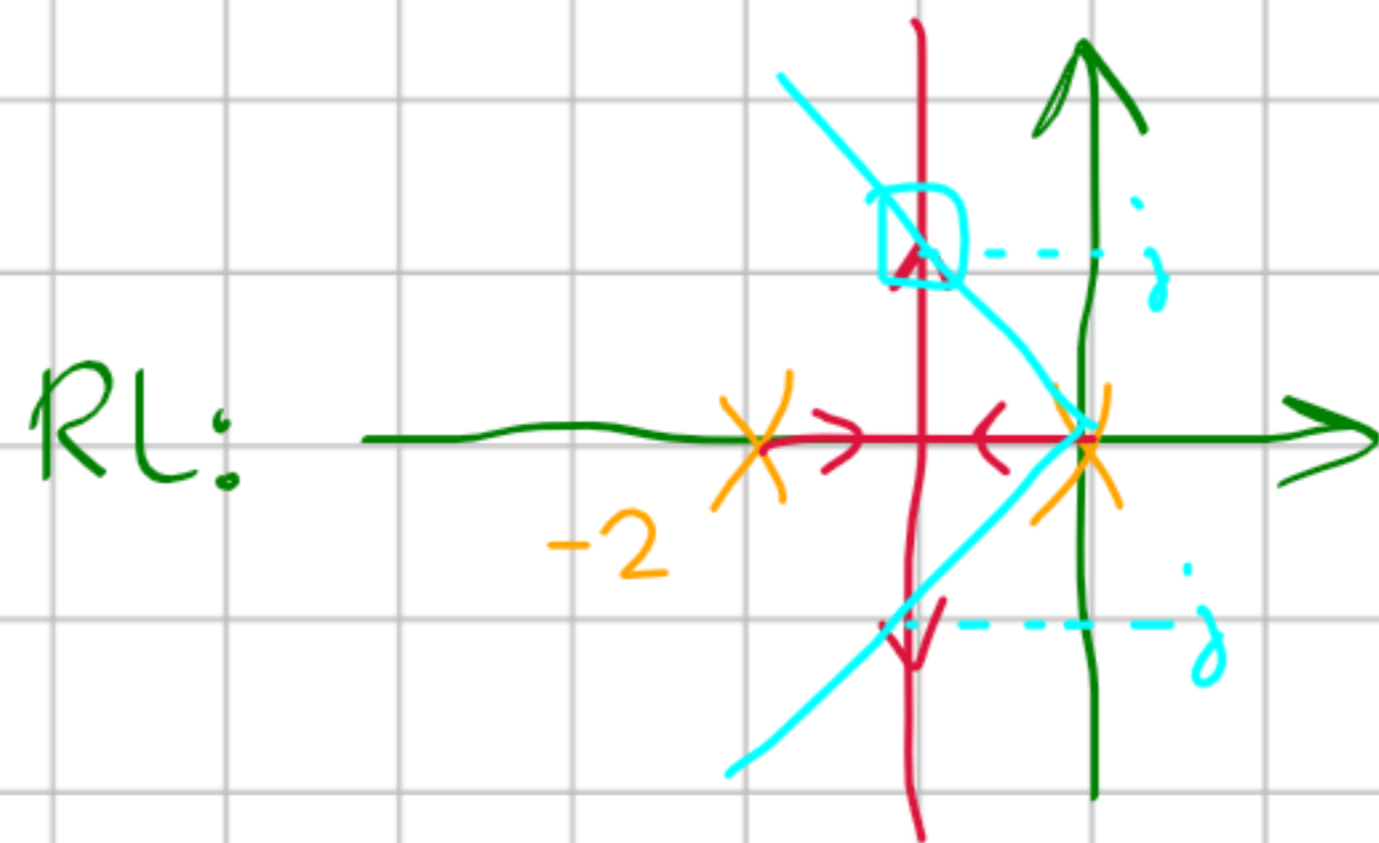
برای رسم مقاله هندسه سیستم‌ها ابتدایی دست ۲ کافی است مقاله هندسه را برای $G(s)H(s)$ برابر با $K=0.5$ رسم کنیم.

controlengineers.ir



طراحی به کمک مکان هندسی ریشه ها:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$



$$k(s) = k$$

$$1 + k(s)G(s) = 0$$

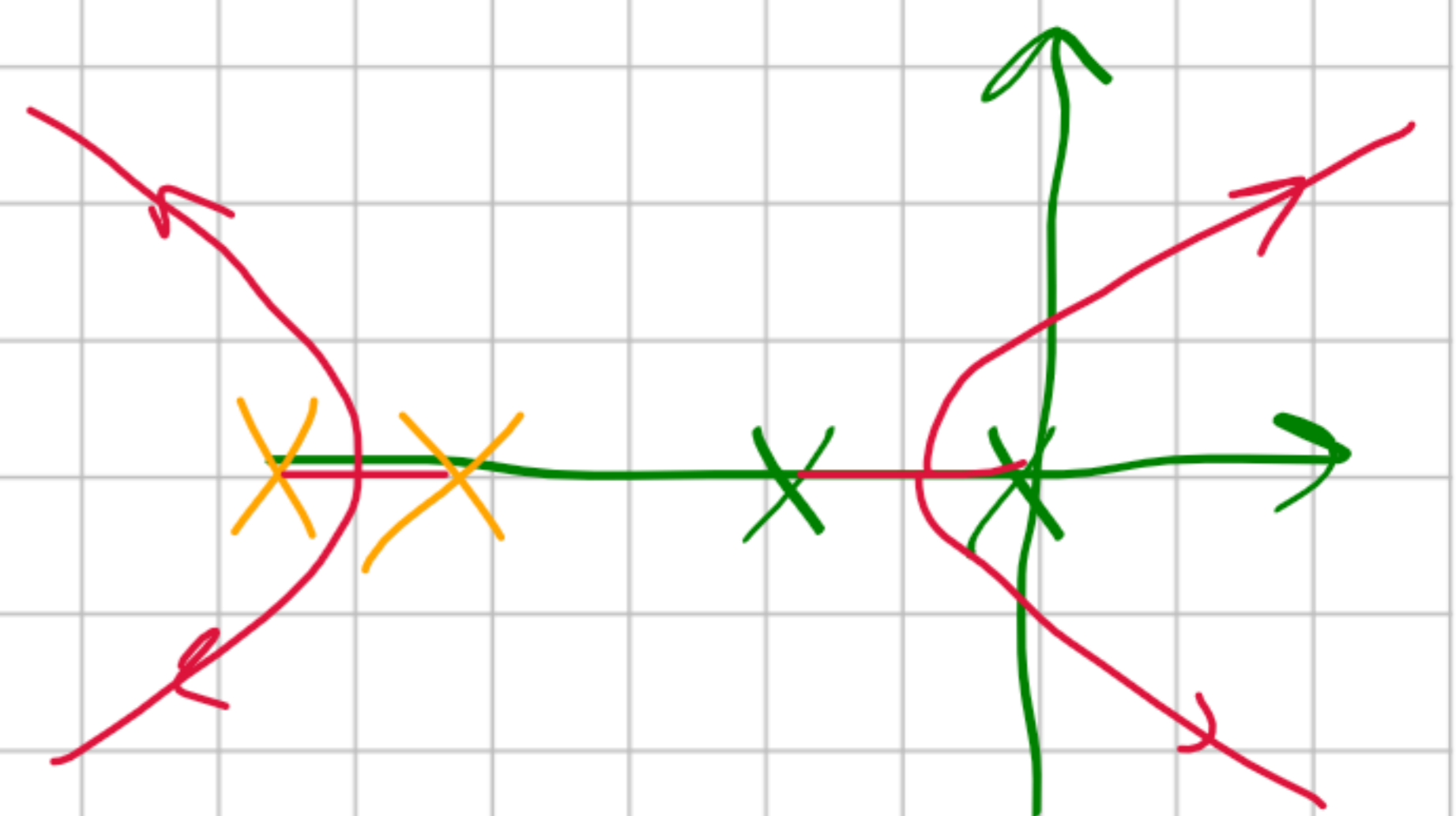
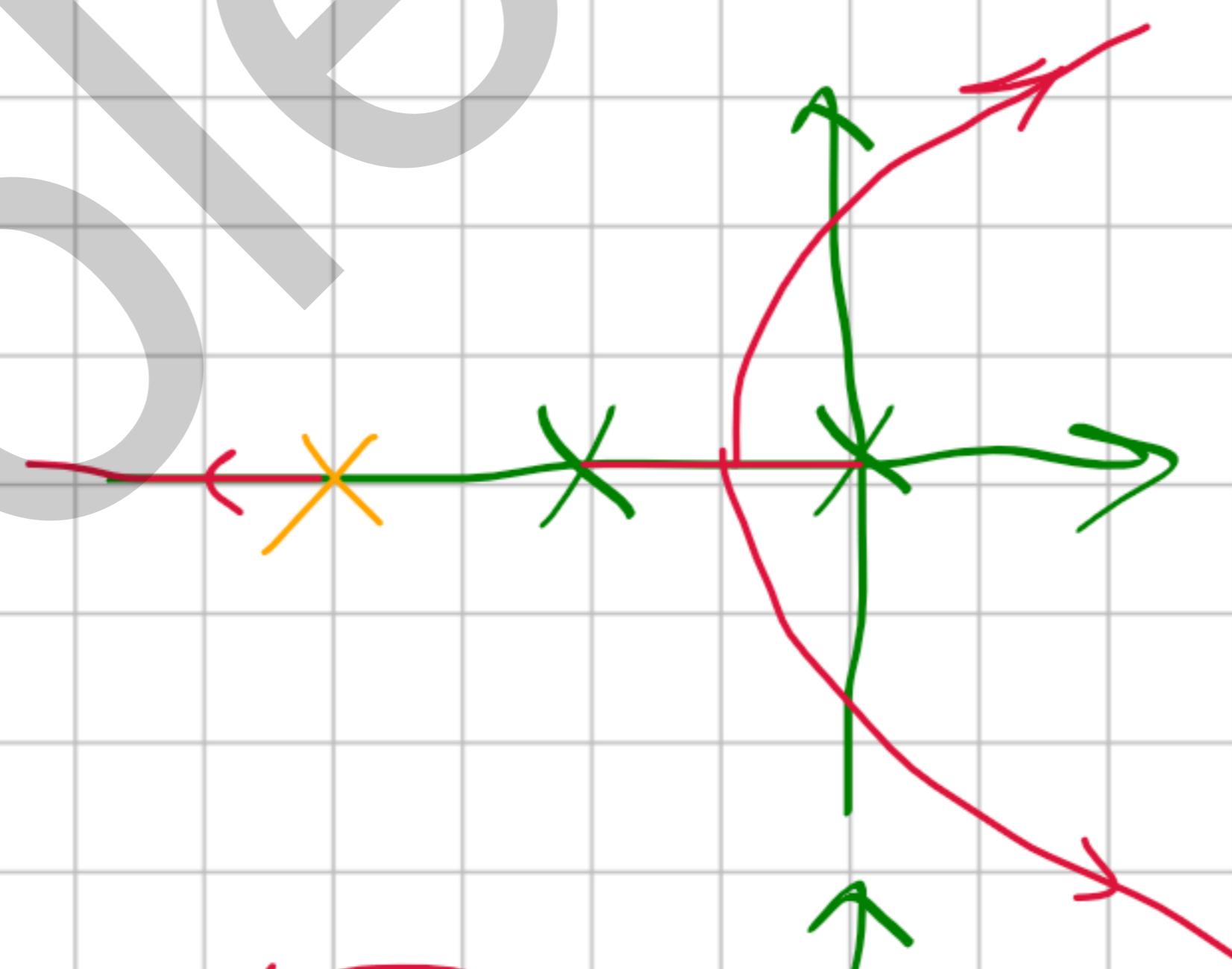
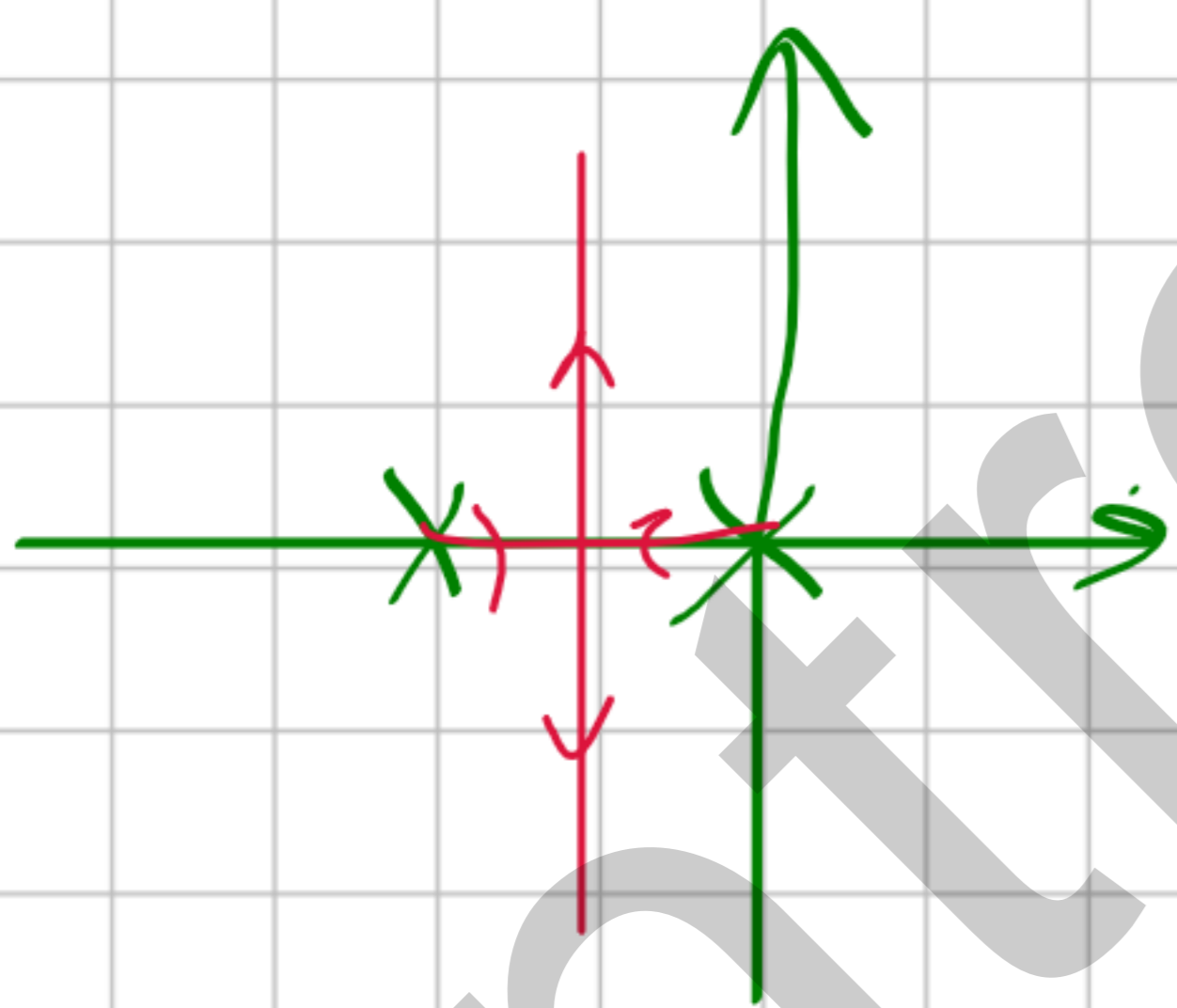
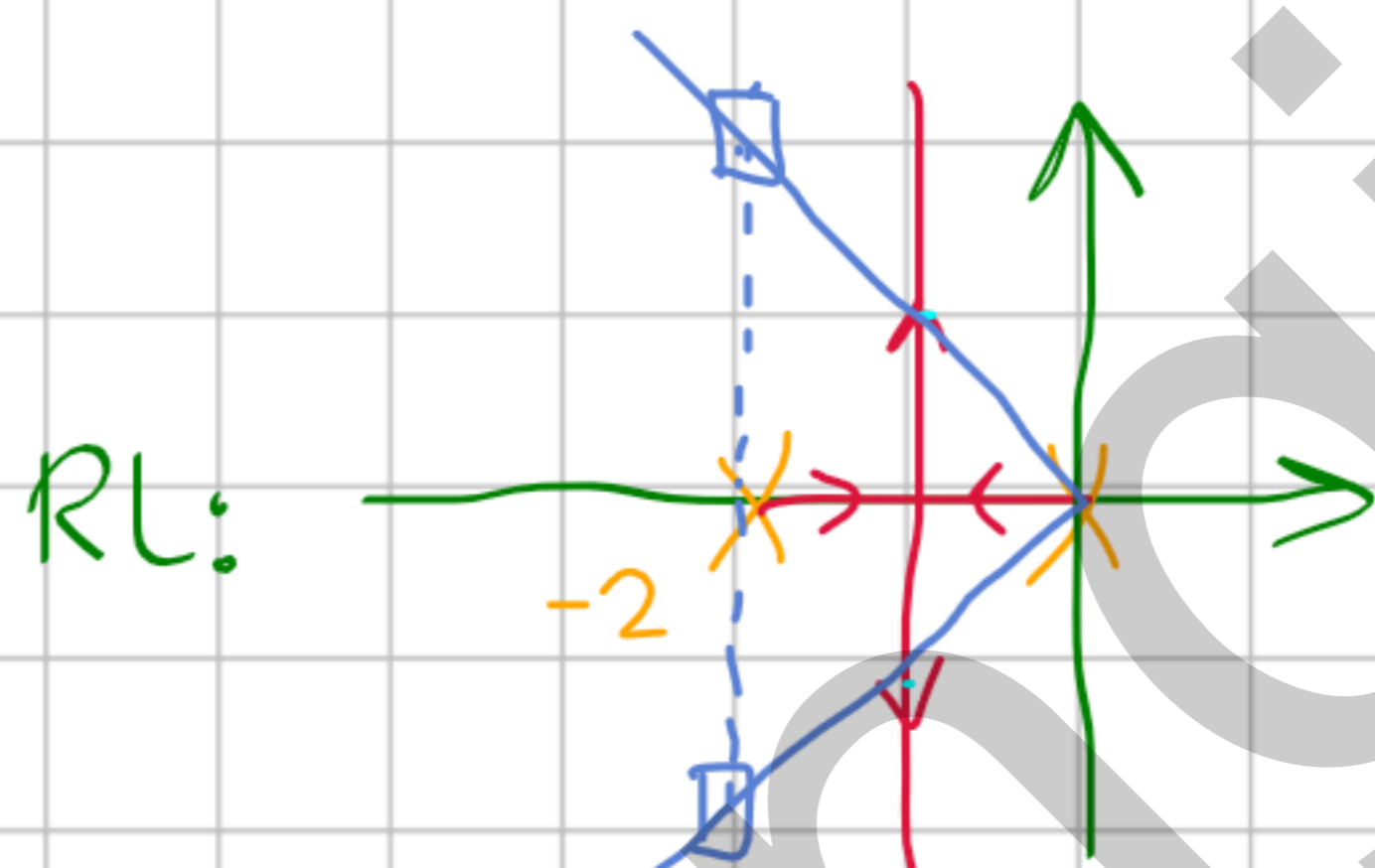
هدف: O.S. = 5%

$$\zeta = 0.7 \rightarrow \theta = 45^\circ$$

$$\text{مقدار انحراف: } |k| = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{1} = 2$$

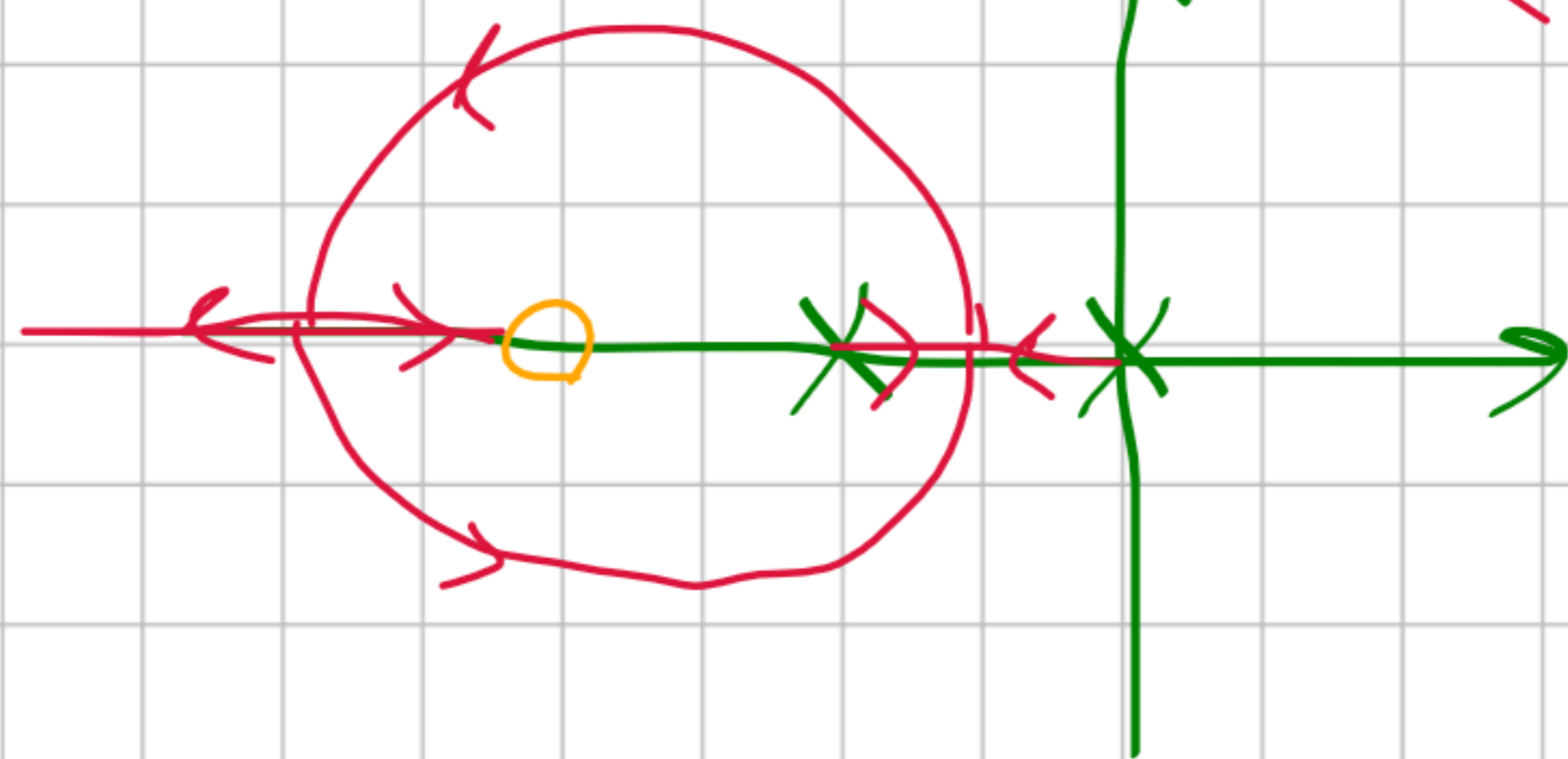
هدف جدید: O.S. = 5% و زمان نشست سیستم = 2 ثانیه

$$t_s = 2 = \frac{4}{\alpha} \rightarrow \alpha = 2$$

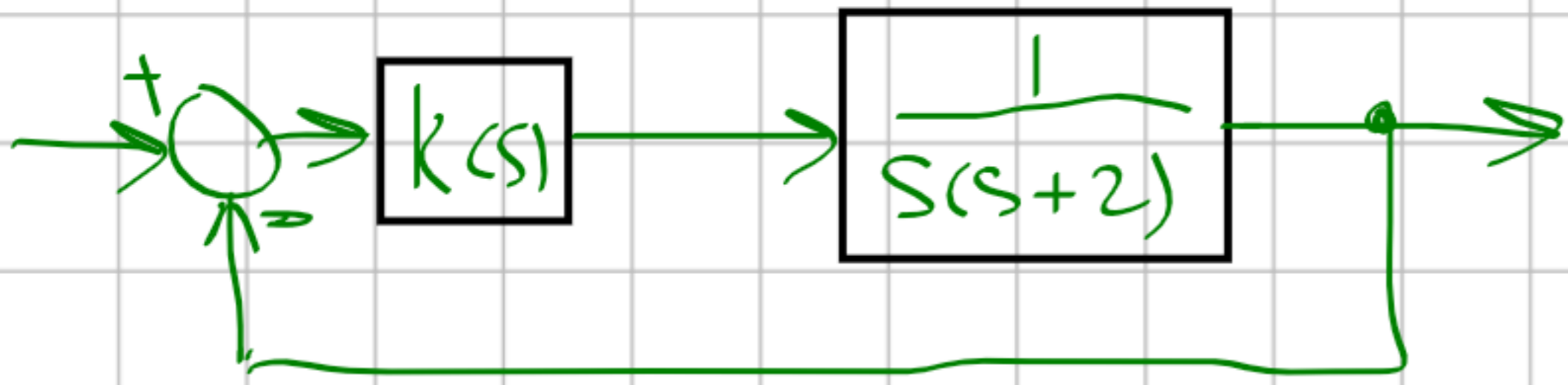


$$k(s) = \frac{k}{s+p}$$

$$k(s) = k_p + k_d s$$



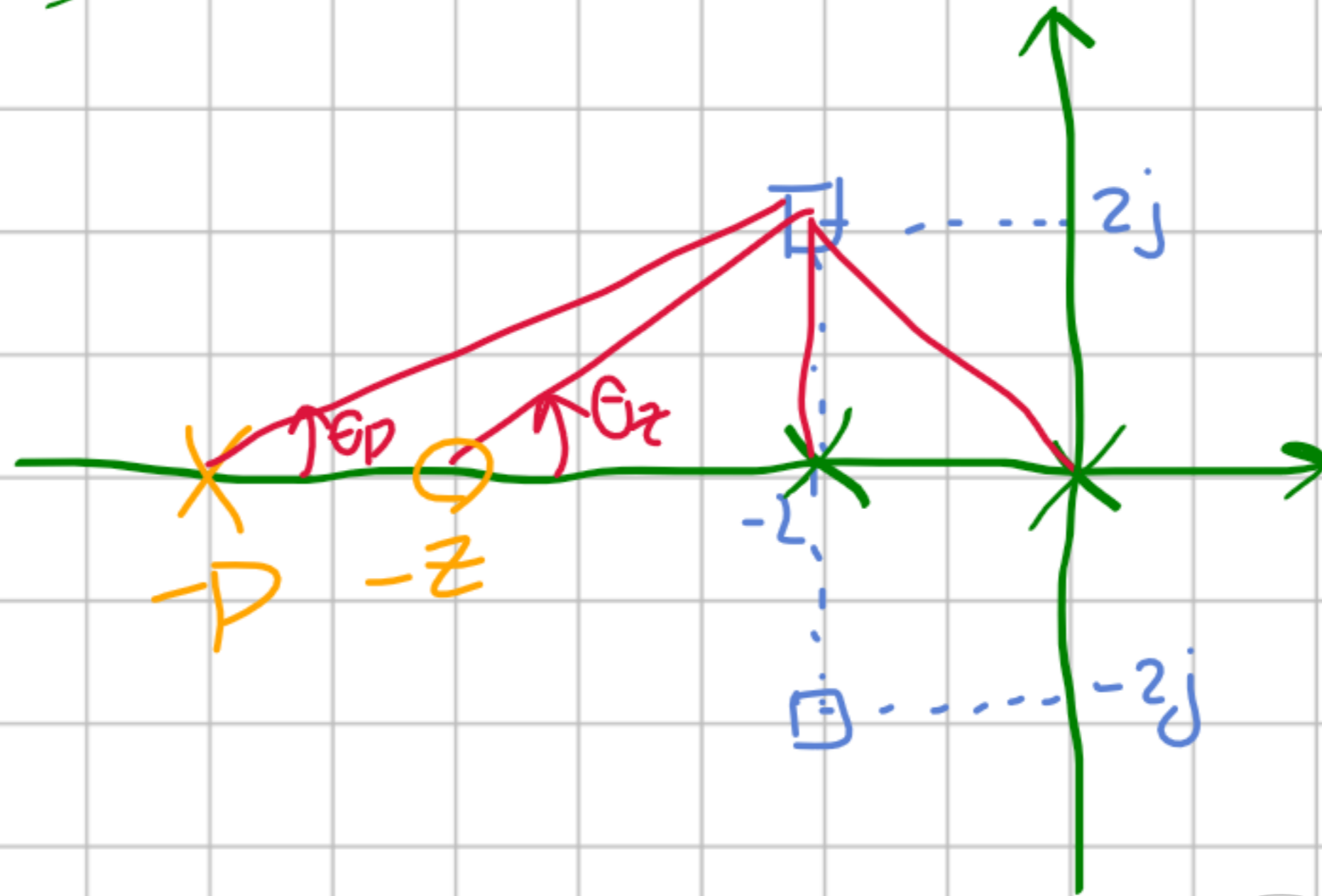
هدف: $O.S. = 5\%$; و انتظام سیستم = 2 ثانیه



$$O.S. = 5\% \rightarrow \theta = 4.5^\circ$$

$$t_s = 2 \rightarrow \alpha = 2$$

$$k(s) = \frac{k(s+z)}{(s+p)}$$



$$\theta_z - (\theta_p + 90^\circ + 135^\circ) = -180^\circ$$

$$\boxed{\theta_z - \theta_p = 45^\circ}$$

$$z = 3 \quad \theta_z = \tan^{-1} \frac{2}{1} = 63.43^\circ$$

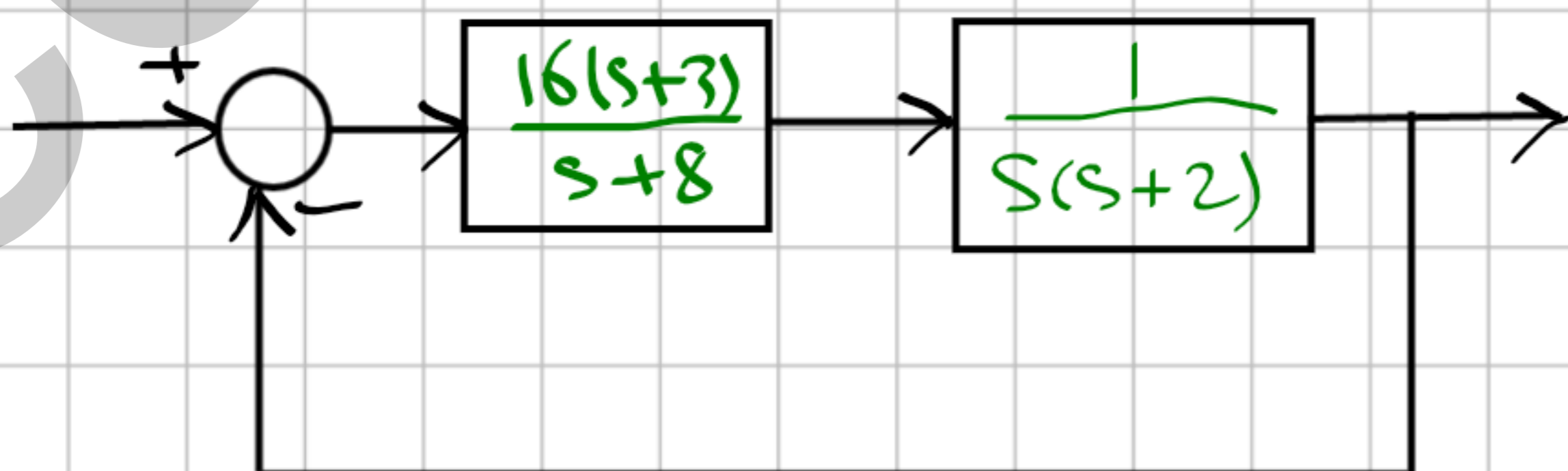
$$\theta_p = \theta_z - 45^\circ = 18.43^\circ$$

$$\tan 18.43^\circ = \frac{2}{p} \quad p = 6 \Rightarrow p = 8$$

$$k_{lead}(s) = \frac{k(s+3)}{s+8}$$

مقدار کس: $|k| = \frac{2\sqrt{2} \times 2 \times \sqrt{2^2 + 6^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 16 \quad k = 16$

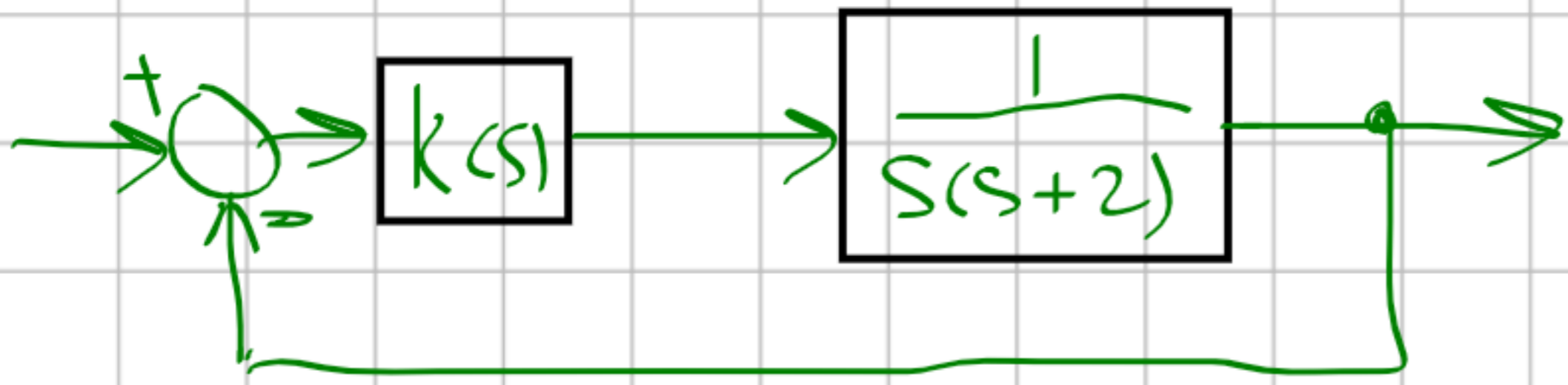
$$k(s) = \frac{16(s+3)}{s+8}$$



$$e_{ss} = \frac{1}{k_v} = \frac{1}{3}$$

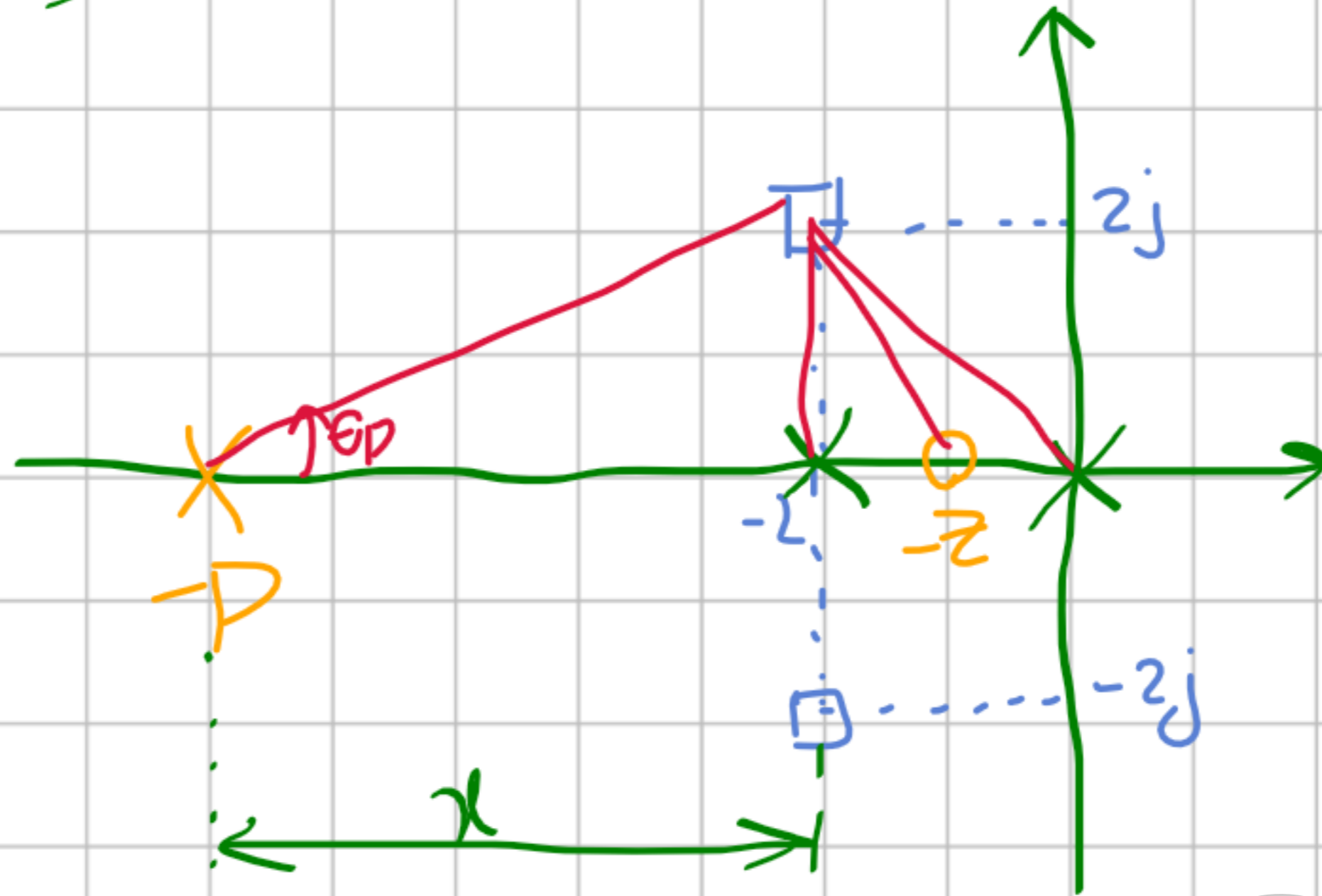
$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s k(s) G(s) = \frac{3 \times 16}{2 \times 8} = 3$$

هدف: 5% O.S. و انتظامیہ = 2 منہ



$$\begin{aligned} \text{O.S.} = 5\% &\rightarrow \theta = 45^\circ \\ t_s = 2 &\rightarrow \alpha = 2 \end{aligned}$$

$$k(s) = \frac{k(s+z)}{(s+p)}$$



$$\theta_z - (\theta_p + 90^\circ + 135^\circ) = -180$$

$$\theta_z - \theta_p = 45^\circ$$

اگر انتظامیہ = 2 منہ: $z = 1$

$$\Rightarrow \theta_z = 180 - \tan^{-1} 2 = 116,56^\circ$$

$$\Rightarrow \theta_p = 116,56 - 45 = 71,56^\circ$$

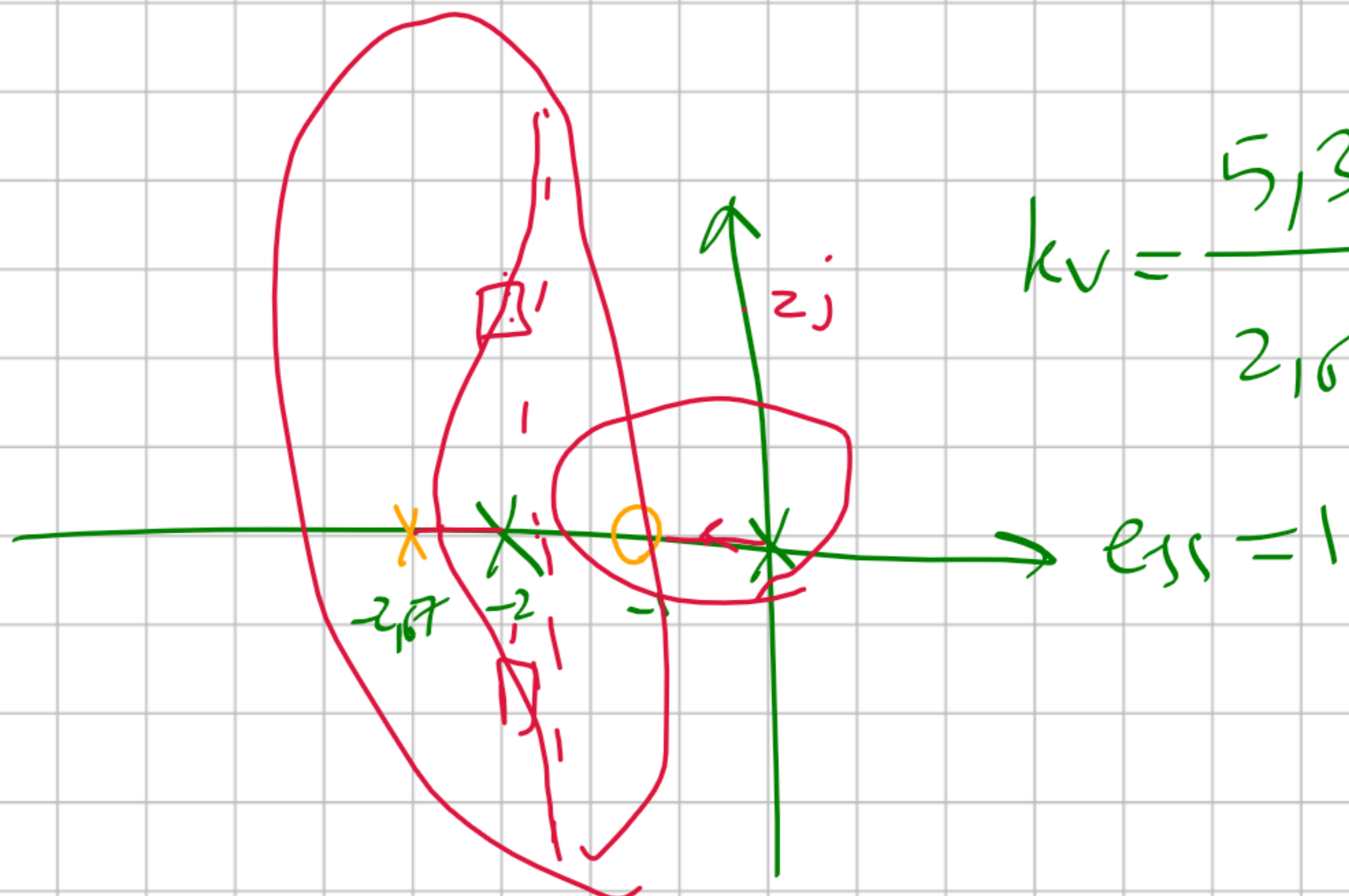
$$\tan 71,56 = \frac{2}{x} \quad x = 0,67 \Rightarrow p = 2,67$$

$$k_{\text{lead}}(s) = \frac{k(s+1)}{s+2,67}$$

$$|k| = \frac{2\sqrt{2} \times 2 \times \sqrt{2^2 + 0,67^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 5,33$$

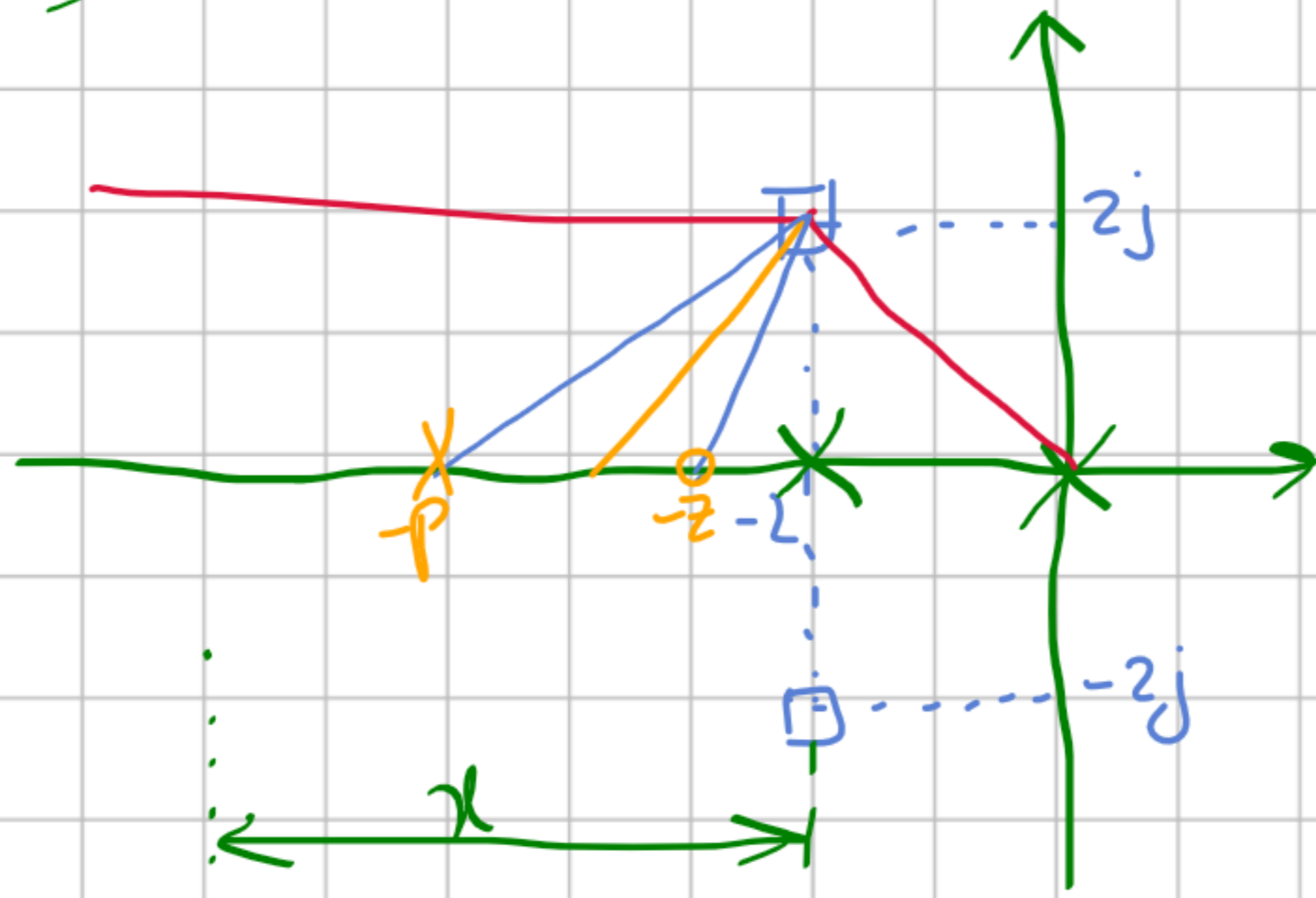
$$k(s) = \frac{5,33(s+1)}{s+2,67}$$

$$k_v = \frac{5,33}{2,67 \times 2} = 1$$



$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{-2 - 2,67 - (-1)}{2} \\ &= \frac{-3,67}{2} \approx -1,8 \end{aligned}$$

$$e_{ss} = 1$$



G.S. = 5% $\rightarrow \theta = 45^\circ$
 $t_s = 2 \rightarrow \alpha = 2$

$$k(s) = \frac{k(s+z)}{(s+p)}$$

$$\theta_z - \theta_p = 45^\circ$$

$$45/2 = 22.5^\circ$$

$$67.5 + 22.5 = 90^\circ \Rightarrow -z = -2$$

$$67.5 - 22.5 = 45^\circ \Rightarrow -p = -4$$

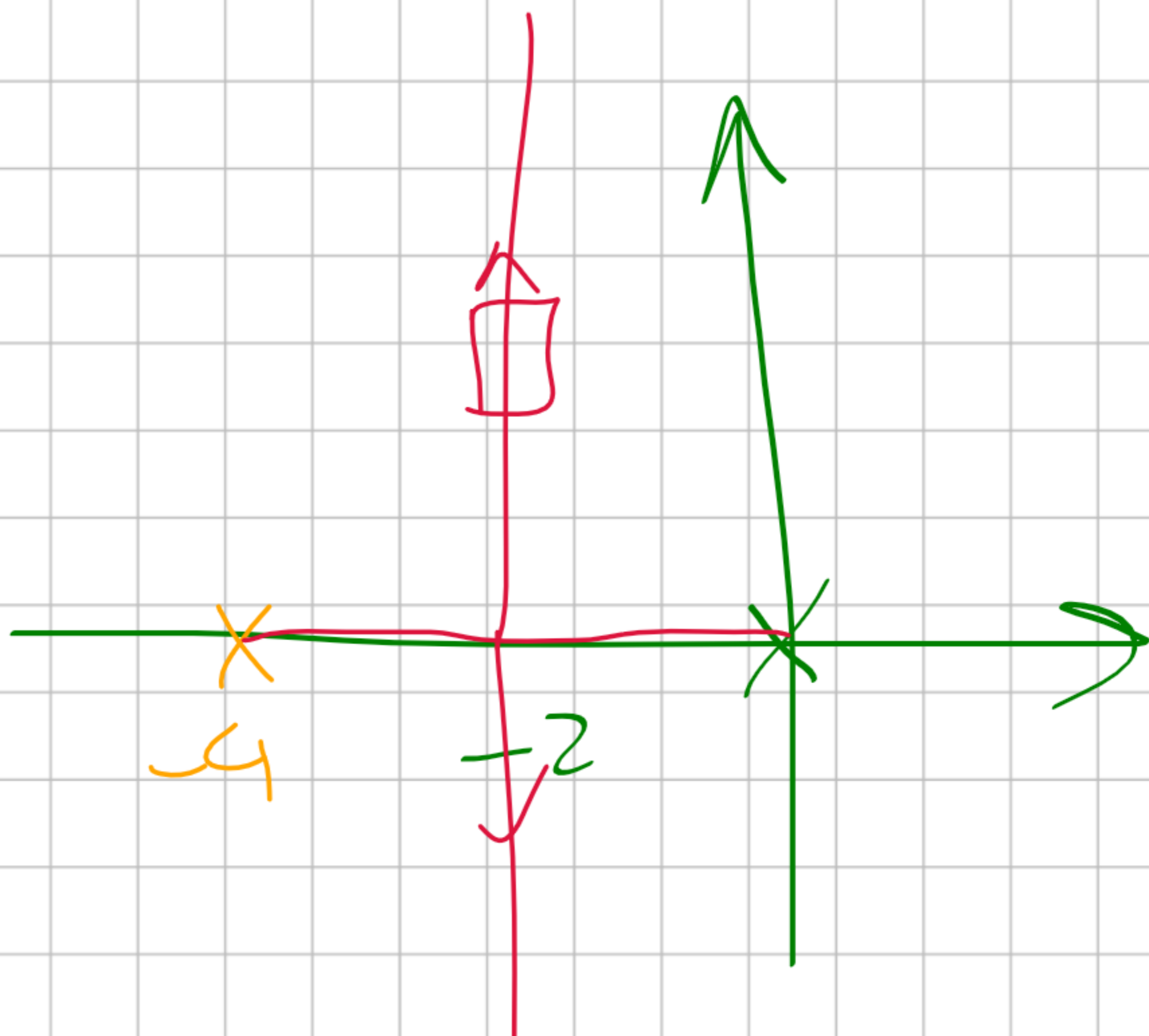
$$k(s) = \frac{k(s+2)}{s+4}$$

$$|k| = \frac{2\sqrt{2} \times 2 \times 2\sqrt{2}}{2} = 8$$

$$\Rightarrow k(s) = \frac{8(s+2)}{s+4}$$

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s k(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{8(s+2)}{s+4} \times \frac{1}{s(s+2)} = \frac{16}{4 \times 2} = 2$$

$$e_{ss} = \frac{1}{k_v} = \frac{1}{2}$$



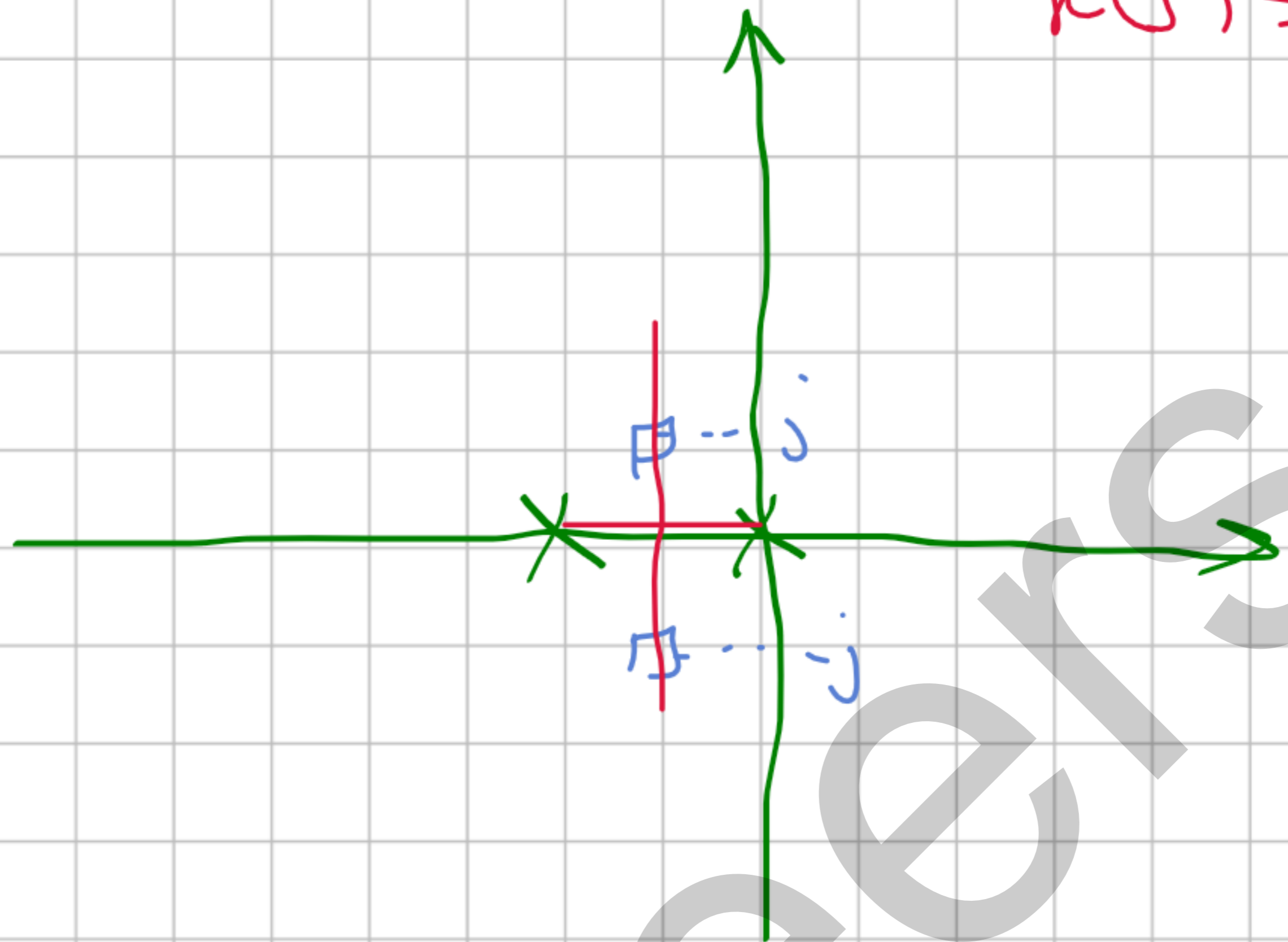
هدف: $O.S. = 5\%$ & زمان نشست سیستم = 4 ثانیه & خطای حالت ماندگار برود، و کیفیت برابر 1، 0



$K(s) = k$

$O.S. = 5\% \rightarrow \zeta = 0,7$
 $\rightarrow \theta = 45^\circ$

$t_s = 4 = \frac{4}{\alpha} \rightarrow \alpha = 1$



مقدار k : $|k| = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{1} = 2$

$k(s) = 2$

$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s k(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \times 2 \times \frac{1}{s(s+2)} = 1$

$e_{ss} = 1 > 0,1$

$k(s) = \frac{k(s+z)}{s+p}$



$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s k(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \times \frac{2k(s+z)}{s+p} \times \frac{1}{s(s+2)} = \frac{2kz}{2p} - \frac{kz}{p} = 10$

با تغییر کسره k

$k_v = 10 \leftarrow e_{ss} = \frac{1}{k_v} = 0,1 \Leftrightarrow e_{ss} = 0,1$

مطلوب است:

if $k=1 \rightarrow \frac{z}{p} = 10 \rightarrow \boxed{z = 10p}$

مقدار ζ و θ را، این برابر و انتقال کسره $\Leftrightarrow \zeta_{lag} = 0,1 \times 1 = 0,1$

$p_{lag} = \frac{\zeta_{lag}}{10} = 0,01 \rightarrow k(s) = \frac{2(s+0,1)}{s+0,01}$

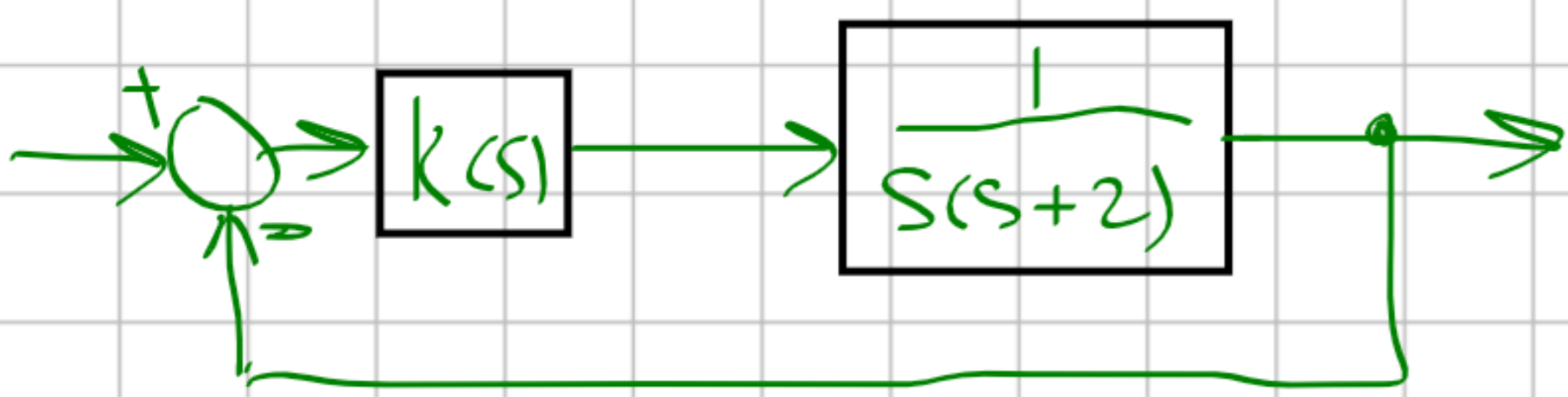
$$z_{\text{req}} = 0,01 \alpha = 0,01 \Rightarrow P_{\text{req}} = \frac{z_{\text{req}}}{10} = 0,001$$

$$k(s) = \frac{2(s+0,01)}{s+0,001}$$

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

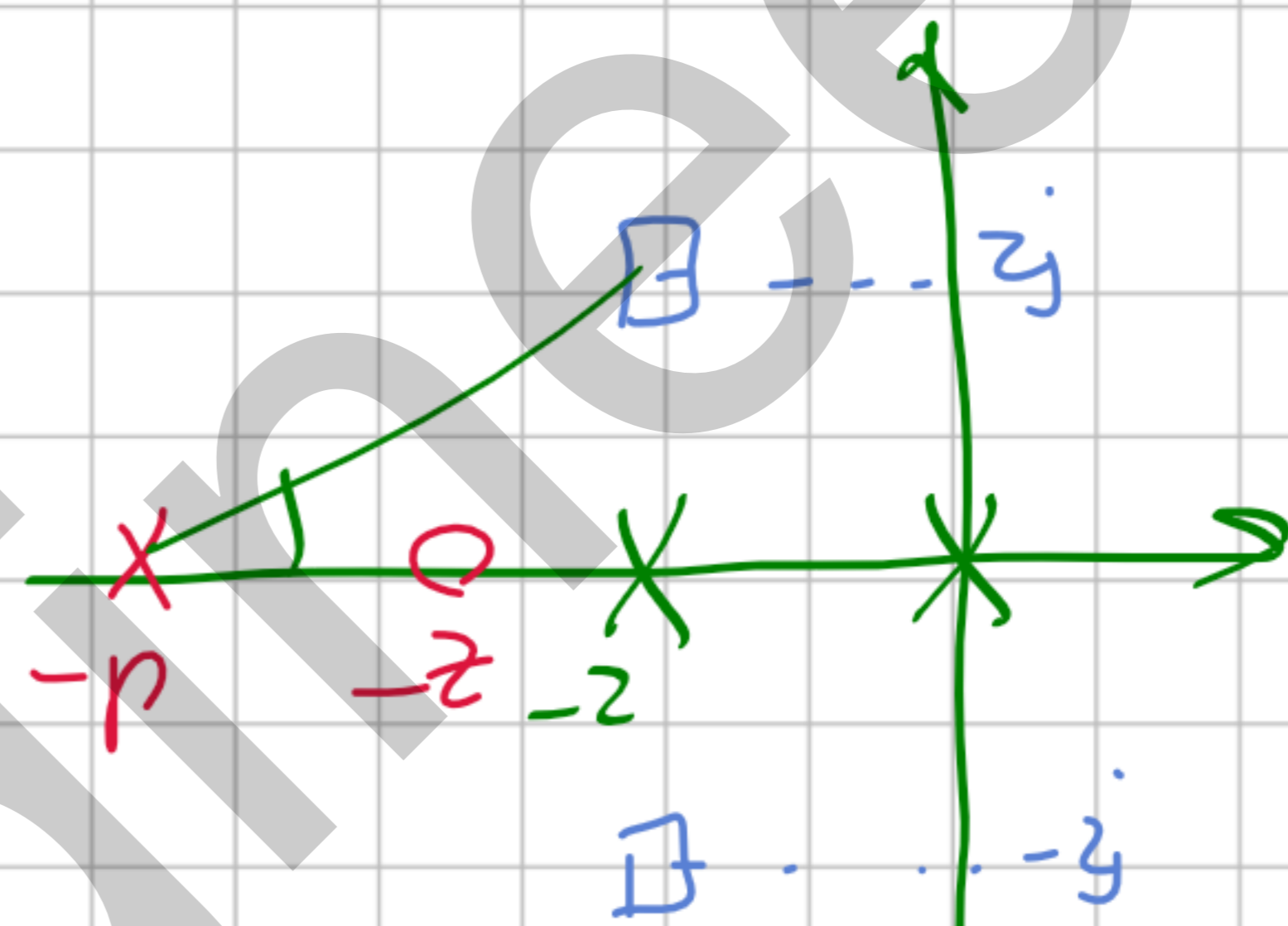
$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s k(s) G(s) = 2 \times \frac{0,01}{0,001} \times \frac{1}{2} = 10 \quad e_{\text{ss}} = \frac{1}{k_v} = 0,1$$

هدف: $0.S. = 5\%$ & زمان نسبت سیستم = 2 ثانیه & ثابت طاقی سیستم برابر 40



$$0.S. = 5\% \rightarrow \theta = 45^\circ$$

$$t_s = 2 = \frac{4}{\alpha} \rightarrow \alpha = 2$$



برای رسیدن به هدف کمی تاخیر کم، ابتدا کسره کم کنیم. lead را اضافه کنیم

$$\theta_z - (\theta_p + 90 + 135) = -180 \rightarrow \theta_z - \theta_p = 45$$

$$z = 3 \rightarrow \theta_z = \tan^{-1} \frac{2}{1} = 63,43^\circ \quad \theta_p = 63,43 - 45 = 18,43$$

$$\tan \theta_p = \frac{2}{x} \quad x = 6 \rightarrow p = 8$$

$$|k| = \frac{2\sqrt{2} \times 2 \times \sqrt{2^2 + 6^2}}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = 16$$

$$k_{\text{lead}}(s) = \frac{16(s+3)}{s+8}$$

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s k_{\text{lead}}(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \times \frac{16(s+3)}{s+8} \times \frac{1}{s(s+2)} = \frac{16 \times 3}{8 \times 2} = 3 < 40$$

$$k_{lag}(s) = \frac{s + z_{lag}}{s + p_{lag}}$$

$$z_{lag} = 0,1\alpha = 0,1 \times 2 = 0,2 \quad \rightarrow$$

$$k_v = 40 = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot k_{lag}(s) \cdot k_{lead}(s) \cdot G(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s + z_{lag}}{s + p_{lag}} \times \frac{16(s+3)}{s+8} \times \frac{1}{s(s+2)} = \frac{3z_{lag}}{p_{lag}}$$

$$\frac{z_{lag}}{p_{lag}} = \frac{40}{3} \quad \rightarrow$$

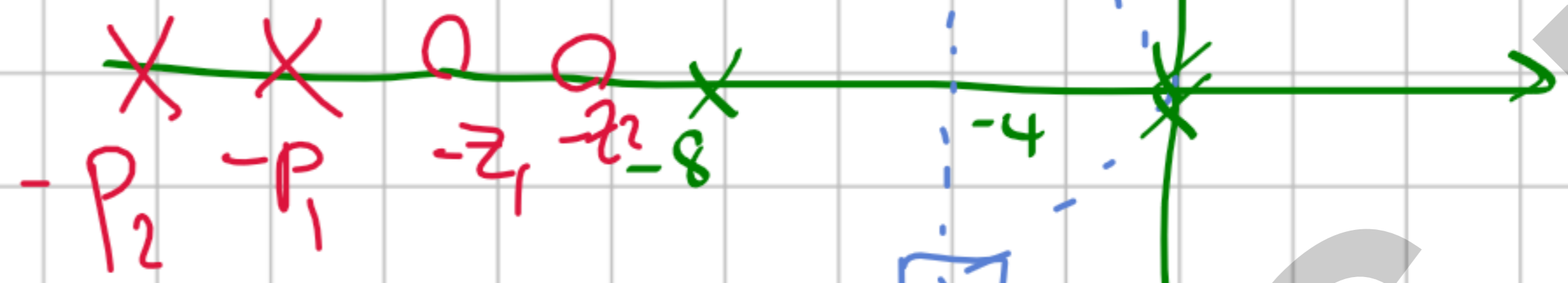
$$p_{lag} = \frac{3}{40} z_{lag} = \frac{3}{40} \times 0,2 = \frac{0,6}{40} = \frac{0,15}{10} = 0,015$$

$$k_{lag}(s) = \frac{s + 0,2}{s + 0,015}$$

$$k(s) = k_{lead}(s) \cdot k_{lag}(s) = \frac{2(s+3)}{s+8} \times \frac{s+0,2}{s+0,015}$$

مثال: سیستم زیر را در نظر بگیرید. کنترل کننده مناسبی طراحی کنید تا زمان نشست سیستم ۱ ثانیه و زاویه درصد overshoot ۵٪ باشد.

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s+8)}$$



$$\text{O.S.} = 5\% \rightarrow \zeta = 0.7 \rightarrow \theta = 45^\circ$$

$$t_s = 1 \text{ sec.} = \frac{4}{\alpha} \rightarrow \alpha = 4$$

$$k(s) = k_p$$

$$k(s) = \frac{k(s+z_1)(s+z_2)}{(s+p_1)(s+p_2)}$$

$$\text{میزبان: } \theta_z - (\theta_p + 45 + 135 \times 2) = -180$$

$$\theta_z - \theta_p = 135$$

$$\theta_{z_1} + \theta_{z_2} - (\theta_{p_1} + \theta_{p_2} + 45 + 135 \times 2) = -180$$

$$\theta_{z_1} + \theta_{z_2} - (\theta_{p_1} + \theta_{p_2}) = 135$$

اگر قطب صفر در lead، اگر بردی دیگر است قابل کنیم:

$$k(s) = \frac{k(s+z)^2}{(s+p)^2} \Rightarrow 2\theta_z - 2\theta_p = 135 \quad \theta_z - \theta_p = 67.5$$

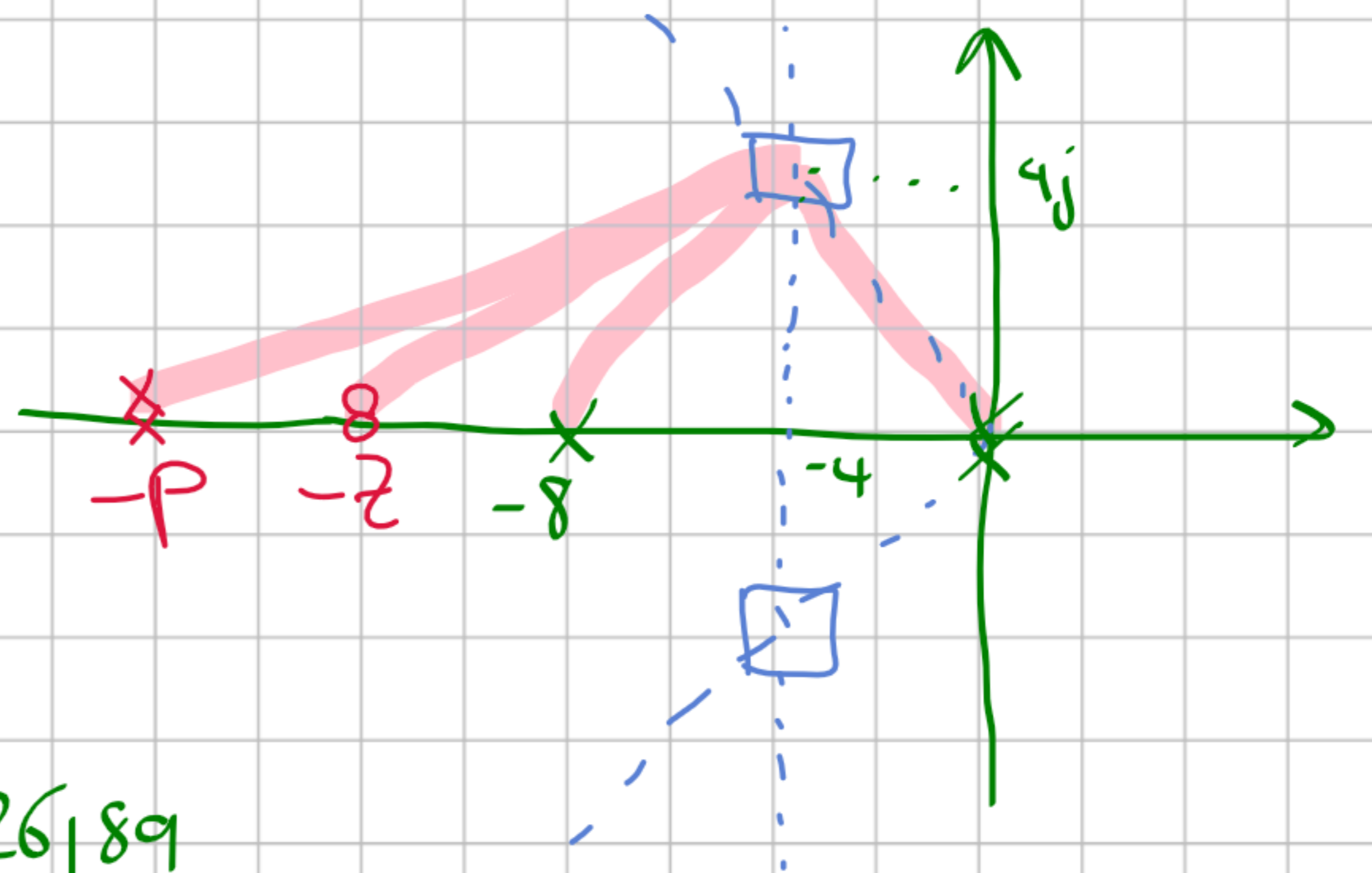
$$\text{if } z=6 \Rightarrow \theta_z = \tan^{-1} 6 \approx 63^\circ$$

$$\text{if } z=5 \Rightarrow \theta_z = \tan^{-1} 5 = 76^\circ$$

$$\Rightarrow \theta_p = 8.46^\circ$$

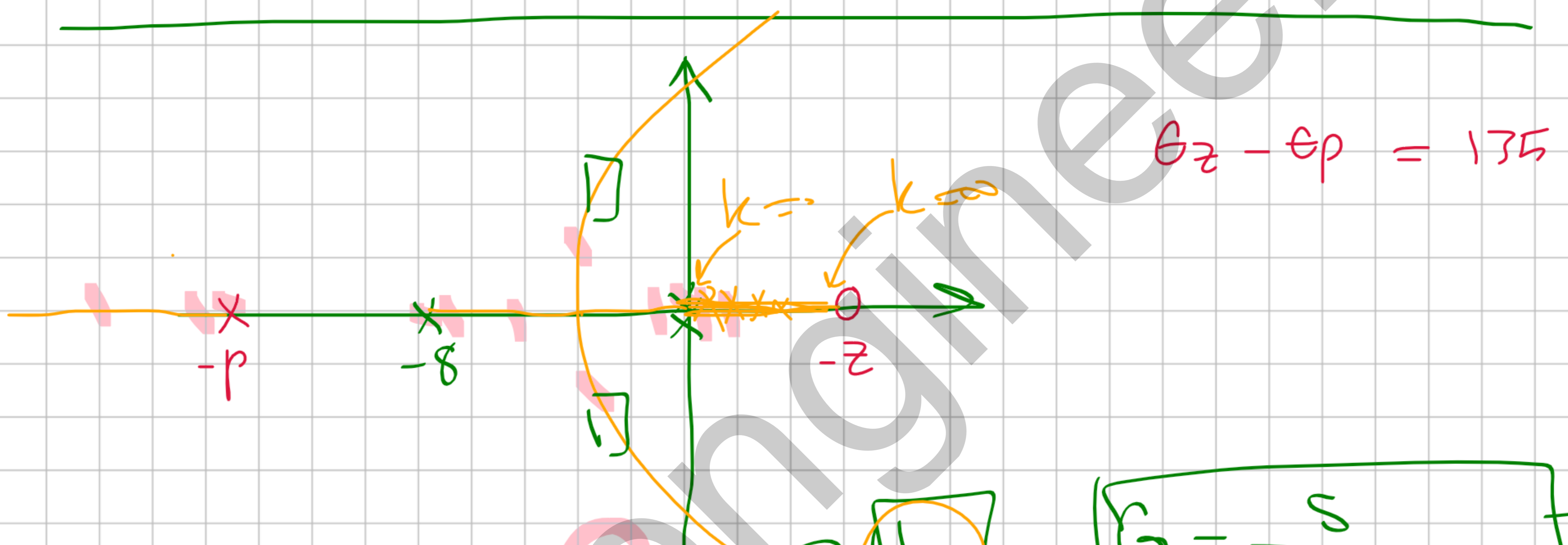
$$\tan 8.46 = \frac{4}{\lambda} \rightarrow \lambda = 26.89$$

$$\rightarrow p = 30.89$$



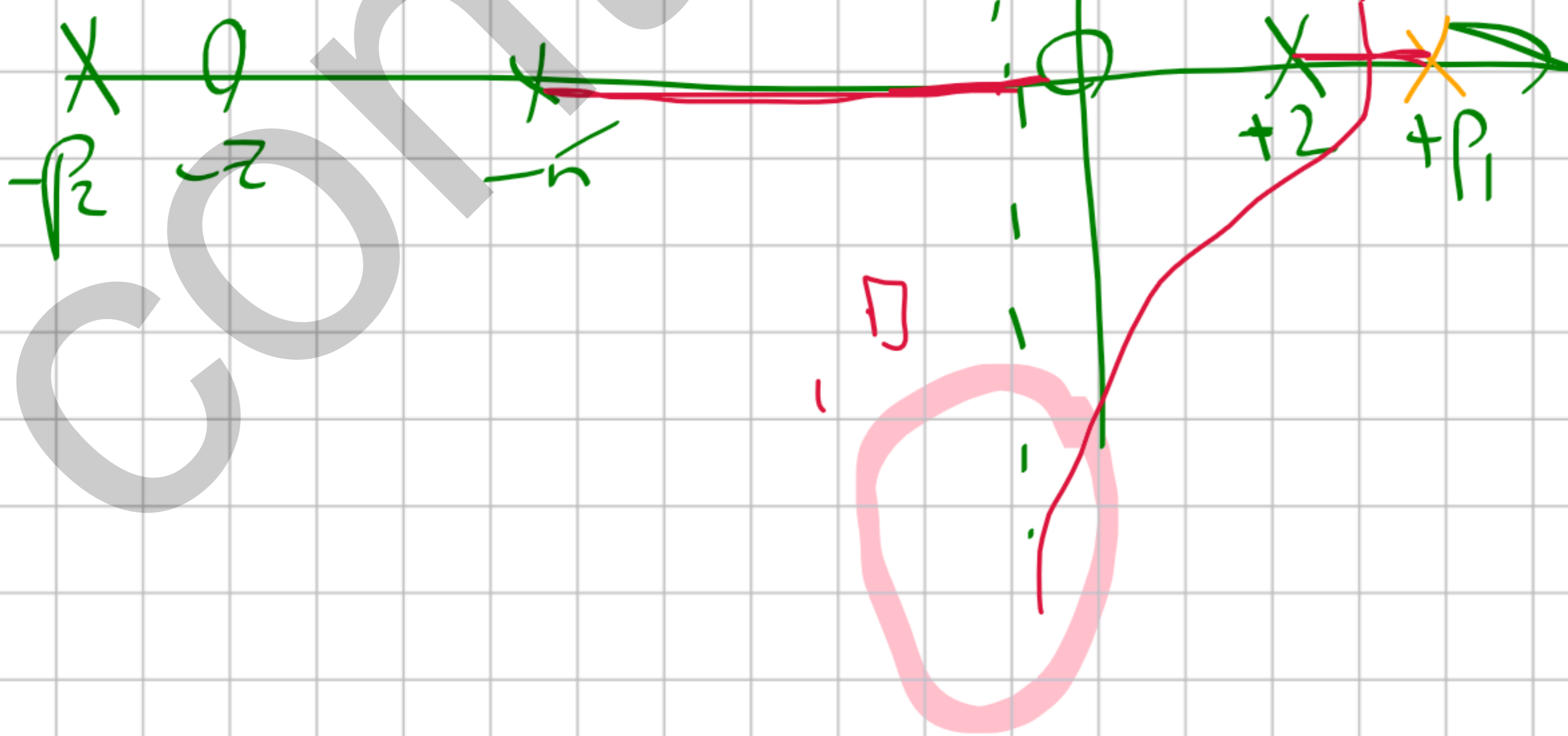
$$k_{lead}(s) = \frac{k(s+5)^2}{(s+30189)^2}$$

$$k = \frac{(4\sqrt{2})^2 \times 4\sqrt{2} \times (4^2 + 26189^2)}{(1^2 + 4^2)} = 7869$$



$$k|s| = \frac{k}{s-p}$$

$$G = \frac{s}{(s-2)(s+5)}$$



$$\omega = \frac{-5+2+p-(0)}{2}$$

$$= \frac{-3+p}{2} < 0$$

$$p < 3$$

$$\text{if } p = 2.5$$

$$\omega = -0.25$$

PID

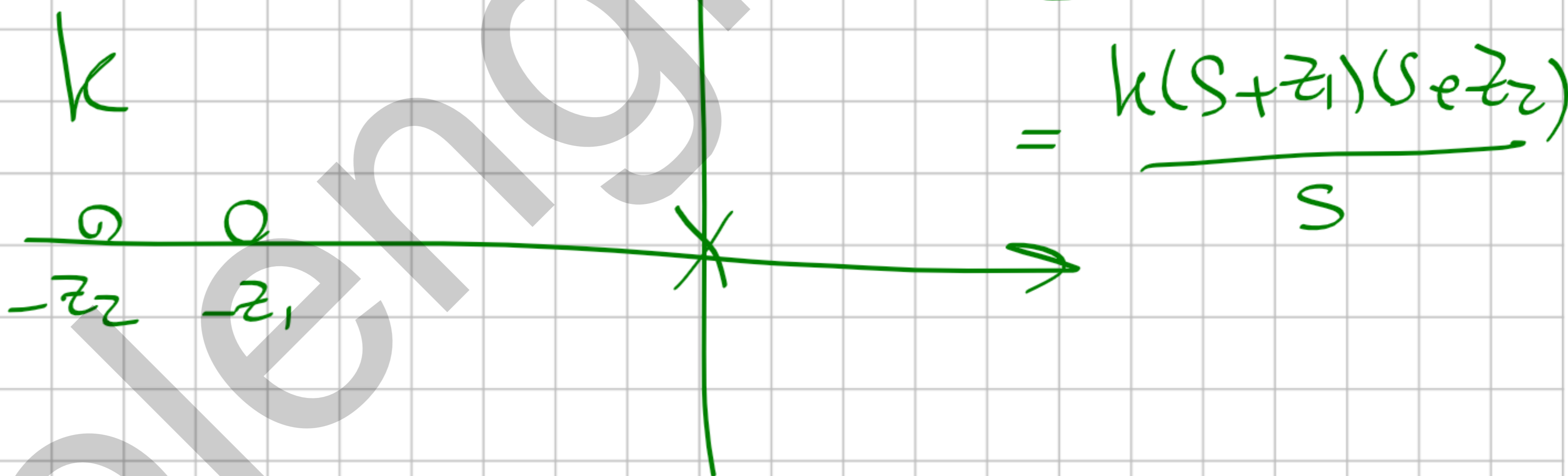
PI

PD

$$PI \rightarrow k(s) = k_p + \frac{k_i}{s} = \frac{k_p s + k_i}{s} = \frac{k(s+z)}{s}$$

$$PD \rightarrow k(s) = k_d s + k_p = k(s+z)$$

$$PID \rightarrow k(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s}$$

$$= \frac{k(s+z_1)(s+z_2)}{s}$$


Frequency response of systems پاسخ فرکانسی سیستم

مغز فکر پاسخ فرکانسی

فرض کنید یک سیستم خطی، در ورودی سینوسی در یک فرکانس خاص با دامنه و فاز مشخص اعمال شده است. پس از گذشت

زمان نسبت سیستم معین در حالت ماندگار، خروجی این سیستم نیز یک سینوس با فرکانس برابر با فرکانس ورودی داشته باشد و فاز متفاوت

مشاهده شود. این مطلب ما را به آن در صورت آنالیز به صورت زیر نشان داد:

فرض کنید ورودی $r(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ را به یک سیستم خطی با تابع تبدیل $G(s)$ اعمال کنیم.

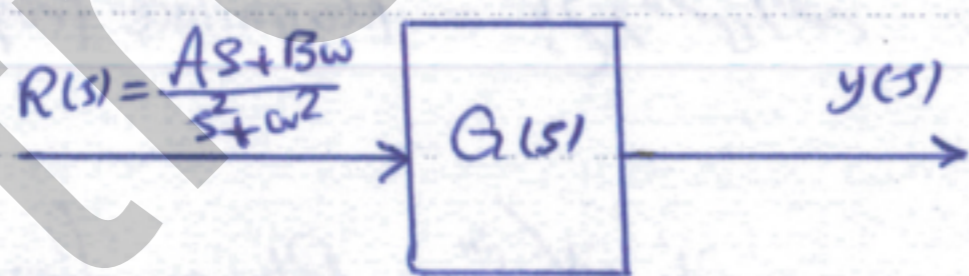
$$r(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\omega t - \tan^{-1} \frac{B}{A})$$

این ورودی را بصورت فازوری (Phasor) می‌توان به ۳ طریق زیر نشان داد:

- 1) $M_i \angle \phi_i$: صورت قطبی
- 2) $A - jB$: صورت دکارتی
- 3) $M_i e^{j\phi_i}$: صورت لاپلاس

که در این طرزها خاص، $M_i = \sqrt{A^2 + B^2}$ دامنه ورودی سینوس، $\phi_i = -\tan^{-1} \frac{B}{A}$ فاز ورودی سینوس می‌باشد.

$|G(j\omega)| = M_G$
 $\angle G(j\omega) = \phi_G$



$$Y(s) = \frac{As+Bw}{s^2+w^2} G(s)$$

با استفاده از تجزیه کسرها می‌توان نوشت:

برای: $Y(s) = \frac{As+Bw}{(s+jw)(s-jw)} G(s) = \frac{K_1}{s+jw} - \frac{K_2}{s-jw} + G(s)$ کسرها می‌توان نوشت

$$K_1 = \left. \frac{As+Bw}{s-jw} G(s) \right|_{s=-jw} = \frac{-A(jw)+Bw}{-2jw} G(-jw) = \frac{1}{2}(A+jB) M_G e^{j\phi_G} = \frac{1}{2} M_i e^{j\phi_i} M_G e^{j\phi_G}$$

$$= \frac{1}{2} M_i M_G e^{j(\phi_i + \phi_G)}$$

$$k_2 = \frac{As + B\omega}{s + j\omega} G(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{A(j\omega) + B\omega}{2j\omega} G(j\omega) = \frac{1}{2} (A - Bj) G(j\omega) = \frac{1}{2} M_i e^{j\phi_i} M_G e^{j\phi_G} = \frac{1}{2} M_i M_G e^{j(\phi_i + \phi_G)} = k_1^*$$

جهانسی که بیخ حالت ماندگار سیستم ناشی از تطبیق ورودی با خروجی است:

$$\Rightarrow C_{ss}(s) = \frac{k_1}{s + j\omega} + \frac{k_2}{s - j\omega} = \frac{\frac{M_i M_G}{2} e^{-j(\phi_i + \phi_G)}}{s + j\omega} + \frac{\frac{M_i M_G}{2} e^{j(\phi_i + \phi_G)}}{s - j\omega}$$

$$\Rightarrow C(s) = \frac{M_i M_G}{2} \left[\frac{e^{-j\omega t} e^{-j(\phi_i + \phi_G)}}{s + j\omega} + \frac{e^{j\omega t} e^{j(\phi_i + \phi_G)}}{s - j\omega} \right]$$

$$= M_i M_G \left[\frac{e^{j(\omega t + \phi_i + \phi_G)} + e^{-j(\omega t + \phi_i + \phi_G)}}{2} \right] = \underline{M_i M_G \cos(\omega t + \phi_i + \phi_G)}$$

مانند فرقی $M_0 e^{j\phi_0}$ \leftarrow دامنه فرقی

مانند فرقی $M_i M_G e^{j(\phi_i + \phi_G)}$ \leftarrow دامنه فرقی

اگر بفرم فاز درک نکنیم:

$$M_0 e^{j\phi_0} = M_i M_G e^{j(\phi_i + \phi_G)} = M_i e^{j\phi_i} M_G e^{j\phi_G}$$

\Rightarrow دامنه فرقی: $M_0 = M_i M_G$ ، فاز فرقی: $\phi_0 = \phi_i + \phi_G$

$M_G(\omega) = \frac{M_o(\omega)}{M_i(\omega)}$: \leftarrow پاسخ فرکانسی دامنه = Magnitude frequency response

$\phi_G(\omega) = \phi_o(\omega) - \phi_i(\omega)$: \leftarrow پاسخ فرکانسی فاز = Phase frequency response

در مخرج است که بدانیم دامنه و فاز تغییر می‌کند در صورتی که به توان به راحتی دامنه و فاز خروجی سیستم را به بار ورودی سیستم

در حالت ماندگار بوی آورد. بر این منظور اکثر از روشهای ترکیبی استفاده می‌کنیم.

روشهای نشان دادن پاسخ فرکانسی سیستم :

- دیاگرام بود Bode

- دیاگرام نایکوئیست Nyquist

- دیاگرام نیکولس Nichols

Bode Diagram :

دیاگرام بود از دو نمودار اندازه بر حسب فرکانس، فاز بر حسب فرکانس تشکیل شده است. محور افقی در هر دو نمودار فرکانس

می باشد که می تواند هم بصورت خطی و هم بصورت گامایی مقیاس بندی شود. در نمودار اندازه، محور عمودی اندازه پاسخ تبدیل بر حسب دسی بل

یعنی $20 \log |G(s)|$ می شود. در نمودار فاز، محور عمودی نشان دهنده فاز پاسخ تبدیل بر حسب درجه می باشد.

خرصه تبدیل پاسخ تبدیل یک سیستم بصورت زیر می باشد:

$$G(s) = \frac{k(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)}$$

برای رسم نمودار اندازه بود باسی اندازه پاسخ تبدیل را بر حسب dB حساب کنیم پس:

$$20 \log |G(s)| = 20 \log \left| \frac{k(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} \right| = 20 \log \frac{|k||s+z_1||s+z_2|\dots|s+z_m|}{|s+p_1||s+p_2|\dots|s+p_n|}$$

$$= 20 \log |k| + 20 \log |s+z_1| + \dots + 20 \log |s+z_m| - (20 \log |s+p_1| + 20 \log |s+p_2| + \dots + 20 \log |s+p_n|)$$

سپس با رسم نمودار اندازه بود، می توان نمودار بود تک منوها و مقیاسها را جداگانه رسم کرد. و با هم جمع نمود.

$$k \quad s+z_1 \quad \frac{1}{s+p_1}$$

برابر رسم نمودار فاز، با بستن فاز تابع تبدیل را در فرکانس‌های مختلف رسم کرد:

$$X G(j\omega) = X \frac{k(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} = Xk + X(s+z_1) + X(s+z_2) + \dots + X(s+z_m) - (X(s+p_1) + X(s+p_2) + \dots + X(s+p_n))$$

این برابر رسم نمودار فاز بود، می‌توان نمودار فاز یک تک صفرها، قطبها را رسم کرد و با هم جمع کرد.

این در کل برابر رسم نمودار بود به تابع تبدیل، کافی است روی یک کردن نمودار بود صفرها و قطبها را بیانیم. با جمع کردن نمودار اندازه، فاز

صفرها، قطبها، نمودار بود به تابع تبدیل بیت می‌آید.

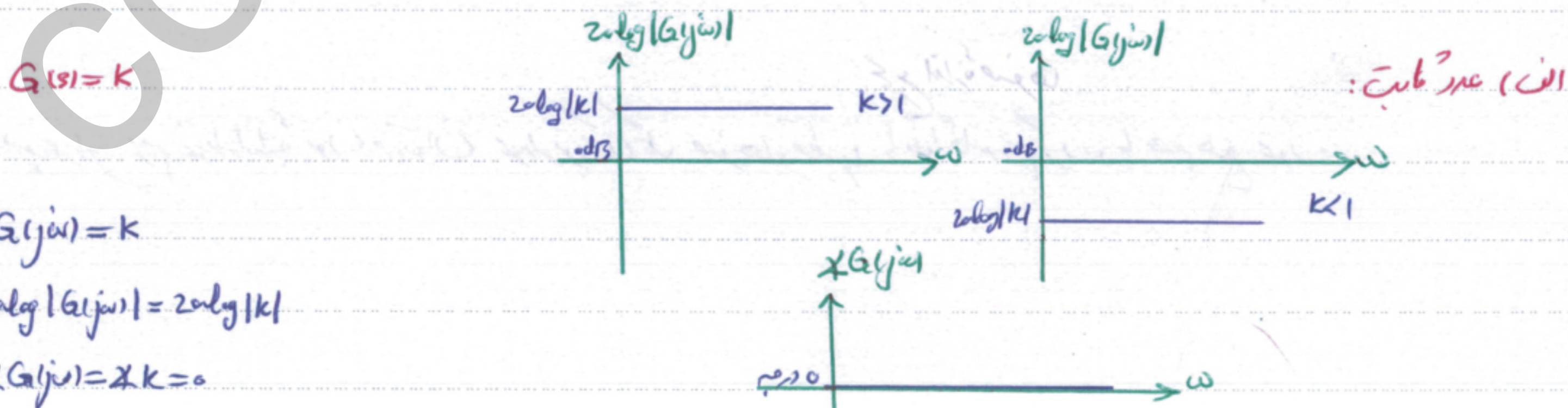
عوامل تشکیل دهنده $G(s)$:

الف) عدد ثابت b ، قطب یا صفر حقیقی روی محور حقیقی c ، قطب یا صفر حقیقی سمت راست یا چپ

د) قطب یا صفر مزدوج سمت راست یا چپ (هم امکان تأخیر)

معمولاً هر تابع تبدیل $G(s)$ را می‌توان صورت حاصل ضرب عوامل بالا در نظر گرفت بنابراین با دانستن و آنگاه بر عوامل بالا، می‌توان

تأخیر بود هر تابع تبدیل را رسم کرد.



این تأخیر عدد ثابت در نمودار اندازه بود نصفه کل نمودار اندازه هم اندازه

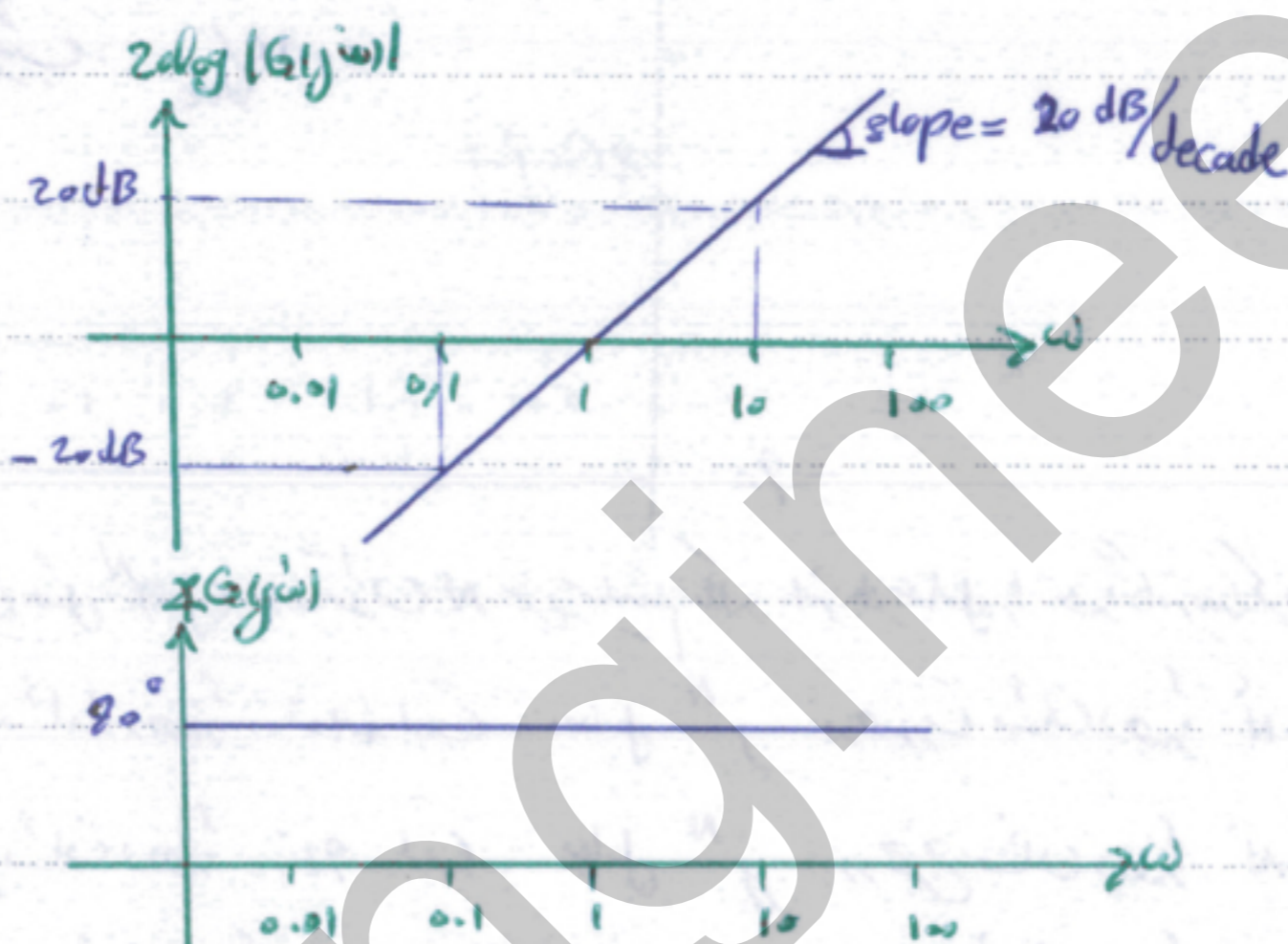
ب) قطب یا صفر حقیقی روی محور دهن:

$$G(s) = s$$

ا) صفر حقیقی روی محور دهن:

$$G(j\omega) = j\omega \Rightarrow 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log |j\omega| = 20 \log \omega \Rightarrow \text{در محور دهن یک خط مستقیم با شیب } 20 \text{ dB/decade}$$

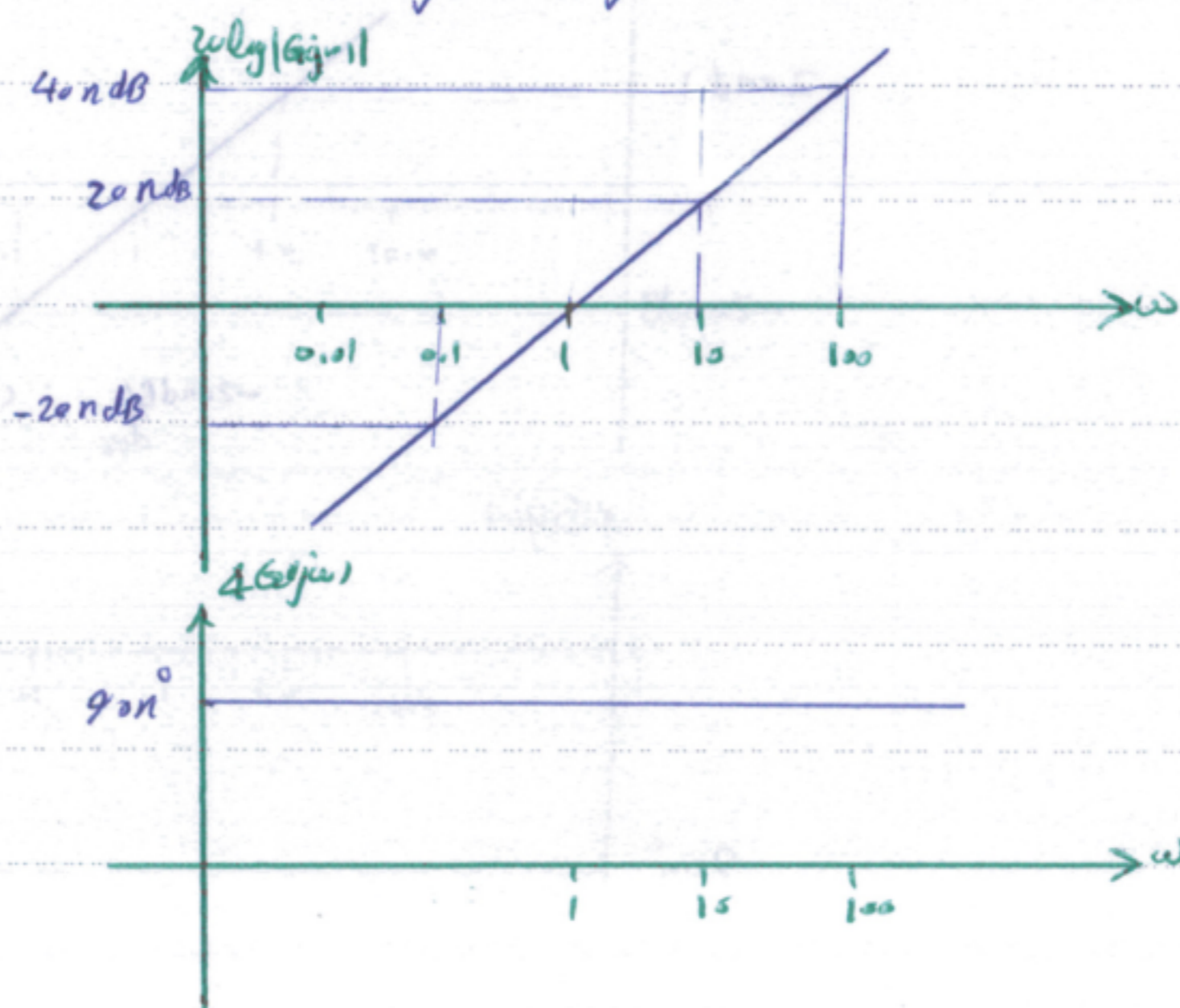
$$\angle G(j\omega) = \angle j\omega = 90^\circ$$



$$G(s) = s^n$$

$$\Rightarrow G(j\omega) = (j\omega)^n \rightarrow 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log |j\omega|^n = 20n \log \omega$$

$$\angle G(j\omega) = \angle (j\omega)^n = 90^\circ n$$



ط) قطب حقیقی اولی محور منفی:

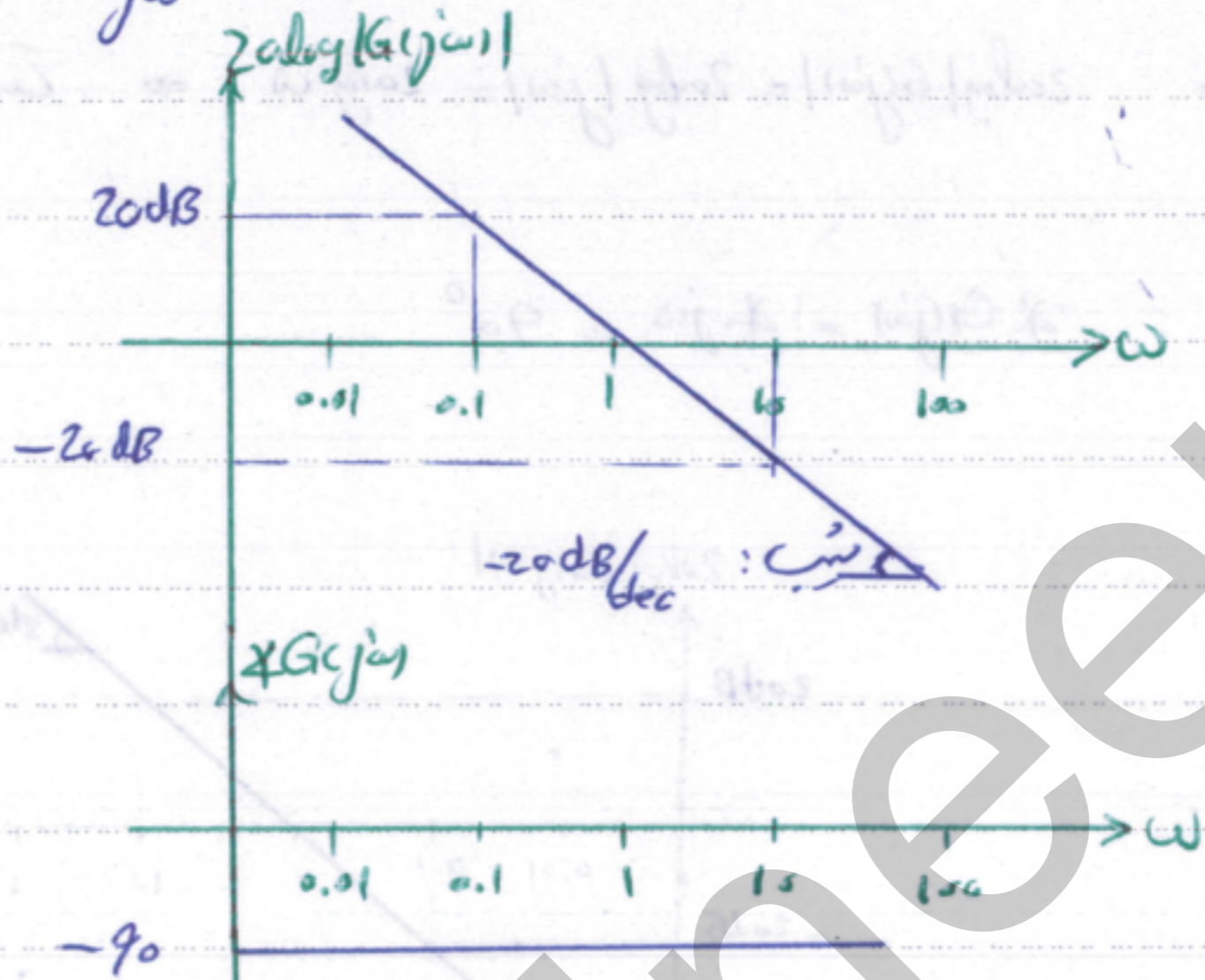
$$G(s) = \frac{1}{s}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = 20 \log \frac{1}{\omega} = -20 \log \omega$$

یک خط مستقیم با شیب -20 dB/decade در این نمودار داریم

$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{1}{j\omega} = -90^\circ$$



وقت: در پیدا کردن فاز، هیچ وقت عامل‌های مثل $(s)^N$ را بر روی N نمی‌رسانیم بلکه اثر هر عامل را جداگانه پیدا کرده N بار با هم جمع می‌کنیم

وقت: در پیدا کردن فاز: عامل z در صورت نشان دهنده $+90^\circ$ است. عامل z^N در صورت نشان دهنده $+90^\circ N$ است

عامل z در مخرج نشان دهنده -90° است. عامل z^N در مخرج نشان دهنده $-90^\circ N$ است

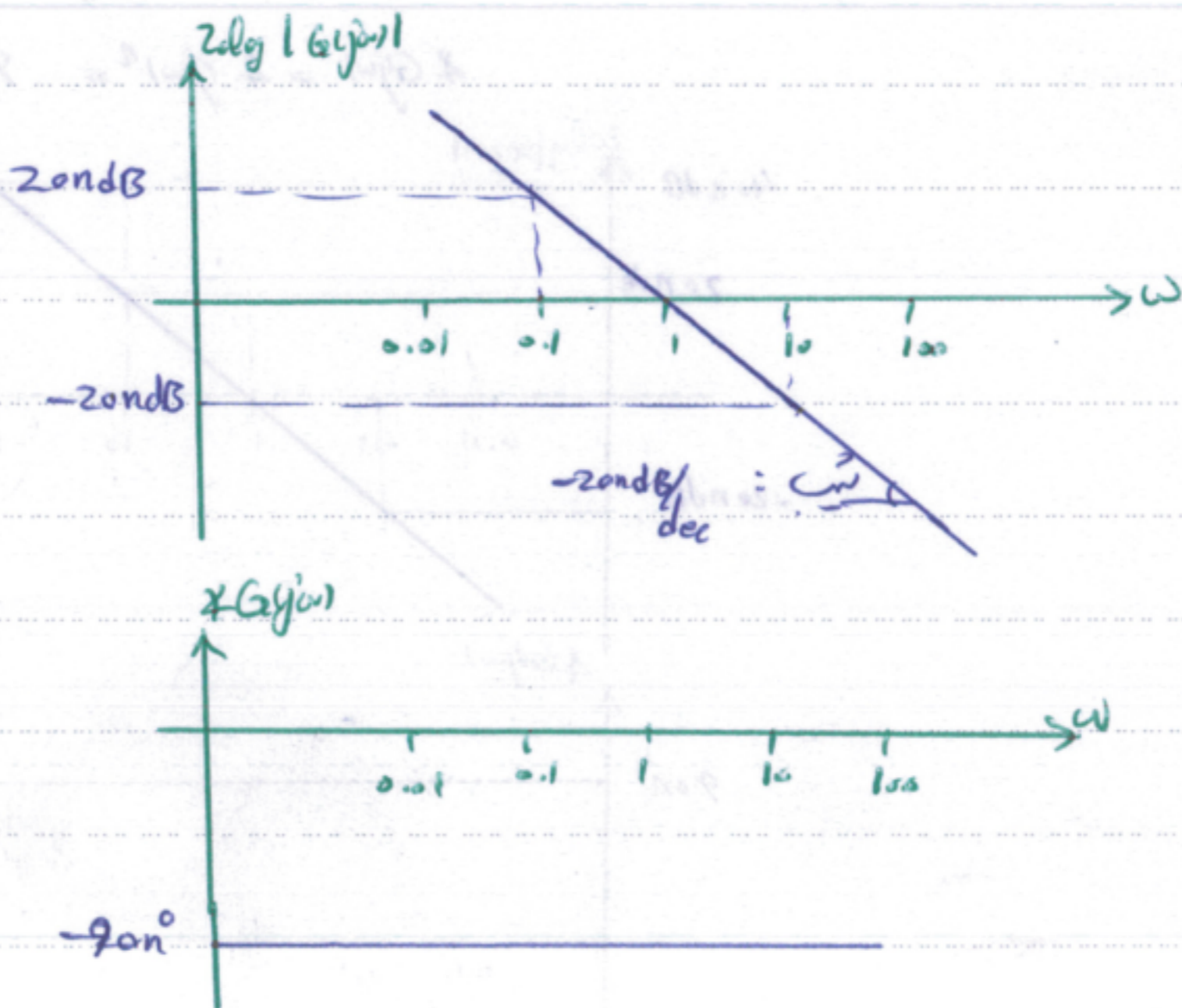
عامل $1/s$ در صورت نشان دهنده $+18^\circ$ است. عامل $1/s^N$ در مخرج نشان دهنده $-18^\circ N$ است.

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2}$$

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log \left| \frac{1}{(j\omega)^2} \right| = 20 \log \frac{1}{\omega^2} = -40 \log \omega$$

$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{1}{(j\omega)^2} = -180^\circ$$



مع قطب یا صفر حقیقی نسبت به ω :

$$G(s) = Ts + 1$$

(a) صفر حقیقی نسبت به ω :

$$|G(j\omega)| = |Tj\omega + 1| = \sqrt{T^2\omega^2 + 1} \rightarrow 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log \sqrt{T^2\omega^2 + 1}$$

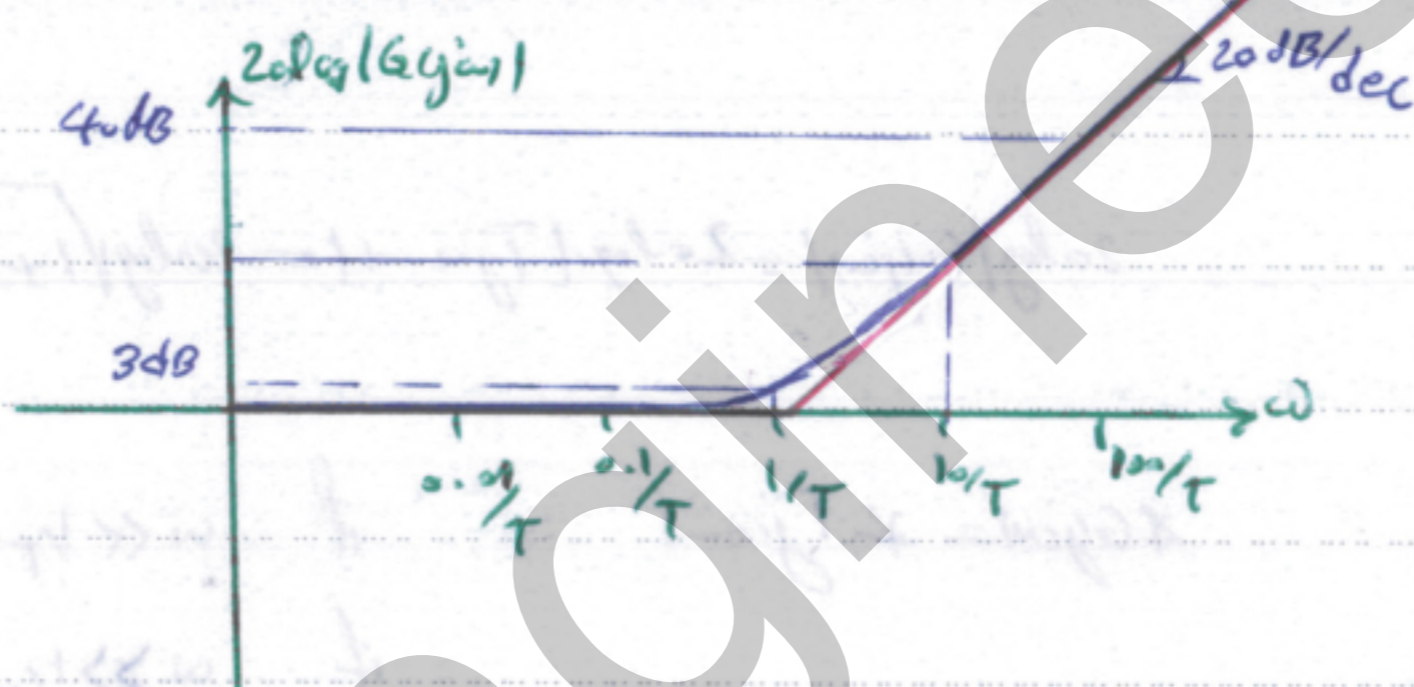
$$\text{if } \omega \ll 1/T \Rightarrow 20 \log |G(j\omega)| \approx 20 \log 1 = 0$$

$$\text{if } \omega \gg 1/T \Rightarrow 20 \log |G(j\omega)| \approx 20 \log \sqrt{T^2\omega^2} = 20 \log T\omega = 20 \log T + 20 \log \omega$$

$$\text{if } \omega = 1/T \rightarrow 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log \sqrt{2} = 0.15 \times 20 = 3 \text{ dB}$$

$$\omega = 2/T \rightarrow 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log \sqrt{5} = 0.35 \times 20 = 7 \text{ dB}$$

...



ممکن نمودار اندازه بود بصورت در خط مستقیم تقسیم زد. (این صورت به زمان $\omega = 1/T$ یعنی زمان انتقال این خط و زمان

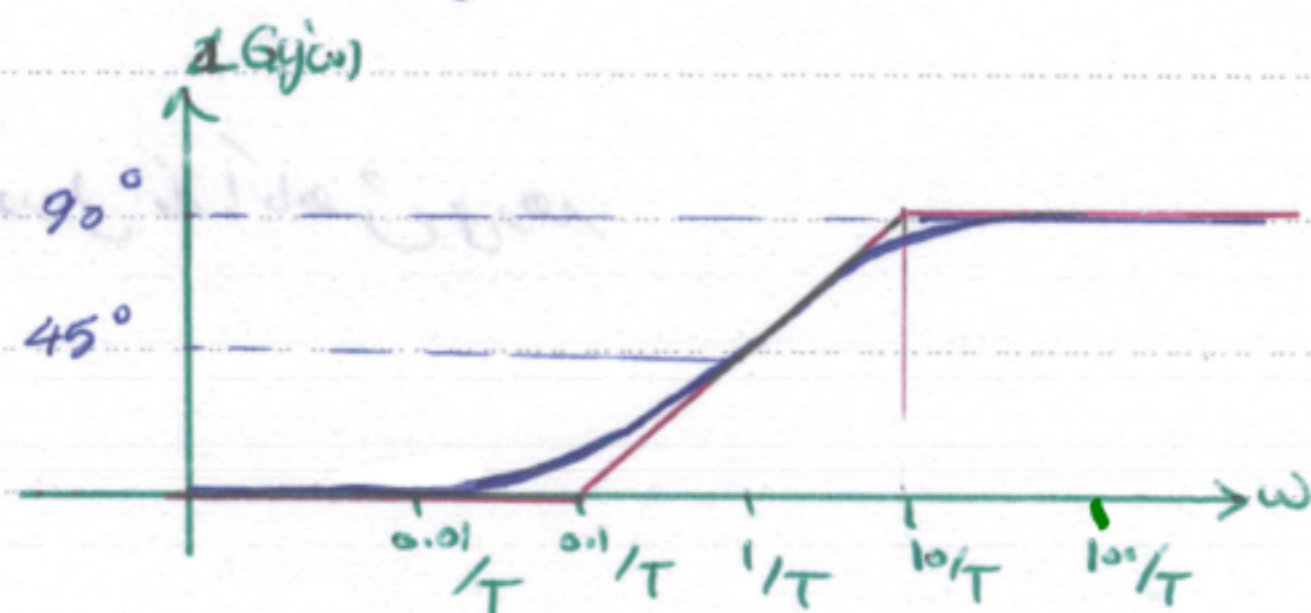
گسست گند (Break frequency)

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1} \frac{T\omega}{1} = \tan^{-1} T\omega$$

$$\text{if } \omega \ll 1/T \Rightarrow \angle G(j\omega) = 0^\circ$$

$$\text{if } \omega \gg 1/T \Rightarrow \angle G(j\omega) = 90^\circ$$

$$\text{if } \omega = 1/T \Rightarrow \angle G(j\omega) = \tan^{-1} 1 = 45^\circ$$

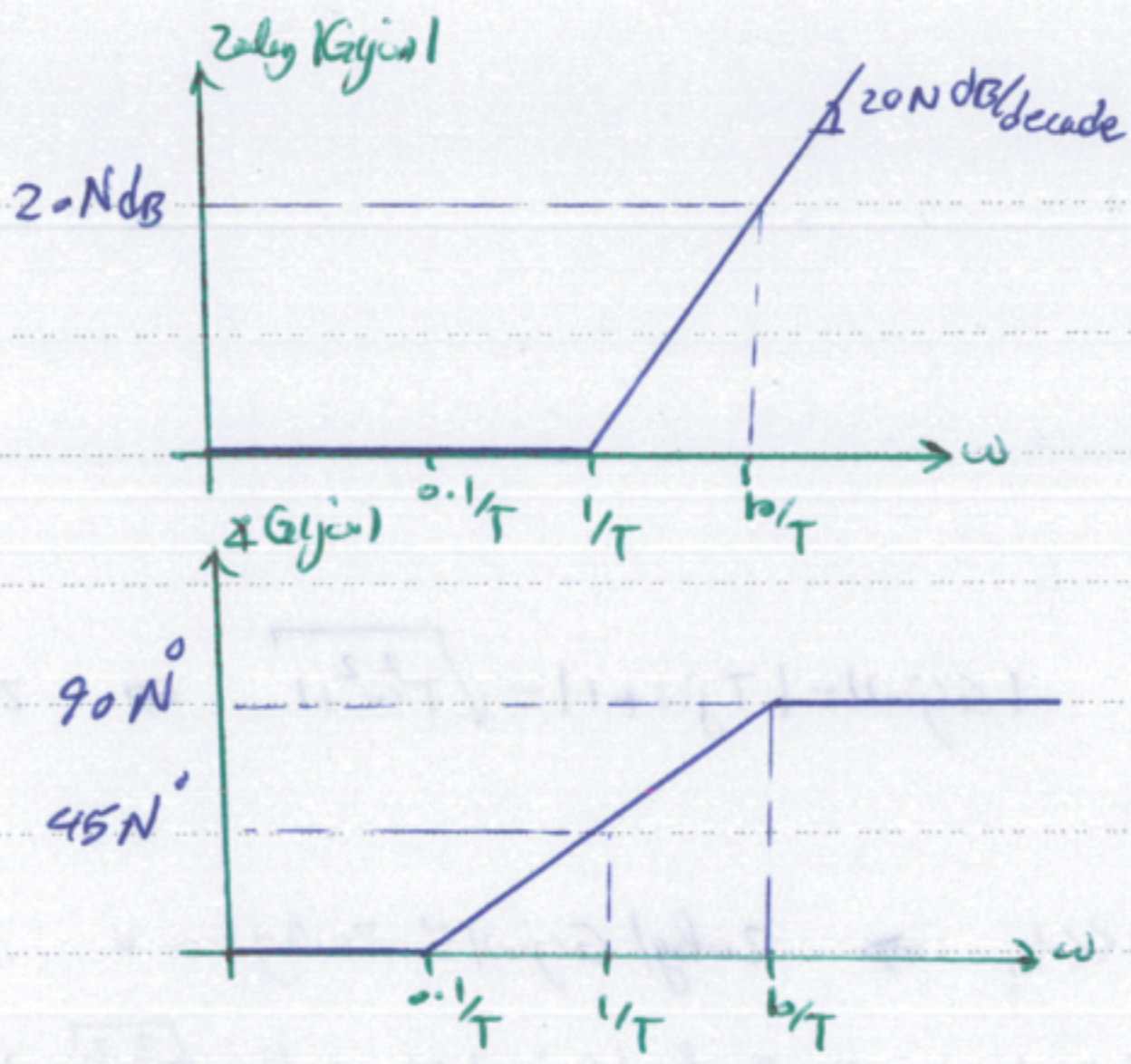


ممکن نمودار فاز را بصورت خطوط گسسته تقسیم زد. افزایش فاز از یک دهه (decade) تیل از زمان گسست شروع شده در زمان گسست به

مقدار مابقی رسیده در یک دهه بعد از زمان گسست به مقدار مابقی می رسد.

نقطه: صفر حقیقی نسبت به ω یعنی فاز را افزایش می دهد و همچنین فاز را افزایش می دهد

$G(s) = (TS+1)^N$



$G(s) = TS-1$

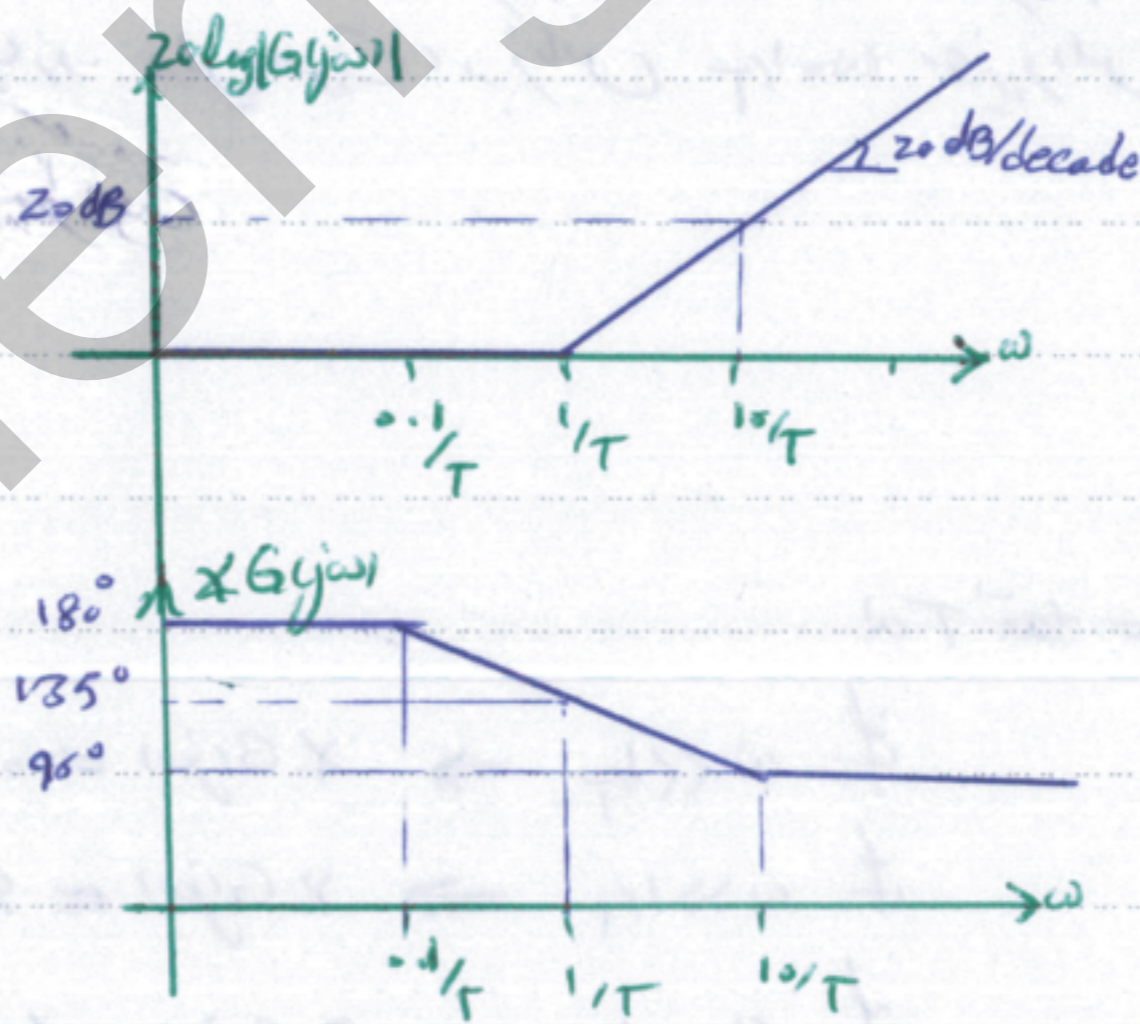
(b) صفر حقیقی سمت راست:

$G(s) = Tj\omega - 1$

$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log |Tj\omega - 1| = 20 \log \sqrt{1 + T^2\omega^2} \rightarrow$ *نقطه اندازه‌گیری صفر سمت راست*

$\angle G(j\omega) = \angle Tj\omega - 1$: $\text{if } \omega \ll 1/T \Rightarrow \angle G(j\omega) = 180^\circ$

$\text{if } \omega \gg 1/T \Rightarrow \angle G(j\omega) = 90^\circ$



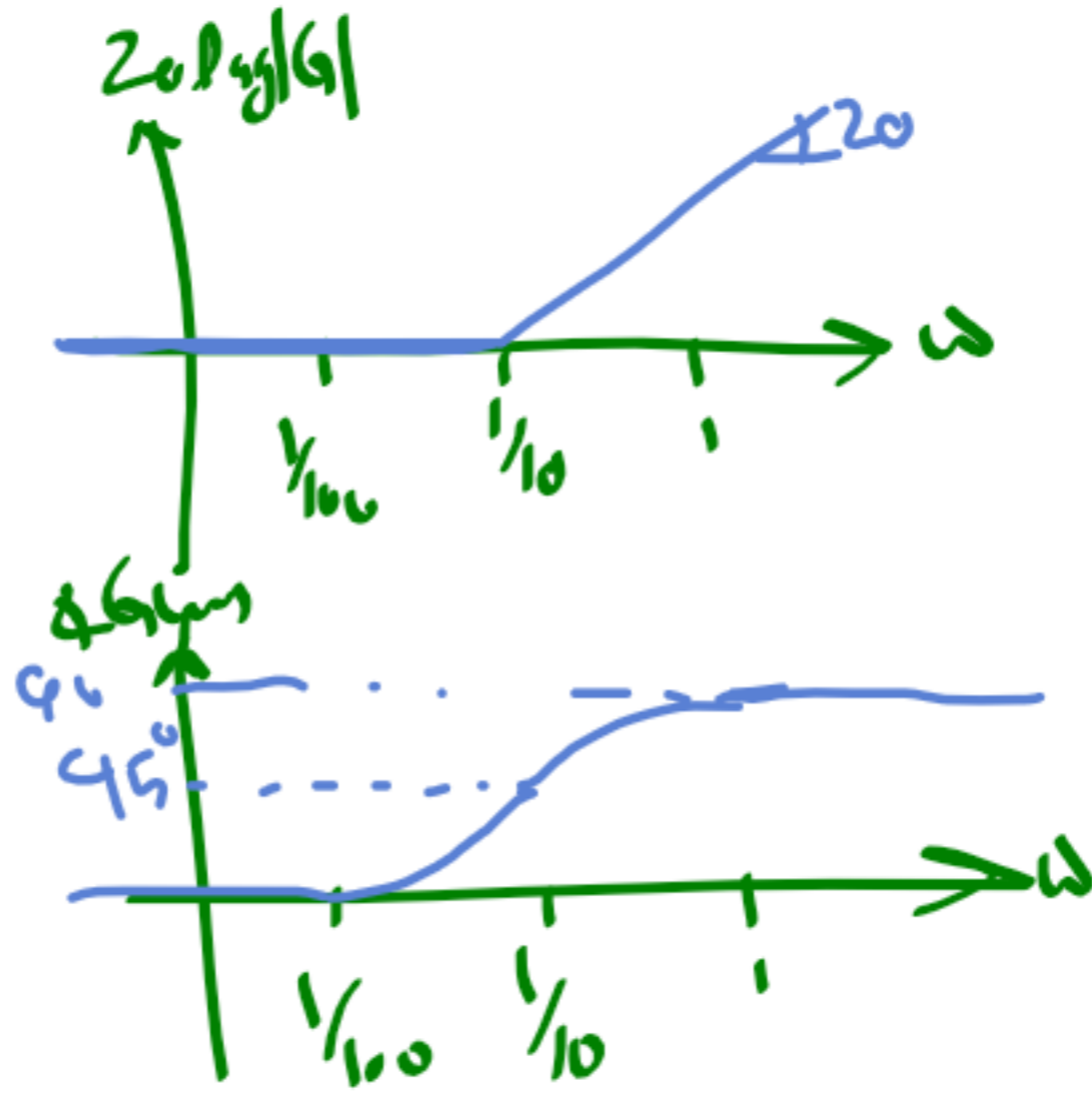
نقطه: صفر حقیقی سمت راست اندازه را افزایش می‌دهد ولی فاز را کاهش می‌دهد.

$$G(s) = 10s^{-1}$$

$$10s^{-1} = 0$$

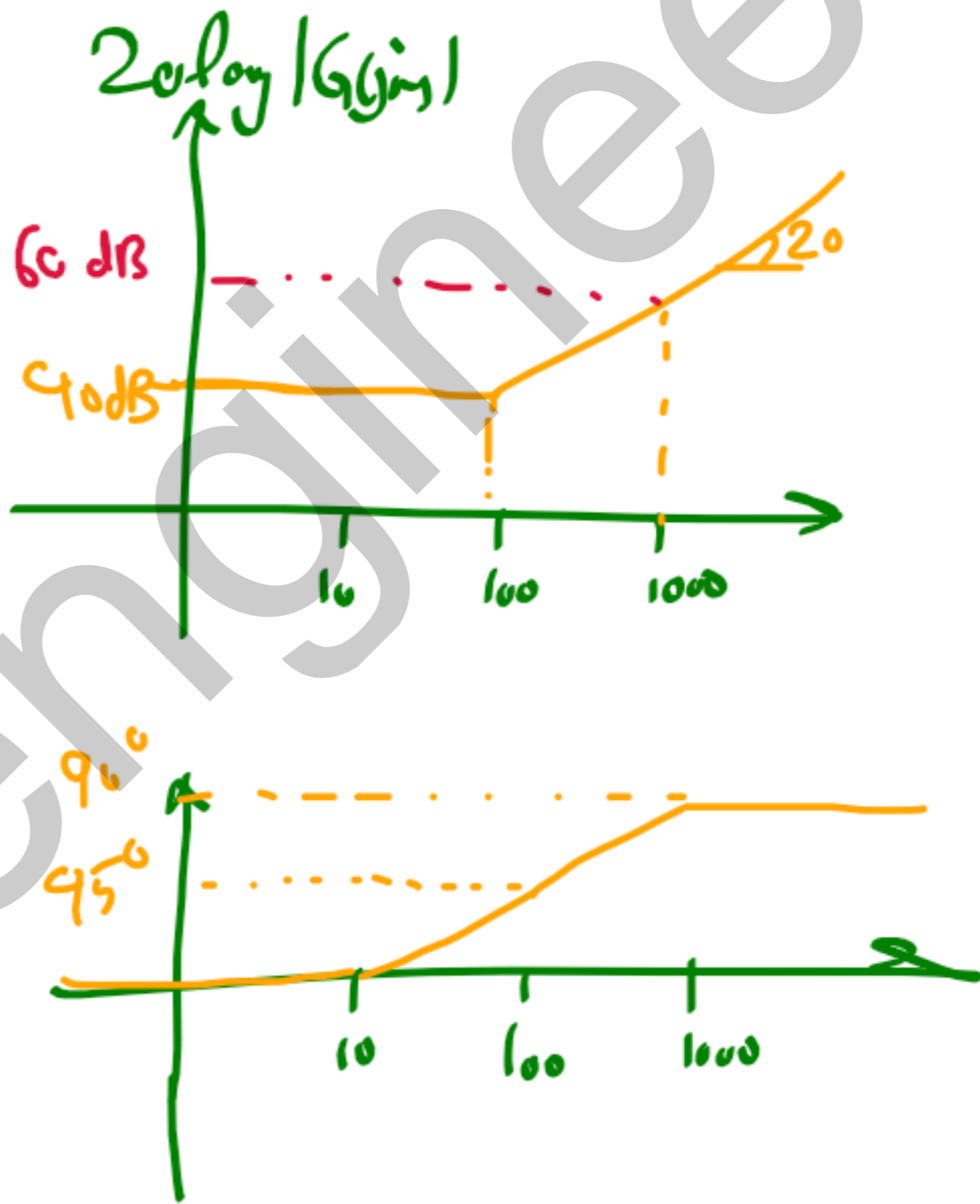
$$s = -1/10$$

زکائن قسمة: $1/10$



$$G(s) = s + 100$$

زکائن قسمة: 100



$$G(jw) \Big|_{w=10} =$$

$$r(t) = 2 \sin(50t + 40^\circ) \longrightarrow C_{ss}(t) = ?$$

$$M_g(dB) = 40$$

$$M_g = 100$$

$$C_{ss}(t) \approx 100 \times 2 \sin(50t + 40^\circ + 26.6^\circ)$$

$$r(t) = 3 C_1(1000t + 20^\circ) \longrightarrow C_{ss}(t) = ?$$

$$M_g(dB) \Big|_{w=1000} = 60dB$$

$$20 \log \kappa = 60$$

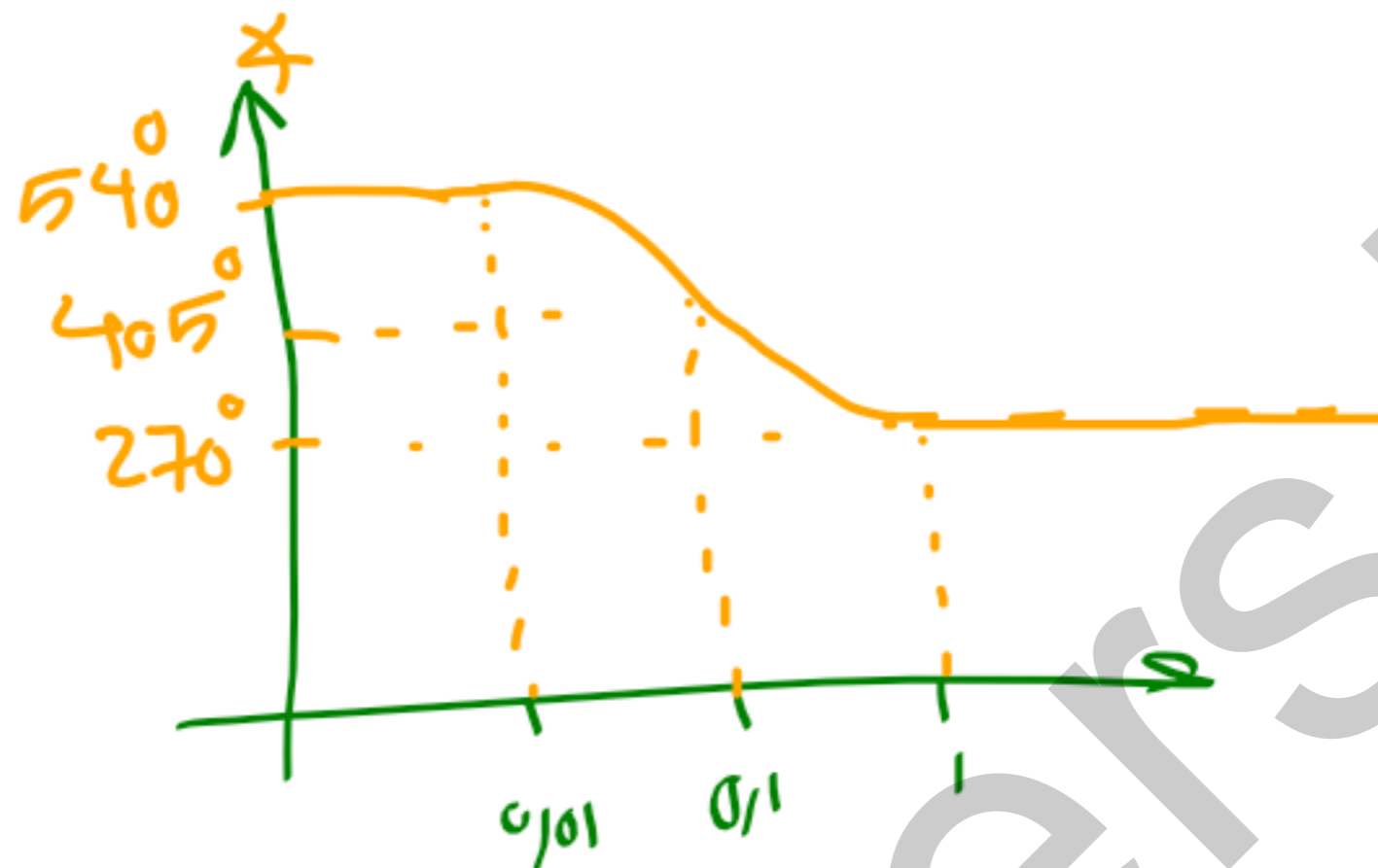
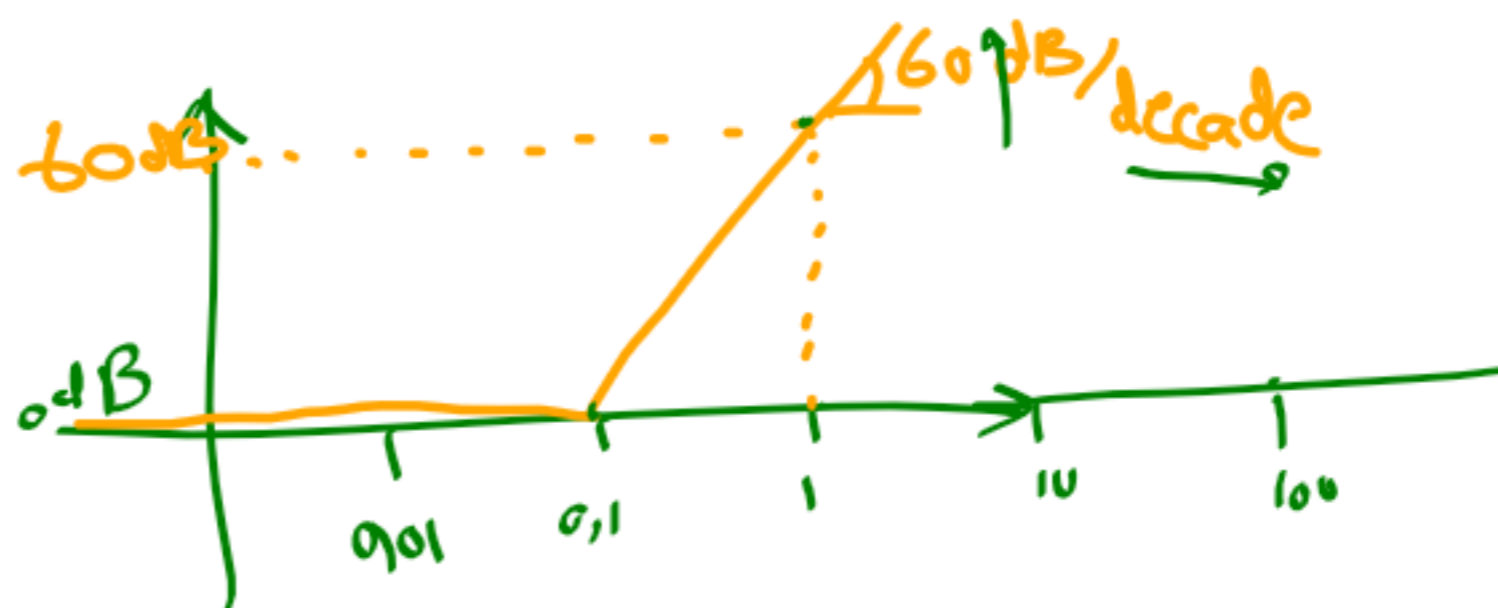
$$\kappa = 1000$$

$$C_{ss}(t) = 1000 \times 3 C_1(1000t + 20^\circ + 84^\circ)$$

$\vec{j\omega}$

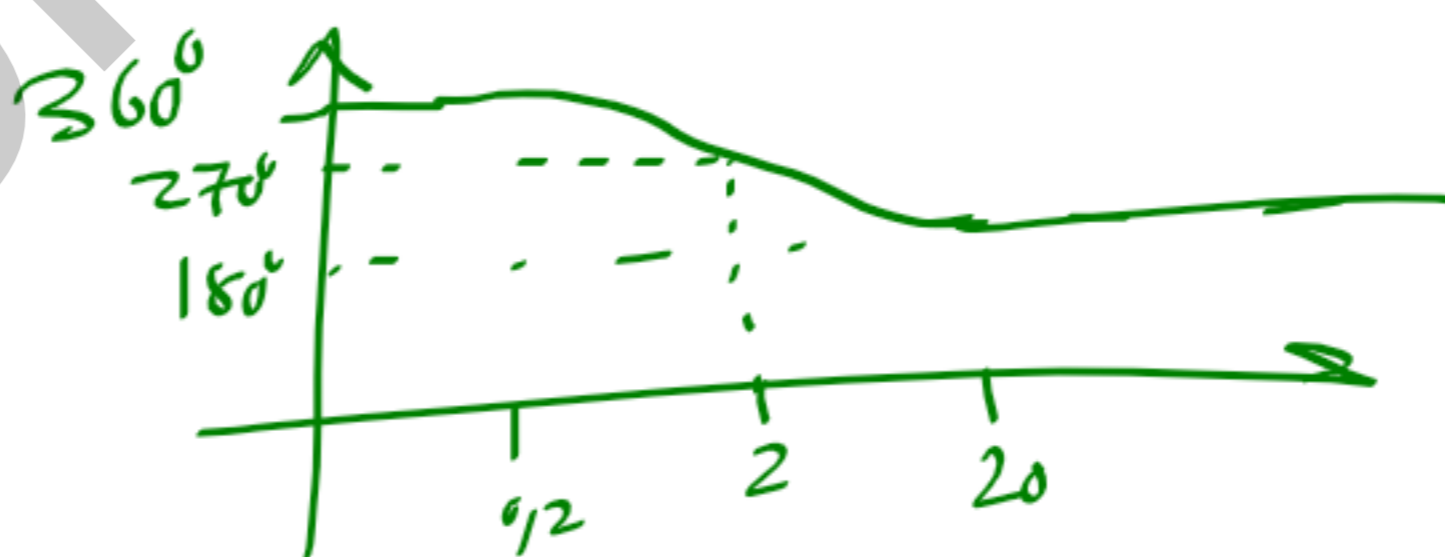
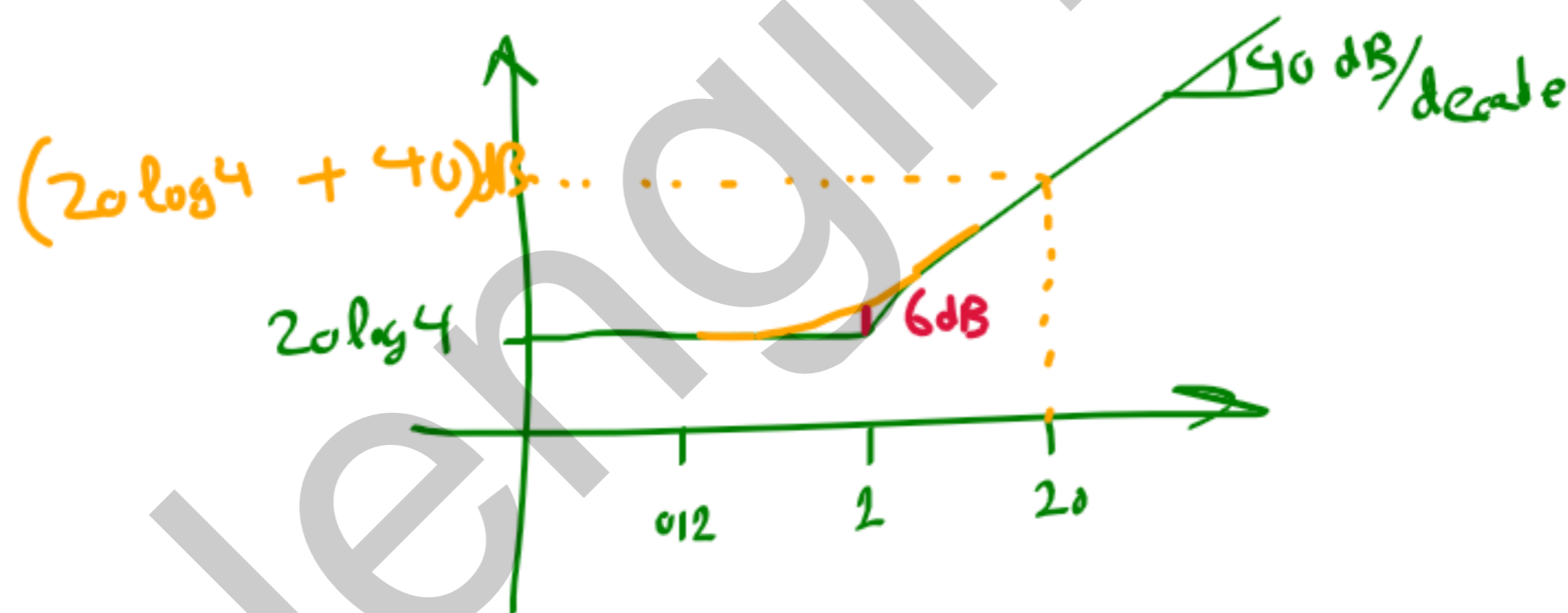
$$G = (10s - 1)^3$$

$$G(j\omega) = (10j\omega - 1)^3$$



$\vec{j\omega}$

$$G = (s - 2)^2 = \left[2\left(\frac{1}{2}s - 1\right)\right]^2 = (2^2) \left(\frac{1}{2}s - 1\right)^2$$



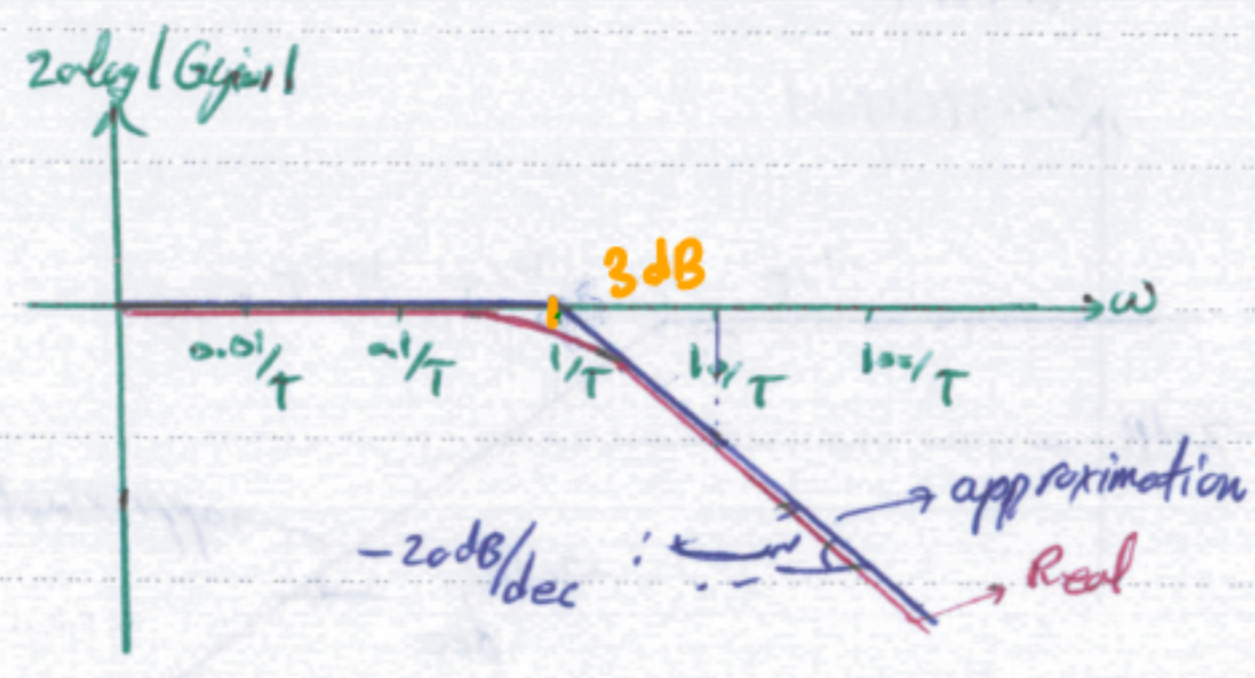
$$G(s) = \frac{1}{Ts+1}$$

قطب حقیقی مثبت است

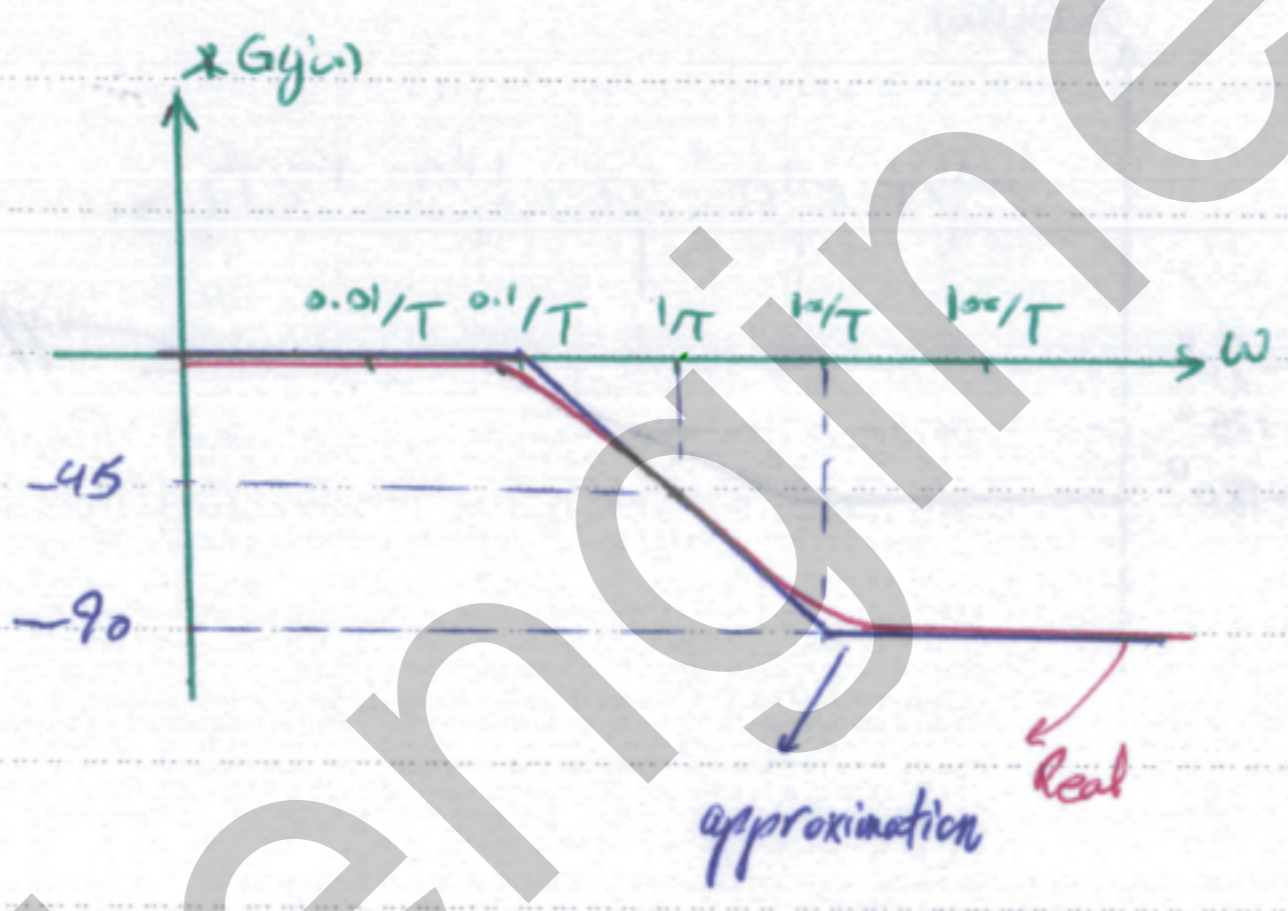
$$G(j\omega) = \frac{1}{Tj\omega+1}$$

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log \left| \frac{1}{j\omega T + 1} \right| = 20 \log \frac{1}{\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}} = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

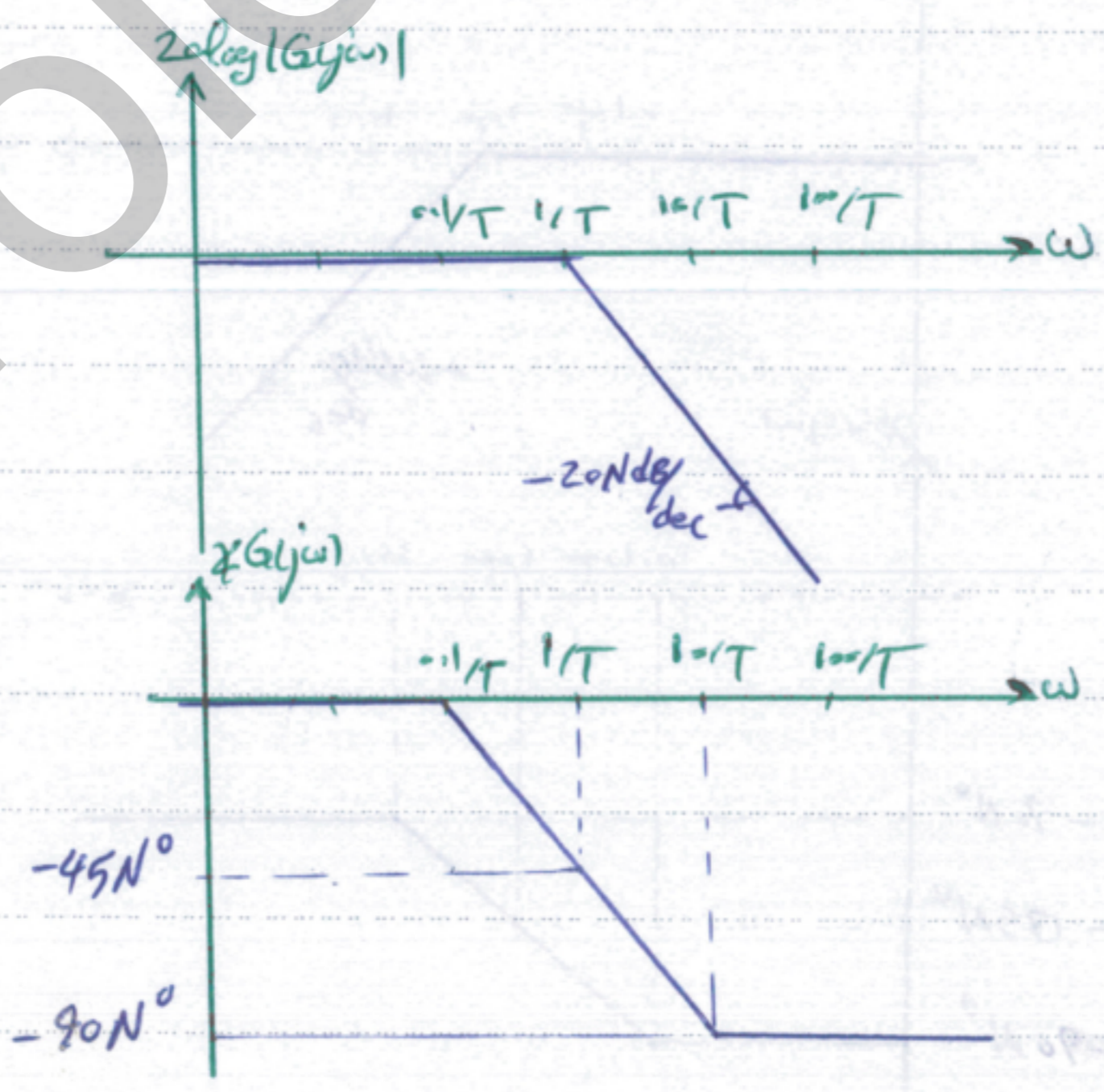
مغایرت فاز است
مابعدت منفی



$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1} T\omega$$



$$G(s) = \frac{1}{(Ts+1)^N}$$



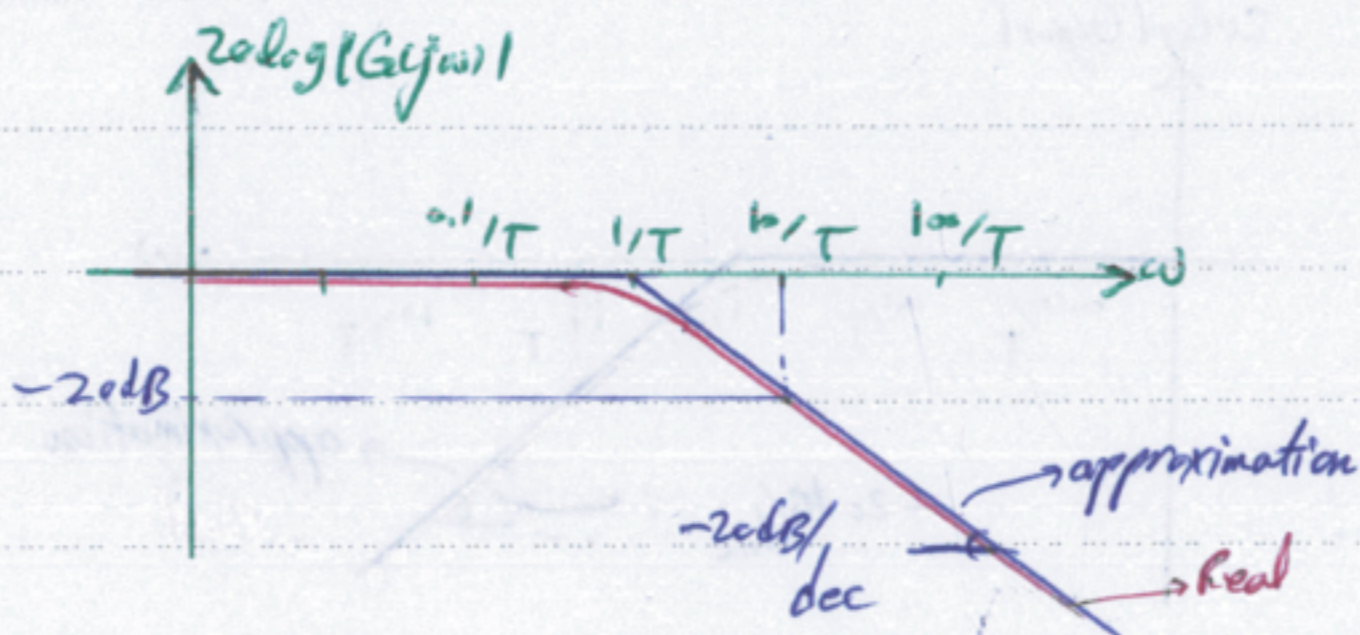
نقطه: قطب حقیقی مثبت است چه انداز را کاهش داد، فاز را نیز کاهش می دهد

$$G(s) = \frac{1}{Ts-1}$$

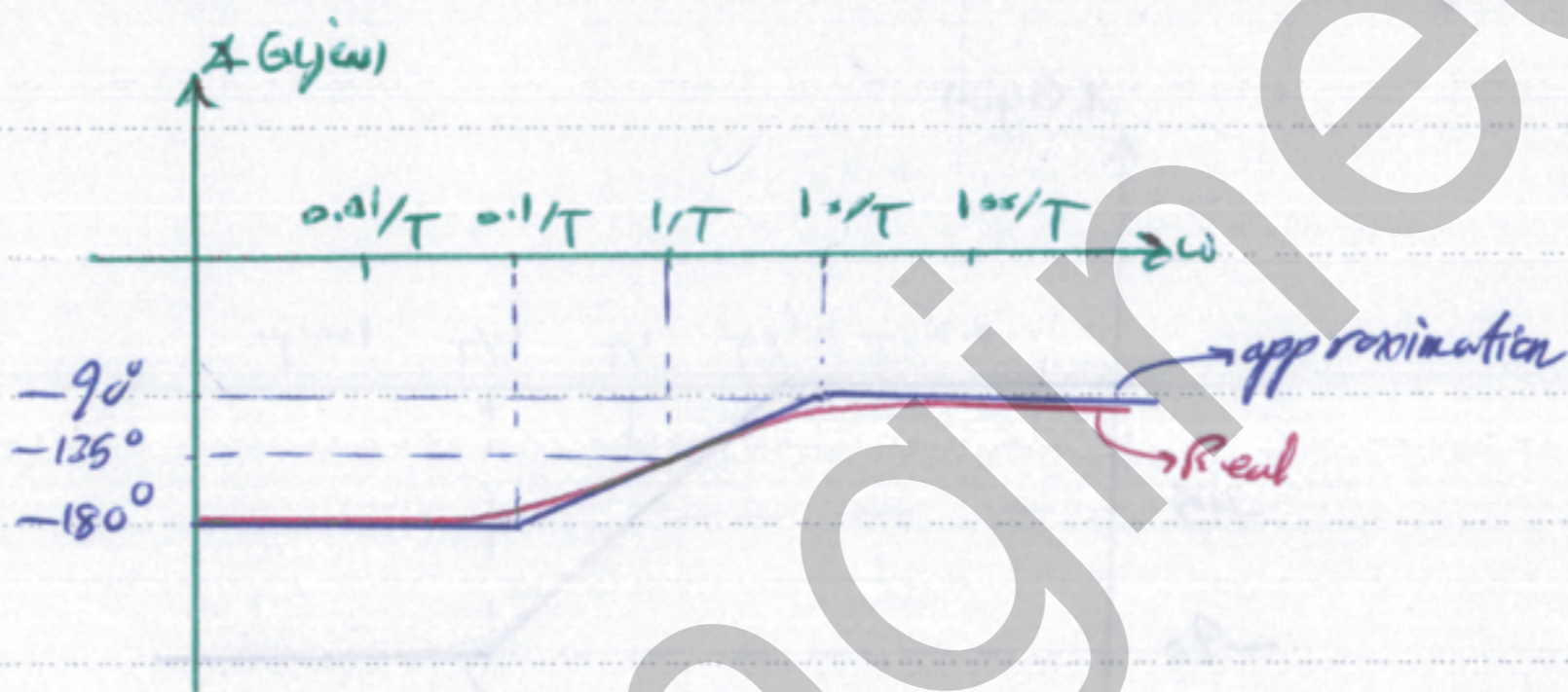
$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T - 1}$$

d) قطب حقیقی سمت راست:

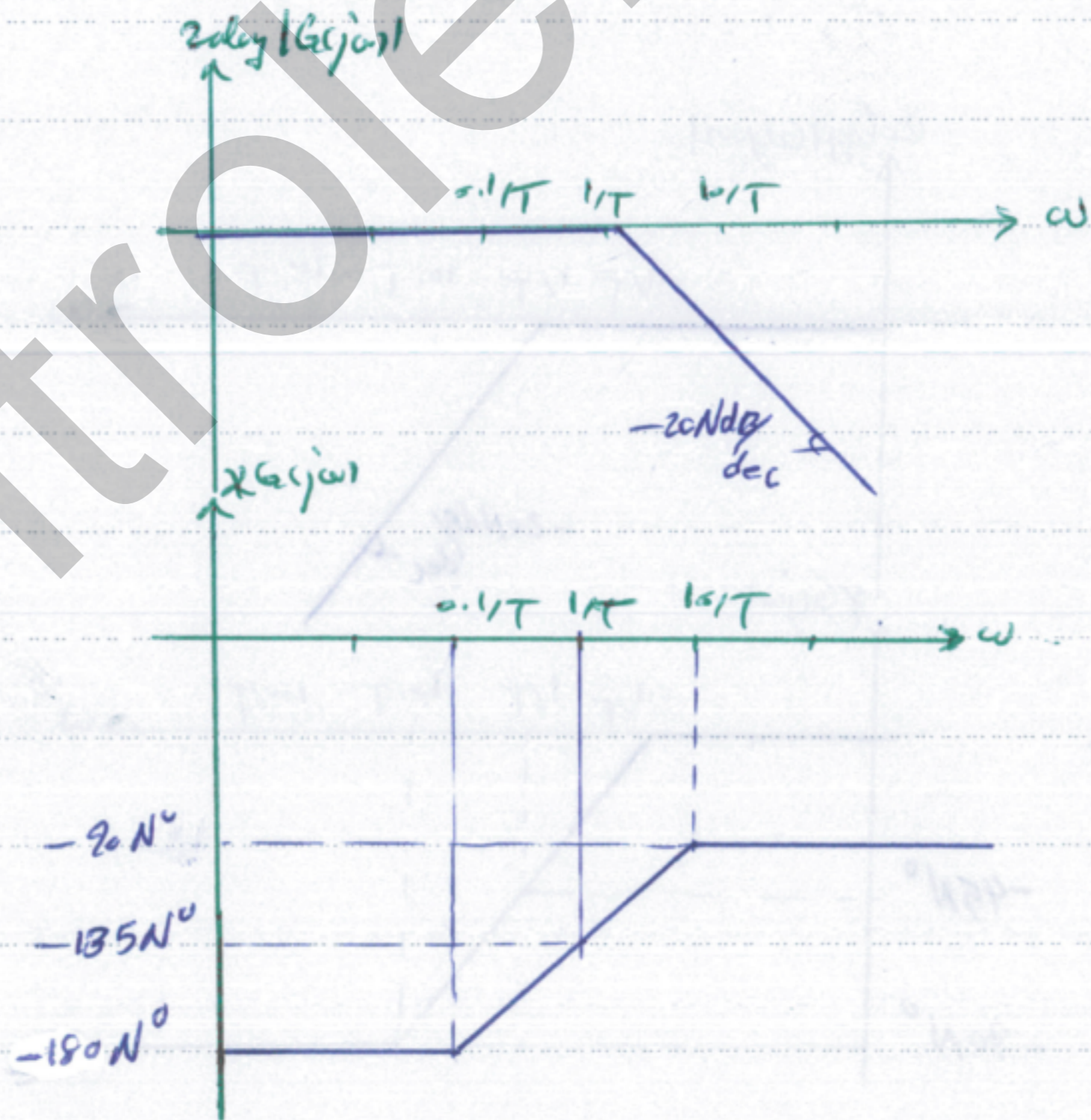
سویز لحاظ اندازه دایره را بر حسب قطب سمت راست:



$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega T}{-1}$$



$$G(s) = \frac{1}{(sT-1)^N}$$



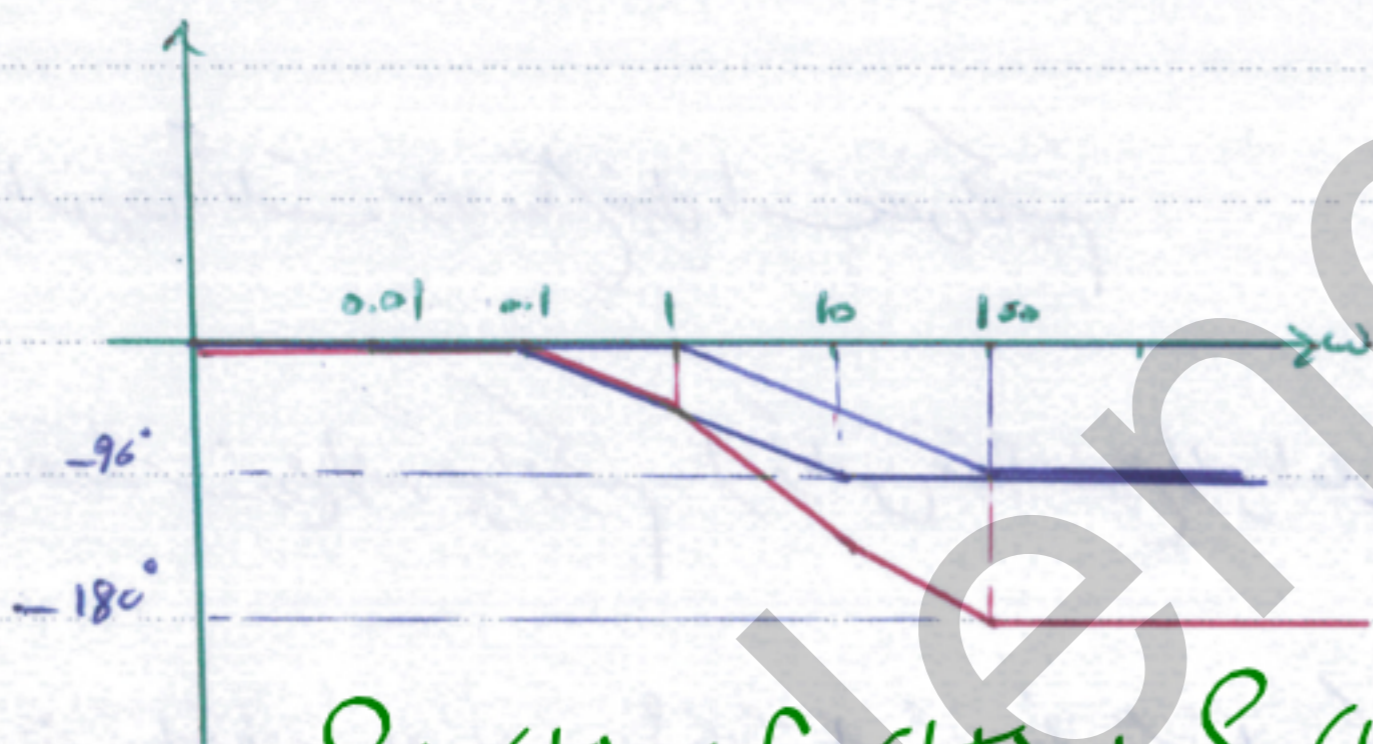
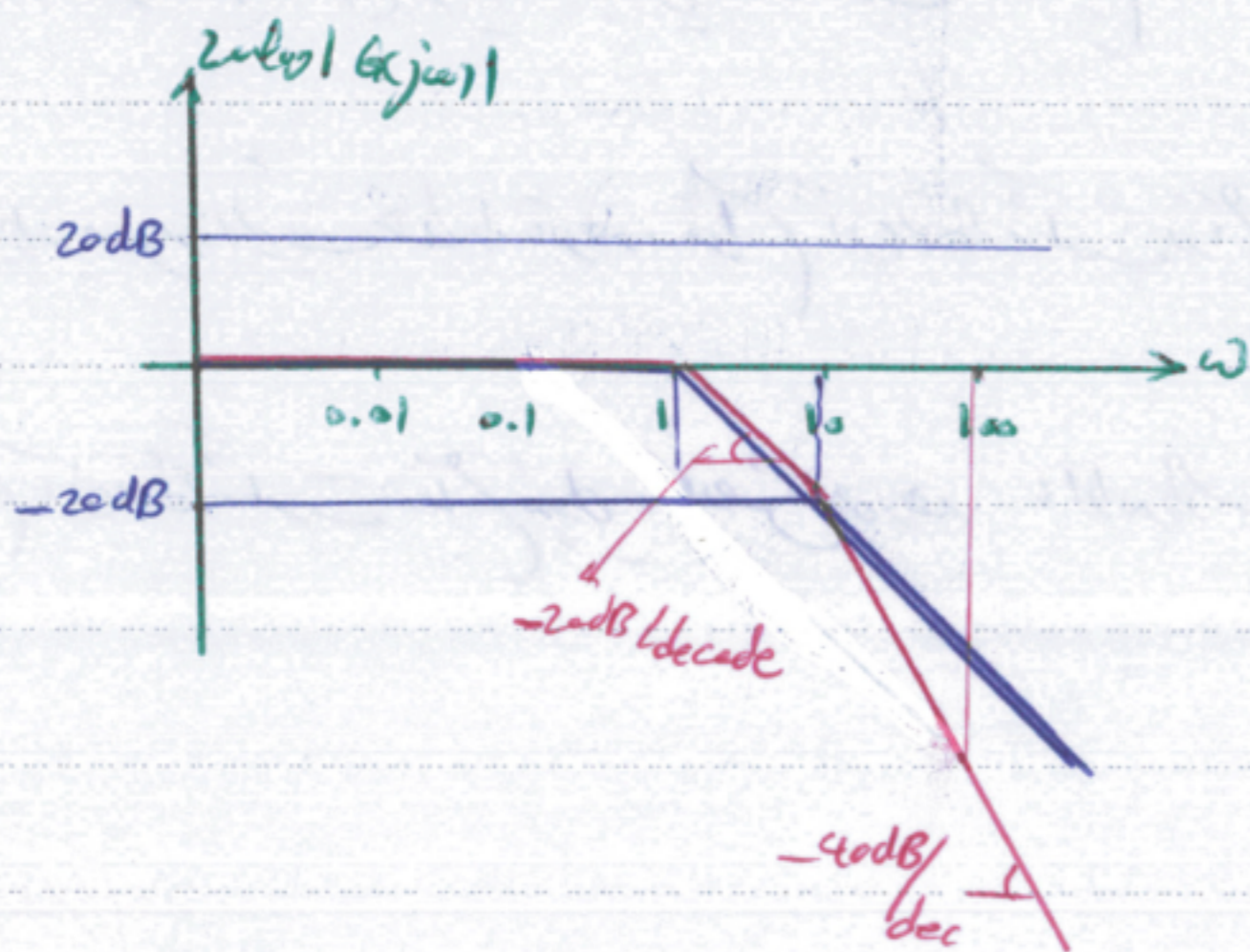
صفر سمت چپ: افزایش فاز
 " " راست: کاهش فاز
 قطب سمت چپ: کاهش فاز

قطب سمت راست: افزایش فاز
 " " راست: کاهش فاز
 افزایش فاز: از افزایش می دهد

مقاله:

ریالایز بود تابع تبدیل $G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+10)}$ را رسم کنید.

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+10)} = 10 \times \frac{1}{s+1} \times \frac{1}{s+10}$$



$$\angle G(s) = \angle 10 + \angle \frac{1}{s+1} + \angle \frac{1}{s+10}$$

$$\Rightarrow \angle G(s) = 0 + (-90^\circ) + (-90^\circ) = -180^\circ$$

روش اختصار داشته رسم ریالایز کردیم
رسم ریالایزمانند:

1) ابتدا زمان ها شکست موجود در تابع تبدیل مشخص کنیم (با دید تقاطع منحنی اولیه بدای کنیم). (زمان تقاطع منحنی اولیه را میخوانیم)

کمتر از کوچکترین زمان شکست موجود در سیستم میگیریم. اندازه تابع تبدیل بر حسب dB را با جابجایی زمان هر دو و محاسبه سیستم از رکتان تبدیل

در بابت هم آوریم

۳ اگر تابع تبدیل قطبی $r = r(\theta)$ صدای در $r = r_0$ داشته باشد، میباید خط گذرنده از نقطه (r_0, θ_0) در $r = r_0$ صدای

داشتند. $r = r_0$ خط گذرنده از نقطه شروع لولبه برابر با $r = r_0$ است. $r = r_0$ خط گذرنده از نقطه (r_0, θ_0) در $r = r_0$ صدای

۴ با ولت از نقطه شروع لولبه، به اولین نقطه شکست که رسیدیم، بر میگردیم که نقطه شکست مربوط به صورت است یا قطب، از نقطه شکست

مربوط به صورت است یا قطب خط را تا جایی که بتوانیم آن نقطه شکست تبدیل کنیم، افزایش می دهیم. اگر نقطه شکست مربوط به قطب بود، تابع تبدیل

تابع آن نقطه شکست تبدیل می شود. با ادامه دادن این روند تا اینکه اندازه r برسد به r_0 .

بسم الله الرحمن الرحیم

۱) زمان ها که شکست موجود در تابع تبدیل است محض کنیم.

۲) یک نقطه شروع لولبه پیدا کنیم. (زمان نقطه شروع لولبه $r = r_0$ یک راه کمترین r زمان شکست موجود در تابع تبدیل است)

اگر تابع تبدیل قطبی $r = r(\theta)$ صدای در $r = r_0$ داشته باشد، میباید خط گذرنده از نقطه (r_0, θ_0) در $r = r_0$ صدای

داشتند. $r = r_0$ خط گذرنده از نقطه شروع لولبه برابر با $r = r_0$ است. $r = r_0$ خط گذرنده از نقطه (r_0, θ_0) در $r = r_0$ صدای

۳) در $r = r_0$ صدای در $r = r_0$ داشته باشد، میباید خط گذرنده از نقطه (r_0, θ_0) در $r = r_0$ صدای

داشتند. $r = r_0$ خط گذرنده از نقطه شروع لولبه برابر با $r = r_0$ است. $r = r_0$ خط گذرنده از نقطه (r_0, θ_0) در $r = r_0$ صدای

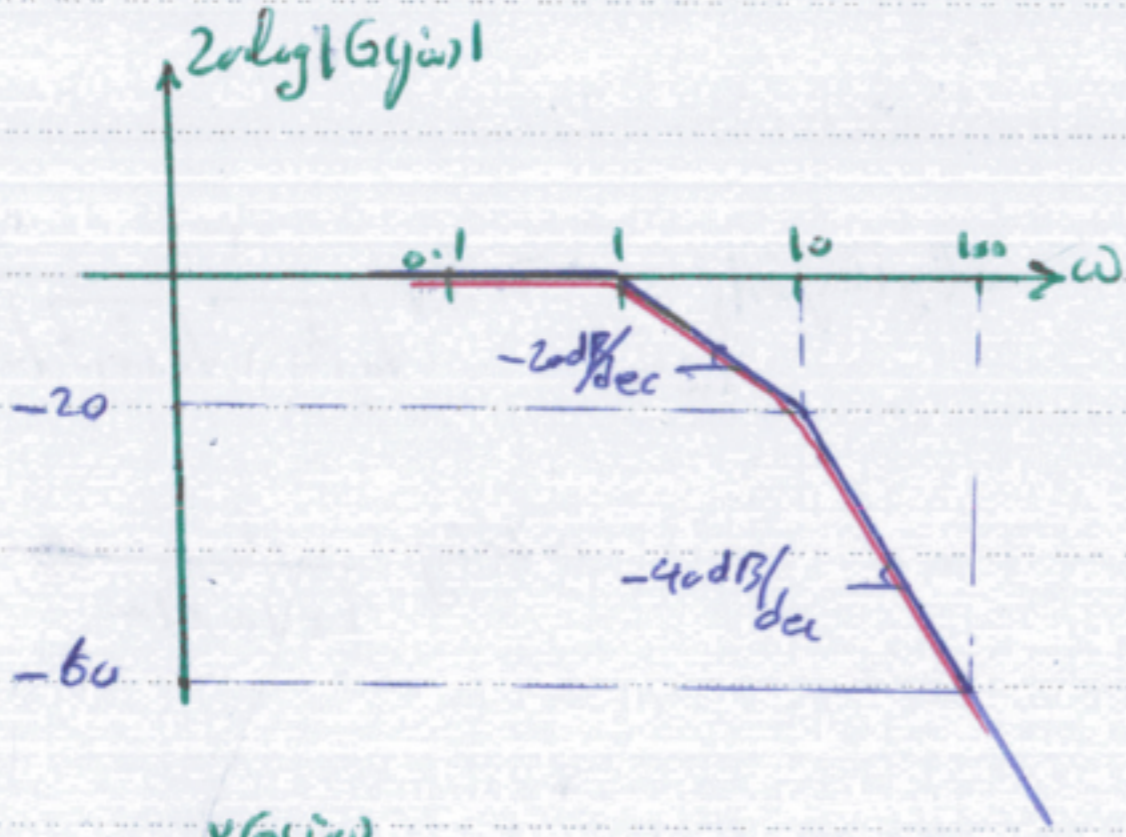
۴) با ولت از نقطه شروع لولبه و به جایی که شکست می رسد، بر میگردیم که نقطه شکست مربوط به صورت است یا قطب، از نقطه شکست

مربوط به صورت است یا قطب خط را تا جایی که بتوانیم آن نقطه شکست تبدیل کنیم، افزایش می دهیم. اگر نقطه شکست

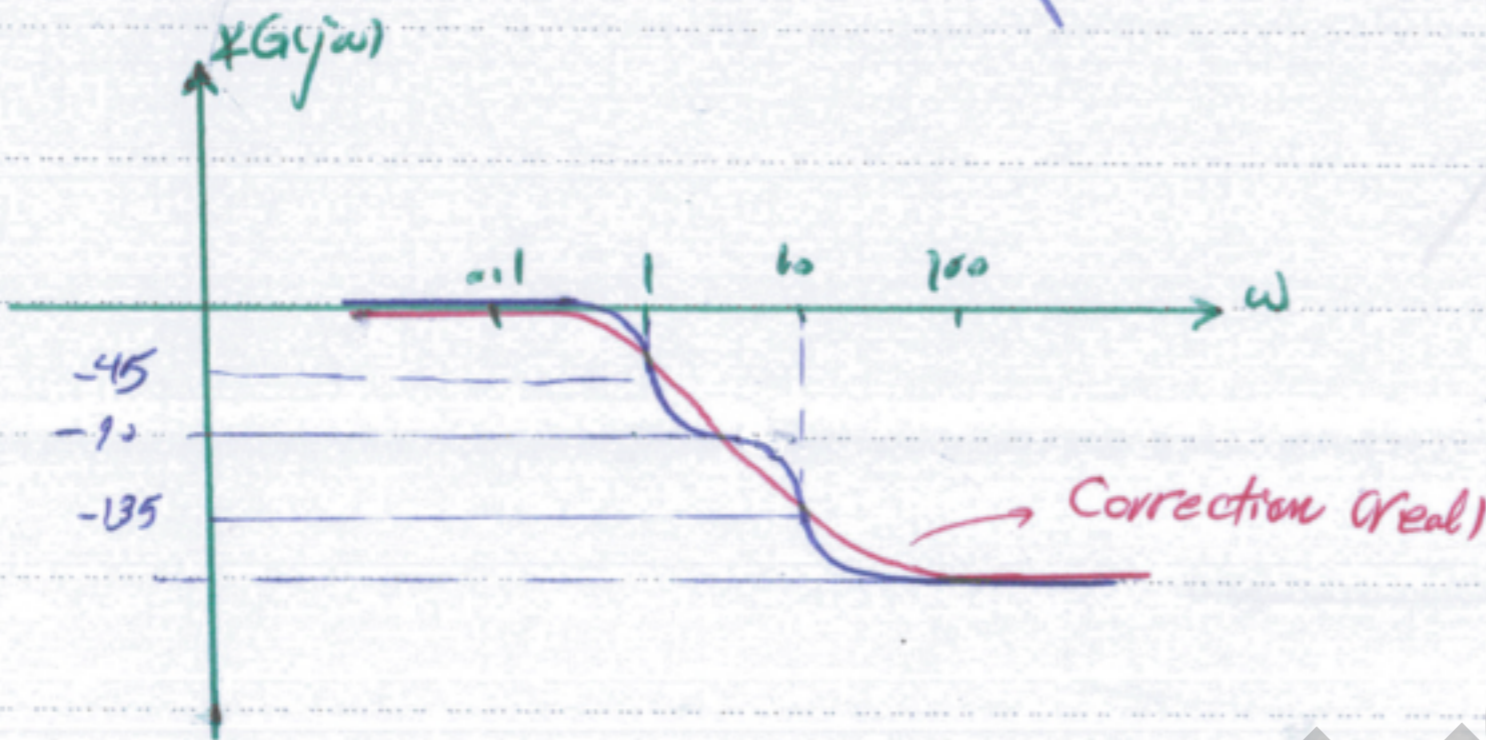
مربوط به قطب بود، تابع تبدیل آن نقطه شکست تبدیل می شود. با ادامه دادن این روند تا اینکه اندازه r برسد به r_0 .

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+10)}$$

: dia

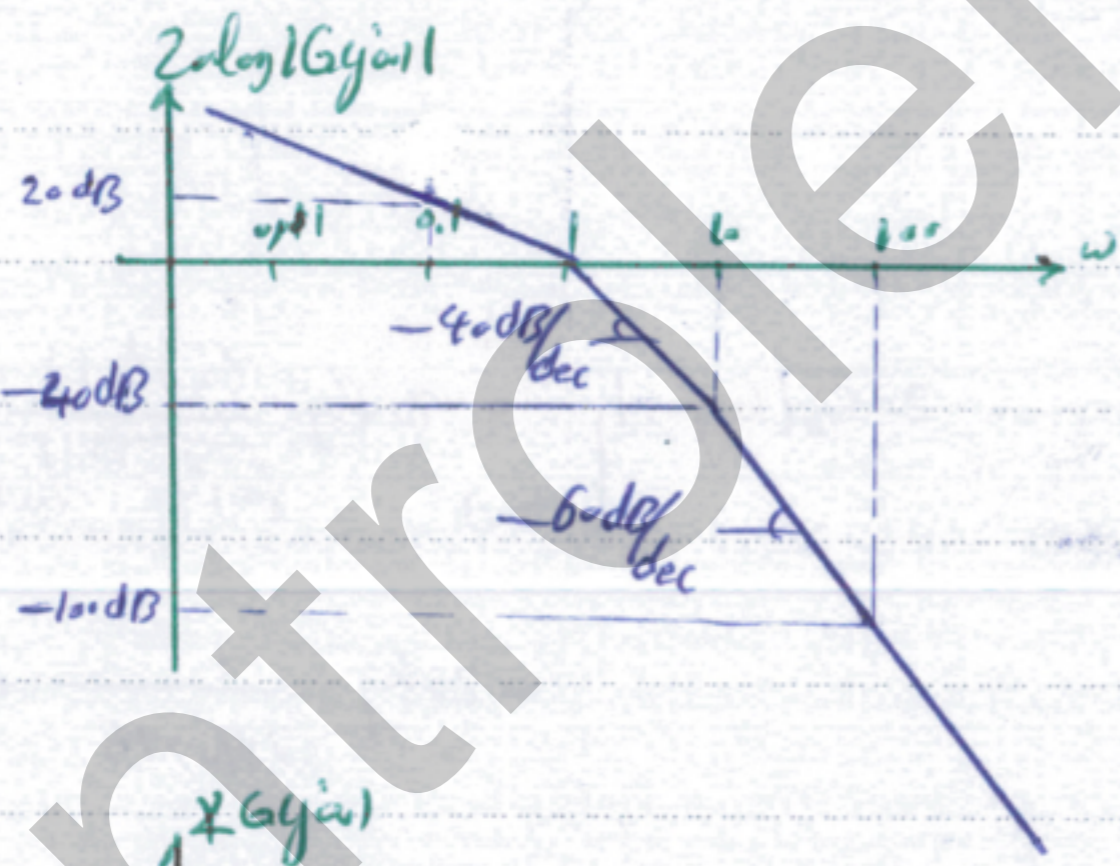


$$20 \log |G(j\omega)|_{\omega=0.1} = 20 \log \frac{10}{\sqrt{0.1^2+1} \sqrt{0.1^2+10^2}} = 20 \log \frac{10}{1 \times 10} = 0$$



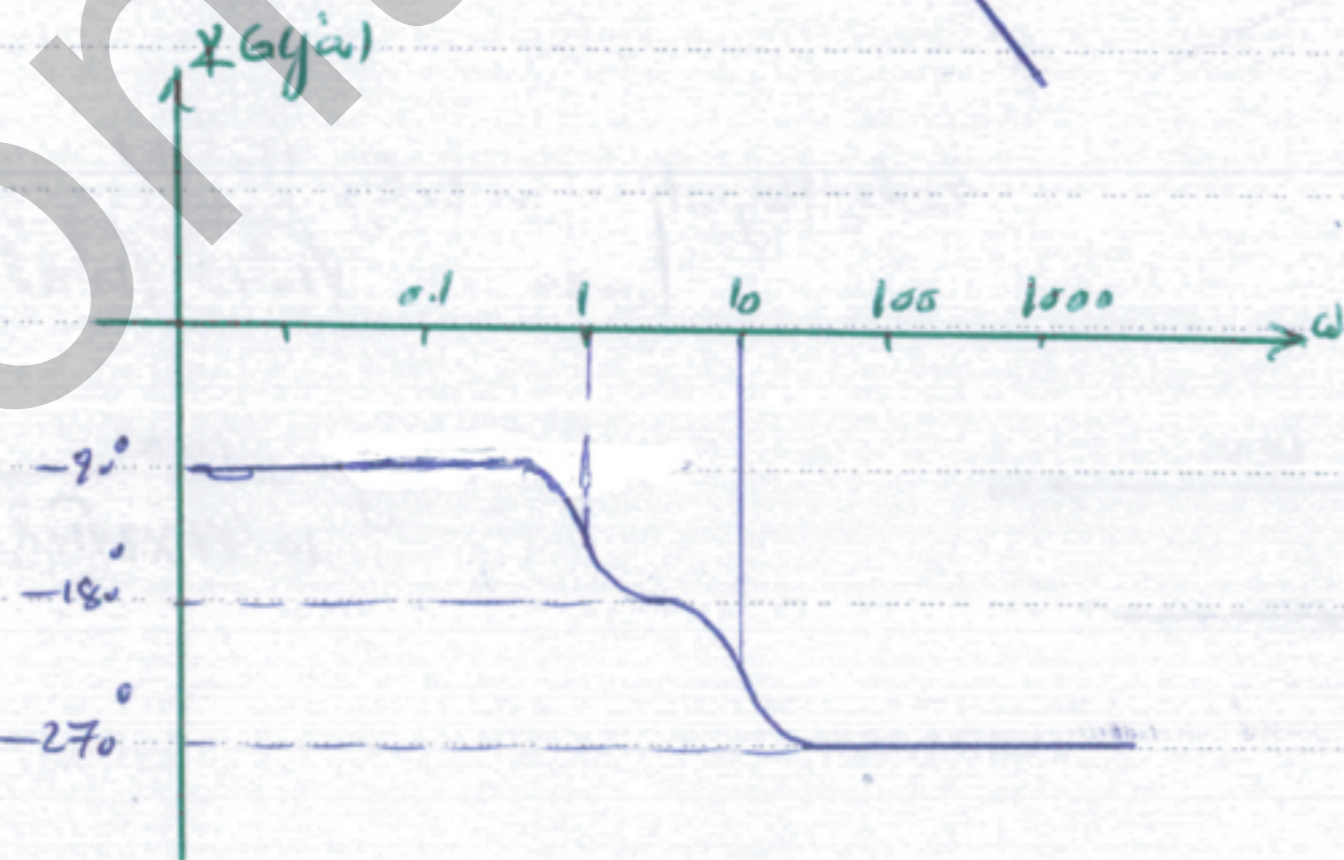
$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+10)}$$

: dia



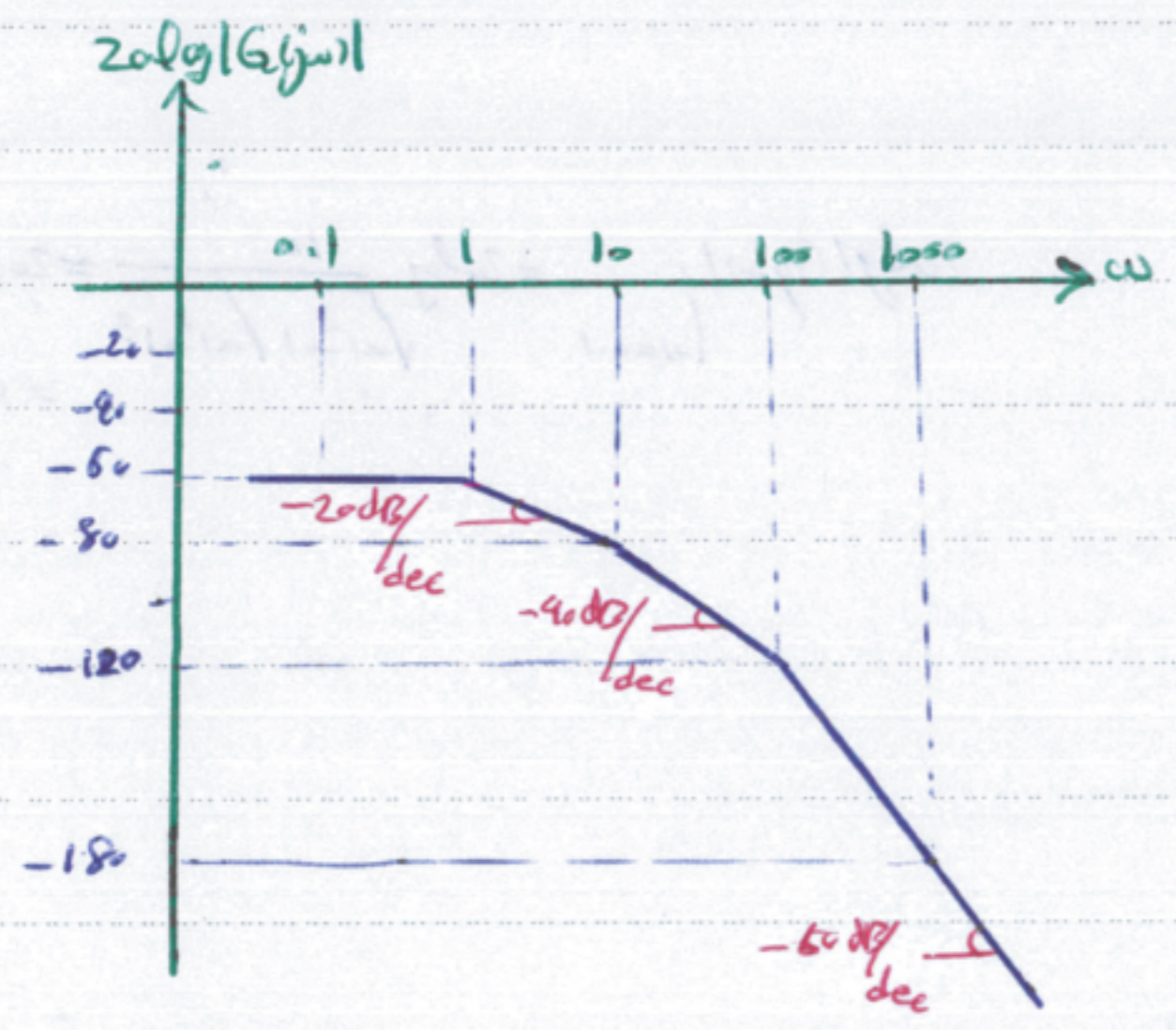
$$20 \log |G(j\omega)|_{\omega=0.1} = 20 \log \frac{10}{0.1 \times \sqrt{0.1^2+1} \sqrt{0.1^2+10^2}}$$

$$\approx 20 \log \frac{10}{0.1 \times 1 \times 10} = 20 \log \frac{1}{0.1} = 20$$

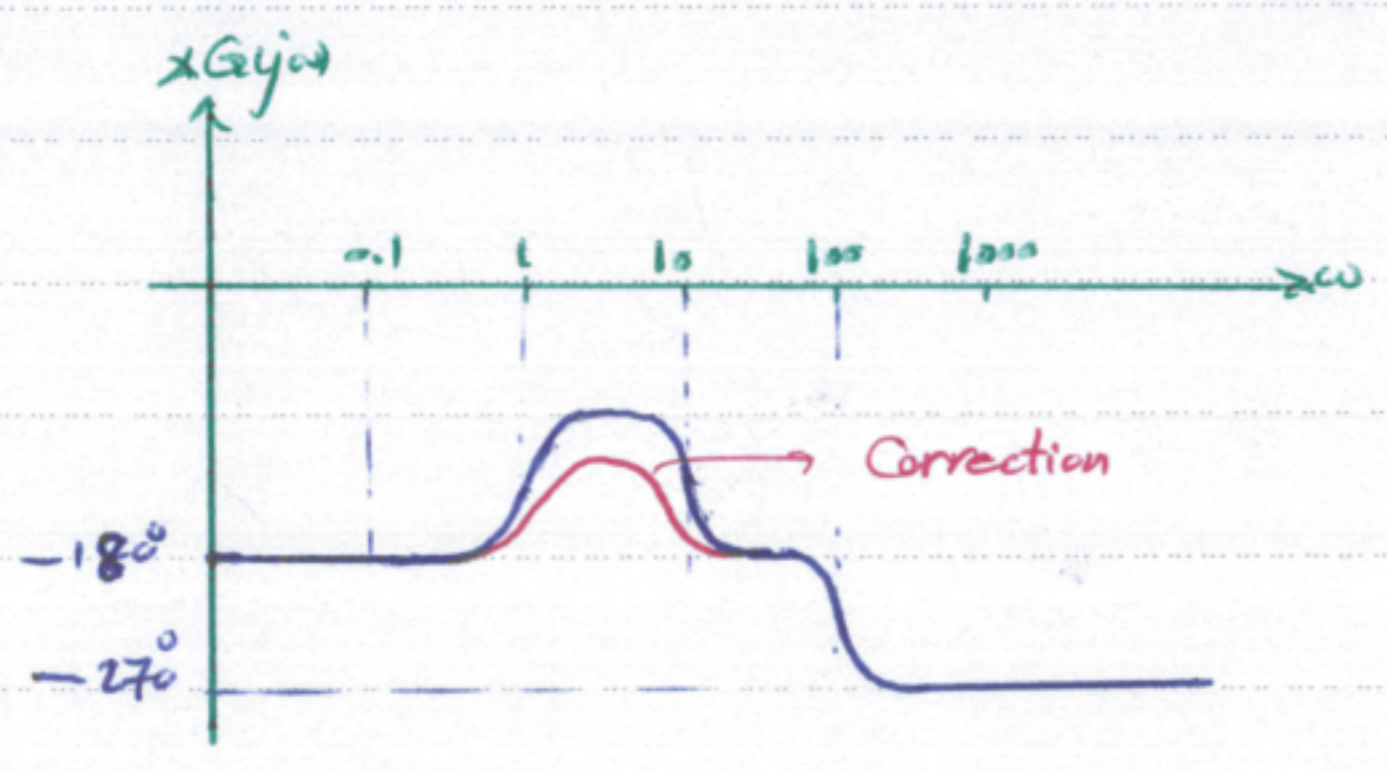


$$G(s) = \frac{1}{(s-1)(s+10)(s+100)}$$

: dB

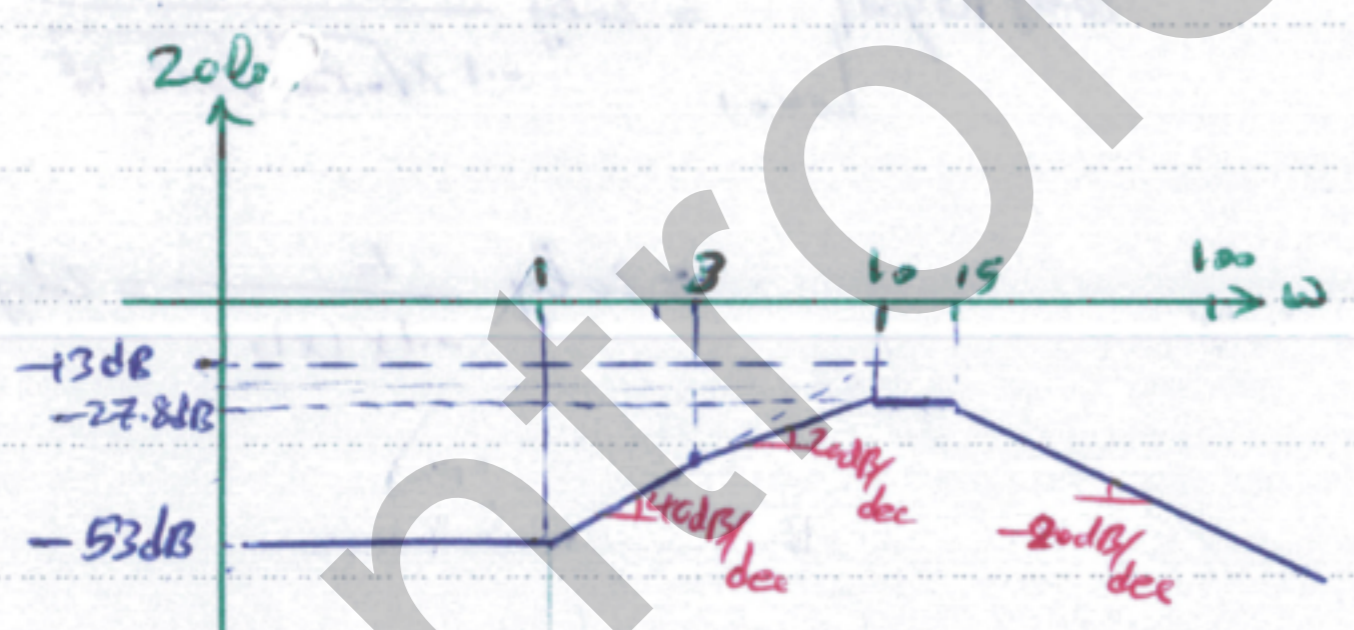


$$\begin{aligned} 20 \log |G(j\omega)| \Big|_{\omega=0.1} &= 20 \log \frac{1}{\sqrt{0.1^2+1} \sqrt{0.1^2+10^2} \sqrt{0.1^2+100^2}} \\ &= 20 \log \frac{1}{1 \times 10 \times 100} = -60 \text{ dB} \end{aligned}$$

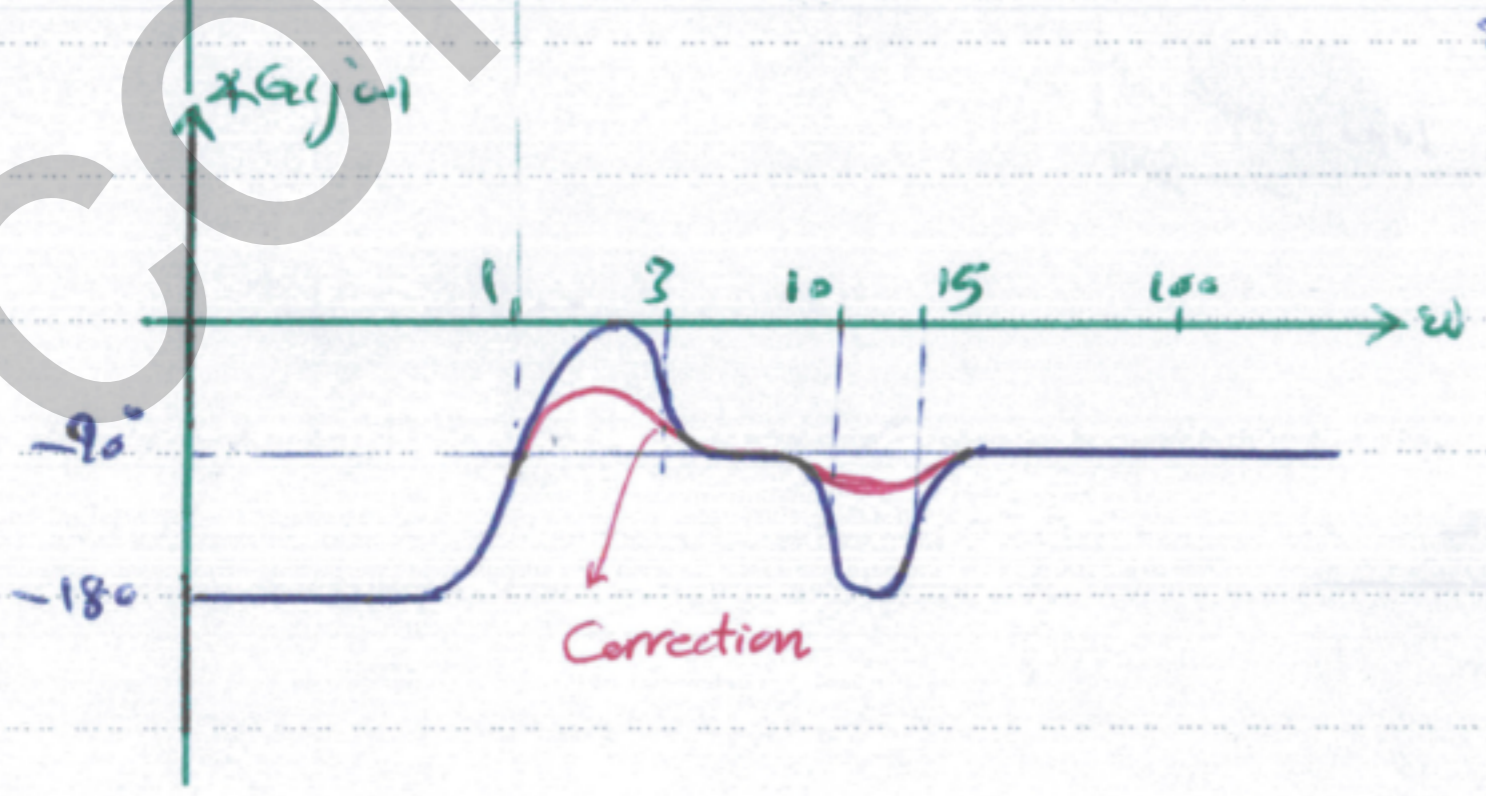


$$G(s) = \frac{(s+1)^2}{(s+3)(s+10)(s+15)}$$

: dB



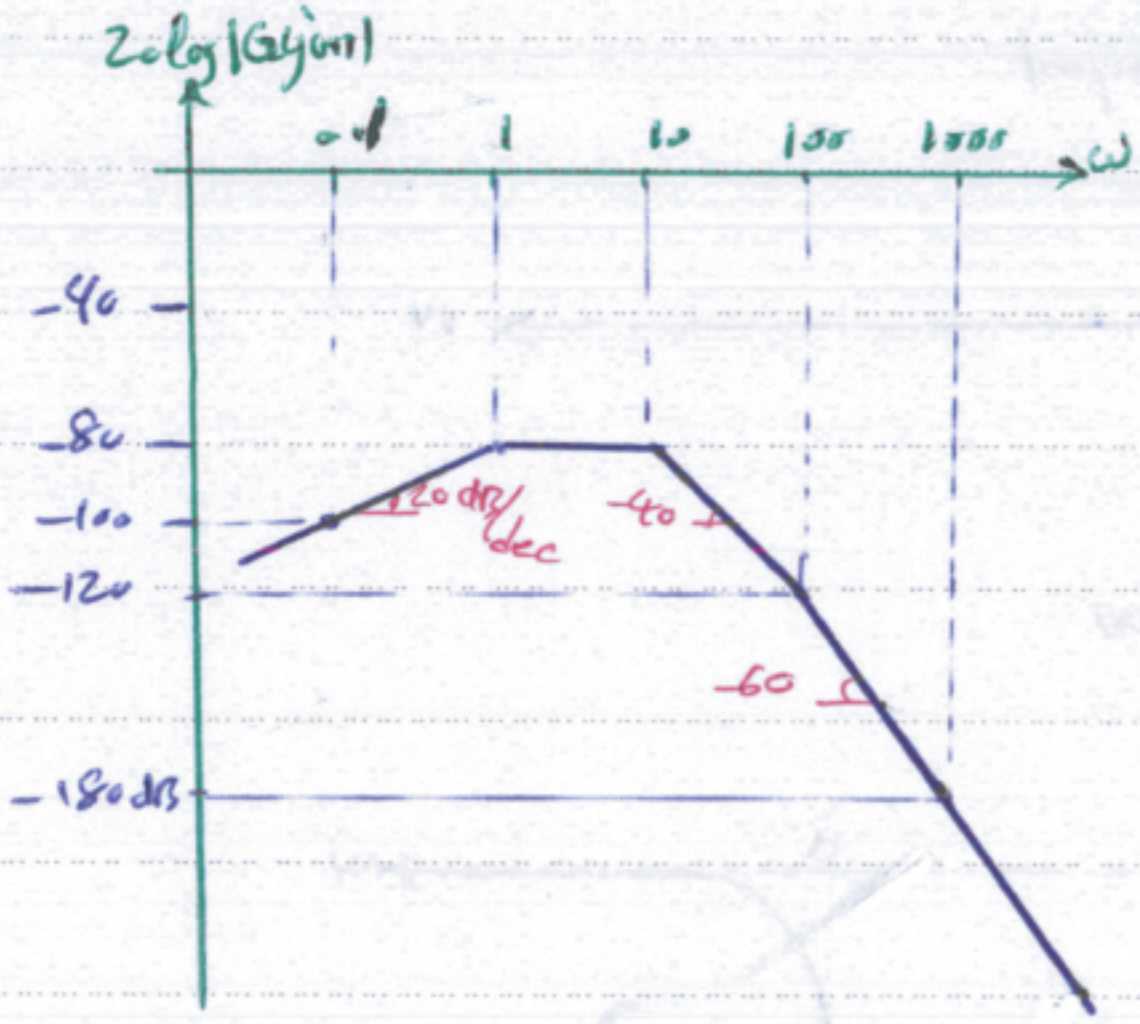
$$\begin{aligned} 20 \log |G(j\omega)| \Big|_{\omega=0.1} &= 20 \log \frac{(0.1^2+1)}{\sqrt{0.1^2+3^2} \sqrt{0.1^2+10^2} \sqrt{0.1^2+15^2}} \\ &= 20 \log \frac{1}{3 \times 10 \times 15} = 20 \log \frac{1}{450} = -53 \text{ dB} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 20 \log |G(j\omega)| \Big|_{\omega=10} &= 20 \log \frac{(10^2+1)}{\sqrt{10^2+3^2} \sqrt{10^2+10^2} \sqrt{10^2+15^2}} \\ &= 20 \log \frac{100}{10.44 \times 10 \times 18.27} = -27.8 \text{ dB} \end{aligned}$$

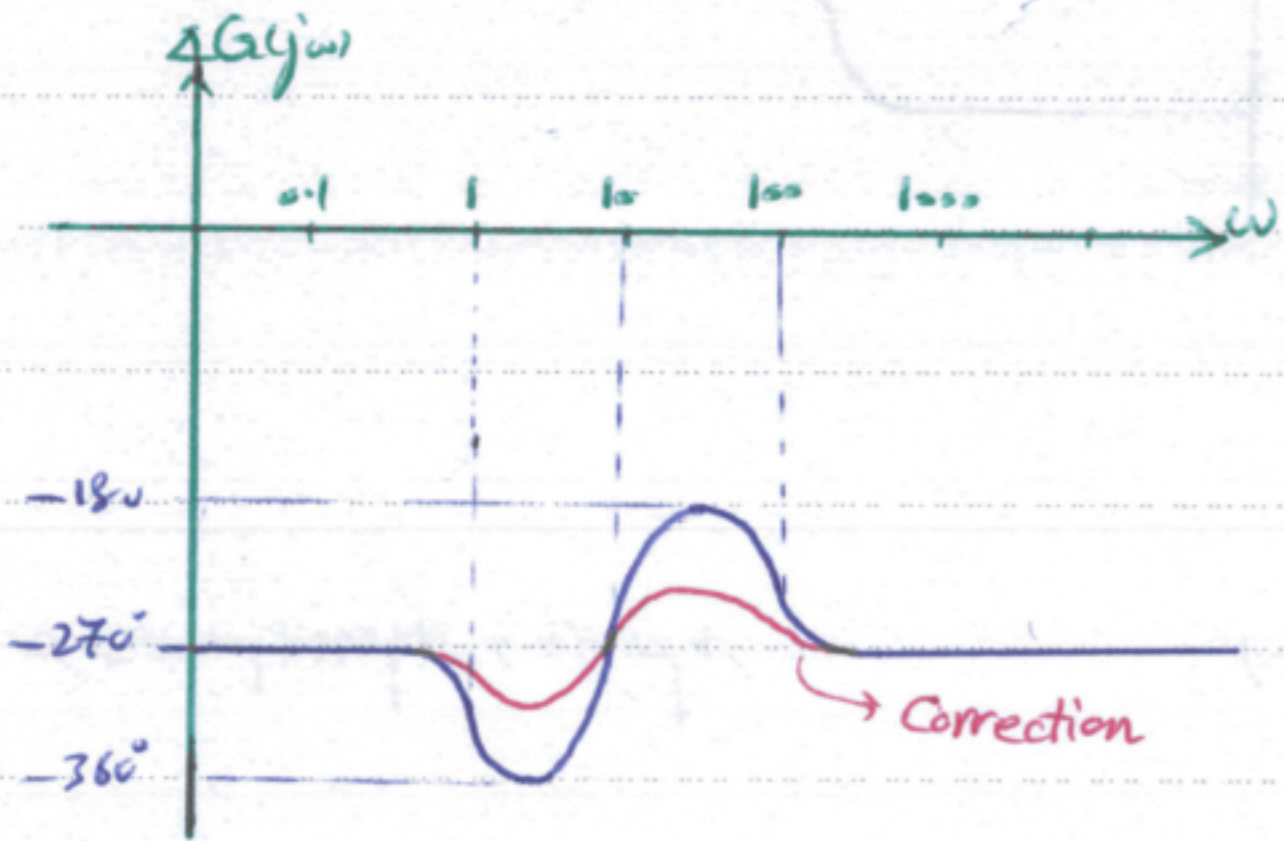
$$G(s) = \frac{s}{(s+1)(s+10)^2(s+100)}$$

: Jus



$$20 \log |G(j\omega)|_{\omega=0.1} = 20 \log \frac{0.1}{\sqrt{0.1^2+1} \cdot (0.1+10)^2 \cdot \sqrt{0.1^2+100^2}}$$

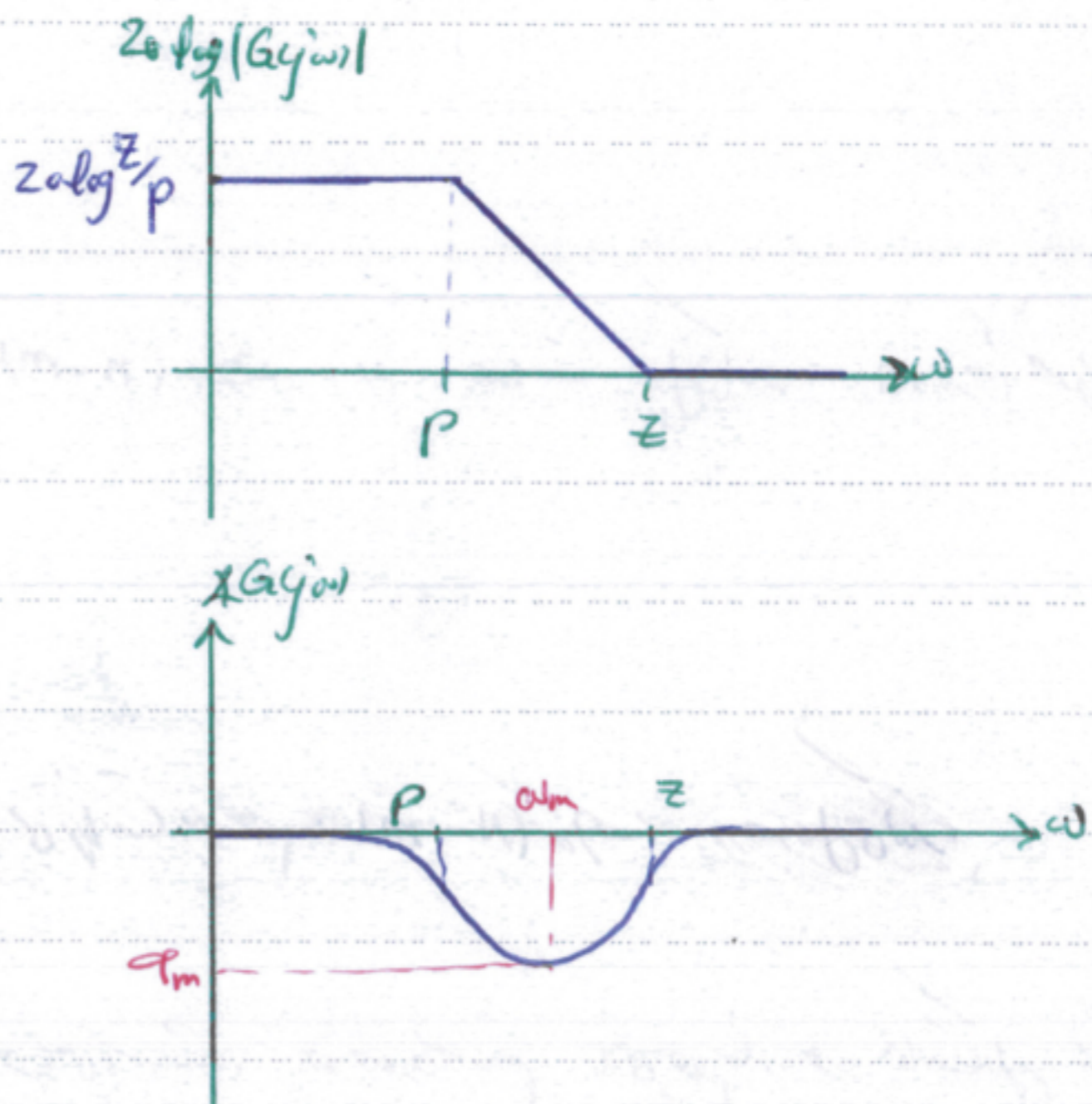
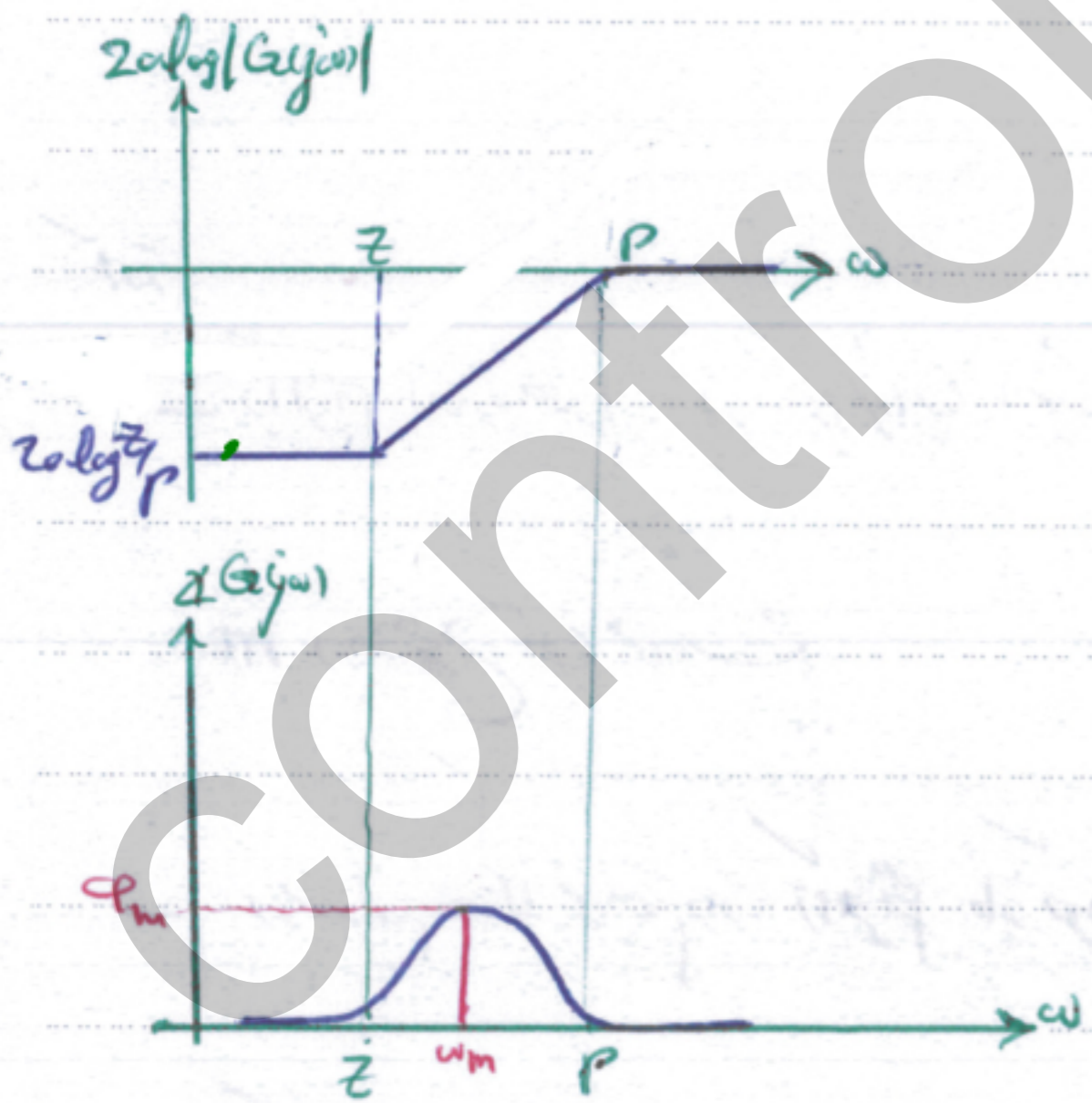
$$\approx 20 \log \frac{0.1}{1 \times 100 \times 100} = -100 \text{ dB}$$



$$G(s) = \frac{s+z}{s+p} \text{ lead}$$

$$G(s) = \frac{s+z}{s+p} \text{ lag}$$

: Jus



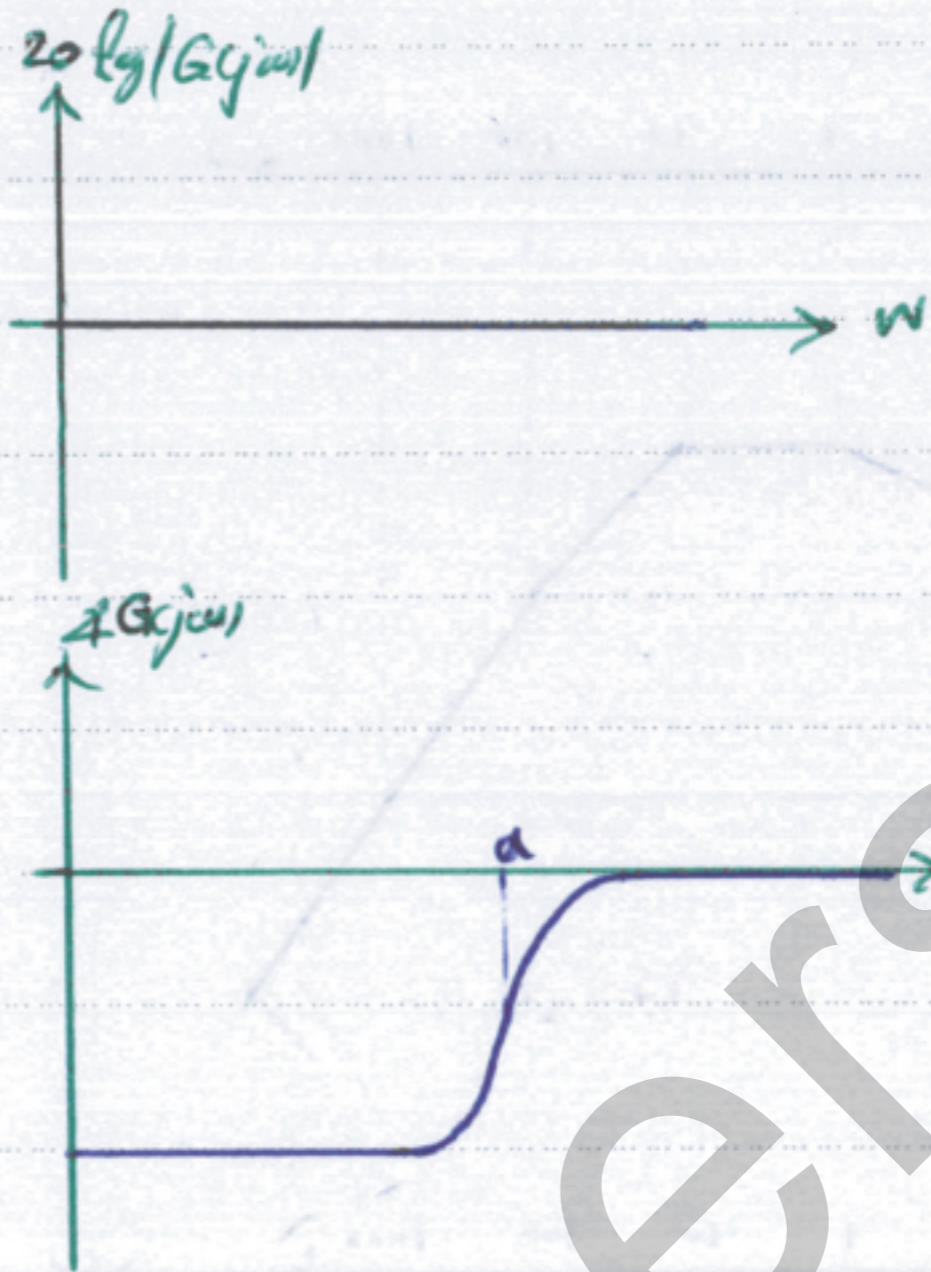
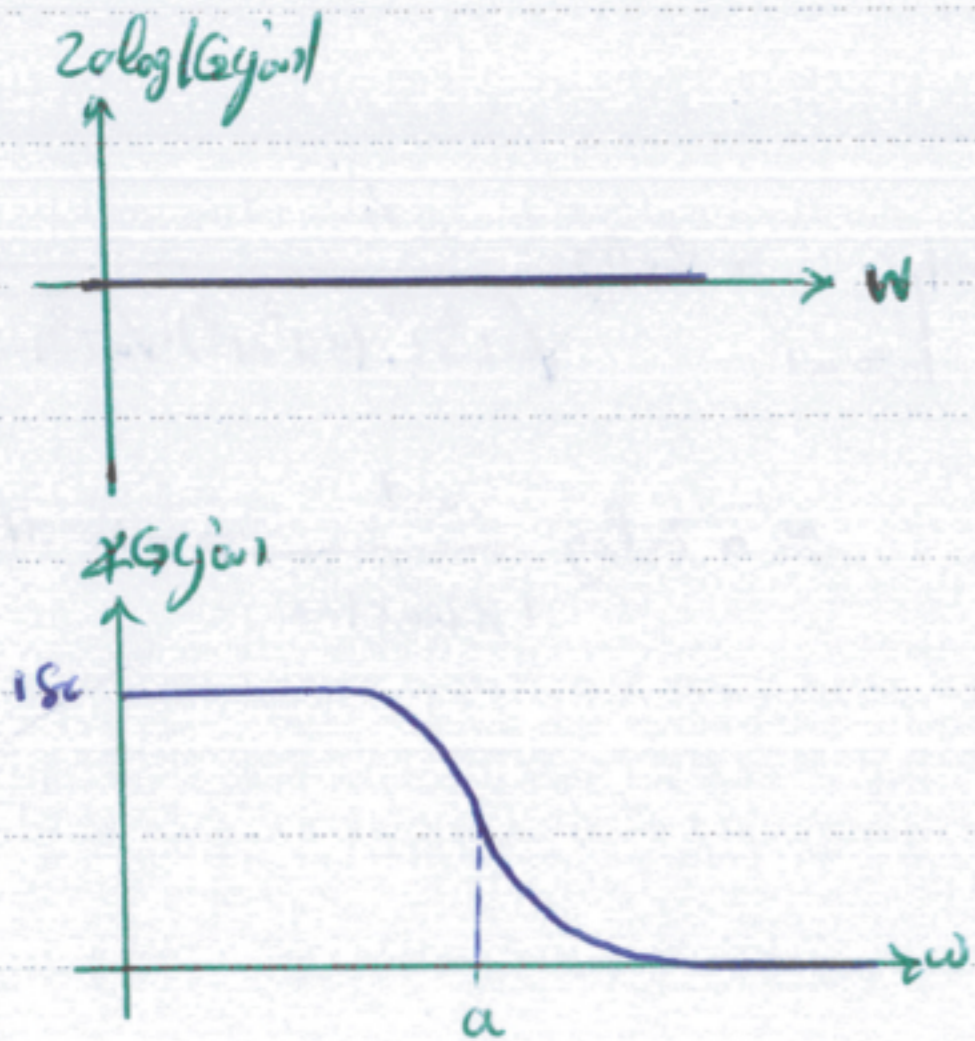
$$\omega_m = \sqrt{zp} \quad \sin \phi_m = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}, \quad \alpha = z/p$$

$$\omega_m = \sqrt{zp} \quad \sin \phi_m = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}, \quad \alpha = p/z$$

$$G(s) = \frac{s-a}{s+a}$$

$$G(s) = \frac{s+a}{s-a}$$

محل:



(Minimum Phase)

تکون سیستم می نویسم فاز و نامی نیم فاز

سیستمی که قطب و رایا صدوی سمت راست محور دز داشته باشد سیستم می نیم فاز است.

سیستمی که قطب و رایا صدوی سمت راست محور دز داشته باشد سیستم نامی نیم فاز است.

نکته:

در المان اندازه همواره در بی نهایت باید $20(n-m)$ $\frac{dB}{decade}$ به 0 میل کند. m درجه صورت n درجه صورت n درجه خروج آن است.

n درجه خروج آن است.

در سیستم ها که می نیم فاز اگر ضریب نزدیکترین علامه صورت و خروج هم علامت باشد در بی نهایت فاز سیستم به $-90(n-m)$ میل کند.

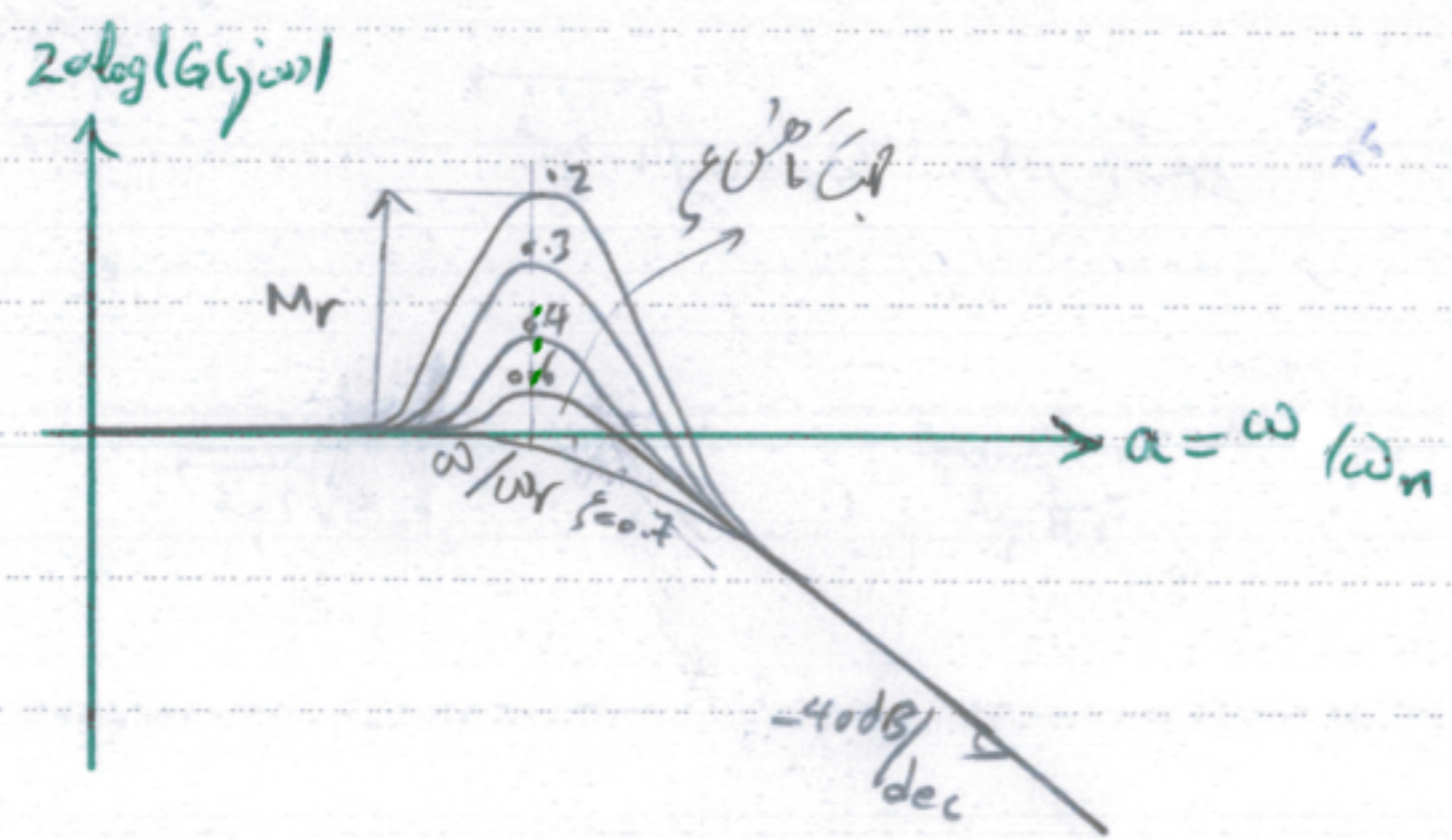
میل کند. m درجه صورت n درجه خروج آن است. در صورتی که نامی نیم فاز در حالت کلی نمی توان چنین گفت.

تک قطب و صفر مزدوج محکمه:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad - \zeta < 1$$

تک قطب مزدوج محکمه:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n j\omega + \omega_n^2} = \frac{1}{(j\frac{\omega}{\omega_n})^2 + 2\zeta j\frac{\omega}{\omega_n} + 1} \Rightarrow G(j\frac{\omega}{\omega_n}) = G(ja) = \frac{1}{a^2 + 2\zeta aj + 1}$$



برای $\zeta < 1$ یعنی زمانی (در نمودار اندازه) فرکانس محکمه M_r در فرکانس ω_r خواهد داشت. فرکانس ω_r را فرکانس کشیدگی می‌گویند.

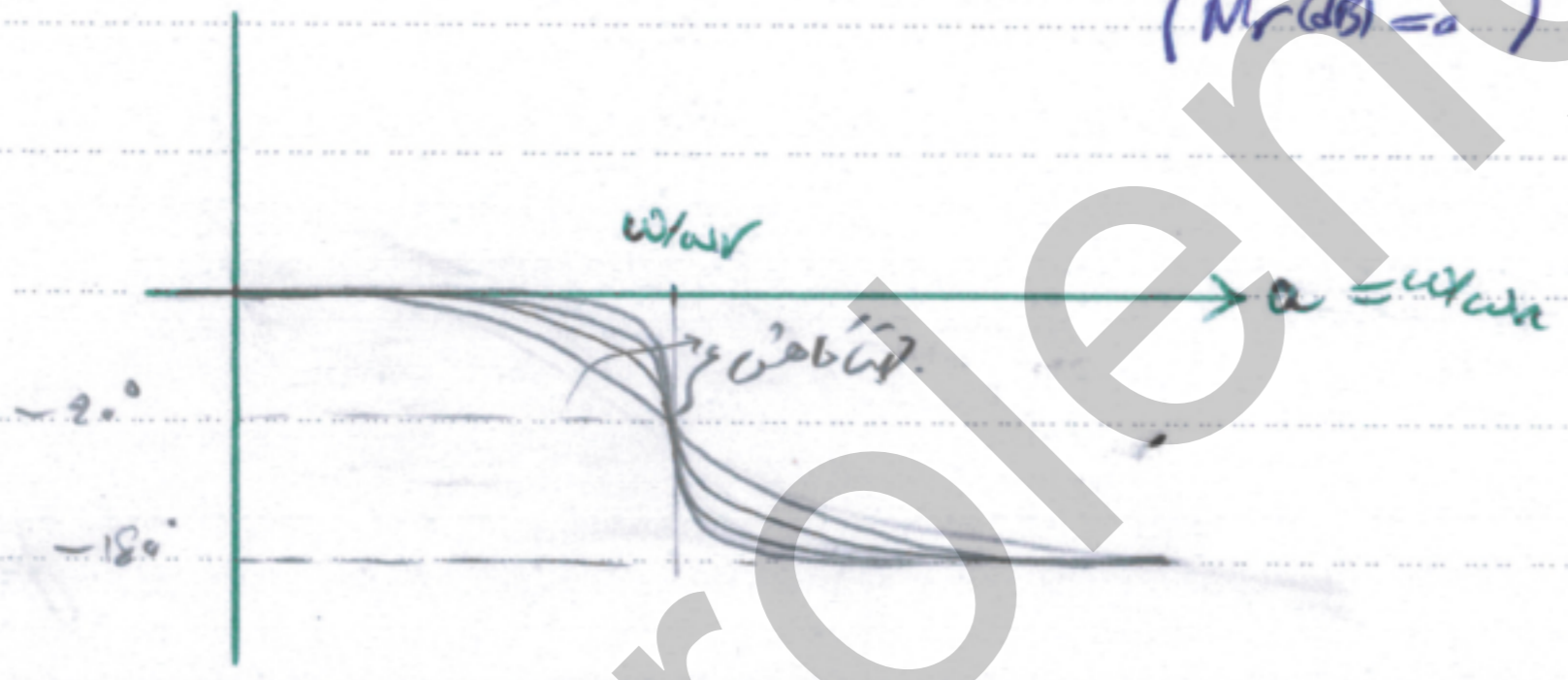
فرکانس کشیدگی: $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$M_r (dB) = 20 \log \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$(M_r (dB) = 0) \Rightarrow M_r = 1$

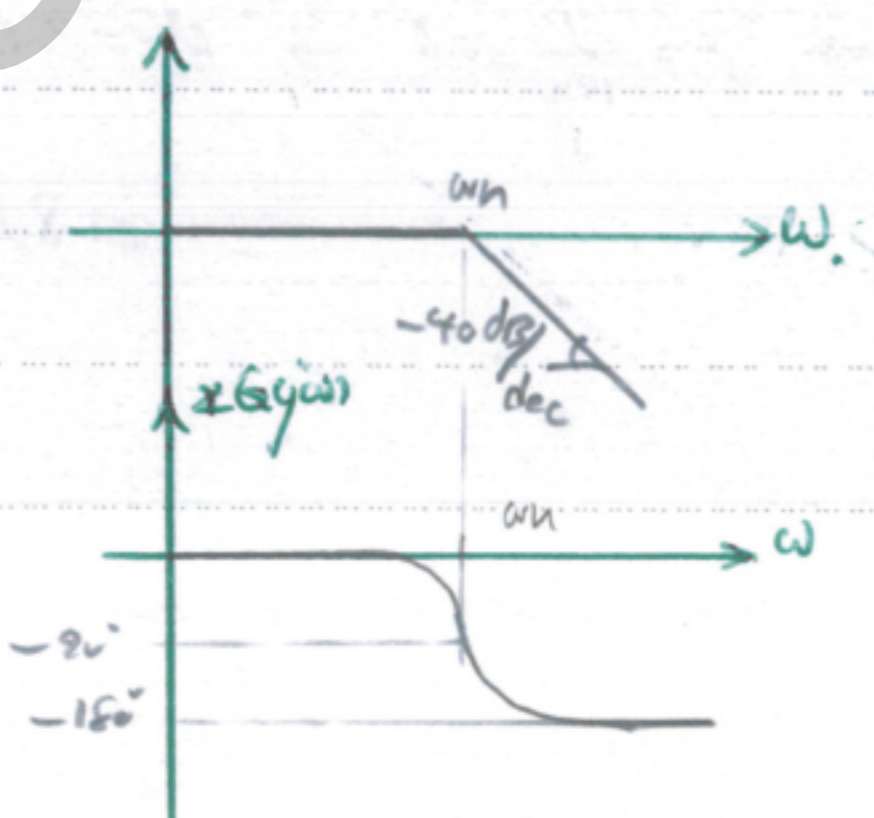
برای $\zeta > 1$ یعنی فرکانس ناپدید می‌شود



اگر تابع تبدیل حاصل درجه دوم غیر قابل تجزیه باشد، پس رسم آن به دست می‌آید. معمولاً $\omega_r = \omega_n$ می‌گیریم و از M_r می‌توانیم

محاسبه کنیم. یعنی در نمودار اندازه، فرکانس محکمه حاصل درجه دوم برابر ω_n است و شیب عمود فرکانس شیب است -40 dB/dec و صاف می‌شود.

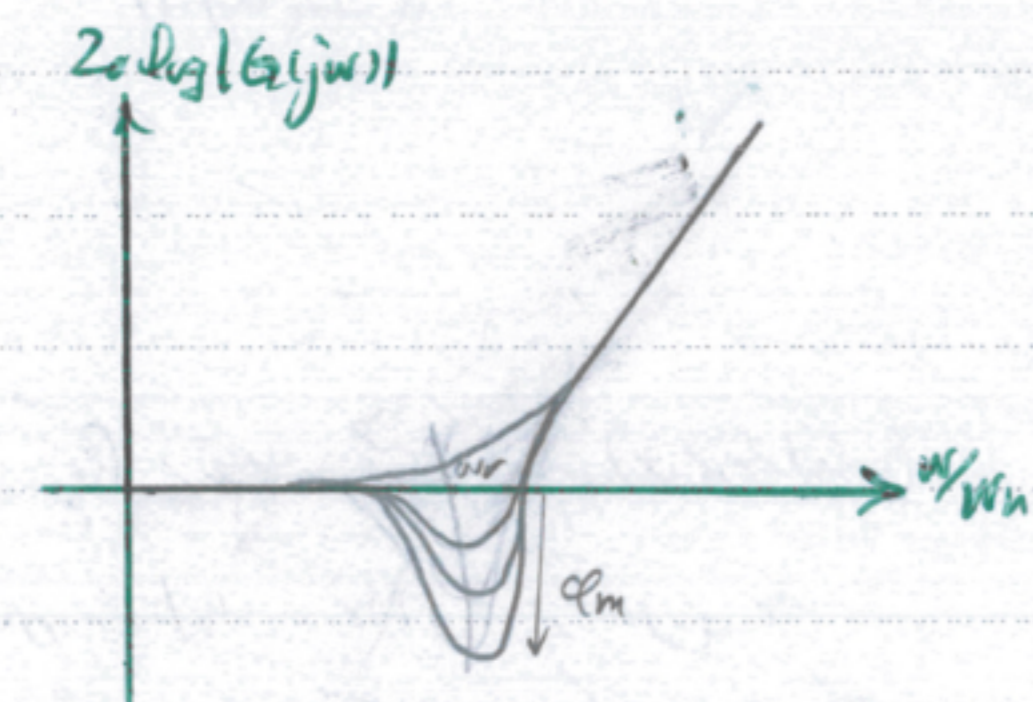
تقریب:



ب) مندرجہ عملہ:

$$G(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \rightarrow G(j\omega/\omega_n) = (j\omega/\omega_n)^2 + 2\zeta j\omega/\omega_n + 1$$

$$= -(\omega/\omega_n)^2 + 2\zeta j\omega/\omega_n + 1$$

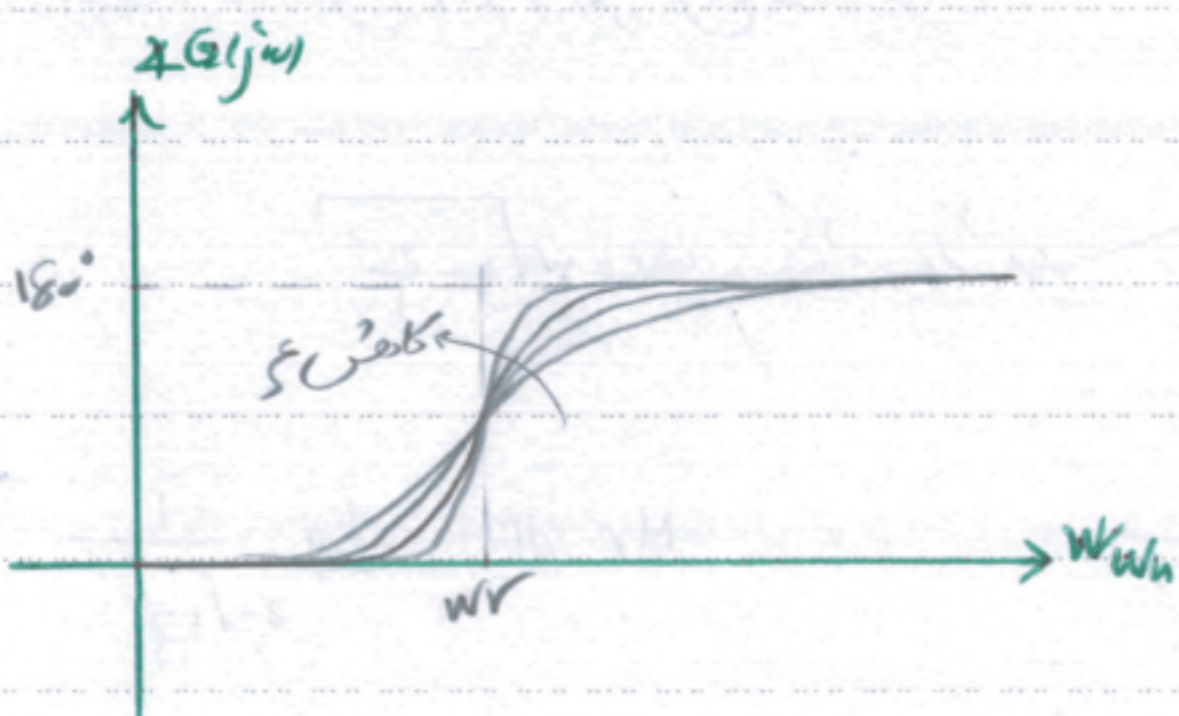


نوٹ: $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$

$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$

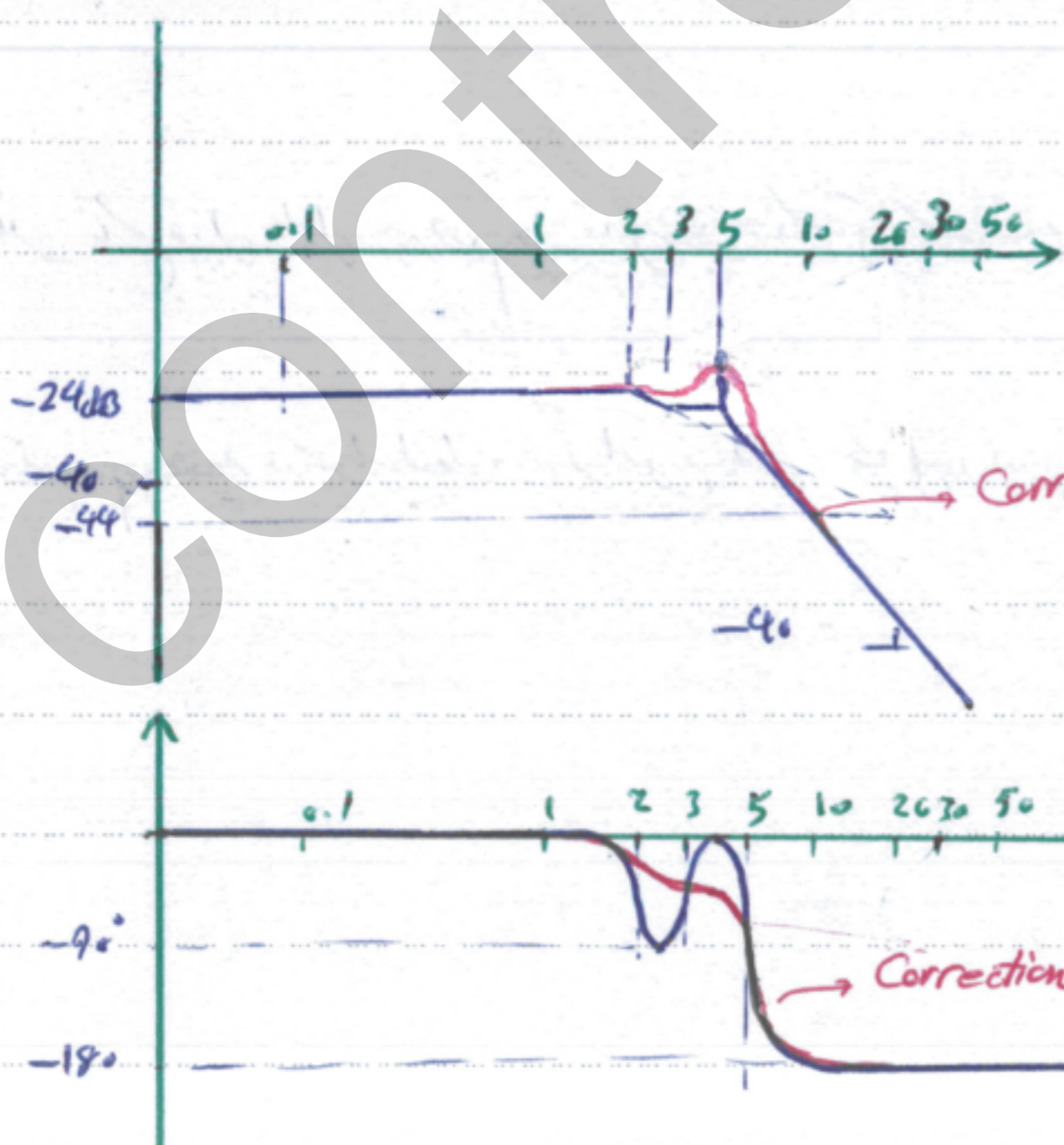
$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$M_r (dB) = 20 \log \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$



$$G(s) = \frac{s+3}{(s+2)(s^2+2s+25)}$$

: جو



$$20 \log \frac{3}{2 \times 25} = 20 \log \frac{3}{50} = -24 \text{ dB}$$

$$\frac{1}{s^2+2s+25} \rightarrow \omega_n = \sqrt{25} = 5 \quad 2\zeta\omega_n = 2$$

$$\Rightarrow \zeta = \frac{1}{\omega_n} = 0.2 \rightarrow M_r = 20 \log \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = 8 \text{ dB}$$

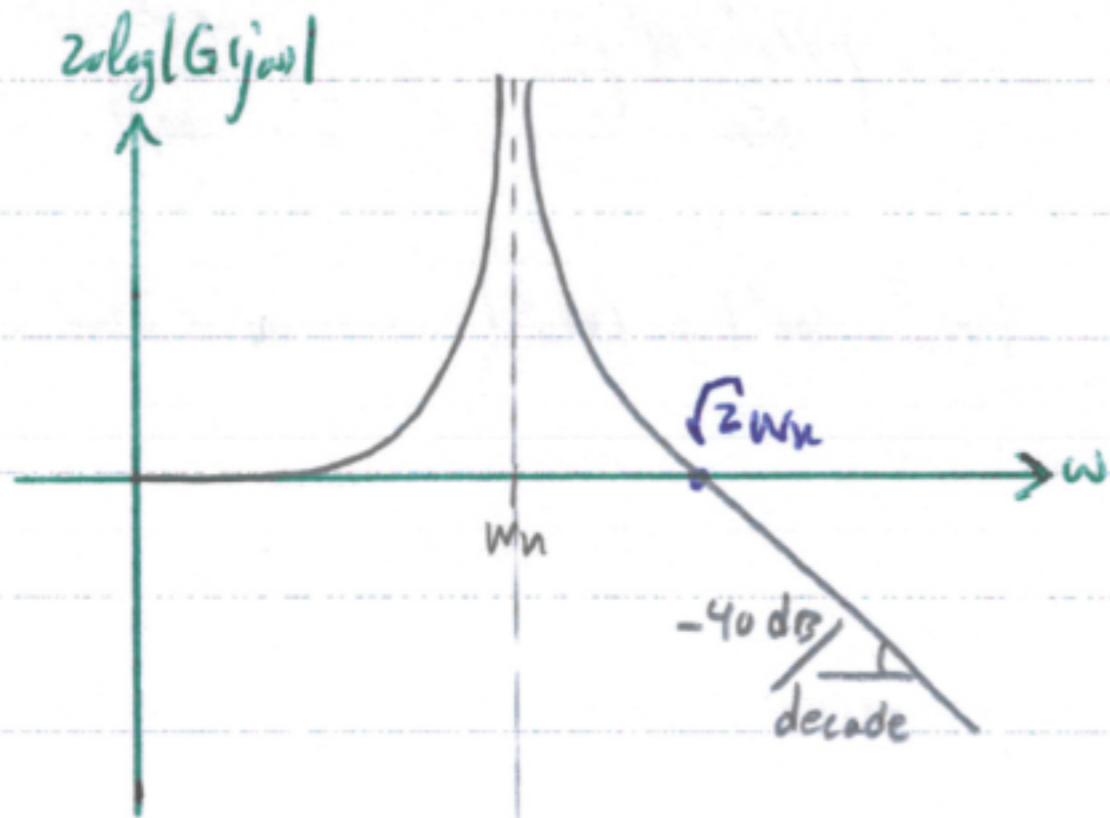
cc قطب اولی حدود لاج:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}$$

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + \omega_n^2}$$

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log \left| \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2} \right|$$

در فرکانس $\omega = \omega_n$ دامنه بسیار زیاد می شود به این فرکانس ω_n

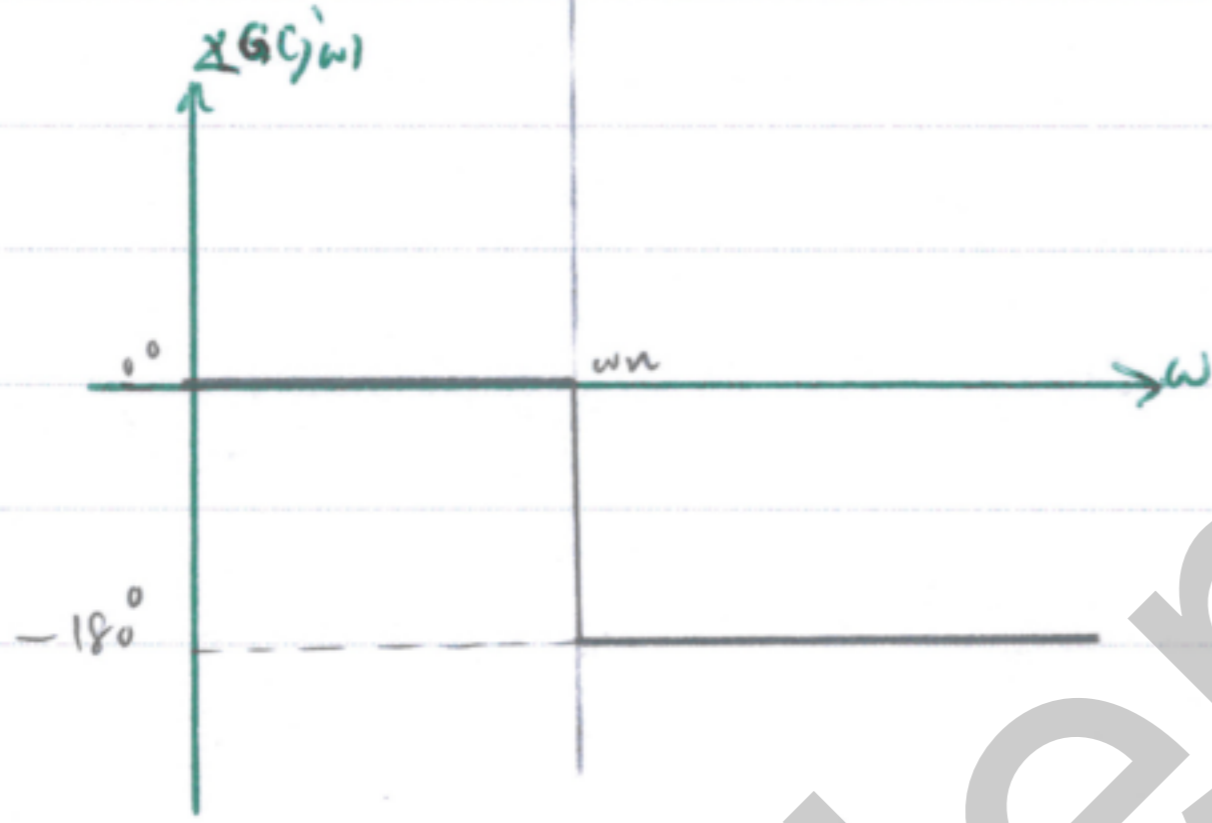


در این فرکانس بر غیر از فرکانس ها کمترین دامنه را دارد و فرکانس ω_n را قطع می کند. برای یافتن این فرکانس:

$$20 \log \left| \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2} \right| = 0 \rightarrow \left| \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2} \right| = 1$$

$$\rightarrow |\omega_n^2| = |\omega_n^2 - \omega^2| \rightarrow \omega_n^2 = \omega^2 - \omega_n^2$$

$$\rightarrow \omega^2 = 2\omega_n^2 \rightarrow \omega = \sqrt{2}\omega_n$$



$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

if $\omega < \omega_n^-$ $\rightarrow \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2} > 0 \rightarrow \angle G(j\omega) = 0^\circ$

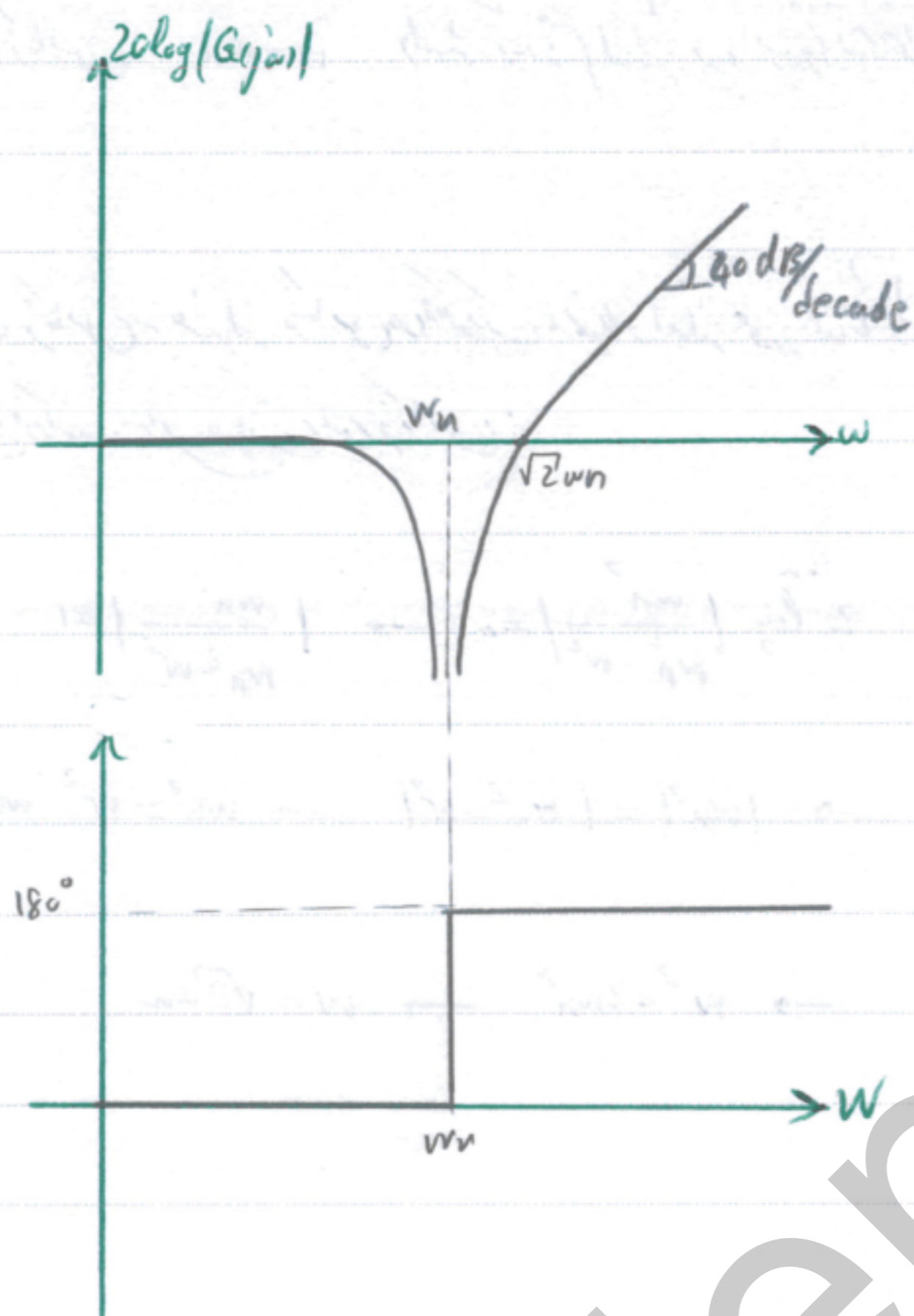
if $\omega > \omega_n^+$ $\rightarrow \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2} < 0 \rightarrow \angle G(j\omega) = -180^\circ$

د صفر قطب اور کھمبہ

$$G(s) = \frac{s^2 + \omega_n^2}{\omega_n^2}$$

$$G(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 + \omega_n^2}{\omega_n^2} = \frac{\omega_n^2 - \omega^2}{\omega_n^2}$$

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log \left| \frac{\omega_n^2 - \omega^2}{\omega_n^2} \right|$$



$$20 \log \left| \frac{\omega_n^2 - \omega^2}{\omega_n^2} \right| = 0 \rightarrow \left| \frac{\omega_n^2 - \omega^2}{\omega_n^2} \right| = 1$$

$$|\omega_n^2 - \omega^2| = |\omega_n^2| \rightarrow \omega^2 = 2\omega_n^2 \rightarrow \omega = \sqrt{2}\omega_n$$

$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{\omega_n^2 - \omega^2}{\omega_n^2} \quad \text{if } \omega < \omega_n^- \rightarrow \frac{\omega_n^2 - \omega^2}{\omega_n^2} > 0 \rightarrow \angle G(j\omega) = 0$$

$$\text{if } \omega > \omega_n^+ \rightarrow \frac{\omega_n^2 - \omega^2}{\omega_n^2} < 0 \rightarrow \angle G(j\omega) = +180$$

هذه المناسبات

$$G(s) = e^{-Ts}$$

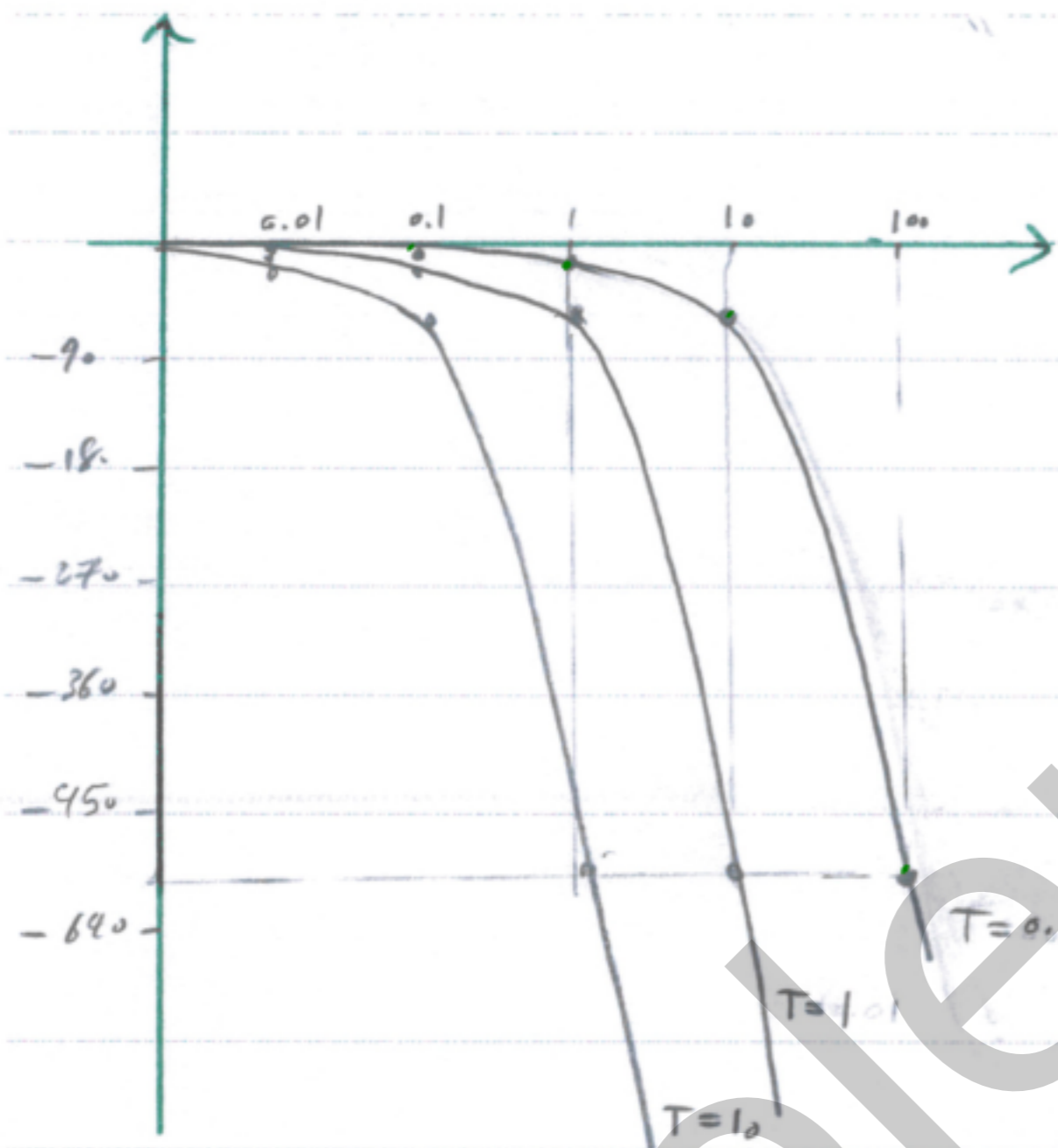
$$G(j\omega) = e^{-Tj\omega}$$

$$|G(j\omega)| = |e^{-Tj\omega}| = 1$$

→ $20 \log |G(j\omega)| = 0$ → ثابتة
مقدارها

$$\angle G(j\omega) = -T\omega$$

if $T = 0.1$ → $\angle G(j\omega) = -0.1\omega$



ω	0.01	0.1	1	10	100
$\angle G(j\omega)$	-0.0573°	-0.573°	-5.73°	-57.3°	-573°

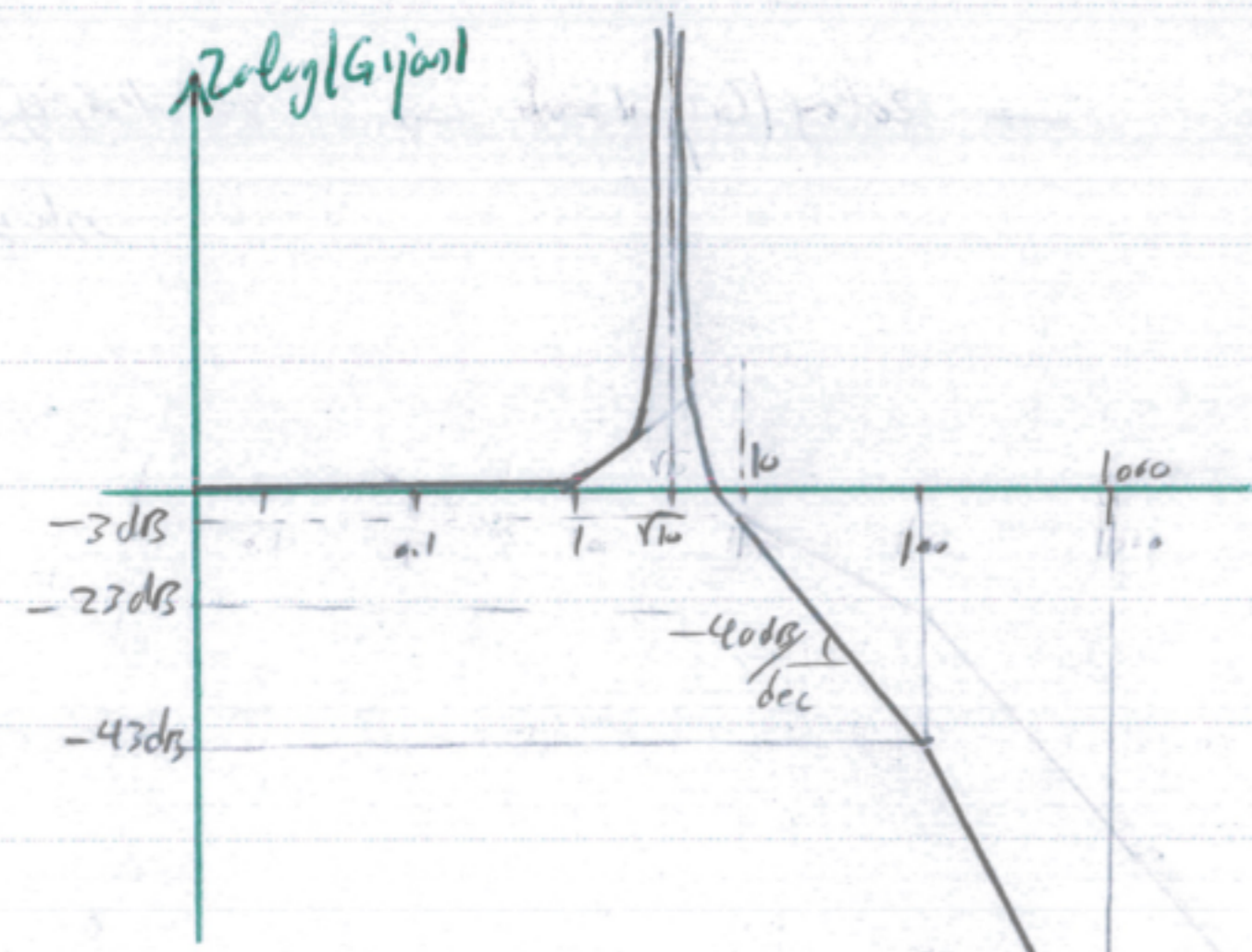
if $T = 1$ → $\angle G(j\omega) = -\omega$

ω	0.01	0.1	1	10	100
$\angle G(j\omega)$	-0.57	-5.73	-57	-570	-5700

if $T = 10$ → $\angle G(j\omega) = -10\omega$

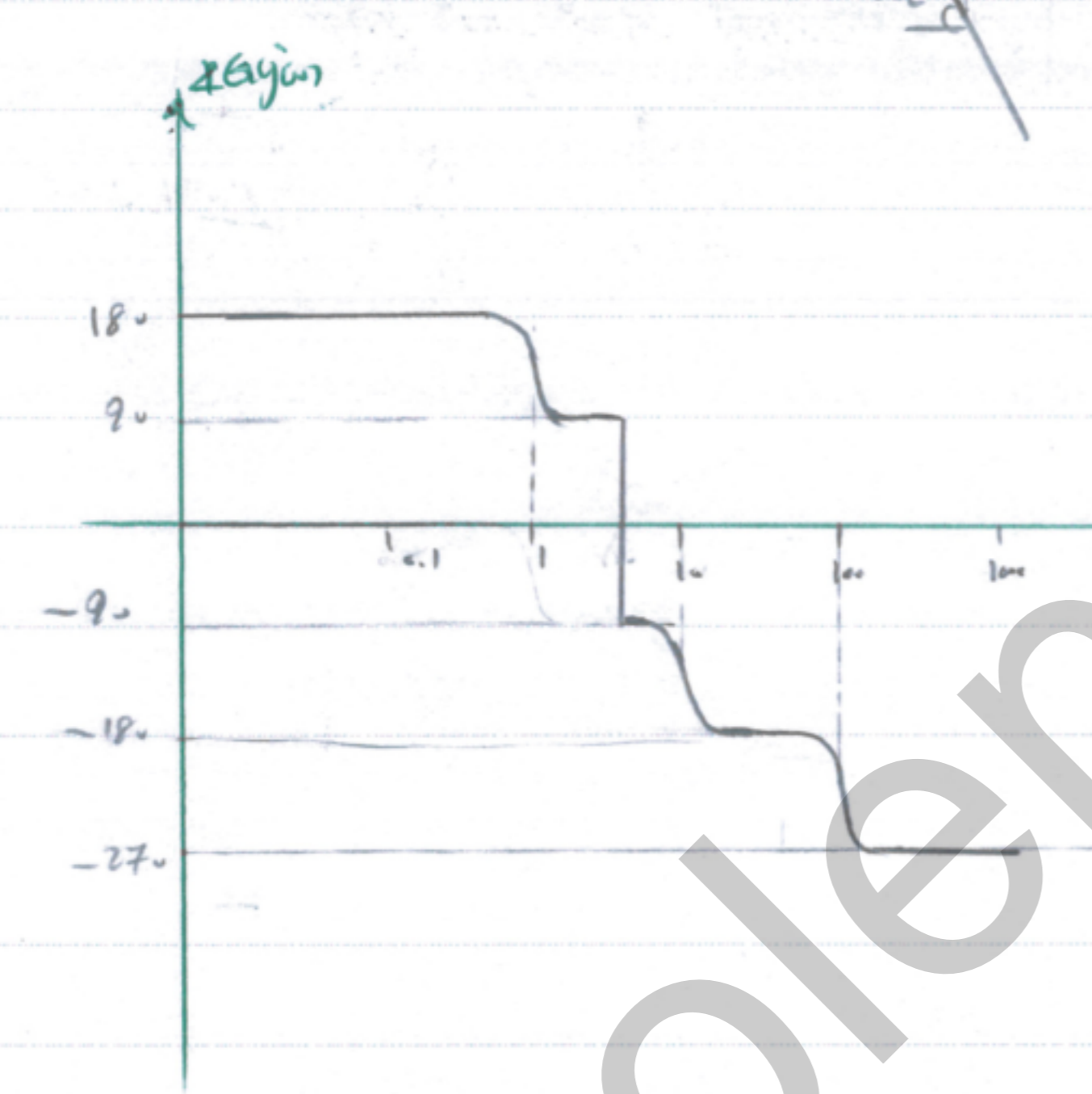
ω	0.01	0.1	1	10	100
$\angle G(j\omega)$	5.73	-57.3	-570	-5700	-57000

$$G(s) = \frac{(s-1) \times 10^4}{(s+1)(s^2+10)(s+100)}$$



$$20 \log |G(j\omega)| \Big|_{\omega=10} \approx 20 \log \frac{10 \times 10^4}{10 \sqrt{2} \times 100 \times 100}$$

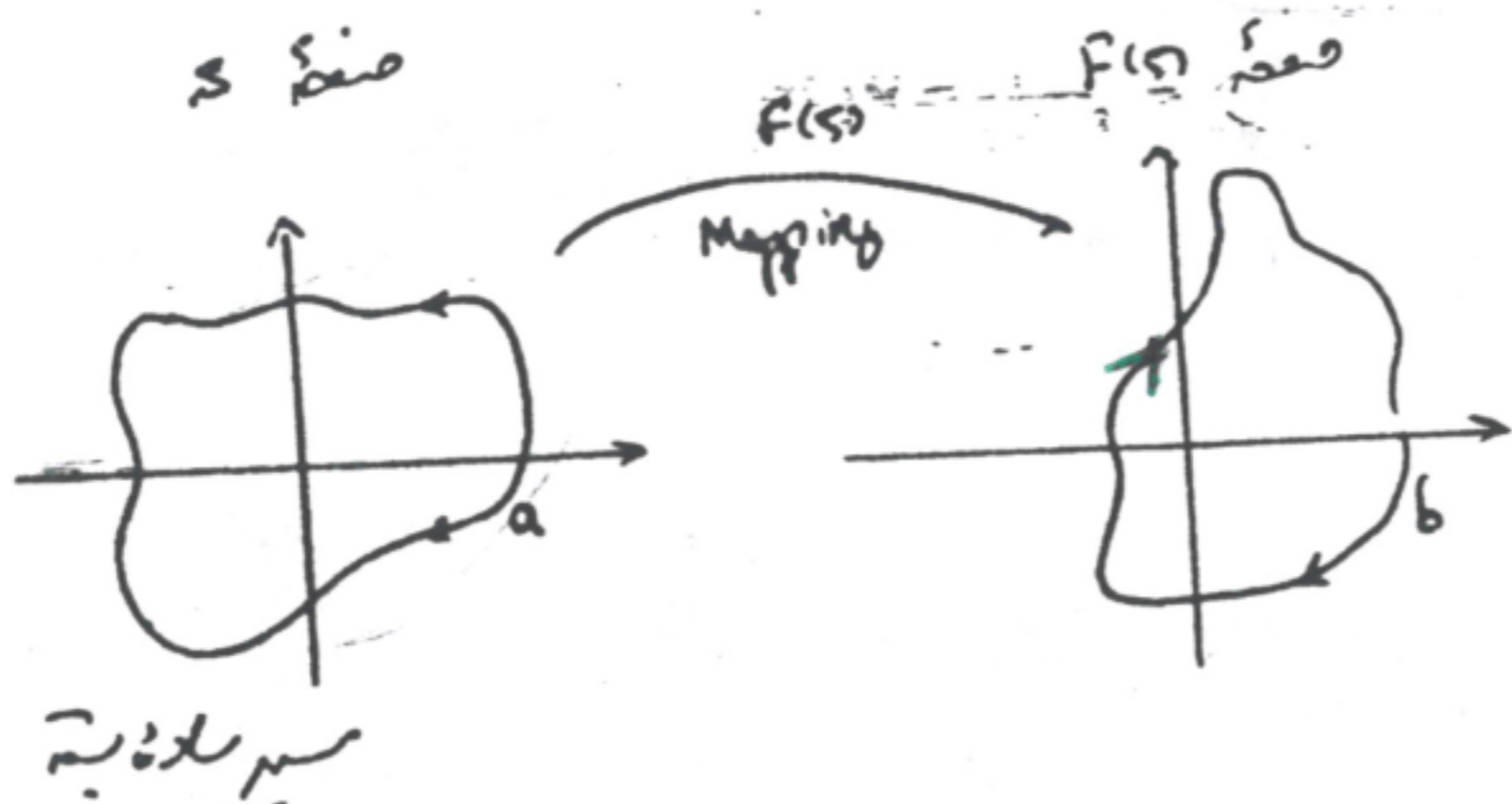
$$= 20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} = -20 \log \sqrt{2} = -3 \text{ dB}$$



Control Engineers.in

در اینجا قطب با ما یونیت:

خطای پایداری فریبند:

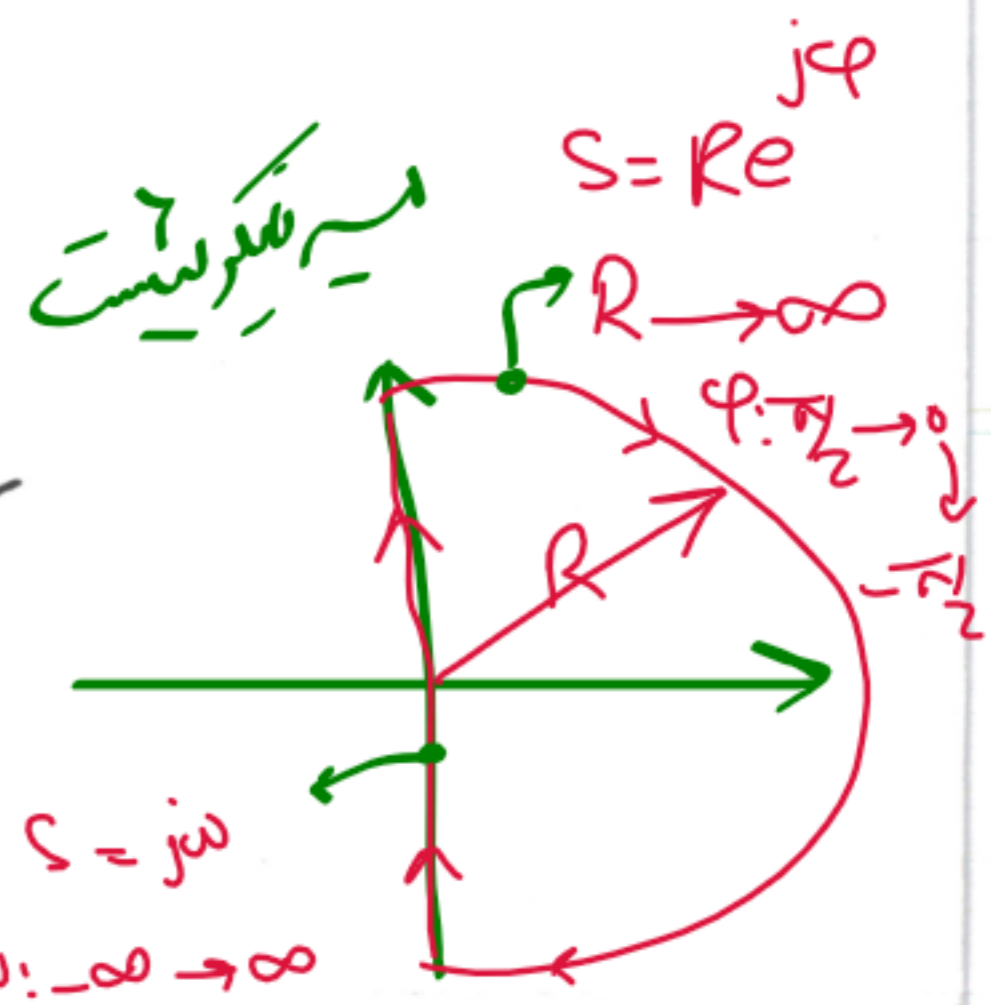
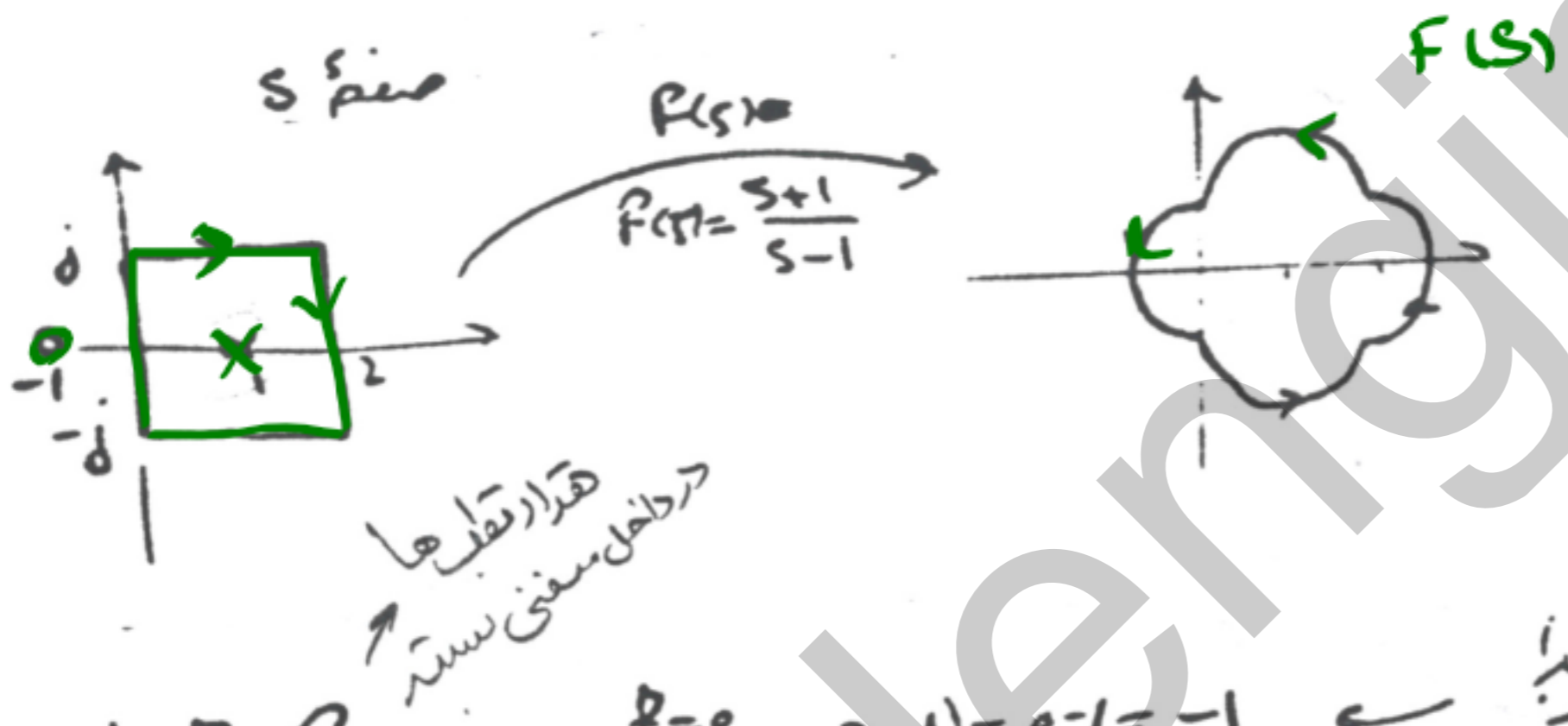


توجه داشته باشید

اگر P قطب از $F(s)$ در Z معرزه از $F(s)$ در مسیر بسته a باشد، هیچکدام از قطبهای $F(s)$ در مسیر بسته a تصویر a تحت نقطه $F(s)$ باشد، در نتیجه تعداد دانههای b حول مبدأ معرزه $F(s)$ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت برابر است با:

$$N = Z - P$$

تعداد:



$N = Z - P$
تعداد دور در مدار ساعتگرد حول مبدأ
تعداد صفرهای $F(s)$ در داخل مسطح بسته

$$Z=0, P=1 \Rightarrow N=0-1=-1$$

یک دور حول مبدأ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت

حرف بر این پایداری از یک عددی با یونیت، مسیر با یونیت را عبور می‌دهیم. در هر دور یک بار در داخل مسطح بسته

$$F(s) = 1 + G(s)H(s)$$



مسیر با یونیت تصویر $F(s)$ در مسطح بسته a باشد، هیچکدام از قطبهای $F(s)$ در مسیر بسته a تصویر a تحت نقطه $F(s)$ باشد، در نتیجه تعداد دانههای b حول مبدأ معرزه $F(s)$ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت برابر است با:

$$GH = \frac{a(s)}{b(s)}$$

$$F(s) = 1 + GH = 1 + \frac{a(s)}{b(s)} = 0$$

$$= \frac{b(s) + a(s)}{b(s)} = 0$$

$$F(s) = 1 + G(s)H(s)$$

در هر حال $F(s)$ هم قطبهای $G(s)H(s)$ هم صفرهای $F(s)$ هم صفرهای $G(s)H(s)$ است. $a(s) + b(s) = 0$

$$a(s) + b(s) = 0$$

$F(s) = 1 + G(s)H(s)$

$G(s)H(s) = F(s) - 1$

$N = Z - P$

تعداد زدها منهای تعداد قطبها
 -1 در $G(s)H(s)$



تعداد قطبها $N = Z - P$
 تعداد قطبها $F(s)$

N

تعداد زدها منهای تعداد قطبها (مقدار) $N = Z - P$

در جهت ساعتگرد
 وجود قطب در مسیر ناپویست مهم نیست فقط قطب مهم است که اگر قطب در مسیر بود نسیب منفی آن را دور می زند

$Z - P$

تعداد قطبها از حد بیست

تعداد قطبها از حد بیست

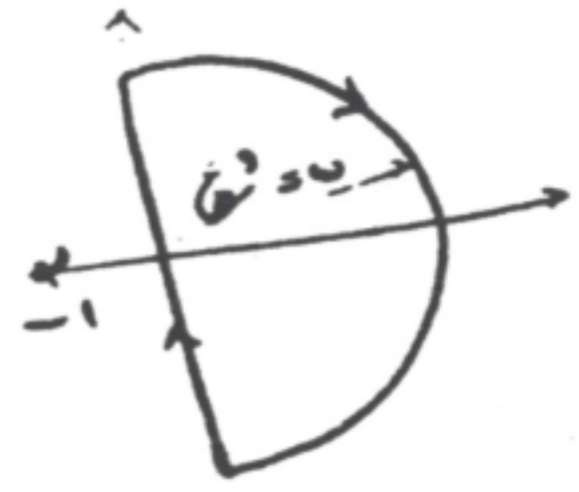
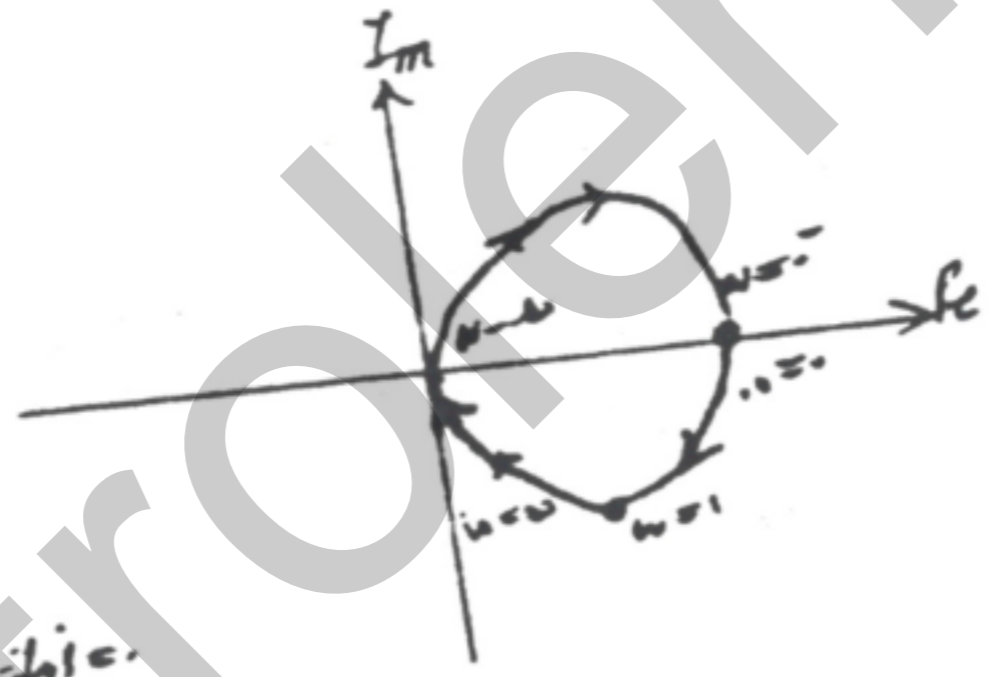
$N = Z - P$
 تعداد قطبهای بیرون از حلقه بسته
 تعداد قطبهای داخل مسیر ناپویست

همه را بگیریم آنرا ناپویست

فقط نسیب

$G(s) = \frac{1}{s+1}$

$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega+1}$



$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow G(j\omega) = 1$

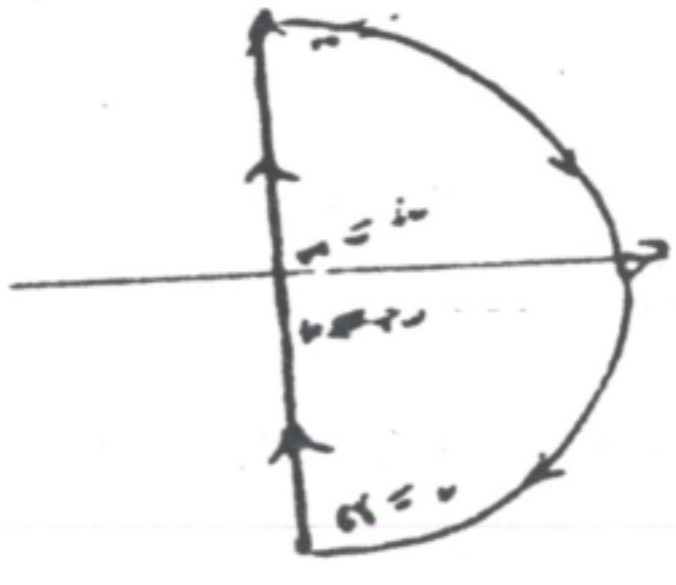
$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$

$\omega = 1 \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{j+1} = \frac{1-j}{2}$

$G(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$

$G(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$

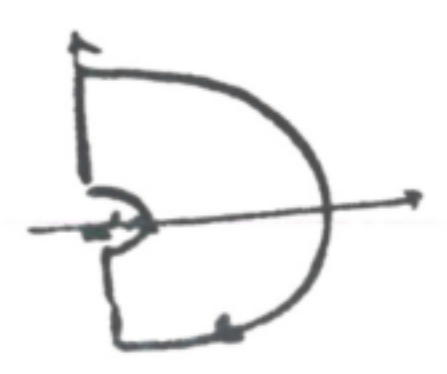
$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$



$P=0 \Rightarrow Z=0$
 $N=0$

تفسیر در سدا

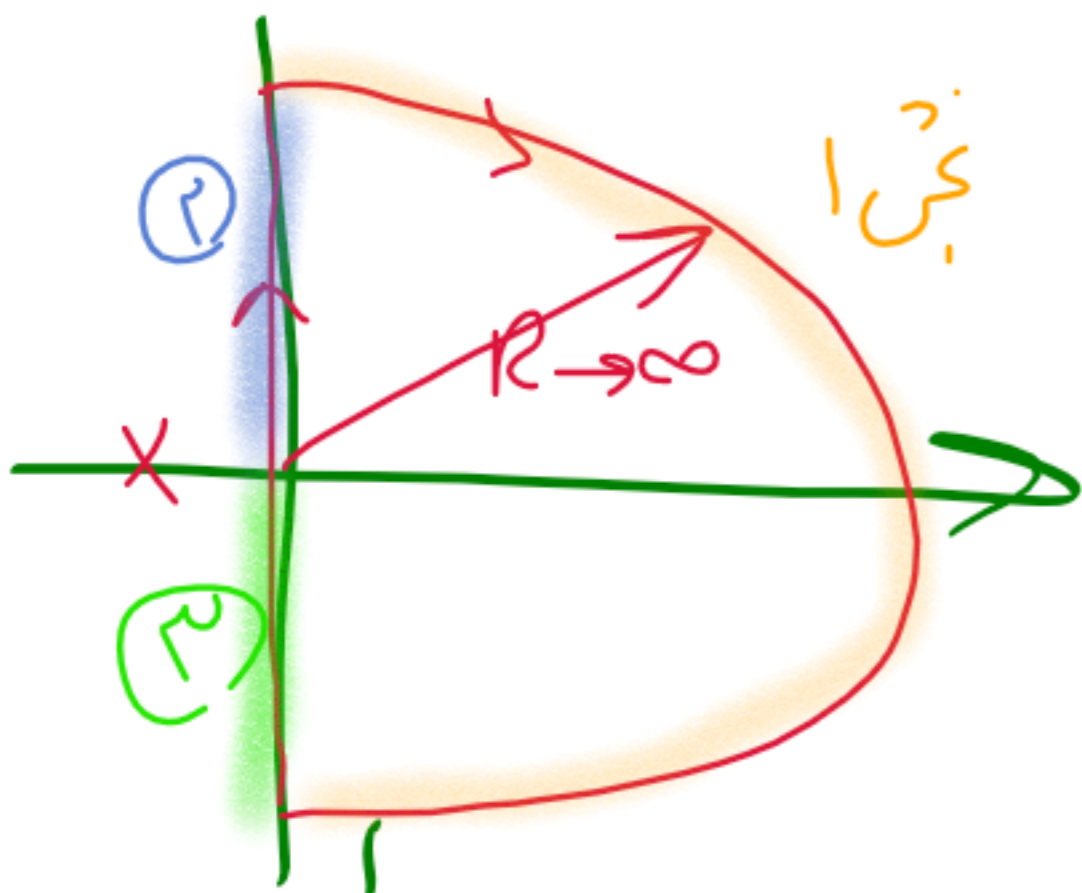
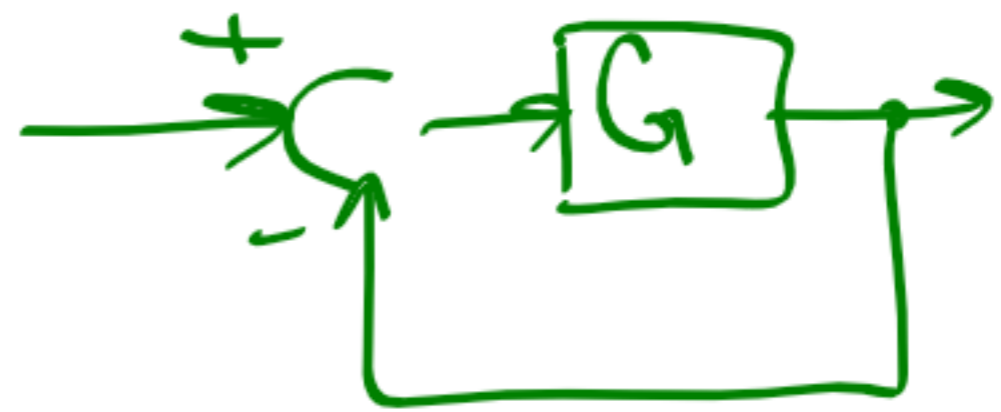
$P=0 \Rightarrow Z=0$
 $N=0$



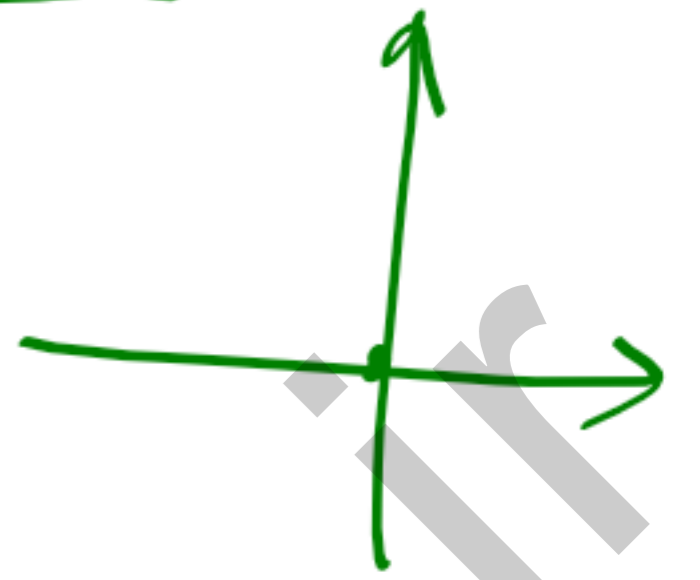
$s = \dots$

$G(s) = \frac{1}{s} = \dots$

$\vec{G}(s) = \frac{1}{s+1}$



$\frac{1}{s+1}$



نقطة 1

$s = R e^{j\phi}$

$R \rightarrow \infty$

$\frac{1}{s+1} \Big|_{s=R e^{j\phi}} = \frac{1}{R e^{j\phi} + 1} \approx 0$

$s = j\omega$

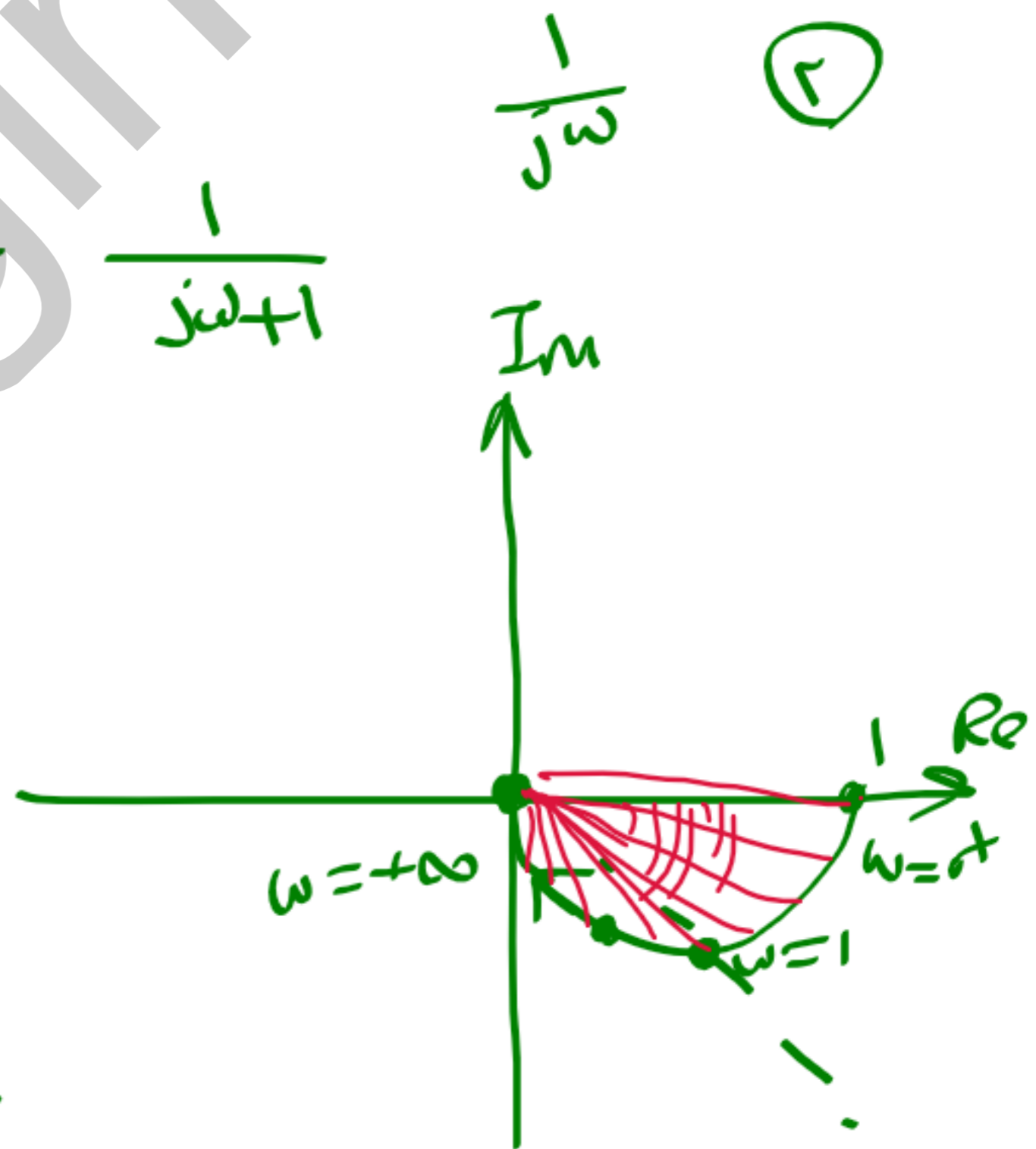
$\omega: 0^+ \rightarrow \infty$

$\frac{1}{s+1} \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega + 1}$

$\omega = 1$

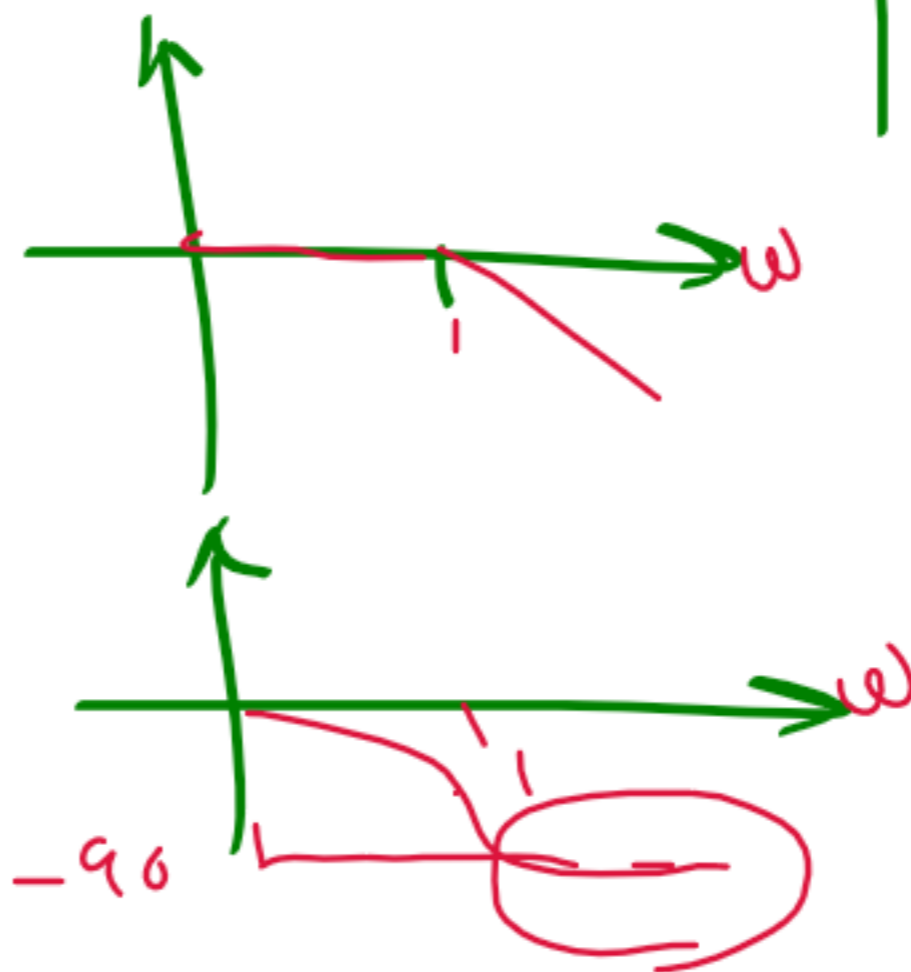
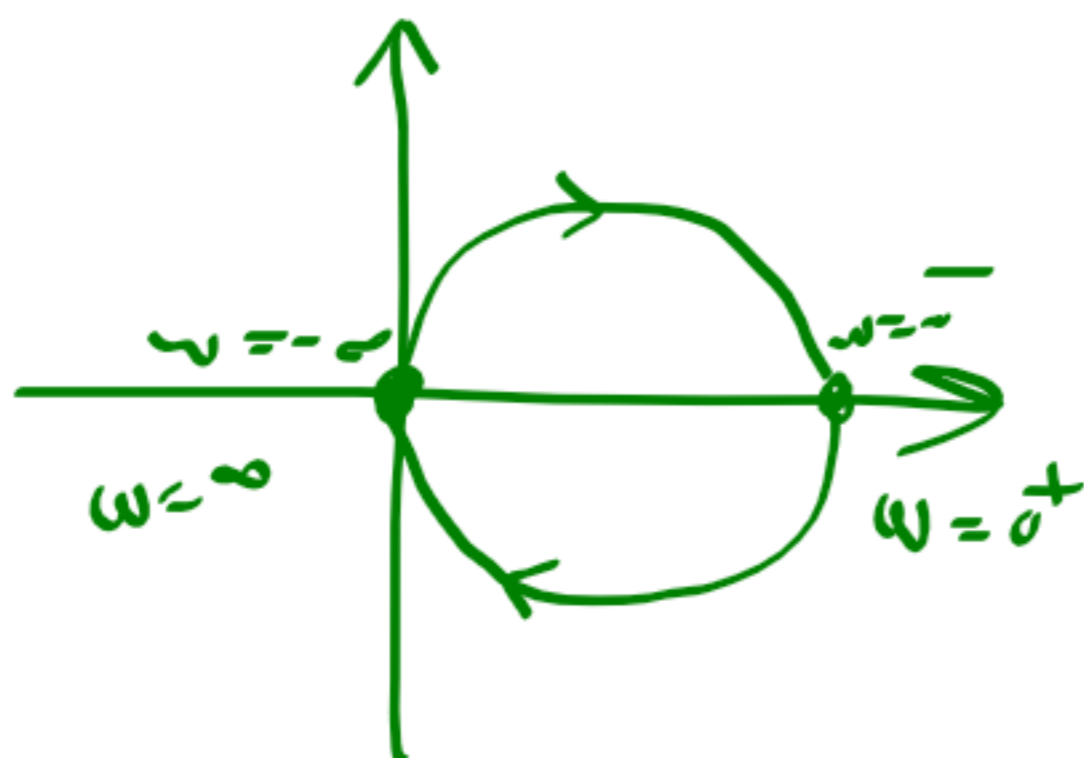
$\frac{1}{j + 1} = \frac{1}{\sqrt{2} e^{j45}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j45}$

نقطة 2



$\omega = 2$

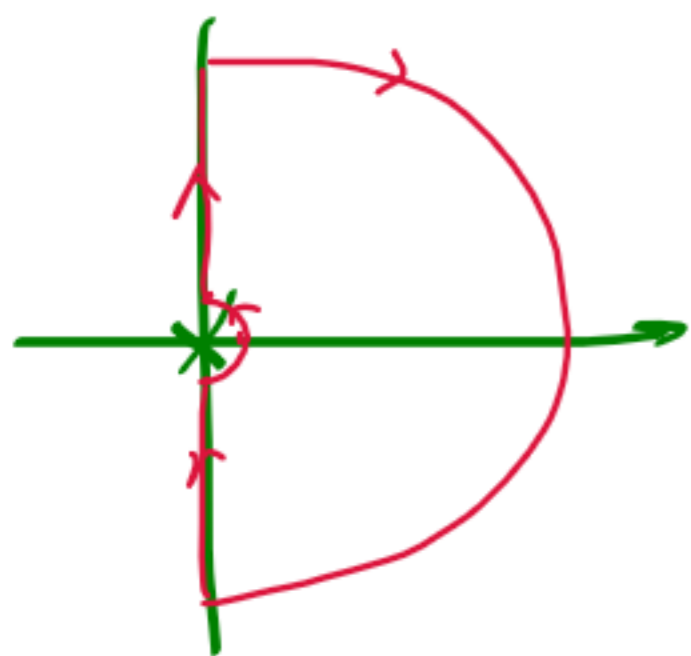
$\omega = ?$



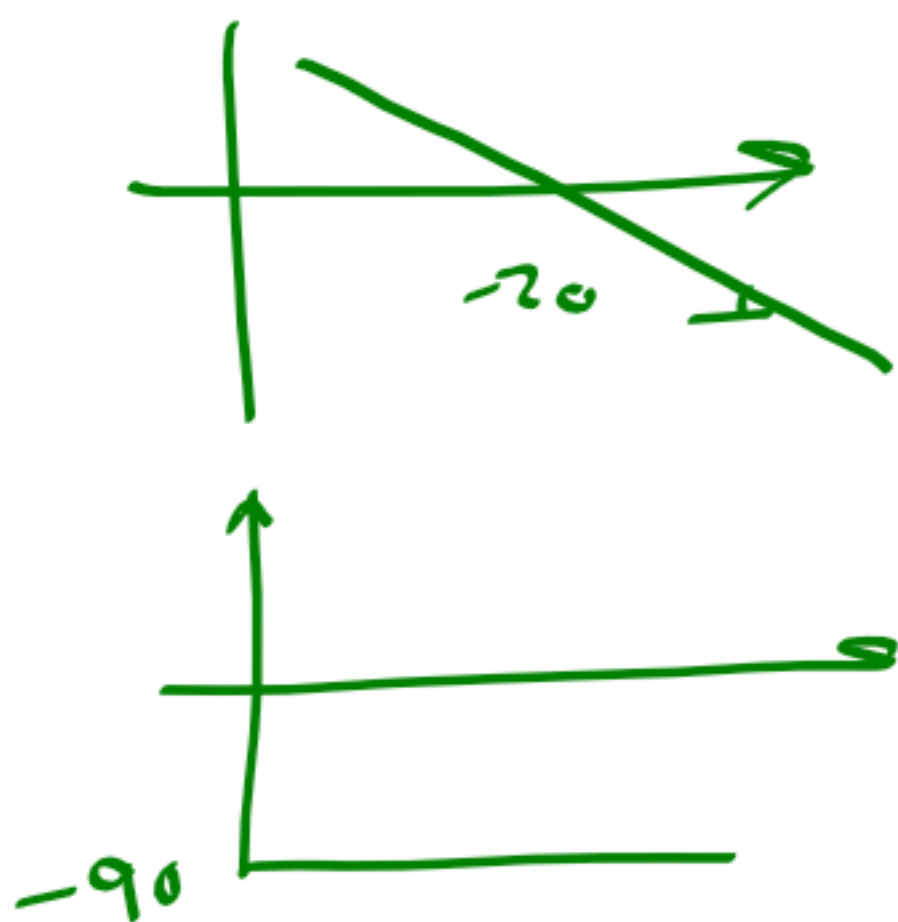
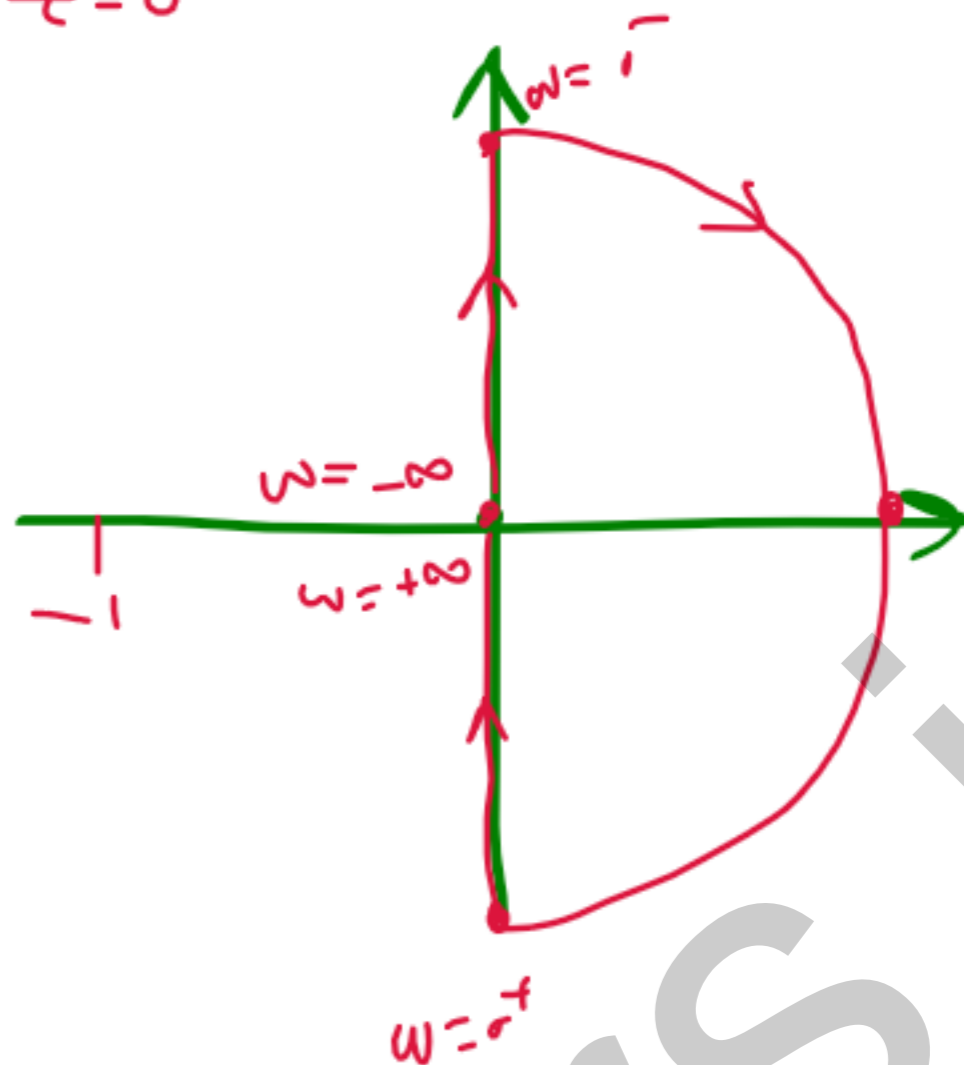
$N = Z - P = 0 - 1 = -1$

$G(s) = \frac{1}{s}$

$N = z - p$
 $0 = z - 0 \rightarrow z = 0$



$G = \frac{1}{j\omega}$



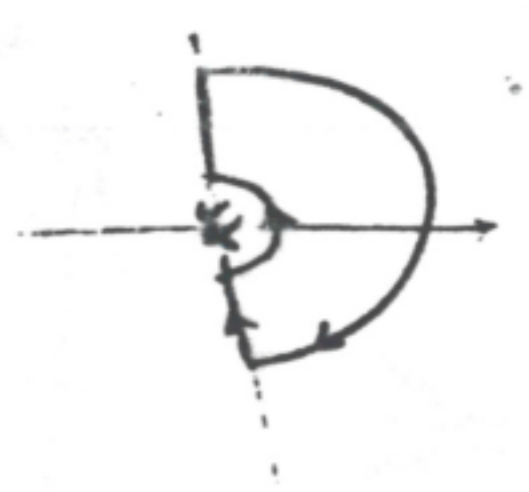
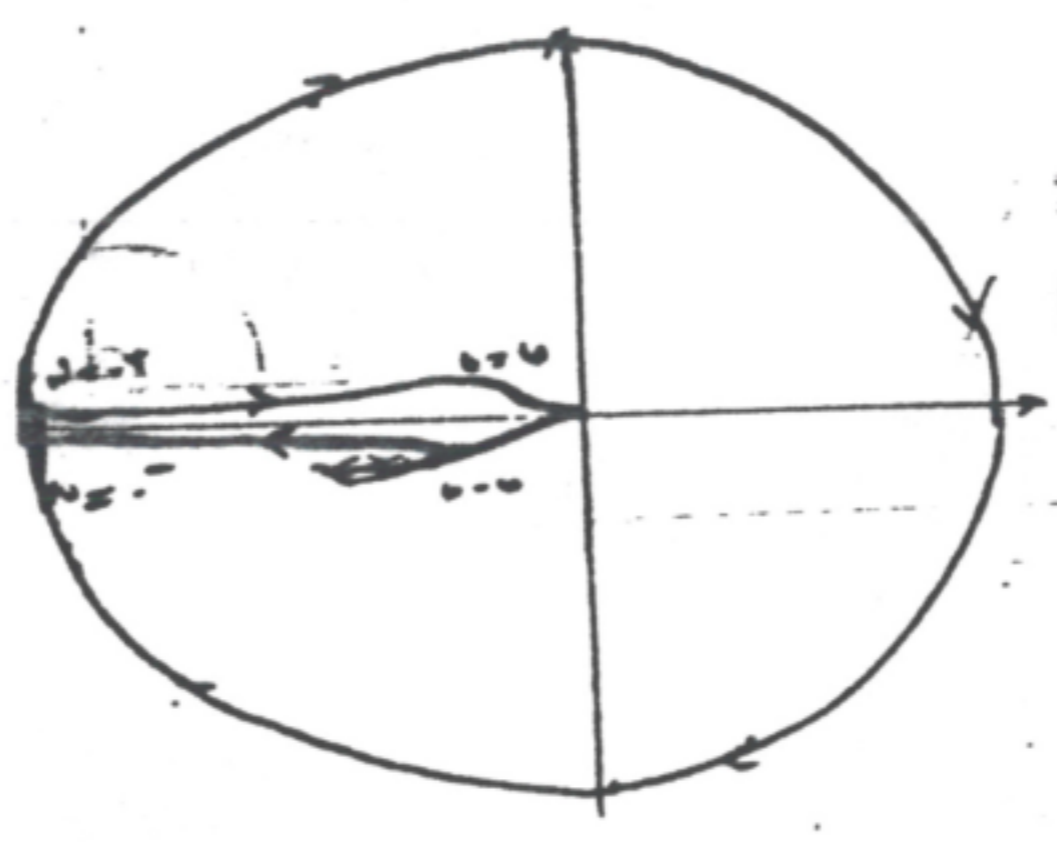
$s = re^{j\phi}$
 $r \rightarrow \sigma$
 $\phi: -\pi/2 \rightarrow 0 \rightarrow \pi/2$

$G(s) \Big|_{s=re^{j\phi}} = \frac{1}{re^{j\phi}} = \frac{1}{r} e^{-j\phi}$

$\rightarrow \frac{1}{\omega} e^{-j\pi/2}$
 $\rightarrow \frac{1}{\omega} e^{j0}$
 $\rightarrow \frac{1}{\omega} e^{j\pi/2}$

Controlengeneers.ir

$|s| = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $\angle s = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} \angle s = 45^\circ \\ \angle s = -135^\circ \end{cases}$



$s = re^{j\varphi}$
 $G(s) = \frac{1}{(re^{j\varphi})^2} = \frac{1}{r^2 e^{j2\varphi}} = \frac{1}{r^2} e^{-j2\varphi}$

$\begin{cases} \infty \angle 180^\circ \\ \infty \angle 90^\circ \\ \infty \angle 0^\circ \\ \infty \angle -180^\circ \end{cases}$

$P=0 \Rightarrow Z=2$
 $N=2$

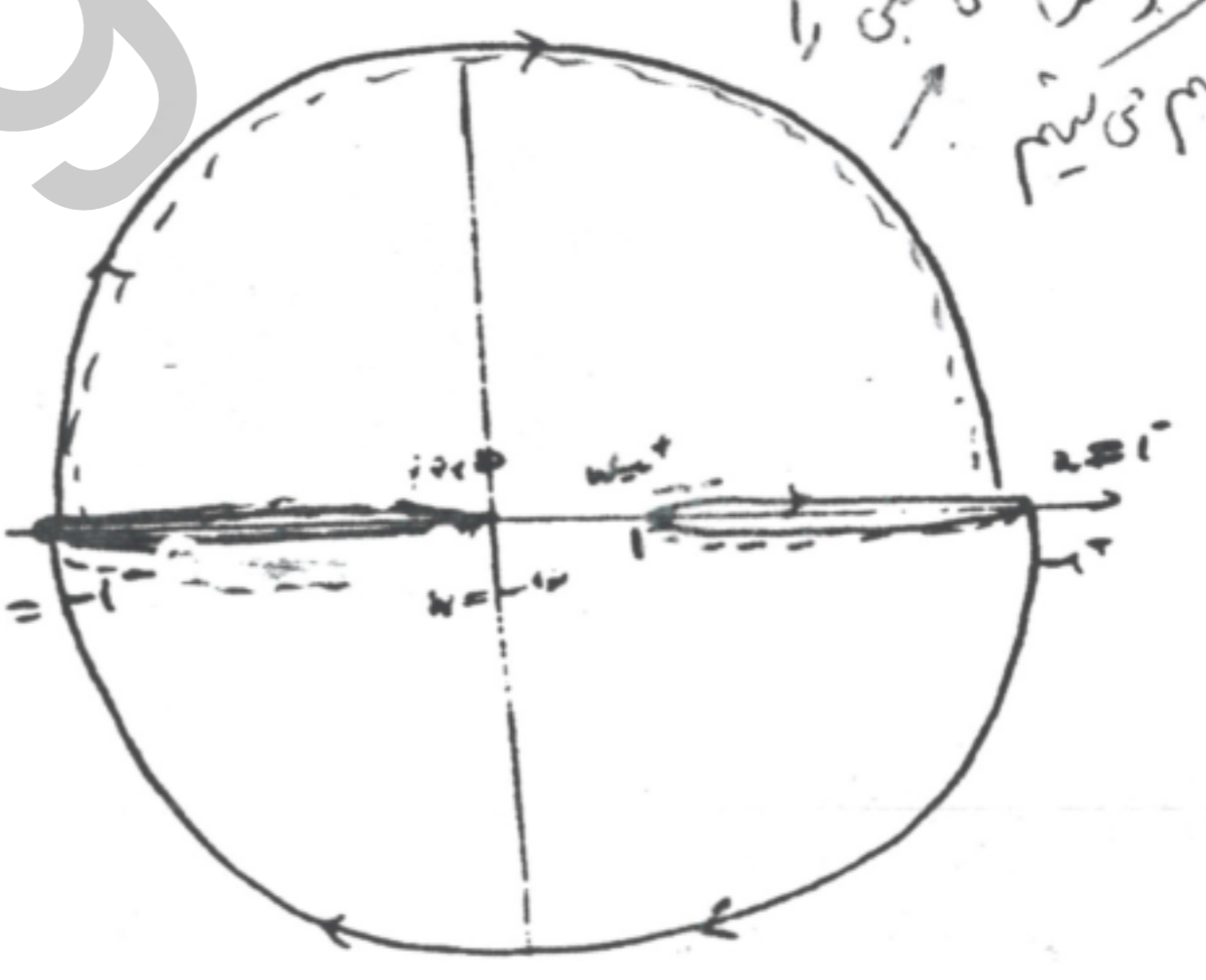
(در مینتد تکثیر در هر کسده فصل اینتر روی کند)
(ایمپارتی)

خط: در دستم می نیمم فاز مندراره به بقا
 دع اگر دتت ساعده راست، شکاره بانه ی نه سده در منصفه
 نه هر صیده تکثیر است
 نه ایساید ساعده خنجره در و بالکن

$G(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$



$\angle G(s) = \frac{1}{j\omega^2 + 1} = \frac{1}{1 - \omega^2}$



$\omega = 1 \Rightarrow \frac{1}{j^2 + 1} = \frac{1}{1 - 1} = \infty$

$\omega \rightarrow 1^- \Rightarrow \angle G(s) = 0$
 $\omega \rightarrow 1^+ \Rightarrow \angle G(s) = -180^\circ$

$\frac{1}{1 - \omega^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \angle 0^\circ$
 $\frac{1}{1 - \omega^2} = \frac{1}{0^-} = -\infty \angle 180^\circ$

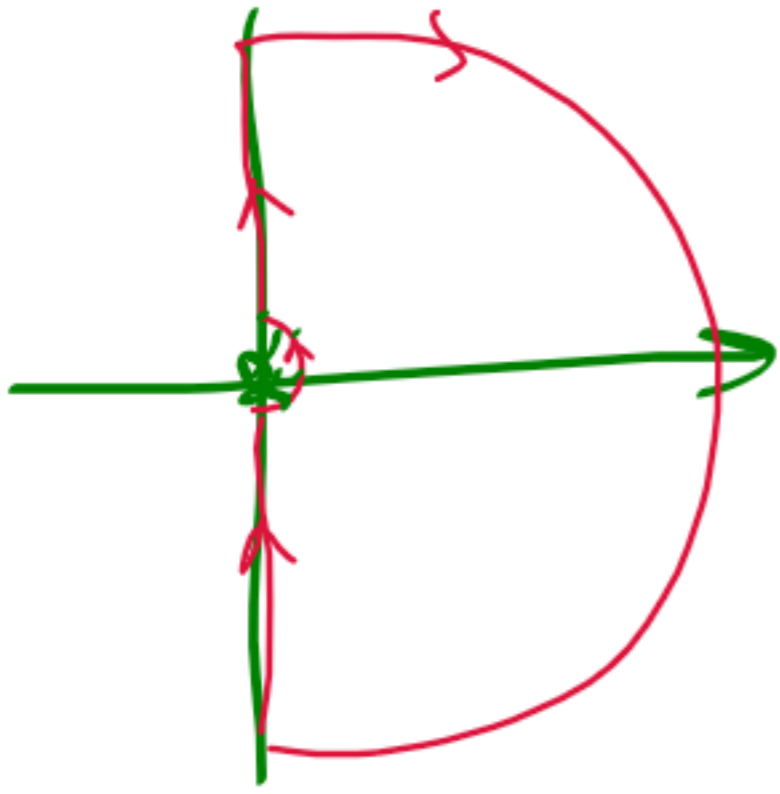
$s = j + \epsilon e^{j\varphi}$
 $G(s) = \frac{1}{(j + \epsilon e^{j\varphi})^2 + 1} = \frac{1}{-1 + 2\epsilon e^{j\varphi} + \epsilon^2 e^{j2\varphi} + 1} = \frac{1}{2\epsilon e^{j\varphi} + \epsilon^2 e^{j2\varphi}}$

برای اینکه بهترین از روی مسیر باید ببریم یا نقطه کمی بلایه بدیم یا از درس بالا استنا کنیم

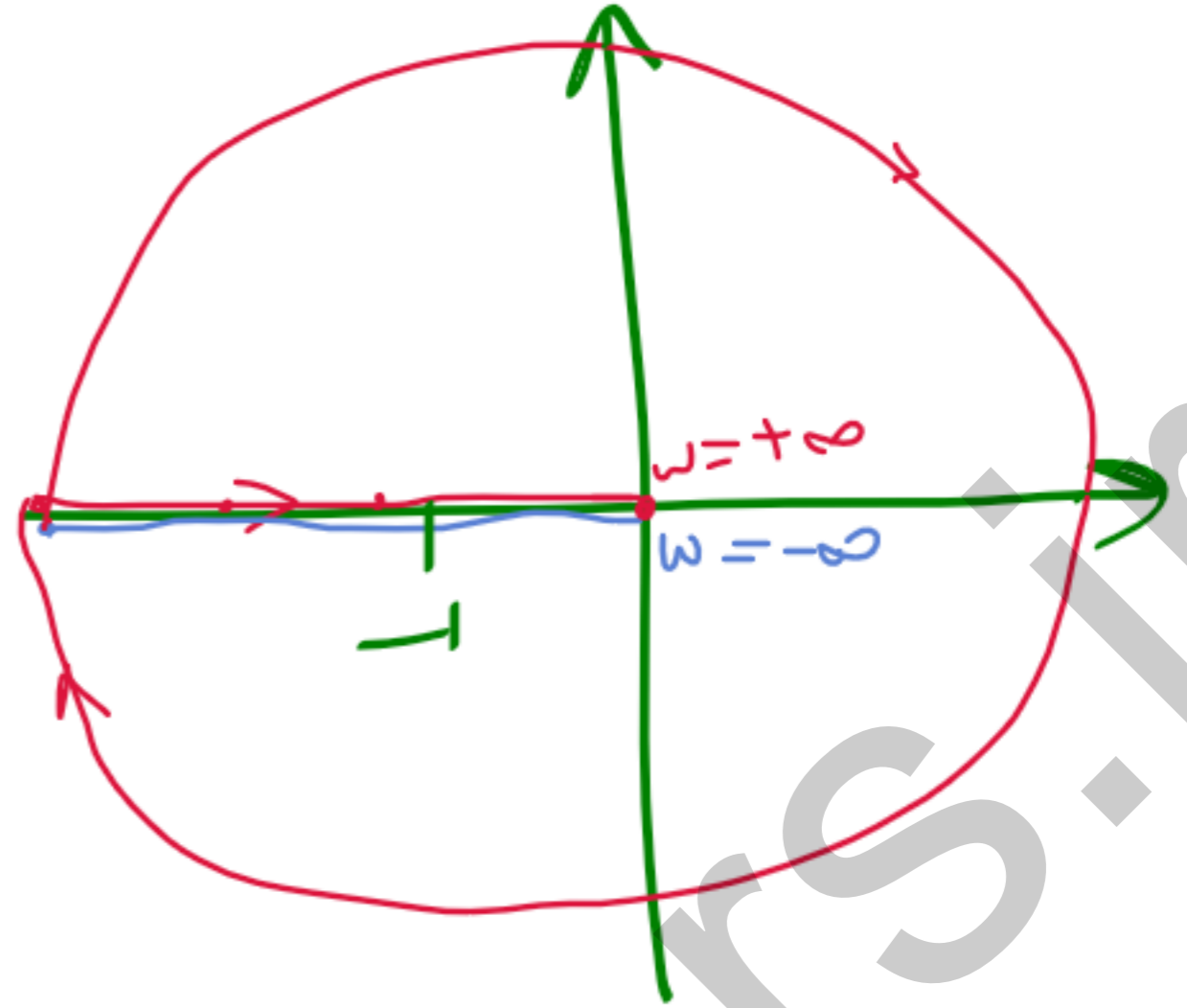
$\frac{1}{(j + \epsilon e^{j\varphi})^2 + 1} = \frac{1}{-1 + 2\epsilon e^{j\varphi} + \epsilon^2 e^{j2\varphi} + 1} = \frac{1}{2\epsilon e^{j\varphi} + \epsilon^2 e^{j2\varphi}} = \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{2e^{j\varphi} + \epsilon e^{j2\varphi}}$

$\epsilon \rightarrow 0^+ \Rightarrow \angle = -j(\varphi + 90^\circ)$
 $\begin{cases} \infty \angle 45^\circ \\ \infty \angle -90^\circ \\ \infty \angle -180^\circ \end{cases}$

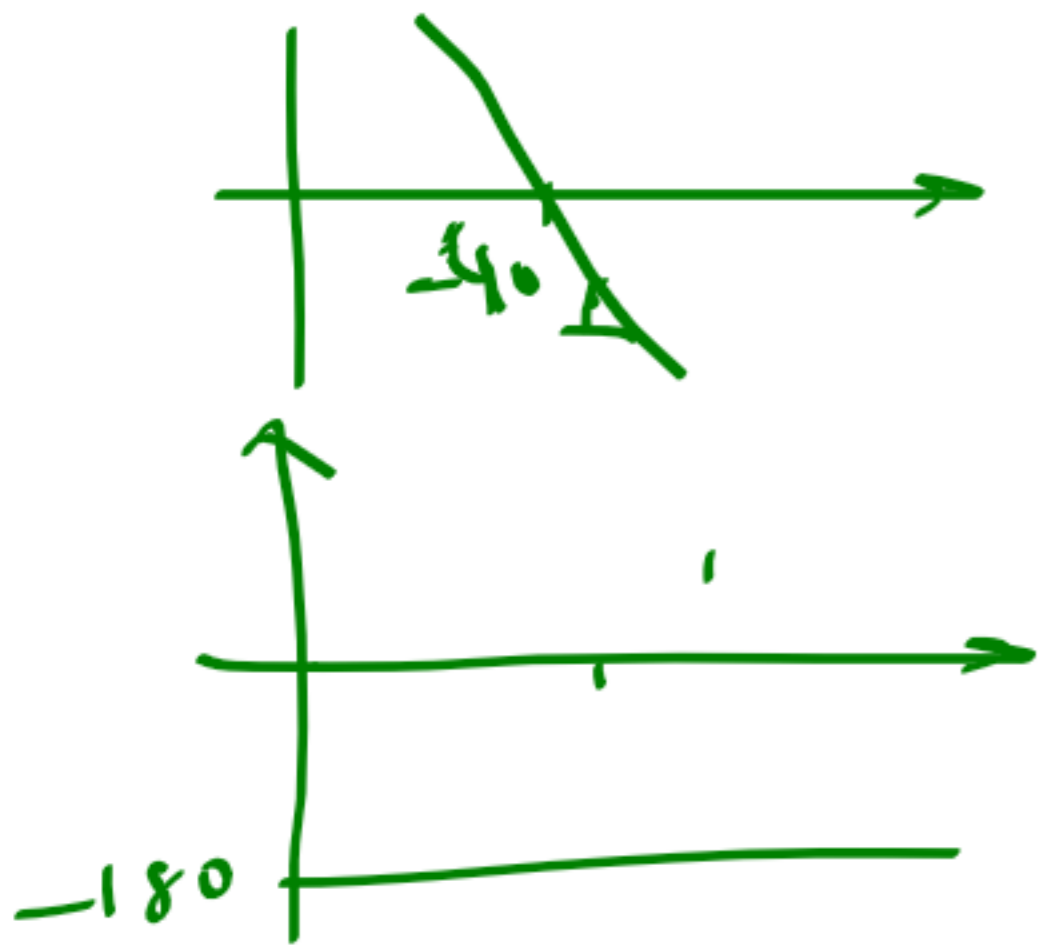
$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$



$\omega = 0^-$
 $\omega = 0^+$

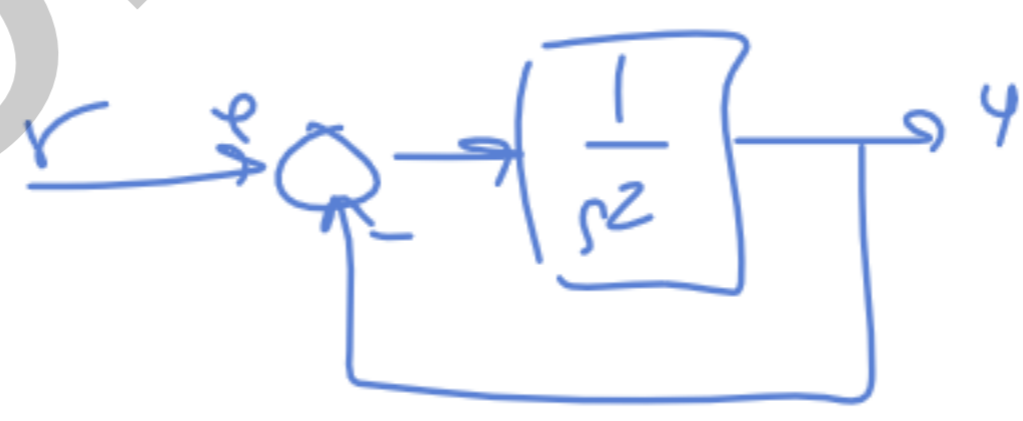


$$G(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{(j\omega)^2} = \frac{1}{-\omega^2}$$



$$\begin{cases} s = r e^{j\varphi} \\ r \rightarrow \omega \\ \varphi: -\pi/2 \rightarrow \pi/2 \rightarrow 0 \rightarrow \pi/2 \end{cases}$$

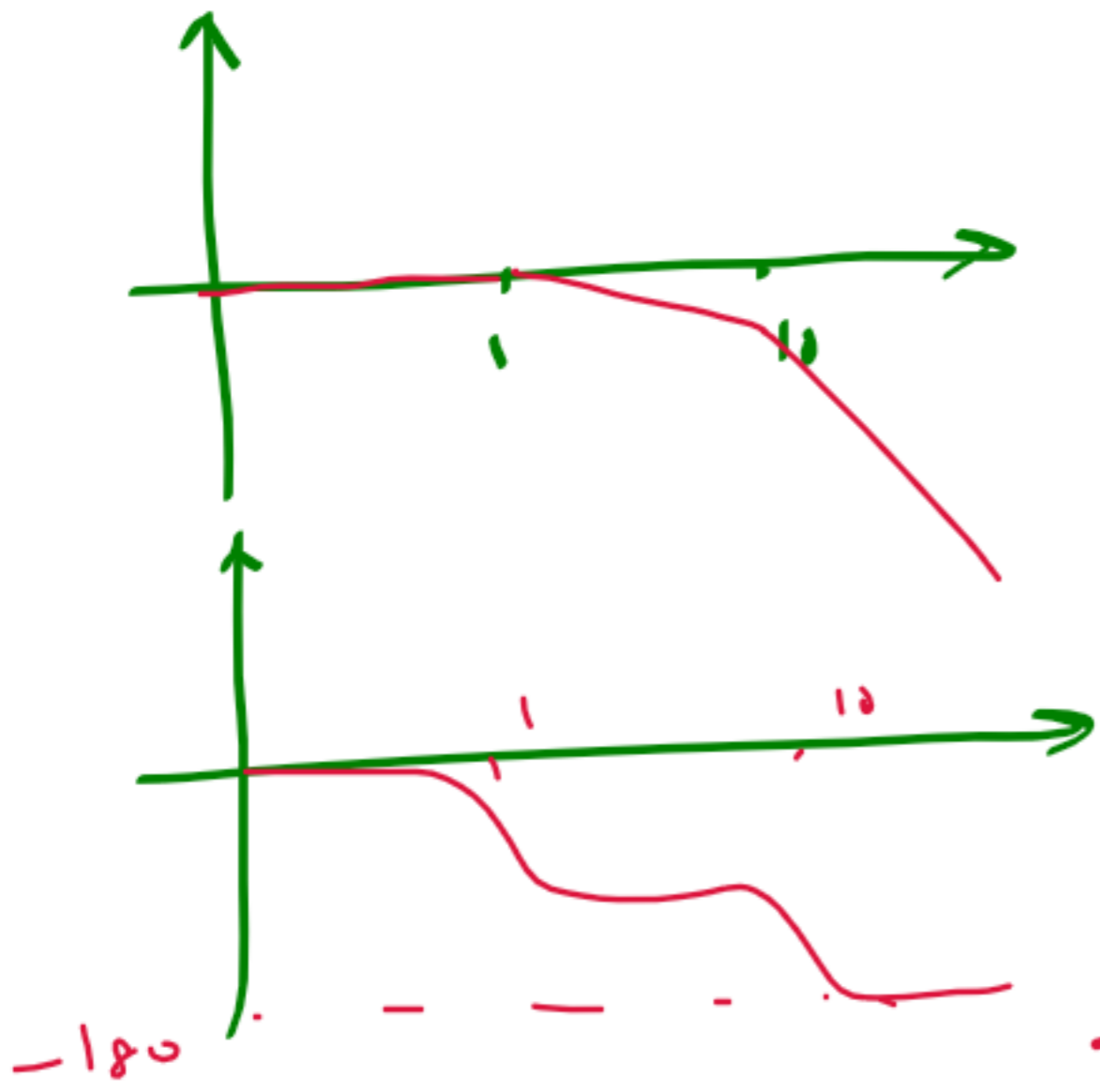
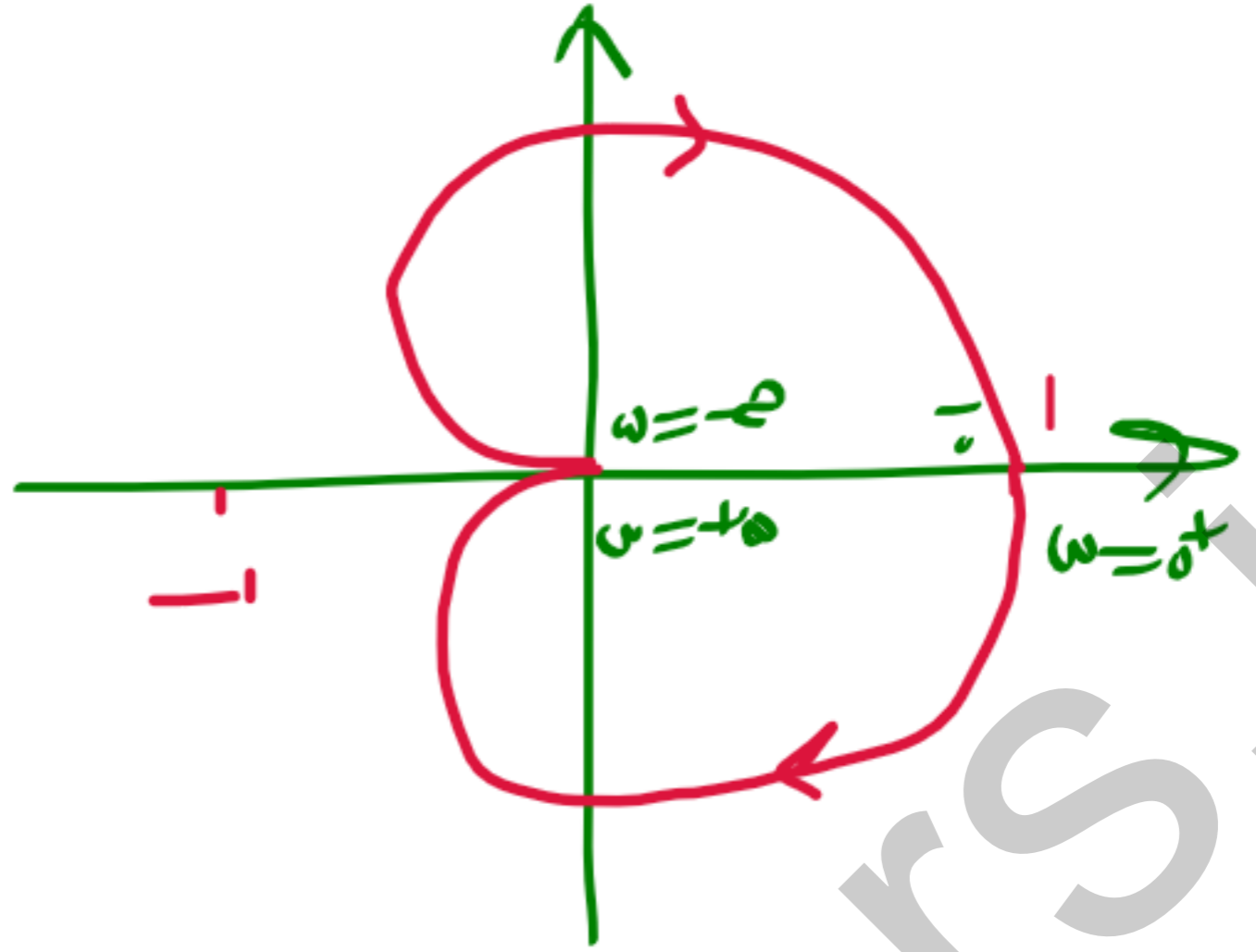
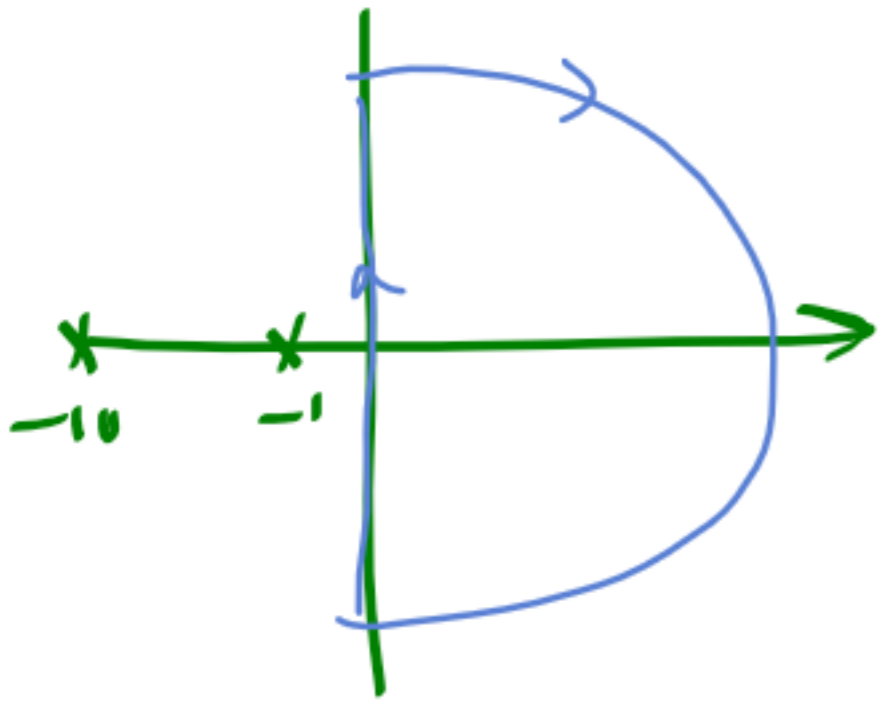
$$G(s) \Big|_{s=r e^{j\varphi}} = \frac{1}{r^2 e^{j2\varphi}} = \frac{1}{r^2} e^{-j2\varphi}$$



$$\frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2 + 1}$$

قطب: $j, -j$

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+10)}$$



$$N = Z - P$$

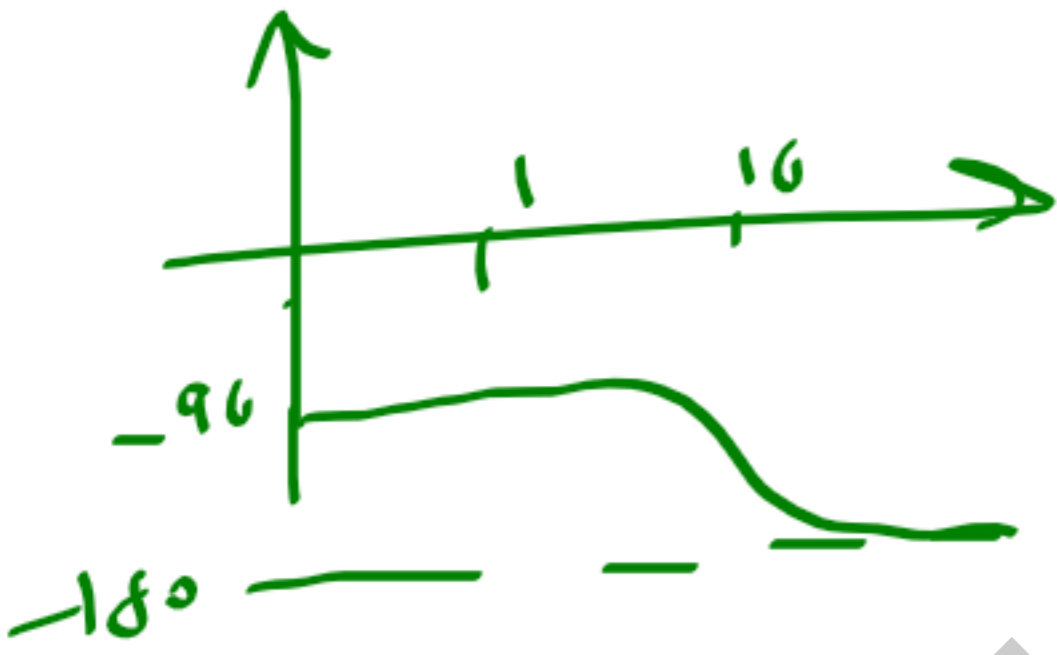
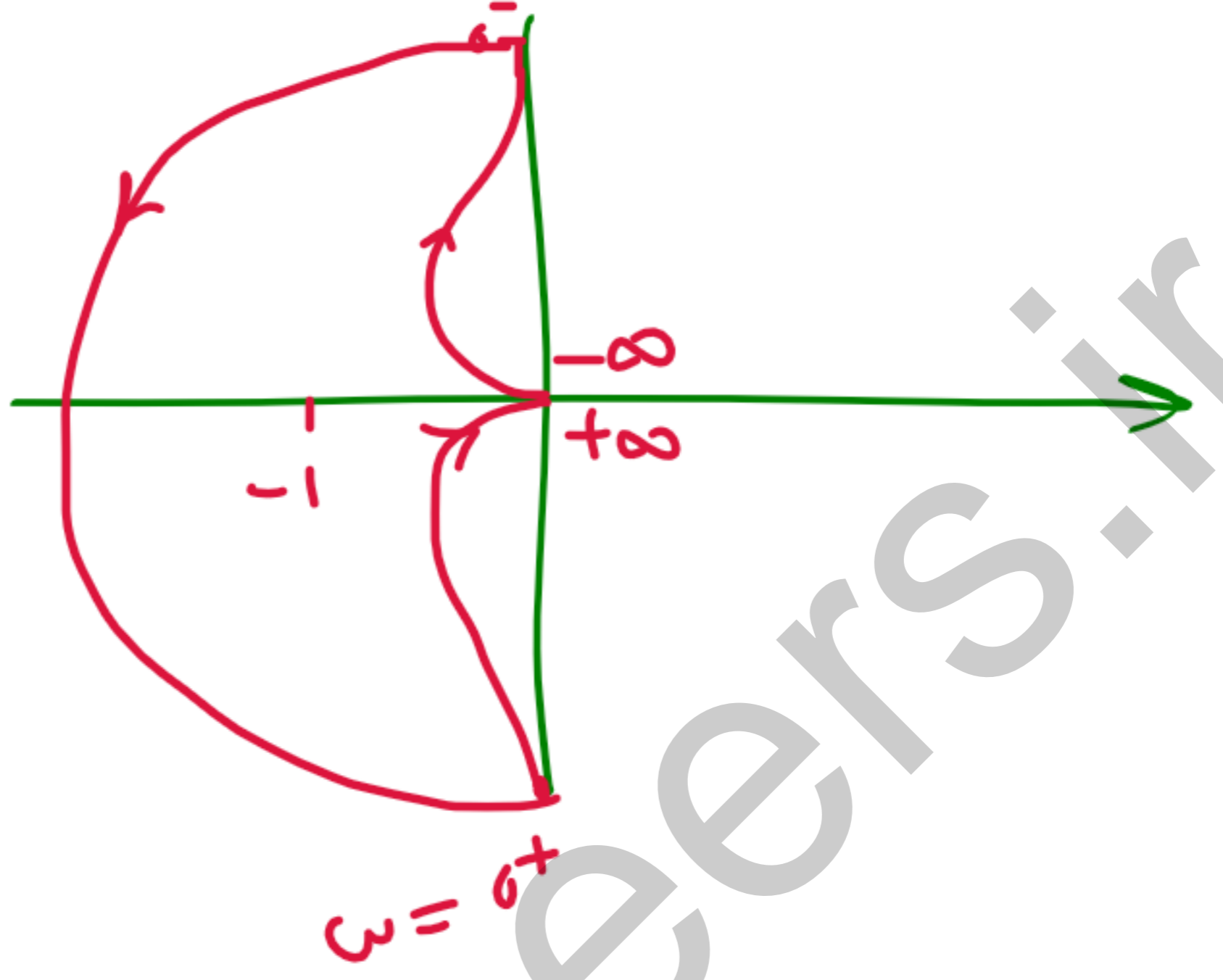
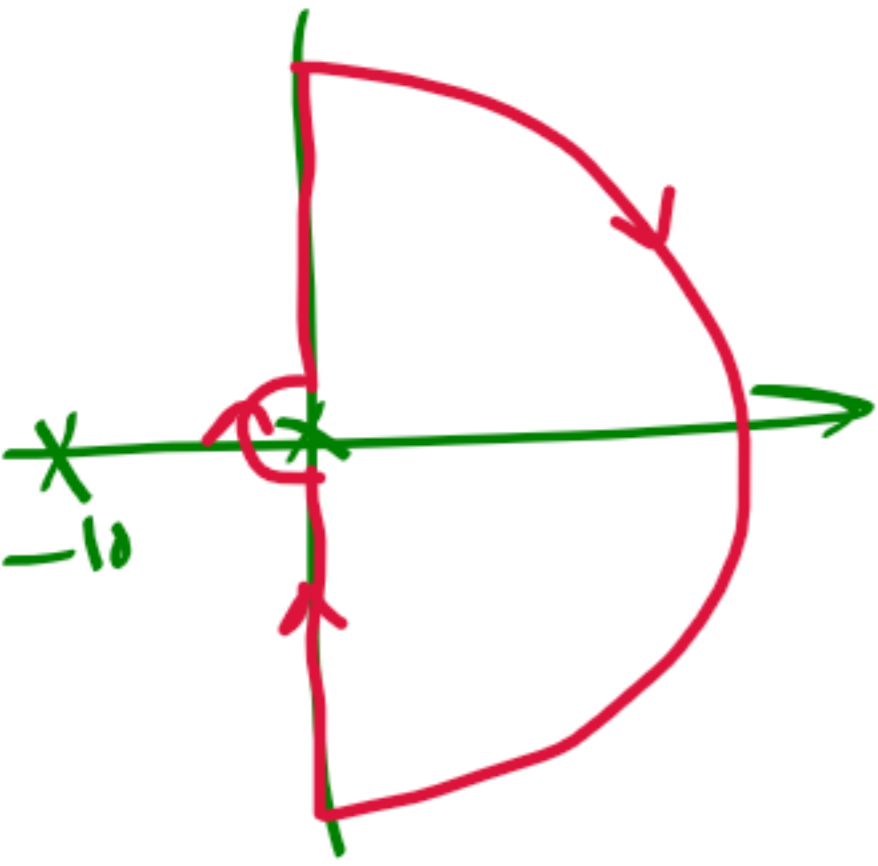
$$0 = Z - 0$$

$$Z = 0$$

حلته بالبرهان

Control Engineers.ir

$$j\omega / G = \frac{10}{s(s+10)}$$



$$N = Z - P$$

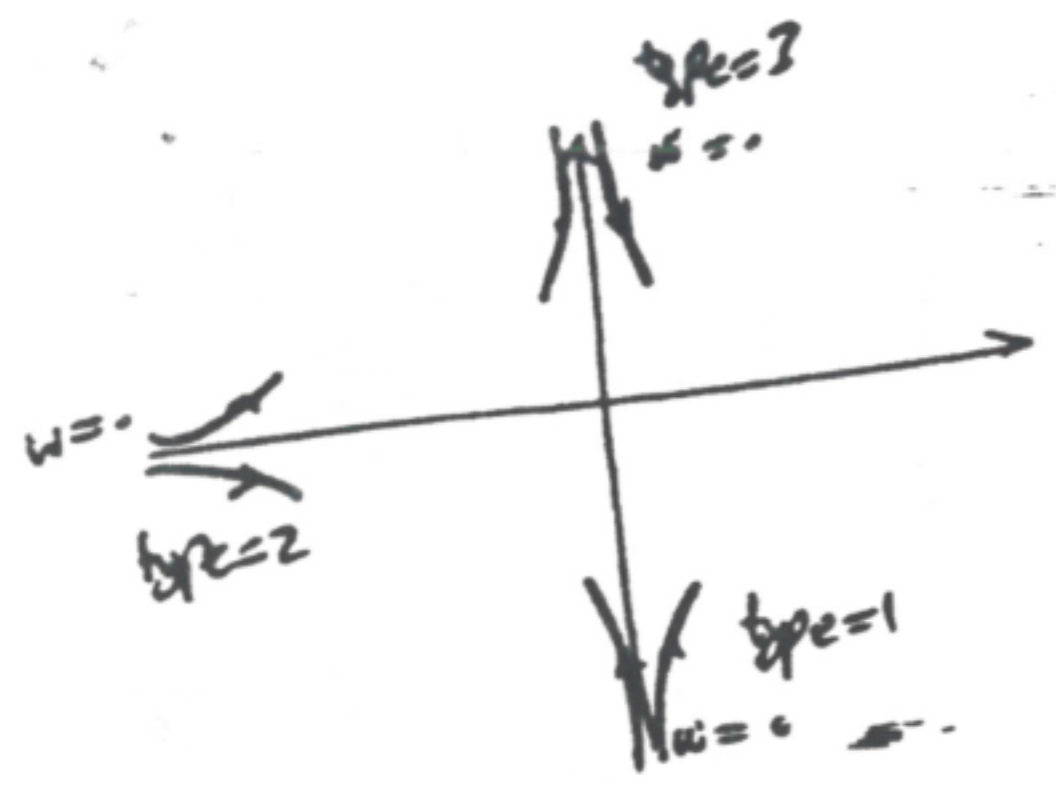
$$-1 = Z - 1$$

حلته بتمه الباراسه
 $Z = 0$

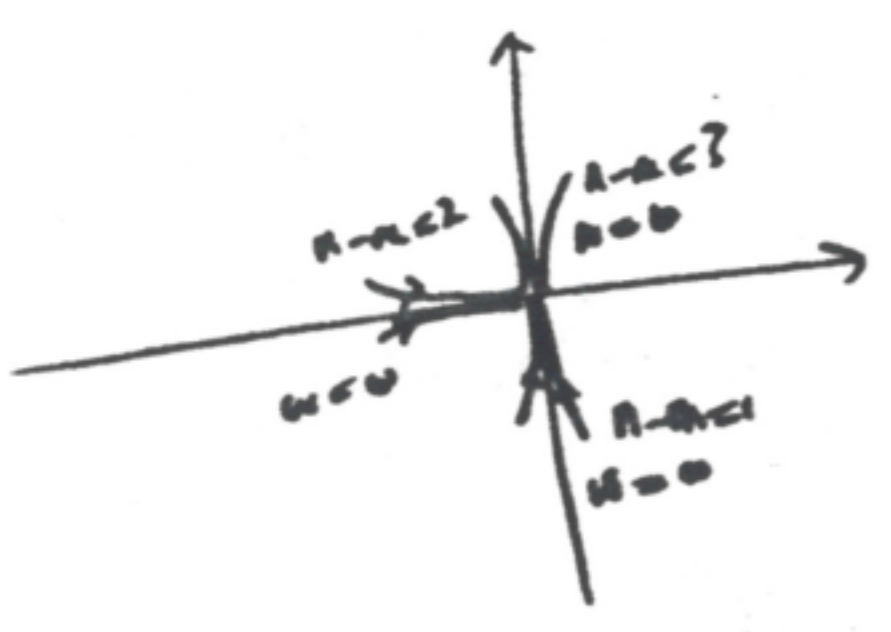
Control Engineers.ir

نکته: در این سیستم

آبوجه به تایت سیستم می تون کل شمع رو با هم با هم مقیاس را مشخص داد:
(بزرگ سیستم می تونم خد)

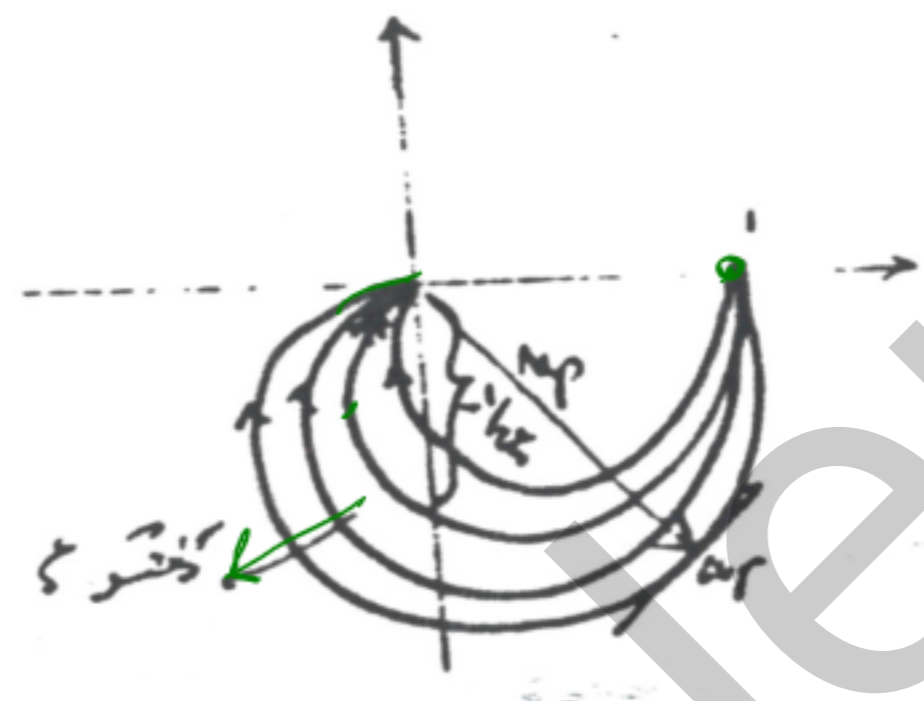


آبوجه به اعلان درجه صورت و خروج می تون با هم مقیاس را مشخص داد:
نکته: در این سیستم (بزرگ سیستم می تونم خد)



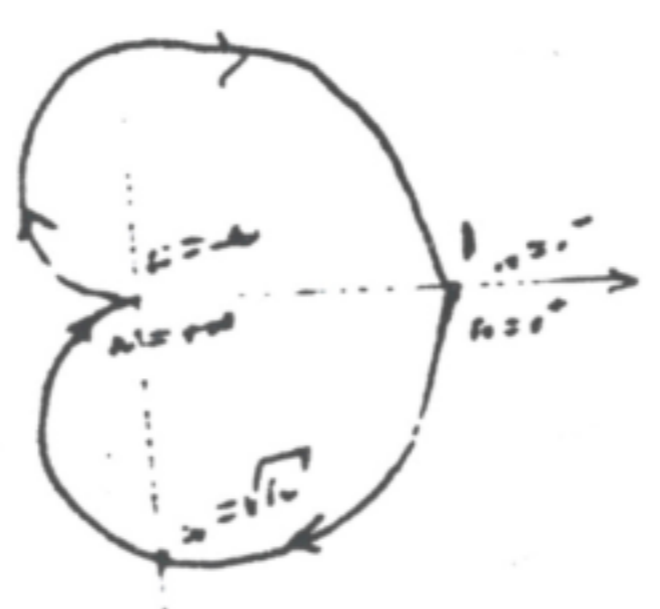
$$G(s) = \frac{an^2}{s^2 + 2\zeta an s + an^2}$$

بزرگ سیستم می تونم خد:



مشار:

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+10)}$$



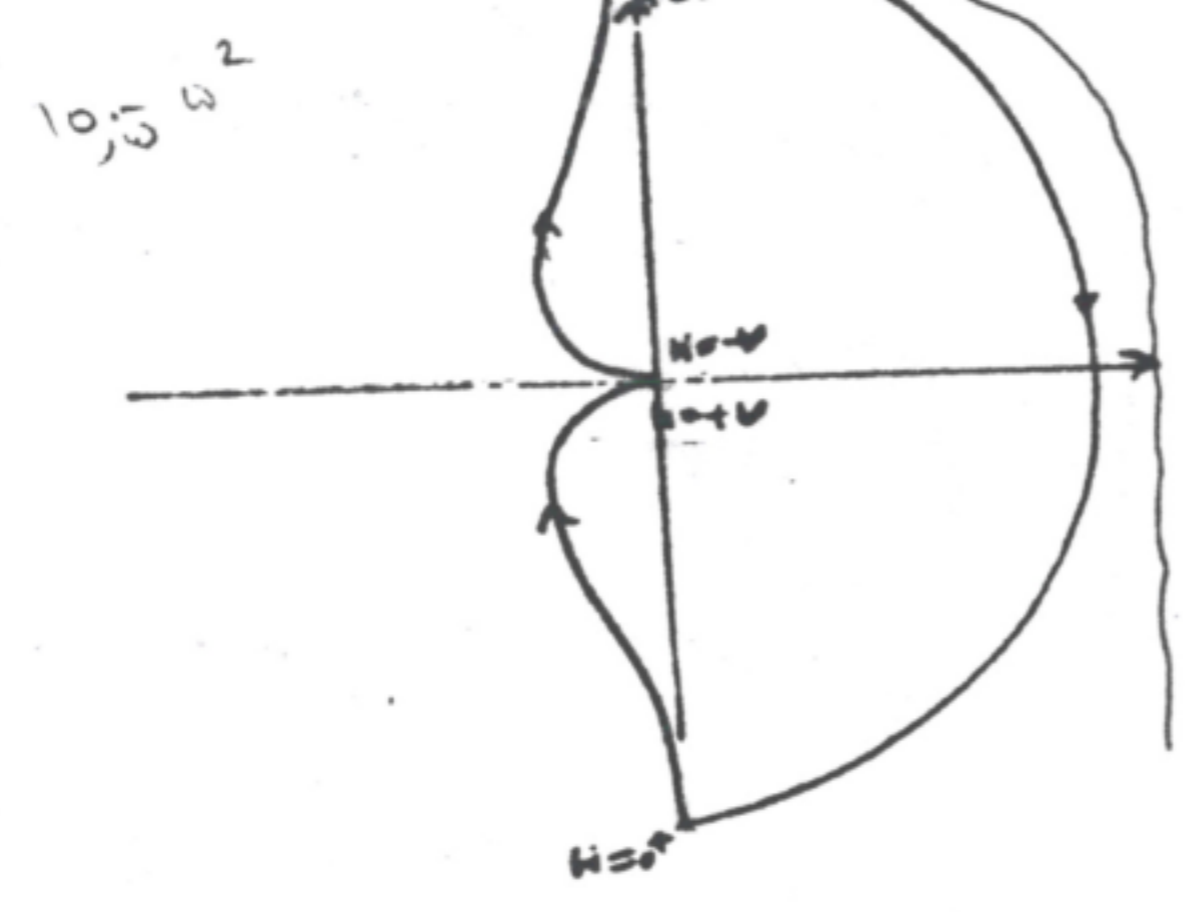
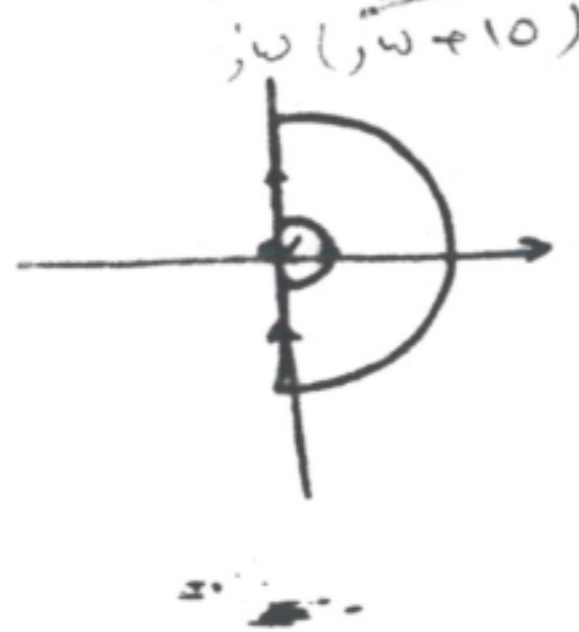
$$\frac{10}{j\omega + 1 \times j\omega + 10} = \frac{10}{10 - \omega^2 + j\omega} = \frac{10 [1 - \omega^2 - j\omega]}{(1 - \omega^2)^2 + 12\omega^2}$$

$$Re\{G(j\omega)\} \rightarrow 10 - \omega^2 \rightarrow \dots$$

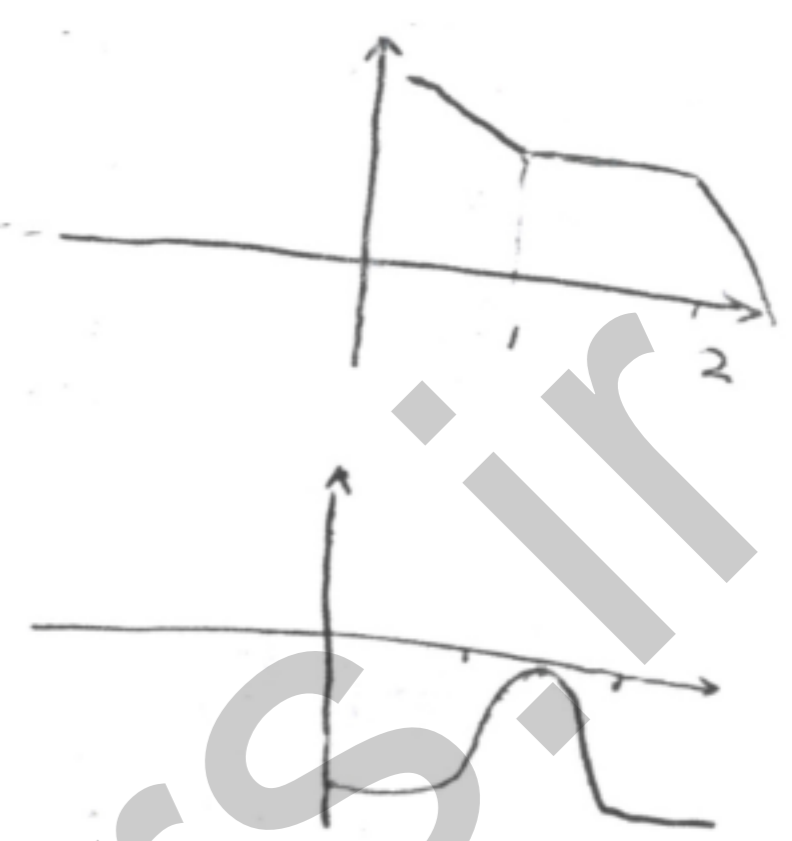
در این بورد Bode منحنی فاز را از این نقطه به سمت چپ آن

نمایش می دهد.
 پهنای باند را با آزاد کردن!
 نسبت 20 dB از این
 فرکانس

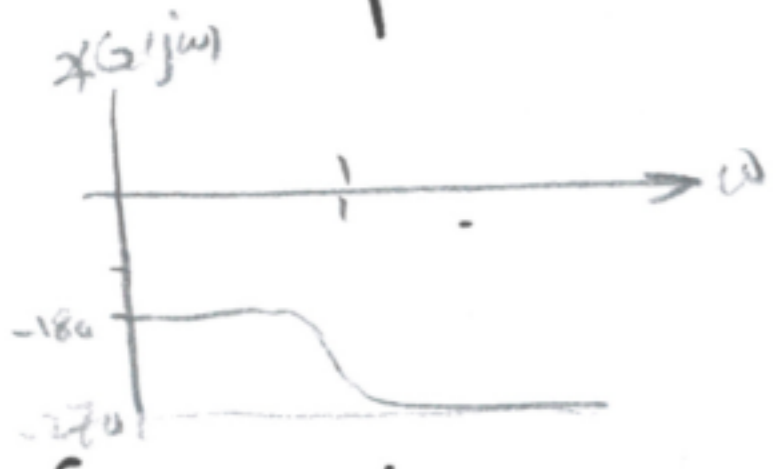
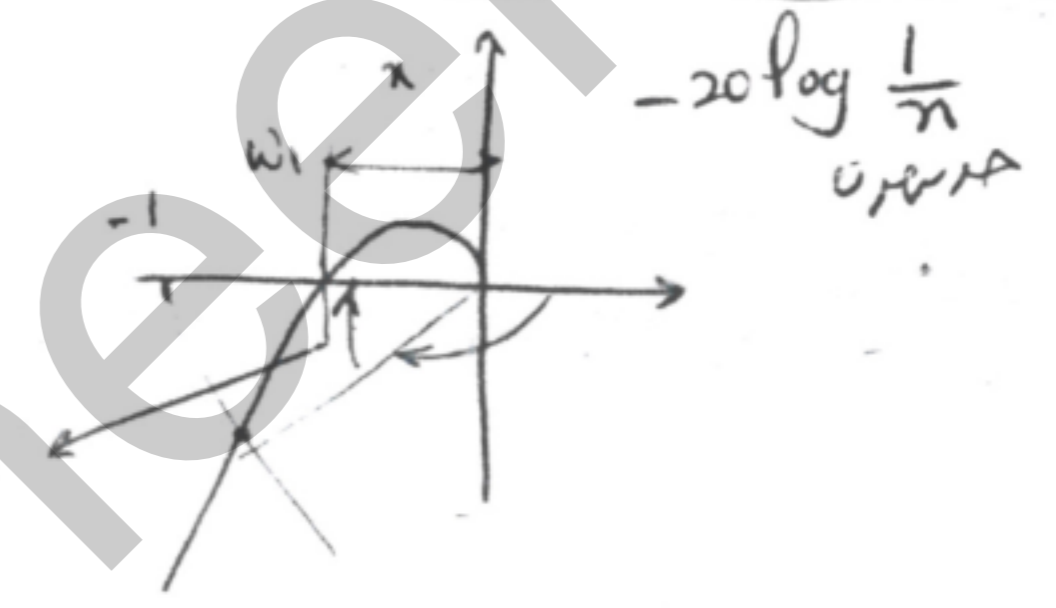
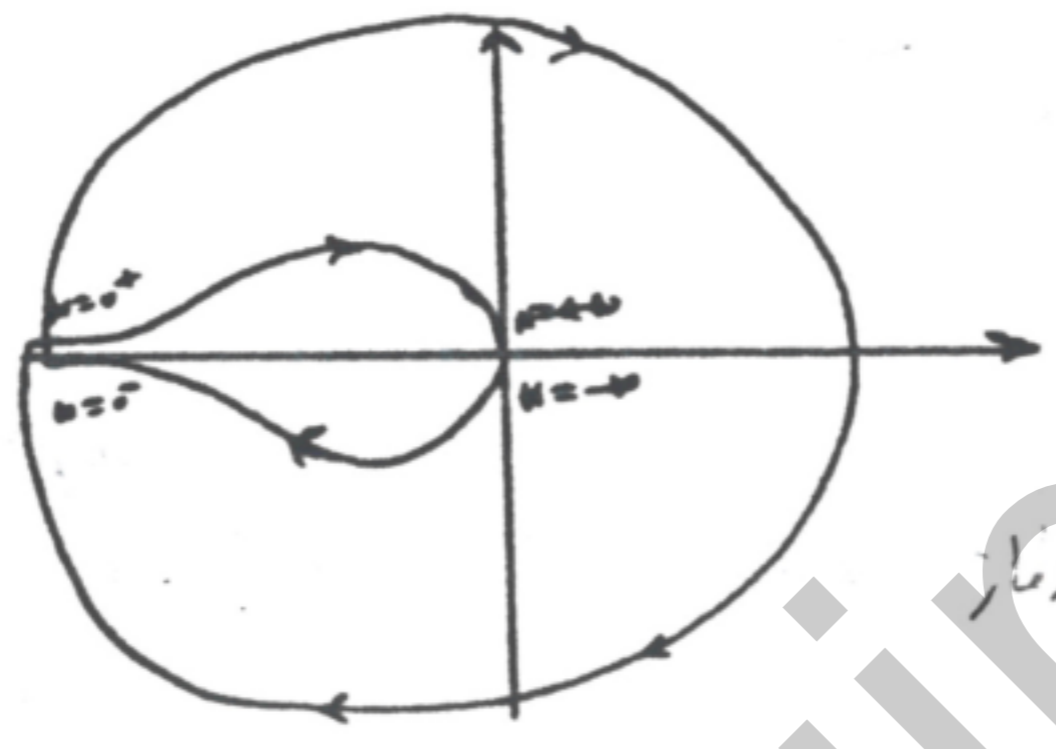
$$G(s) = \frac{10}{s(s+10)}$$



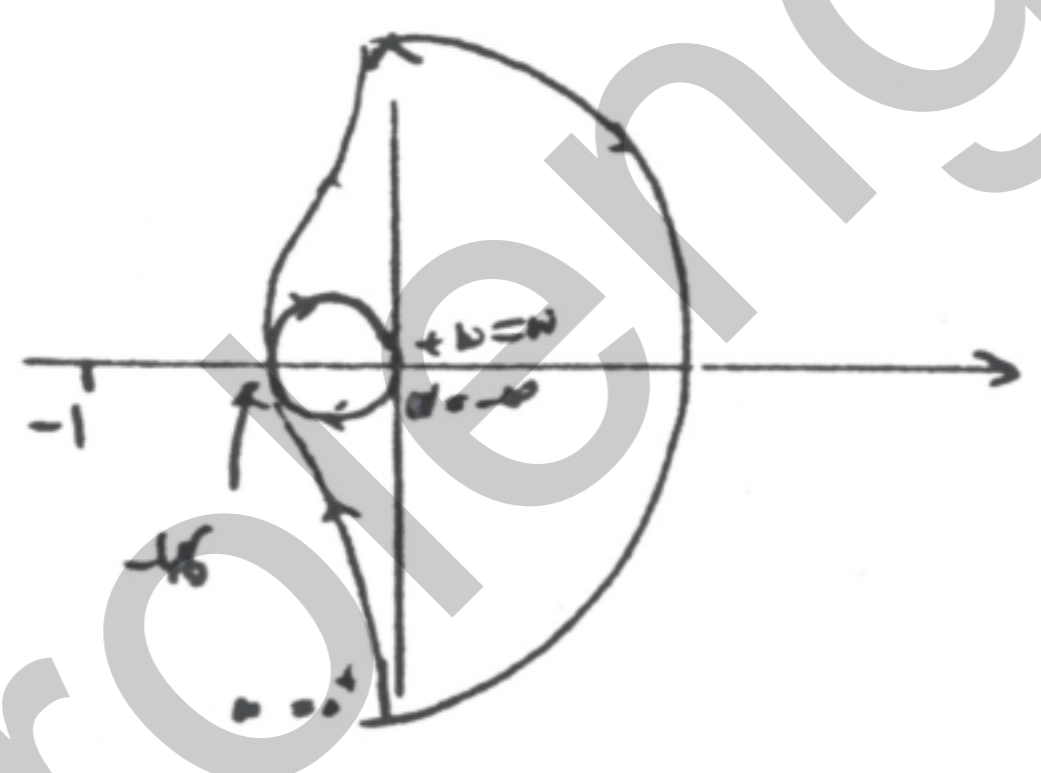
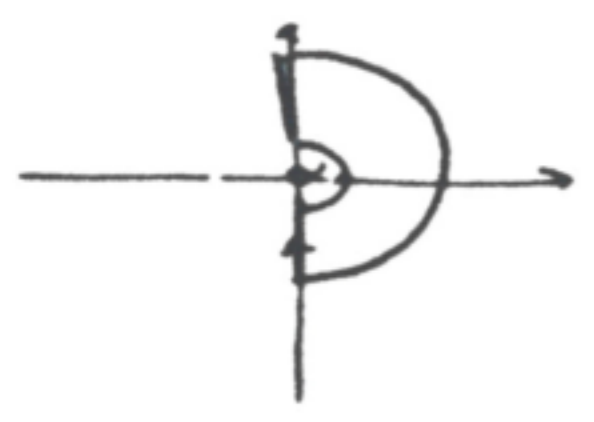
$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$$



$$G(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$$



$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$



$$P=0, N=0 \Rightarrow Z=0$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\omega \sqrt{\omega^2+1} \sqrt{\omega^2+4}} = \frac{1}{\omega \sqrt{\omega^2+1} \sqrt{\omega^2+4}}$$

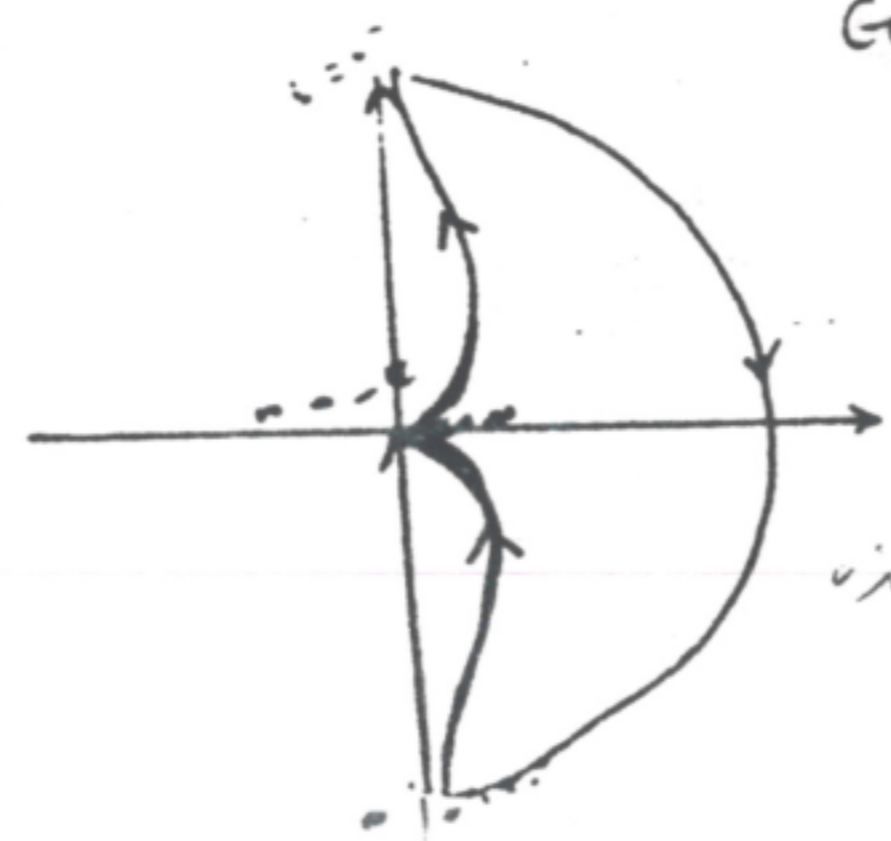
$$\text{Im}(\dots) = 0 \Rightarrow \omega = 1, \omega = 2$$

$$|G(j\omega)|_{\omega=2} = \frac{-3 \times 2}{5 \times 2 + 2 \times 2} = \frac{-6}{14} = \frac{3}{7}$$

$$G(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)} = \frac{j\omega}{-\omega^2(j\omega+1)(j\omega+2)}$$

$$= \frac{-\omega^2 + 2\omega^2 + j(-\omega^2 - 2\omega^2)}{\omega^4 + 4\omega^2}$$

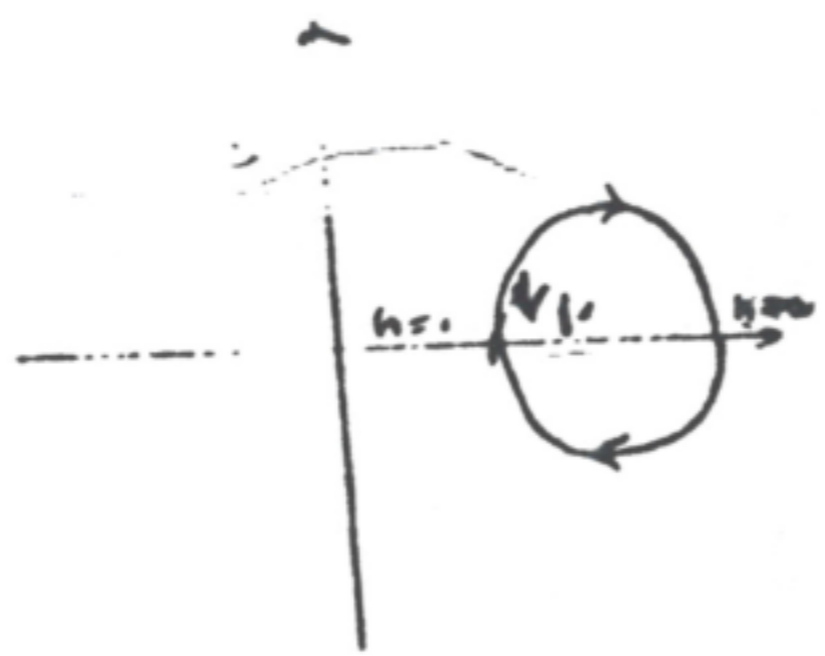
$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$$



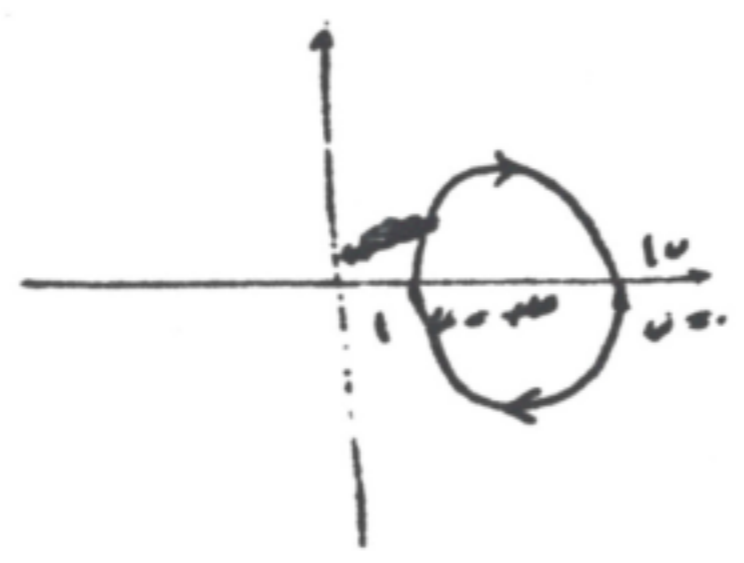
رای بیگاری که تغییر زاویه ها از این فرکانس به سمت چپ آن
 Bode استفاده می کنیم

$$\omega \rightarrow 0^+ \frac{1}{2j\omega}$$

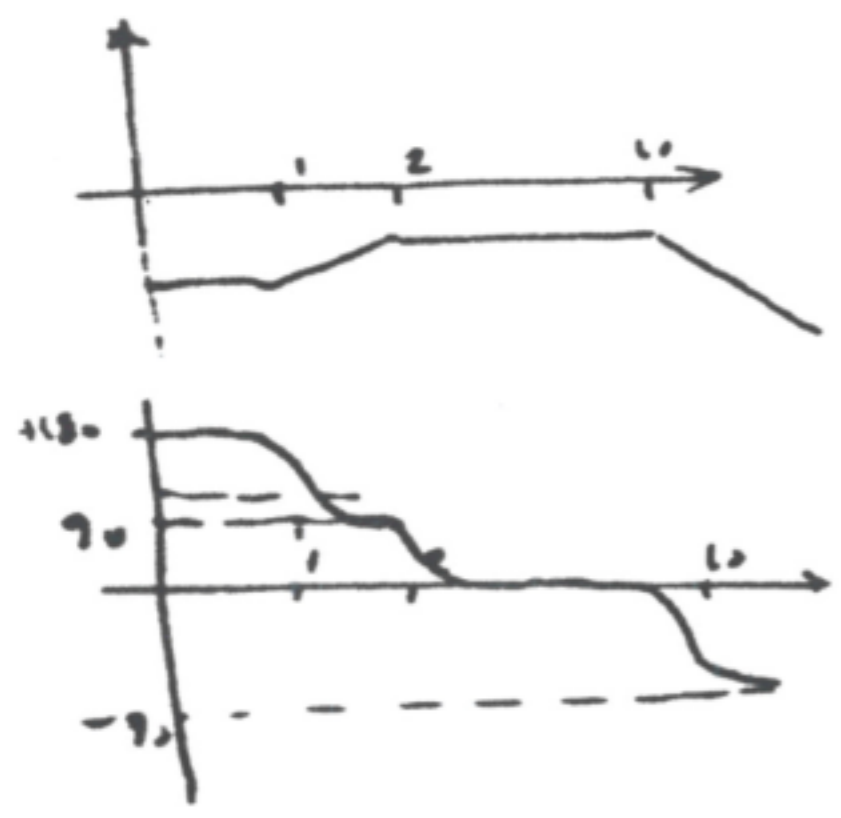
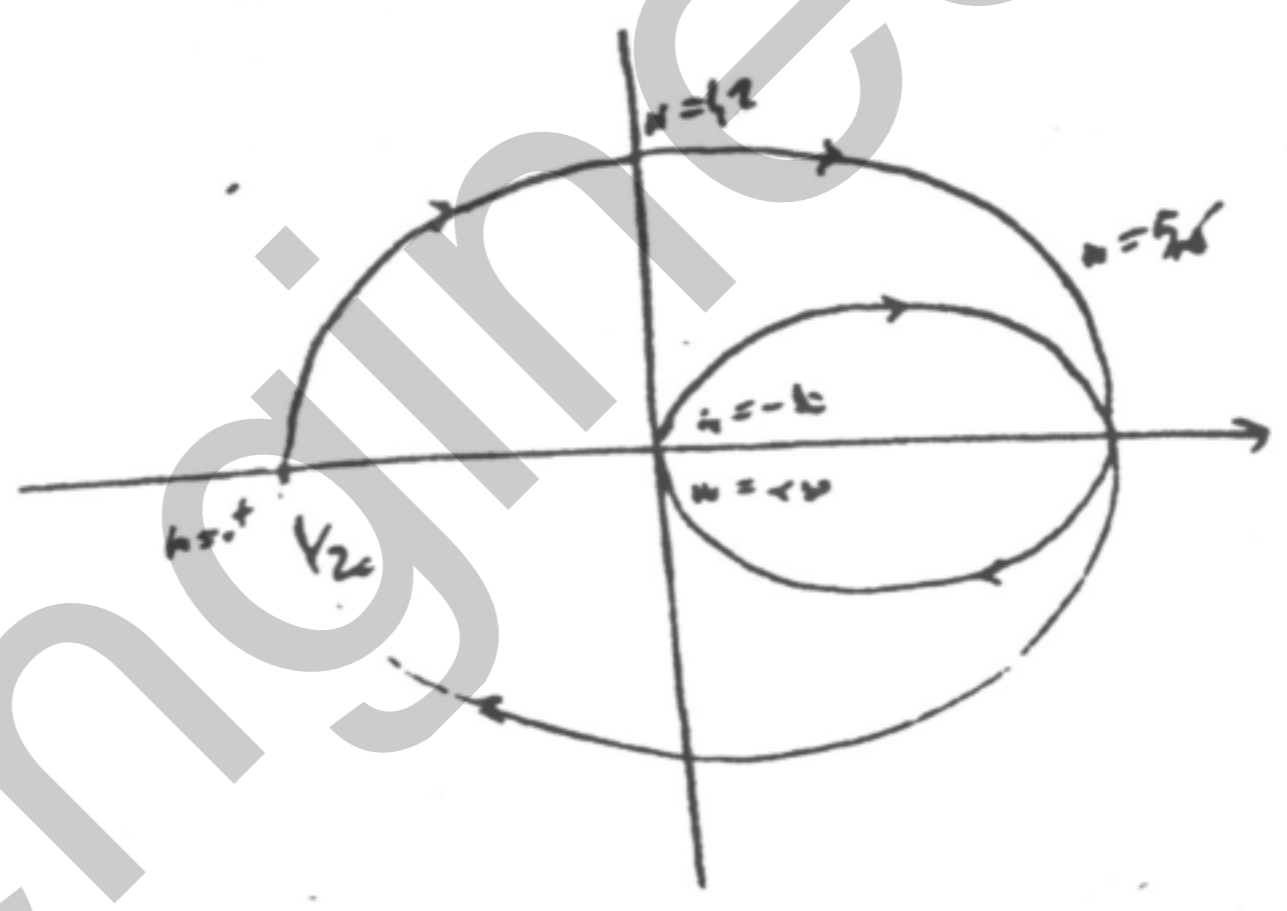
$G(s) = \frac{s+1}{s+10}$ *Real*



$G(s) = \frac{s+10}{s+1}$ *lag*



$G(s) = \frac{s-1}{s^2+2ks+4}$

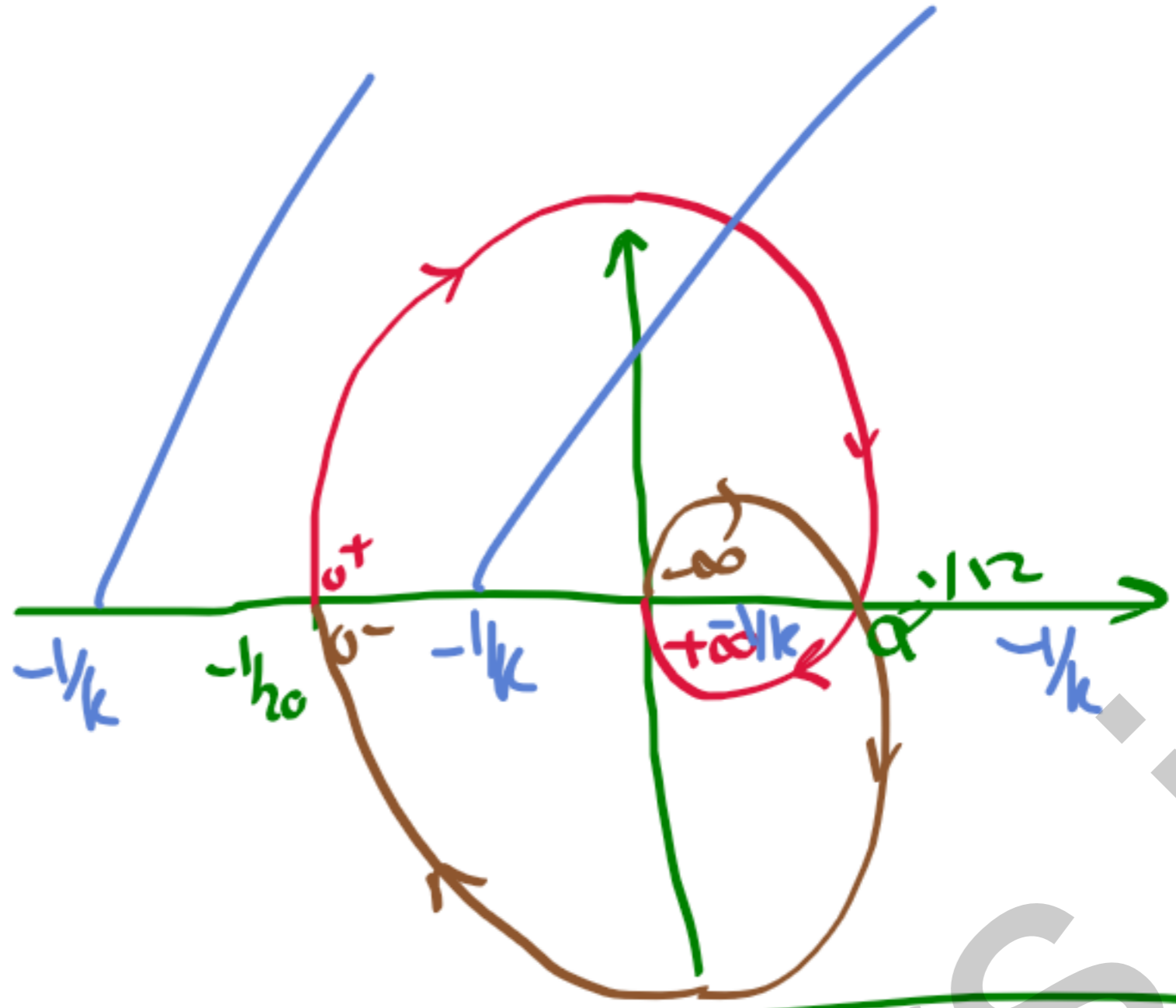
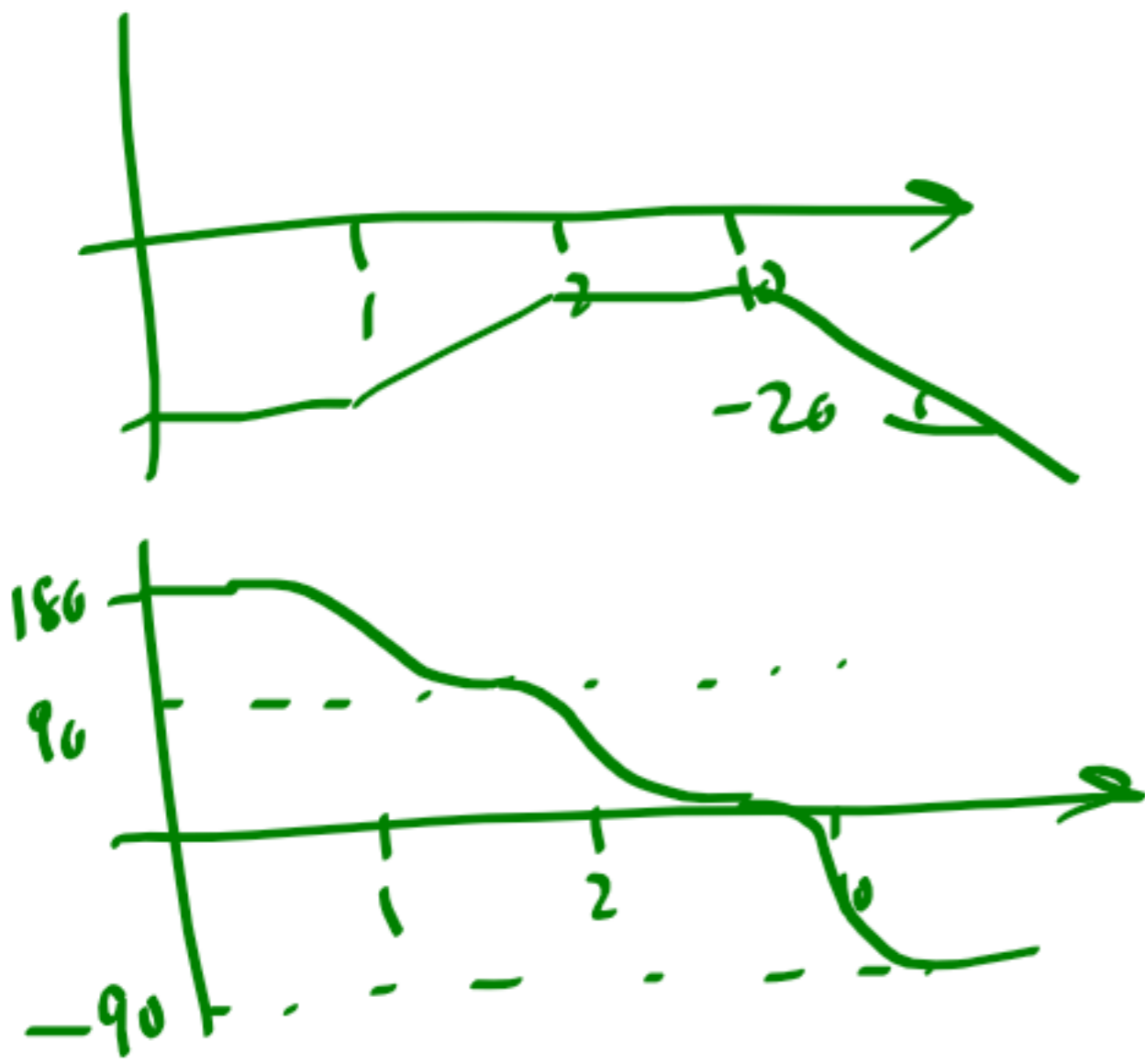


$$G_{lag} = \frac{j\omega - 1}{(j\omega + 2k)(j\omega + 2)} = \frac{j\omega - 1}{2\omega^2 + j2\omega} = \frac{(j\omega - 1)(2\omega^2 - j2\omega)}{(2\omega^2)^2 + 4\omega^2} = \frac{-2\omega + \omega^2 + j(2\omega^3 - 2\omega)}{(2\omega^2)^2 + 4\omega^2}$$

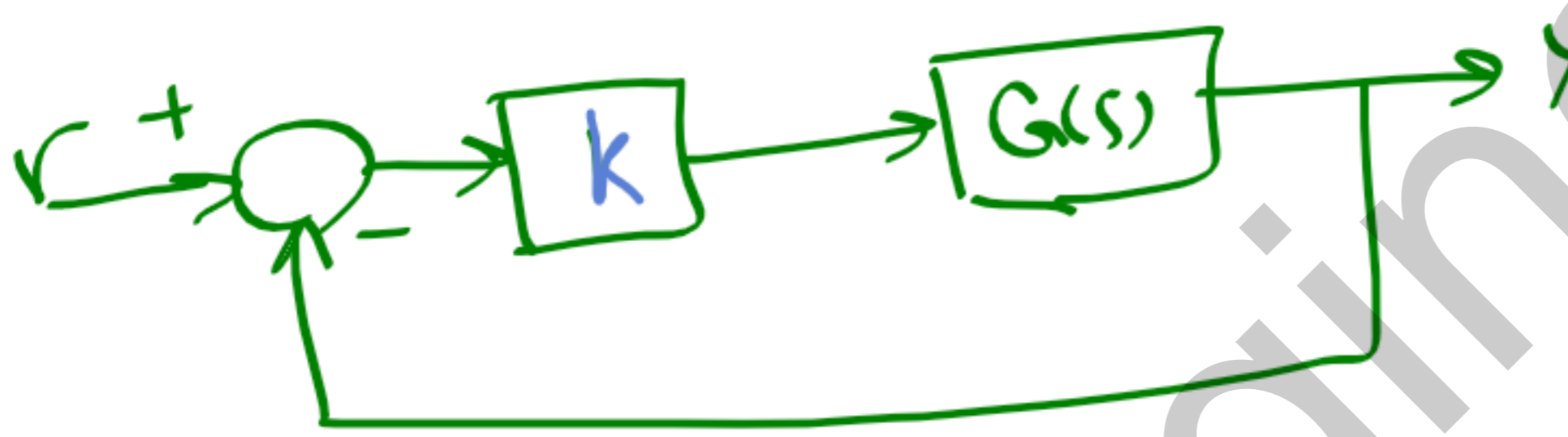
Re $G_{lag} = 0 \Rightarrow 13\omega^2 - 2 = 0$
 $\omega = \sqrt{\frac{2}{13}} \approx 0.39$

Im $G_{lag} = 0 \Rightarrow -\omega(\omega^2 - 32) = 0 \Rightarrow \omega^2 = 32 \Rightarrow \omega = 5.66$

$$G = \frac{s-1}{(s+2)(s+10)}$$



$$0 = z - 0 \quad z = 0$$



$$1 + kG = 0 \rightarrow G = -1/k$$

- if $-1/k < -1/20 \rightarrow 0 = z - 0 \rightarrow z = 0$ محل
- if $-1/20 < -1/k < 0 \rightarrow 1 = z - 0 \rightarrow z = 1$ محل
- if $0 < -1/k < 0 \rightarrow 2 = z - 0 \rightarrow z = 2$ محل
- if $0 < -1/k < 0 \rightarrow 0 = z - 0 \rightarrow z = 0$ محل

$$-1/k < -1/20 \rightarrow 1/k > 1/20 \quad k < 20$$

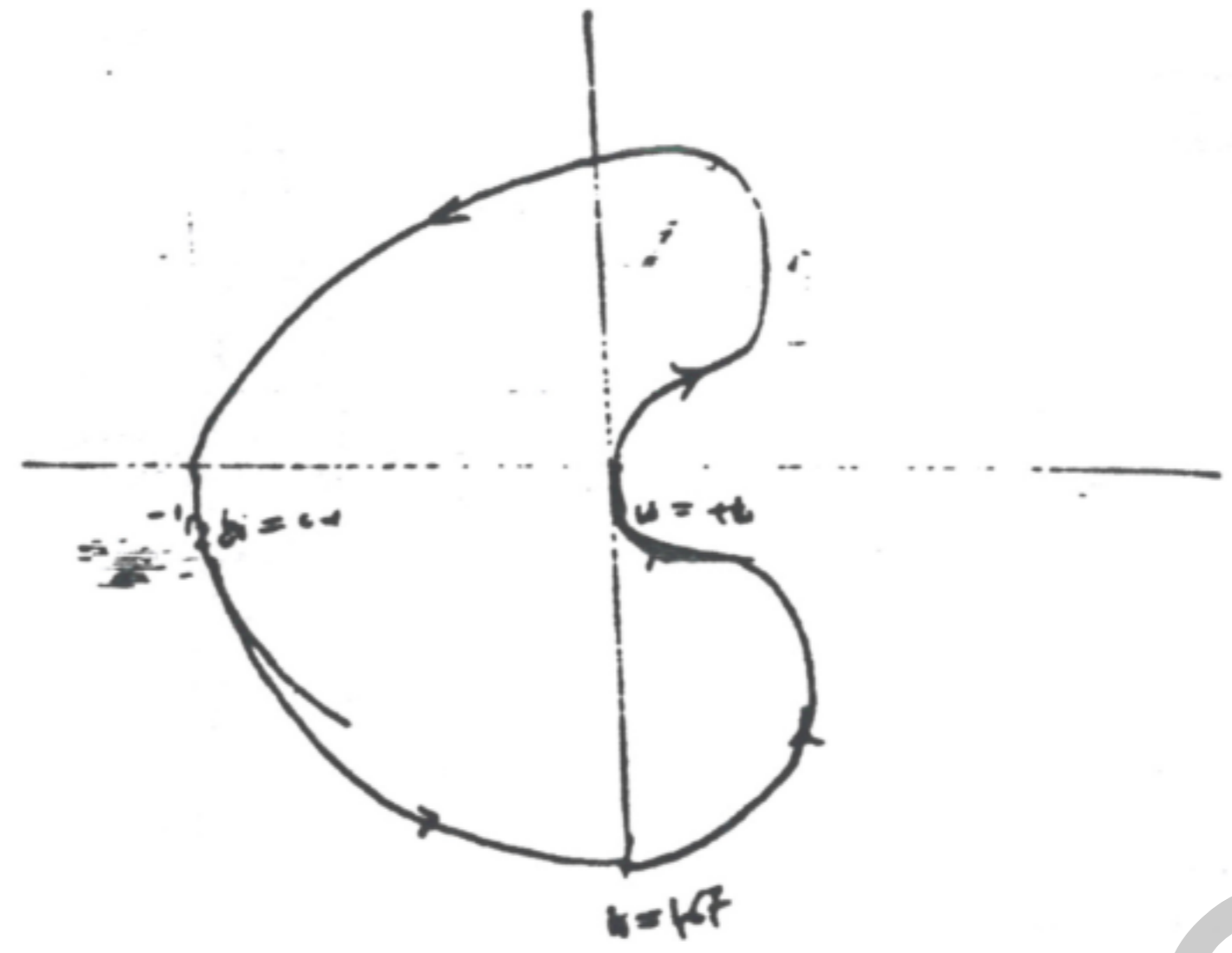
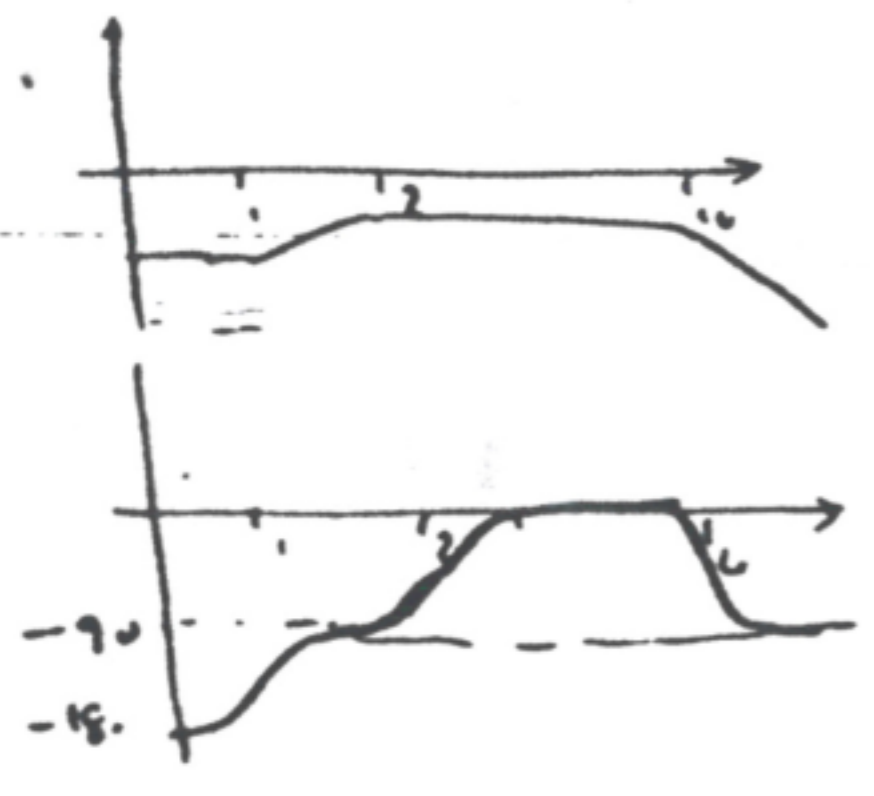
$$G(j\omega) = \frac{j\omega - 1}{(j\omega - 2)(j\omega - 10)} = \frac{j\omega - 1}{(20 - \omega^2) + j12\omega} \times \frac{(20 - \omega^2) - j12\omega}{(20 - \omega^2) - j12\omega}$$

$$= \frac{[-(20 - \omega^2) + 12\omega^2] + j[\omega(20 - \omega^2) + 12\omega]}{(20 - \omega^2)^2 + (12\omega)^2}$$

$$G(j\omega)|_{\omega=4\sqrt{2}} = \frac{12 + 12 \times 32}{144 + 144 \times 32} = \frac{12(33)}{12(12 + 12 \times 32)} = \frac{1}{12}$$

$\omega(20 - \omega^2 + 12) = 0$
 $32 - \omega^2 = 0$
 $\omega = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

② $G(s) = \frac{s+1}{(s-2)(s+10)}$

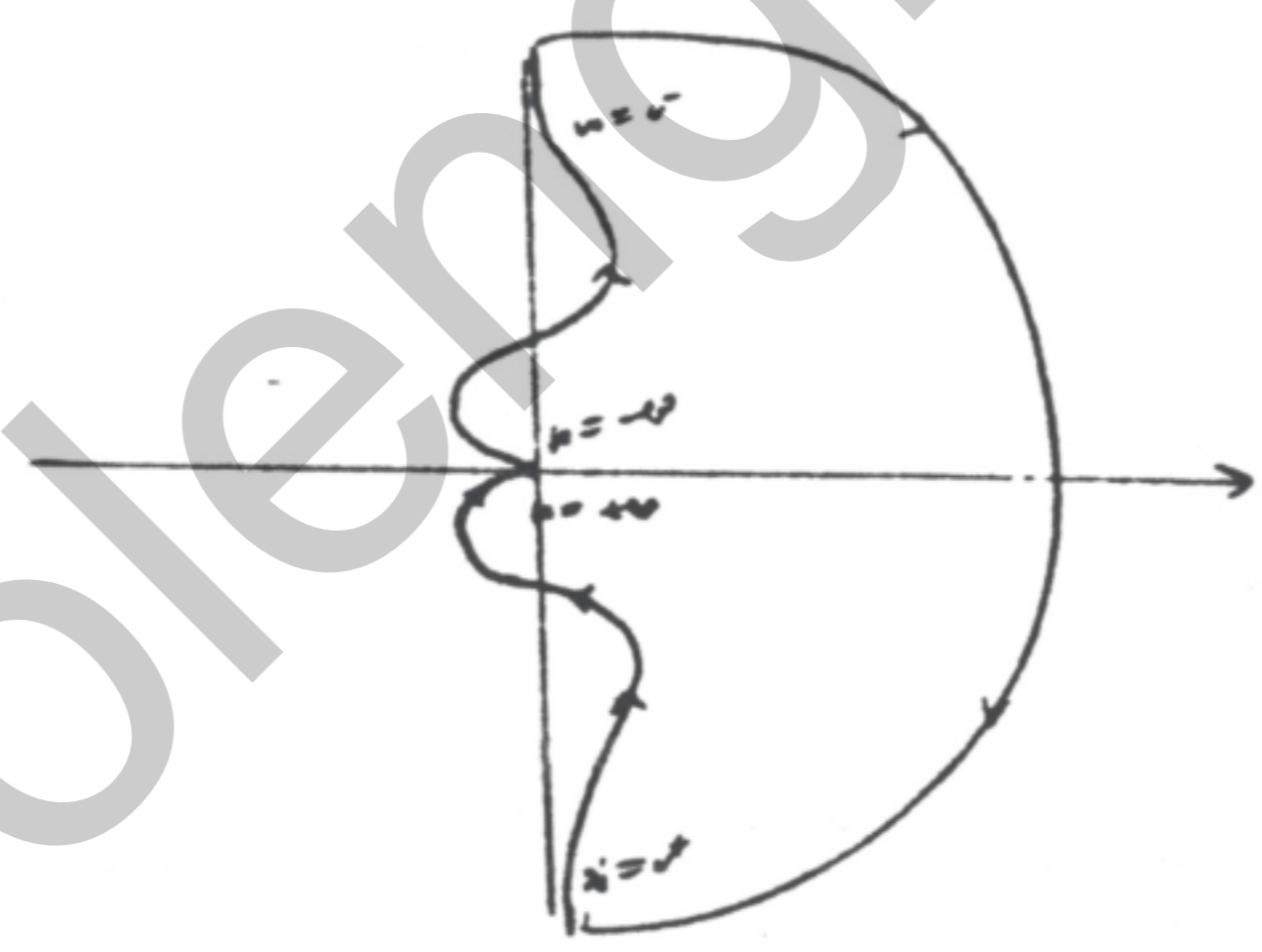


$$G(j\omega) = \frac{j\omega + 1}{(j\omega - 2)(j\omega + 10)} = \frac{j\omega + 1}{-j\omega^2 - 20 + j10\omega} = \frac{-(j\omega + 1)(-j\omega^2 - 20 + j10\omega)}{(j\omega - 2)(j\omega + 10)(-j\omega^2 - 20 + j10\omega)}$$

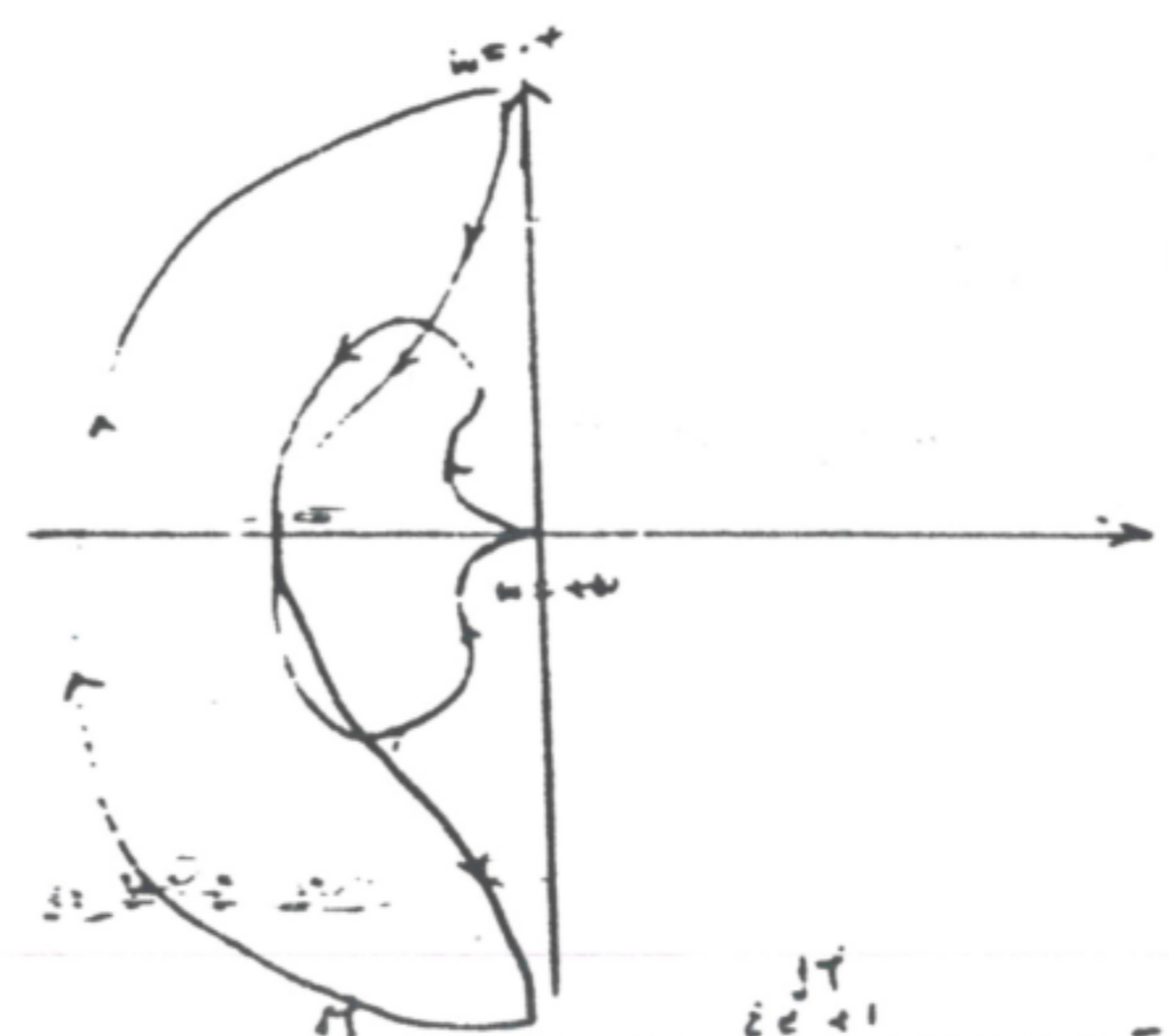
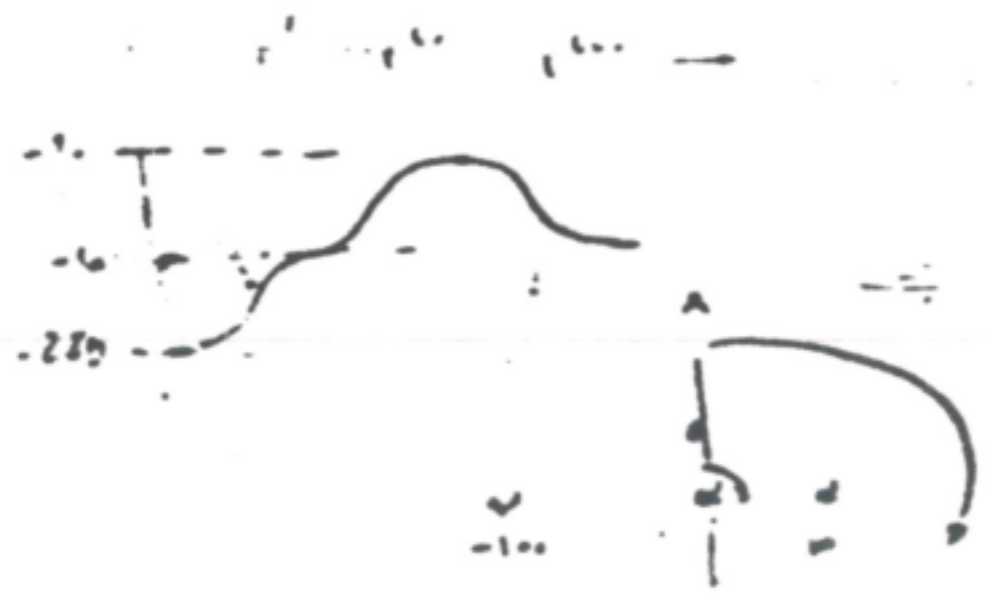
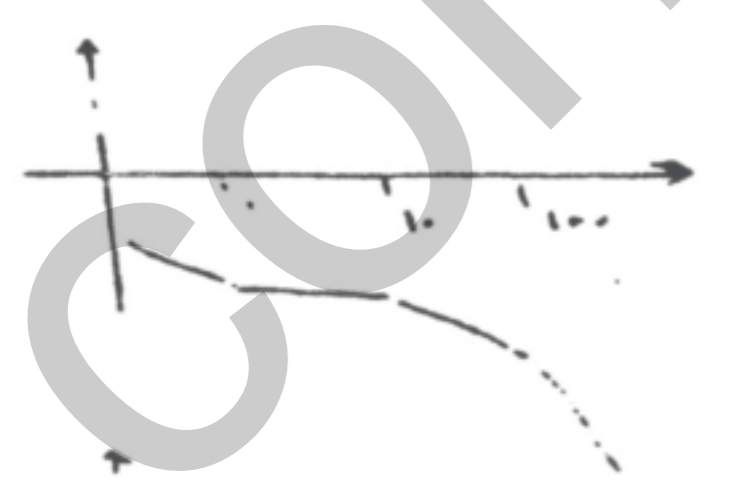
$\text{Re}\{G(j\omega)\} = 0 \Rightarrow -7\omega^2 + 20 = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{20}{7} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{20}{7}} \approx 1.69$

$\text{Im}\{G(j\omega)\} = 0 \Rightarrow \omega(\omega^2 + 20) = 0 \Rightarrow \omega = 0 \text{ or } \pm j\sqrt{20}$

$G(s) = \frac{s+1}{s(s-10)(s+10)}$



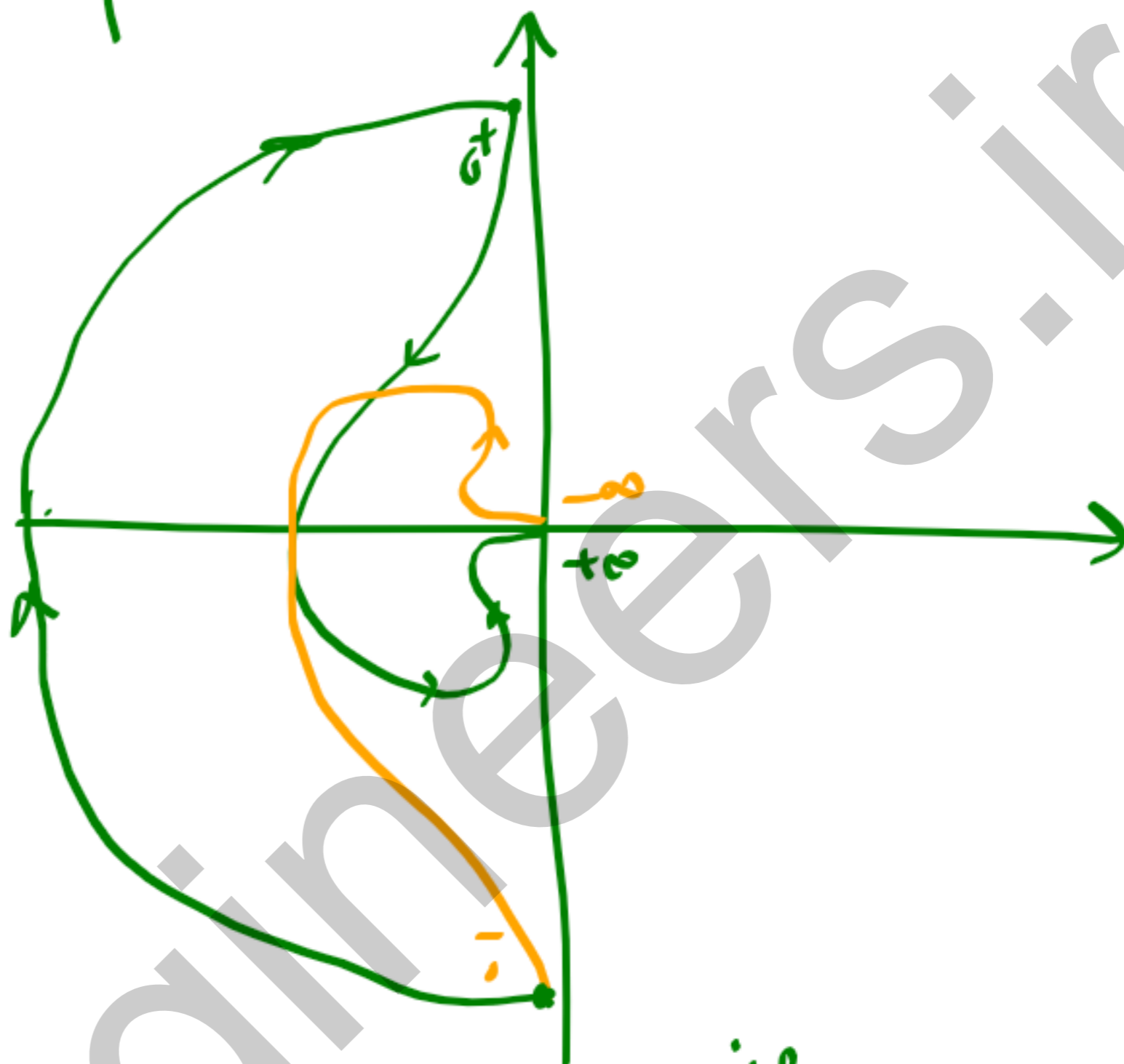
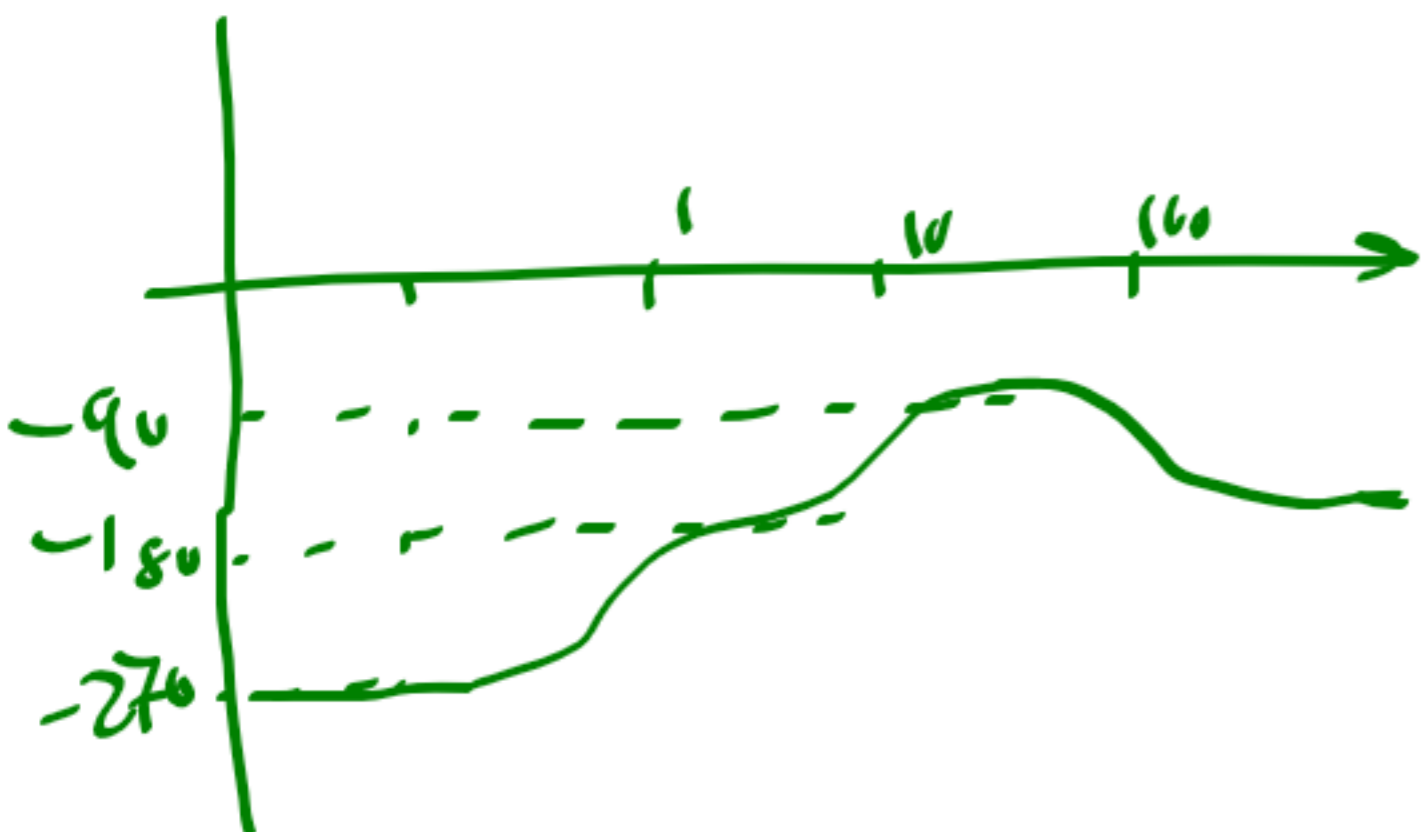
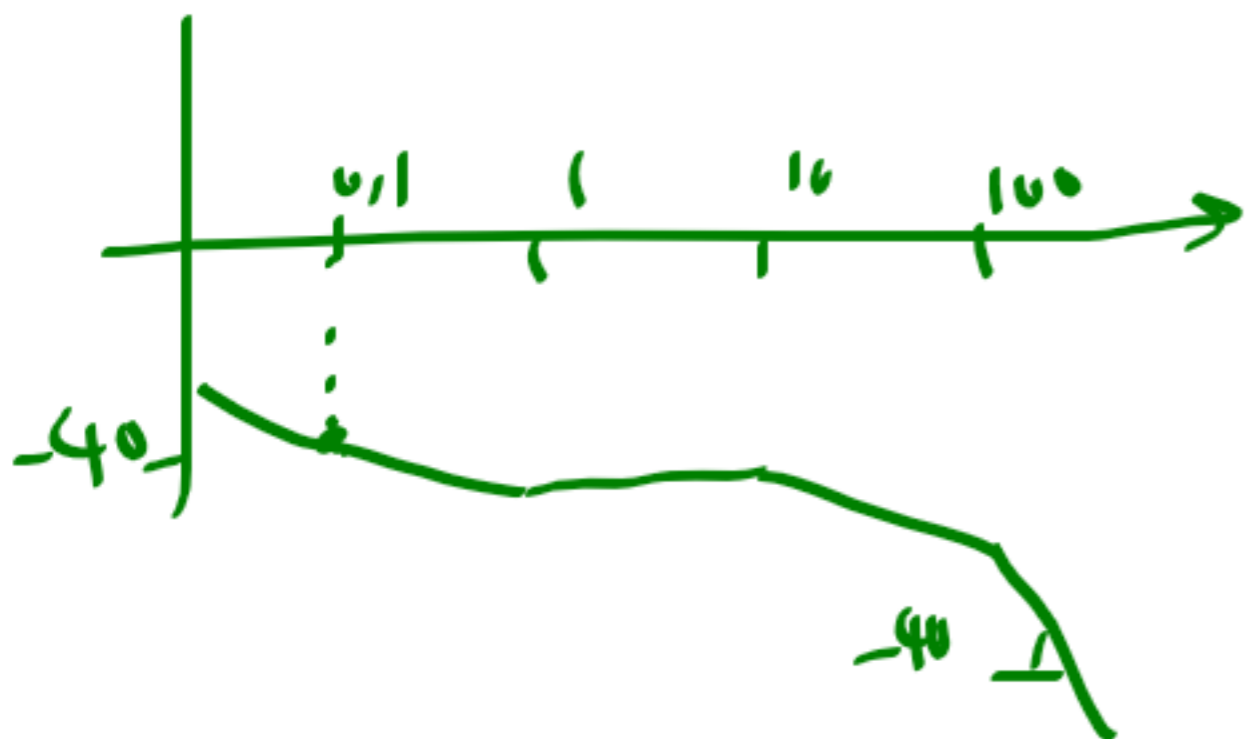
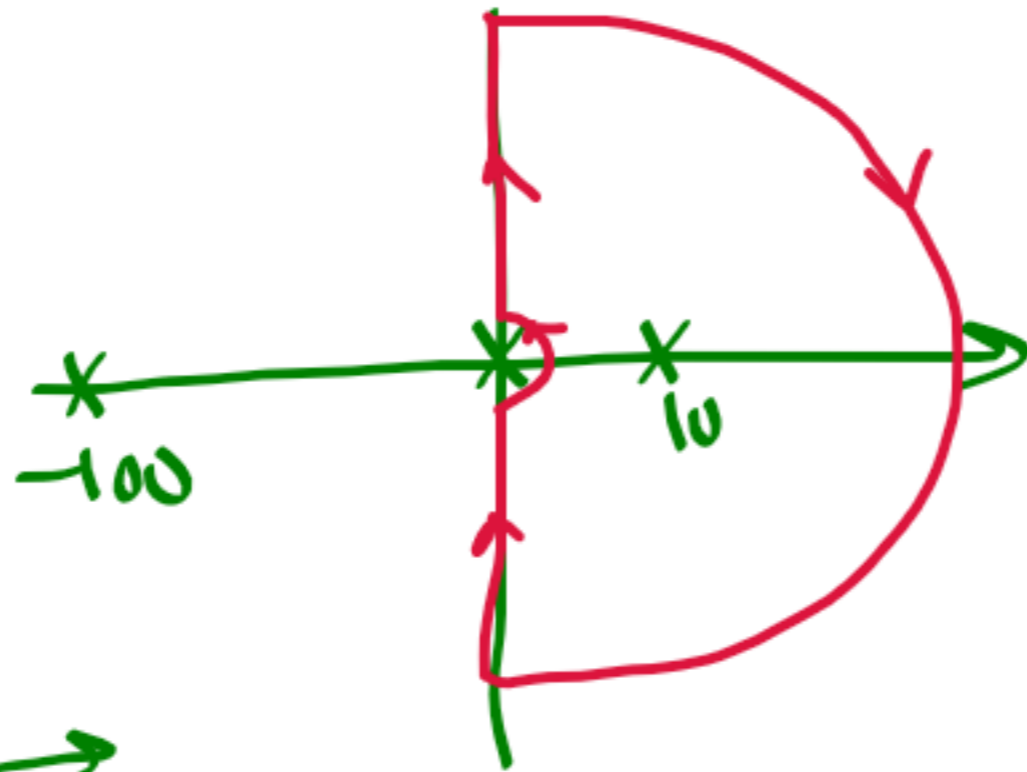
$G(s) = \frac{s+1}{s(s-10)(s+10)}$



$G(s) = \frac{s+1}{s(s-10)(s+10)}$

$G(j\omega) = \frac{j\omega + 1}{j\omega(j\omega - 10)(j\omega + 10)} = \frac{j\omega + 1}{-j\omega^3 - 100 + j10\omega}$

$$G = \frac{s+1}{s(s-10)(s+10)}$$



$$s = r e^{j\varphi}$$

$$r \rightarrow 0^+$$

$$\varphi: -90 \rightarrow 0 \rightarrow 90$$

$\omega = 0^- \quad \quad \quad \omega = 0^+$

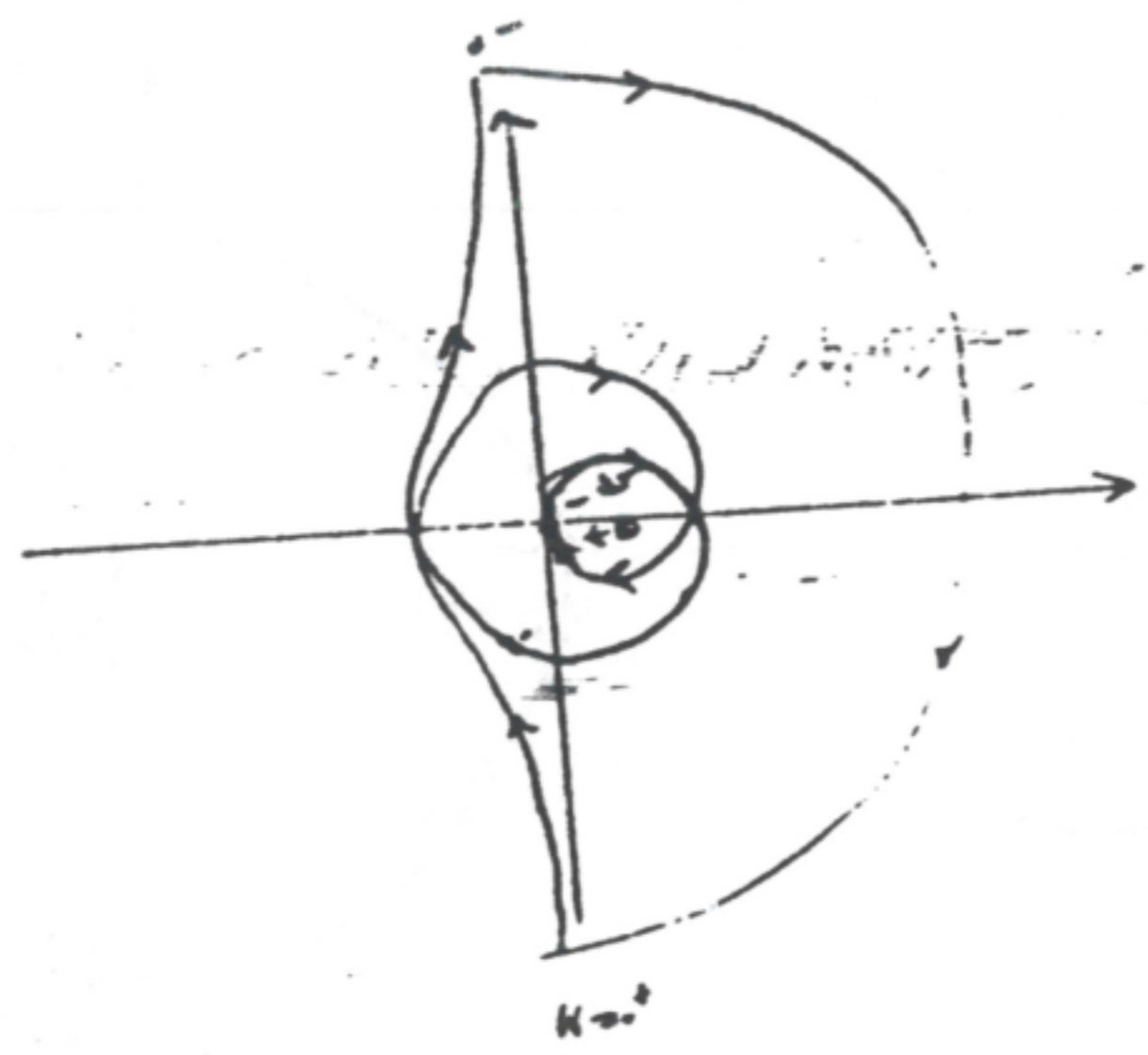
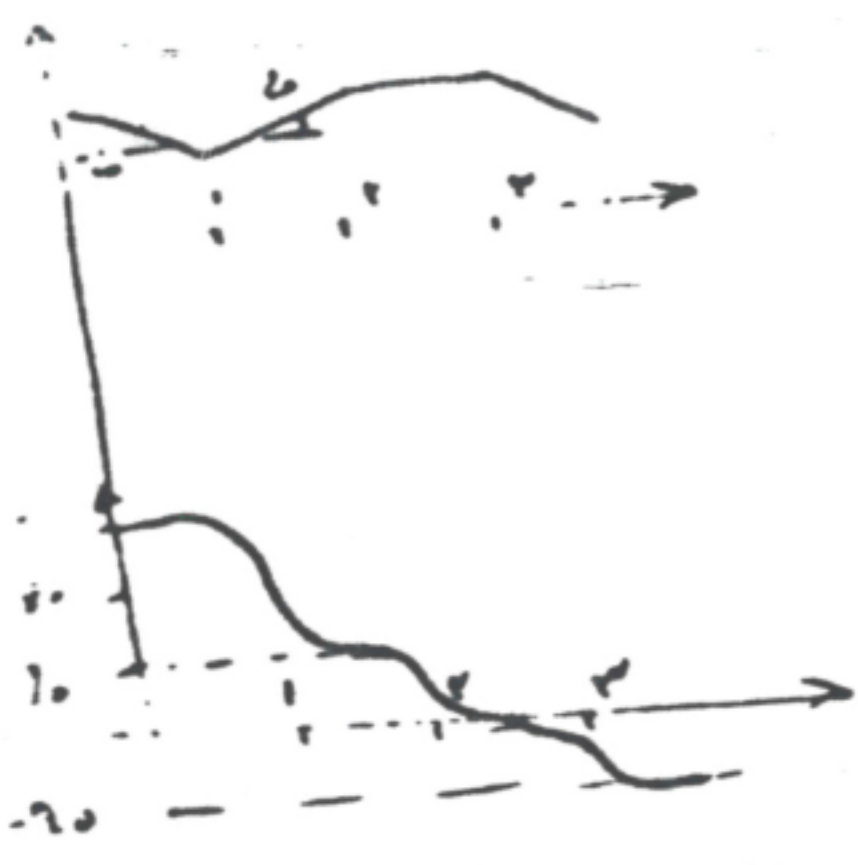
$$\lim_{r \rightarrow 0} G(s) = \frac{r e^{j\varphi} + 1}{r e^{j\varphi} (r e^{j\varphi} - 10)(r e^{j\varphi} + 10)}$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{-100 r e^{j\varphi}}$$

$$= -\infty e^{j\varphi}$$

$\rightarrow \infty e^{j90}$
 $\rightarrow \infty e^{j0}$
 $\rightarrow \infty e^{j0}$

$$G(s) = \frac{(s-1)^2}{s(s+2)(s+3)}$$



$s = \epsilon e^{j\varphi}$
 $\varphi: -90 \rightarrow -180$
 $\epsilon: 0 \rightarrow \infty$

$$G(s) = \frac{(s-1)^2}{s(s+2)(s+3)} = \frac{1}{\epsilon e^{j\varphi} (\epsilon e^{j\varphi} + 2)(\epsilon e^{j\varphi} + 3)}$$

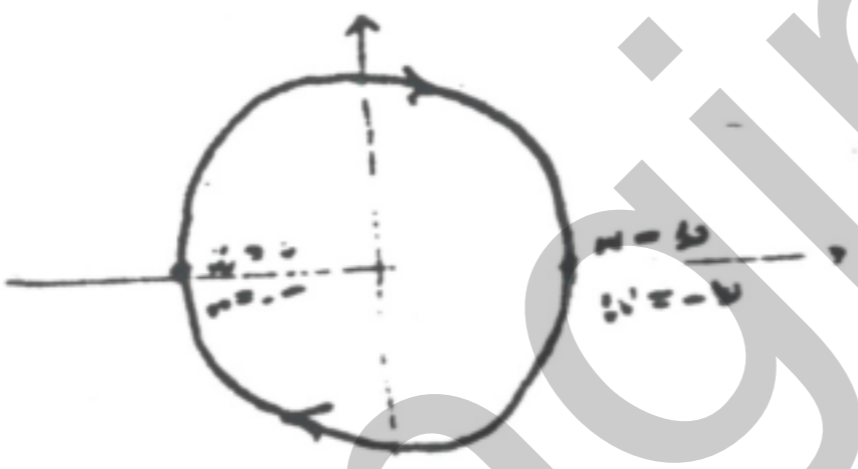
$$G(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

$$|G(j\omega)| = 1$$

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow |G(j\omega)| = 1 \angle 0^\circ$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow |G(j\omega)| = 0 \angle -90^\circ$$

$$\omega = 1 \Rightarrow G(j\omega) = \frac{j-1}{j+1} = \frac{(j-1)(1-j)}{(j+1)(1-j)} = \frac{-(j-1)^2}{2} = \frac{+2j}{2} = j$$



$$G(s) = \frac{-sT}{s+1}$$

$$|G(j\omega)| = 1$$

$$\angle G(j\omega) = -\pi T \sin \omega T = -5.73 \pi T \text{ (در صورتی که } T \text{ در حد } 0.1 \text{ باشد)}$$

تأمین پهنای باند ندارد
 فاز را اندک تا آن
 رنج آرایان کاهش دهد

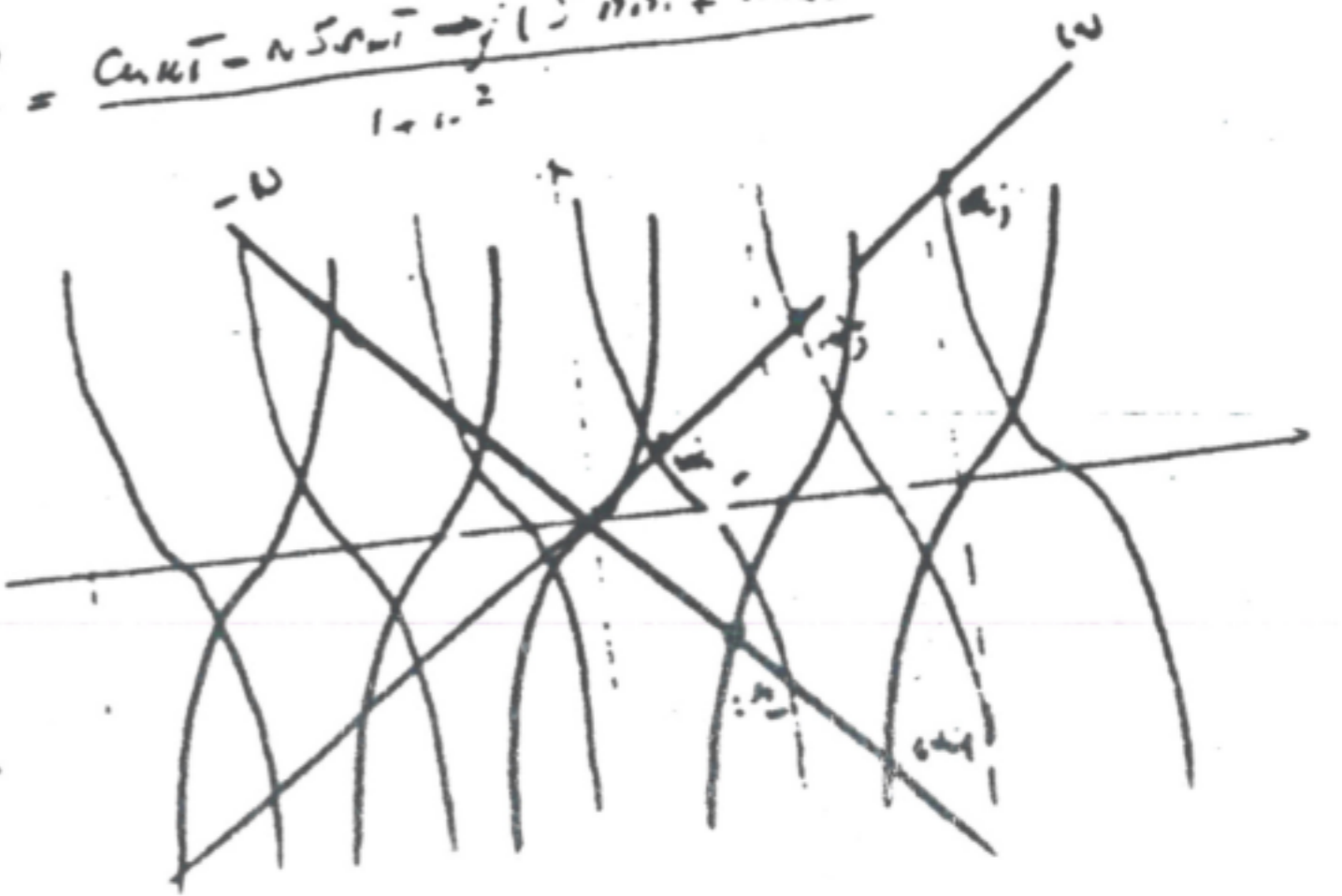
باعث می شود در حین کار
 صورت درونی جدول
 برود.

$$G(s) = \frac{-sT}{s+1}$$

$$G(j\omega) = \frac{-j\omega T}{j\omega + 1} = \frac{G(\omega T) - jS(\omega T)}{1 + \omega^2} = \frac{C(\omega T) - N S(\omega T)}{1 + \omega^2} = \frac{C(\omega T) - N S(\omega T)}{1 + \omega^2}$$

$$\text{Re}\{G(j\omega)\} = \frac{C(\omega T) - N S(\omega T)}{1 + \omega^2} \Rightarrow C(\omega T) = e$$

$$\text{Im}\{G(j\omega)\} = \frac{-S(\omega T)}{1 + \omega^2} \Rightarrow S(\omega T) = -\omega$$

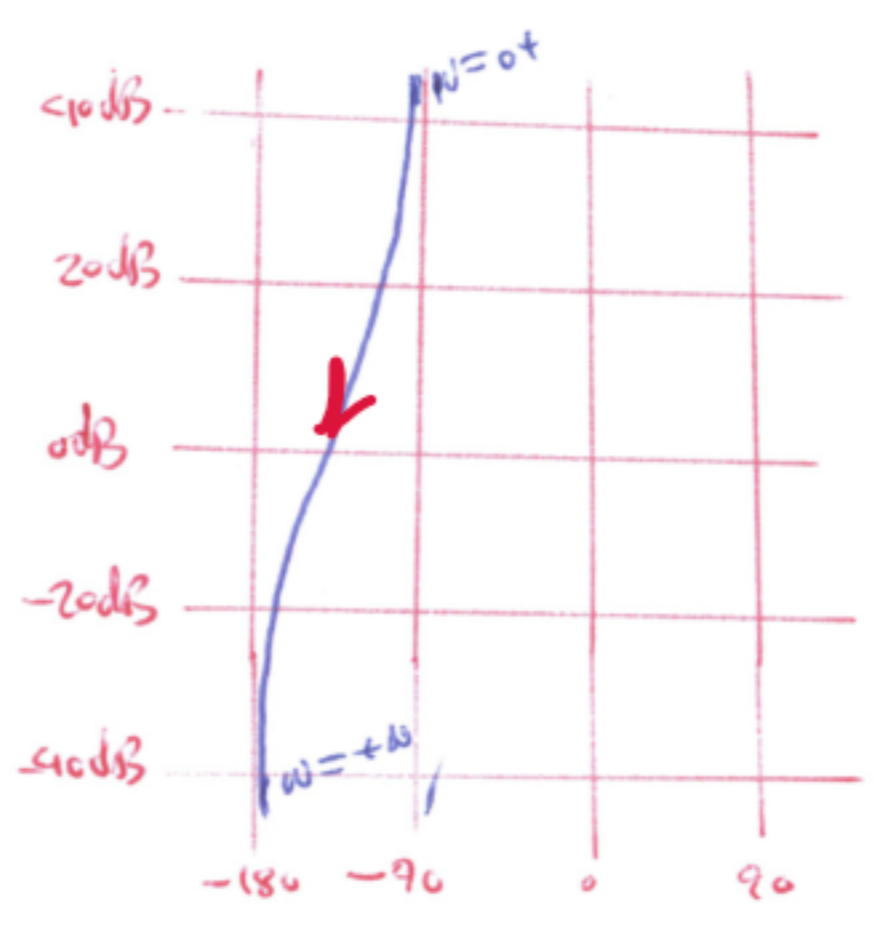
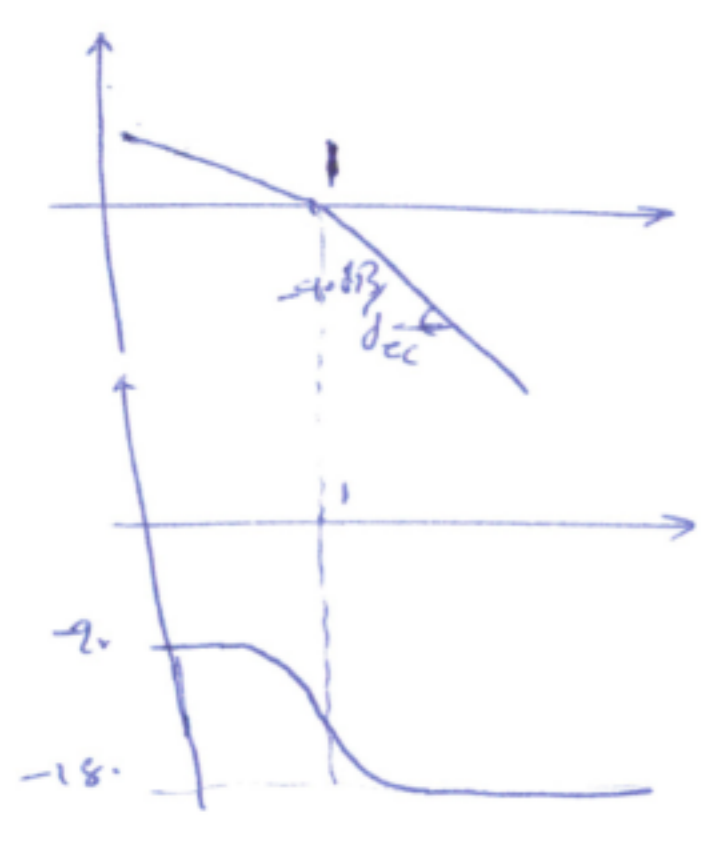


بیم منحنی اندازه بر حسب فاز می باشد. فقط برای شبکه های بیگانه هم نمودار

دیاگرام بیلوگز را می توان به راحتی از مدار

دیاگرام فاز اندازه برداشت کرد.

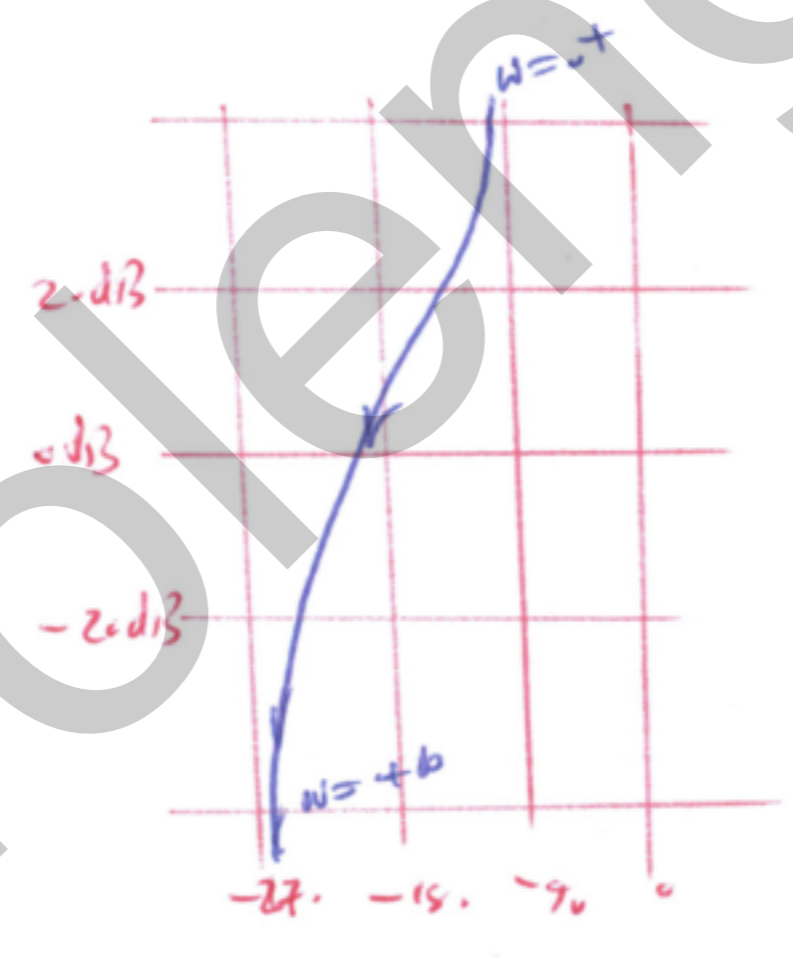
$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$



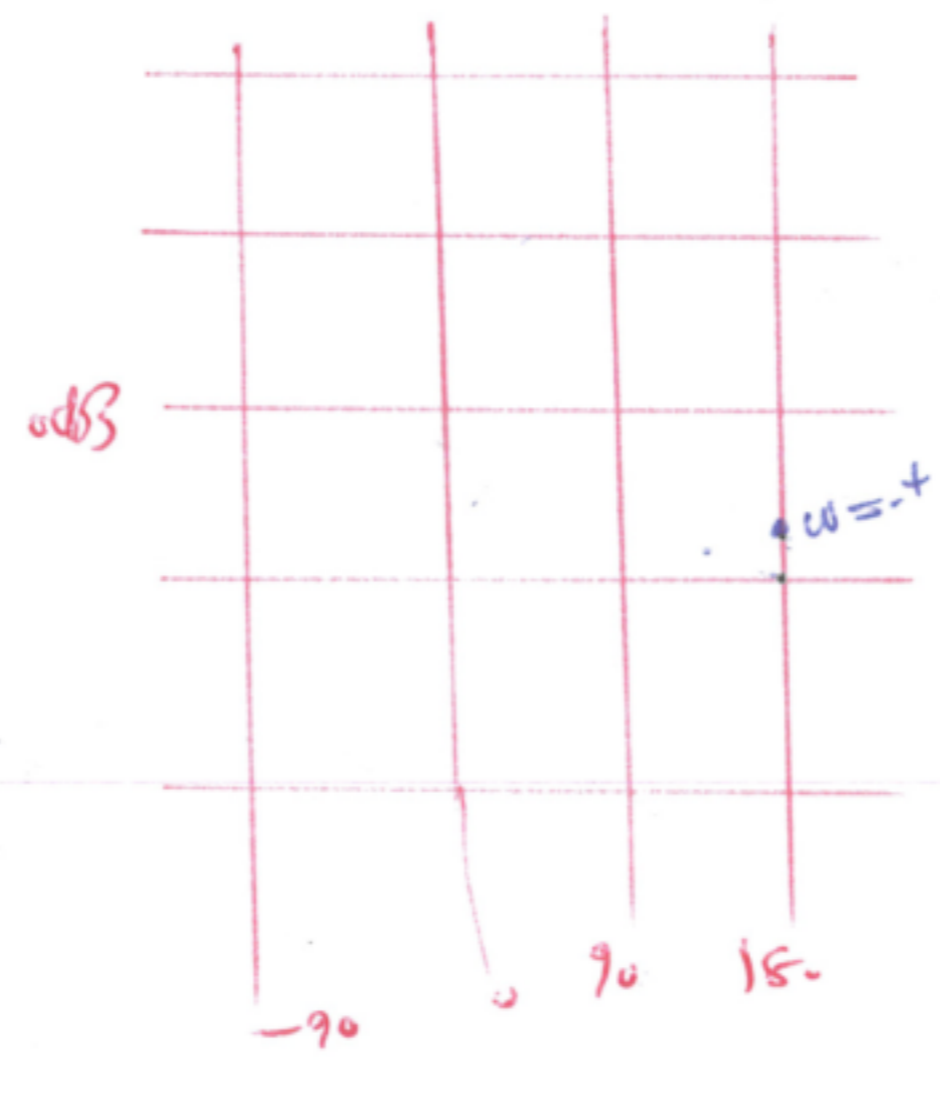
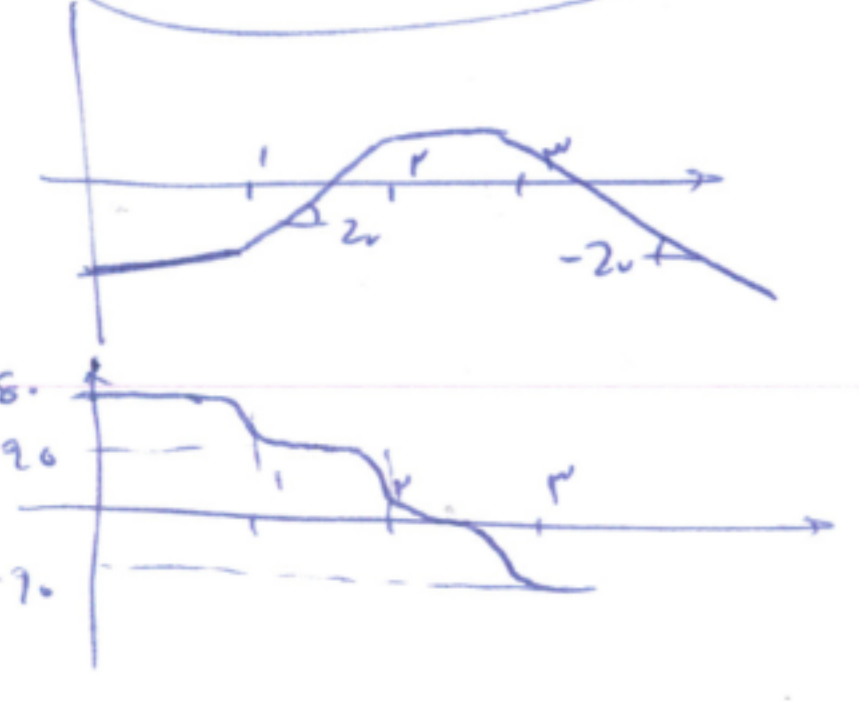
مثال:



$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$



$G(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+3)}$



$\omega \rightarrow 1 \Rightarrow |G(j\omega)| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} \cdot 1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{25}} = \frac{1}{\sqrt{25}}$
 $20 \log \frac{1}{\sqrt{25}} = 20 \log 25^{-1/2}$
 $= -10 \log 25 = -13.97 \approx -14$

$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow |G(j\omega)| = \frac{1}{2 \times 3}$
 $20 \log \frac{1}{6} = -15.56$

$\omega \rightarrow 2 \Rightarrow |G(j\omega)| = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{13}}$
 $20 \log \text{...} = -13.18$

فرکانس قطع پهنه (فرکانس عبور میده): فرکانسی است که در آن اندازه تابع تبدیل حلقه باز برابر 1 است.

فرکانس قطع فاز: فرکانسی است که در آن زاویه فاز تابع تبدیل حلقه باز 180° است.

حدفاز (Phase margin): حدفاز عبارت است از مقدار یغای لازم در فرکانس عبور میده که سیستم را به مرز ناپایداری می رساند.

در حقیقت PM حدفاز بزرگتر سیستم را بیان می کند و مقدار فازی است که می توان به سیستم تزریق کرد تا سیستم به مرز ناپایداری برسد.

پس با متن حدفاز PM فرکانس قطع ابتدا فرکانس قطع میده را محاسبه کنیم (اندازه تابع تبدیل حلقه باز را برابر 1 گرفته و

فرکانس با آن فرکانسهای مورد نظر را می بینیم) و فاز PM را در فرکانس قطع میده (اگر مقدار فرکانس های قطع میده بزرگتر از

یکی شده برکتین فرکانس را انتخاب می کنیم) PM بدست می آید. حدفاز برابر 180° علاوه بر PM بدست آمده خواهد بود.

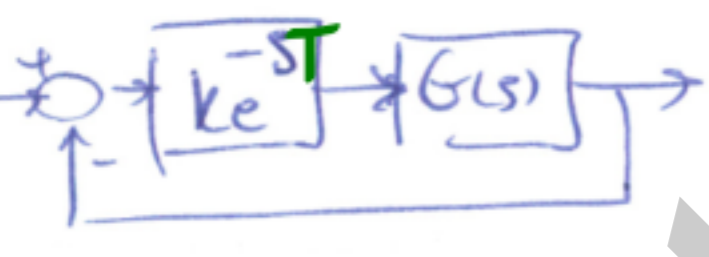
حده پهنایی (Gain Margin): GM عبارت است از معکوس اندازه تابع تبدیل حلقه باز در فرکانس قطع فاز است. GM در حقیقت بزرگتر سیستم را بیان می کند.

مقدار بهر طریقی است که می توان به سیستم تزریق نمود تا سیستم را به مرز ناپایداری برساند.

پس با متن حدفاز PM ابتدا فرکانس قطع فاز را محاسبه کنیم (فاز تابع تبدیل حلقه باز را برابر 180° گرفته و فرکانس مربوطه را

بدست می آوریم) و GM معکوس اندازه تابع تبدیل حلقه باز را در فرکانس بدست آمده محاسبه می کنیم. حدفاز GM بر حسب dB

مقدار می شود بنابراین از تابع بدست آمده GM محاسبه می کنیم یا اگر فرکانس GM بدست می آید.



— برای بدست آوردن حده پهنایی GM باقی حدفاز GM میده (بر حسب dB) عددی مثبت باشد. کافی است می اندازد یا مایل.

عددی منفی است تا سیستم ناپایدار شود.

مثال: بدان در چه مقداری از k ، PM میده بزرگتر از 5° و GM میده بزرگتر از 20 dB خواهد بود؟



توان خروجی: $\frac{110}{k}$

$$G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+10)}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\angle G(j\omega) = -180 \Rightarrow -90 - \tan^{-1} \omega - \tan^{-1} \frac{\omega}{10} = -180 \Rightarrow \tan^{-1} \omega + \tan^{-1} \frac{\omega}{10} = 90$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \Rightarrow \frac{\omega + \frac{\omega}{10}}{1 - \omega \times \frac{\omega}{10}} = \infty \Rightarrow \frac{\omega^2}{10} = 1 \Rightarrow \omega = \sqrt{10}$$

$$|G_{y_{out}}|_{\omega=\omega_c} = \frac{k}{\sqrt{10} \sqrt{10+1} \sqrt{100+10}} = \frac{k}{\sqrt{110} \sqrt{110}} = \frac{k}{110} \quad \frac{1}{|G_{y_{out}}|} = \frac{110}{k} > 5$$

$$\Rightarrow 110 > 5k \Rightarrow k < 22 \quad \checkmark$$

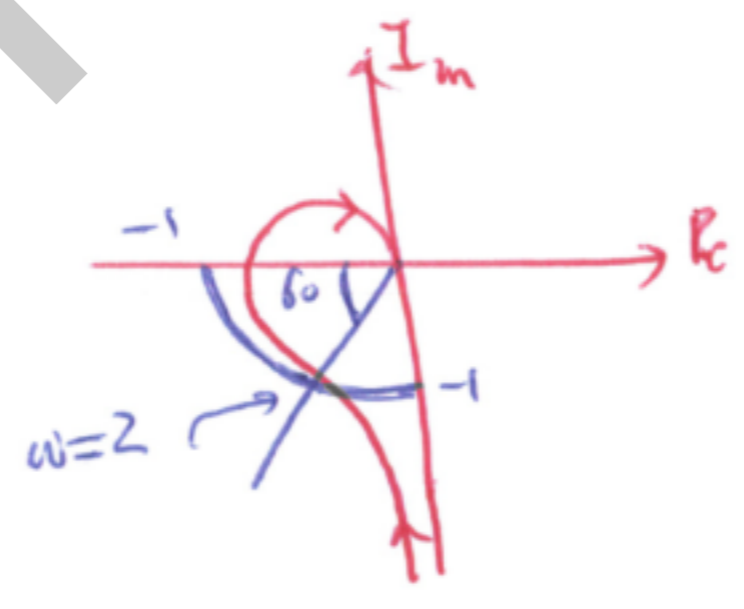
معادله: $s^3 + 11s^2 + 10s + k = 0$

$$\left. \begin{matrix} 11 \times 10 > k \\ k > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow 0 < k < 110$$

در این سیستم اگر $k < 5$ شود، اگر فرض کنیم $5 < k < 110$ شود، سیستم پایدار است.

$$\Rightarrow 0 < k < 110 \Rightarrow 0 < 5k < 110 \Rightarrow 0 < k < 22$$

مثال: در سیستم فیدبک زیر، حداکثر مقدار مجاز تأخیر زمانی T برابر با 30 است.



مقدار T : $|G(j\omega)| = 1 \Rightarrow \omega = 2$

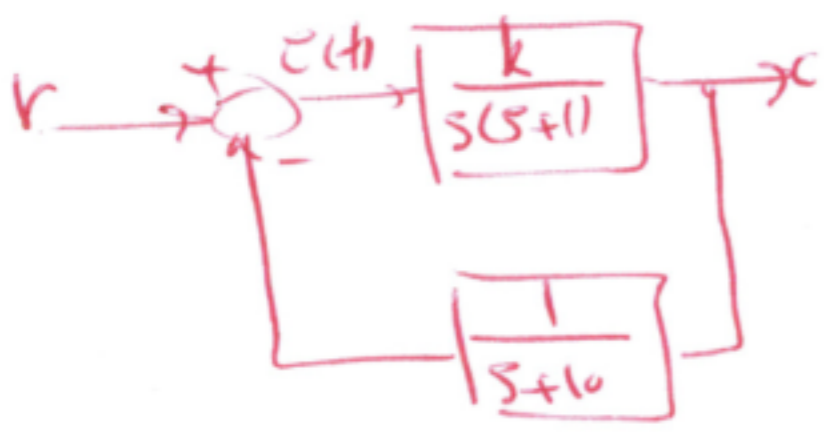
$$|e^{-j\omega T} G(j\omega)| = |G(j\omega)| = 1 \Rightarrow \omega = 2 \Rightarrow \angle e^{-j\omega T} G(j\omega) \Big|_{\omega=2} = -2T + 120$$

$$T = \frac{180 - 120}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

$$-2T - 120 + 180 = 0 \Rightarrow 2T < 60$$

$$T < 30$$

سیستم مقابل را در نظر بگیرید. اگر خطای حالت ماندگار E_{ss} به دردتیب واحد برابر 0.2 باشد، در چه مقدار سیستم تغییراتی است؟



$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + \frac{k}{s(s+1)(s+10)}} = \frac{s(s+1)(s+10)}{s(s+1)(s+10) + k}$$

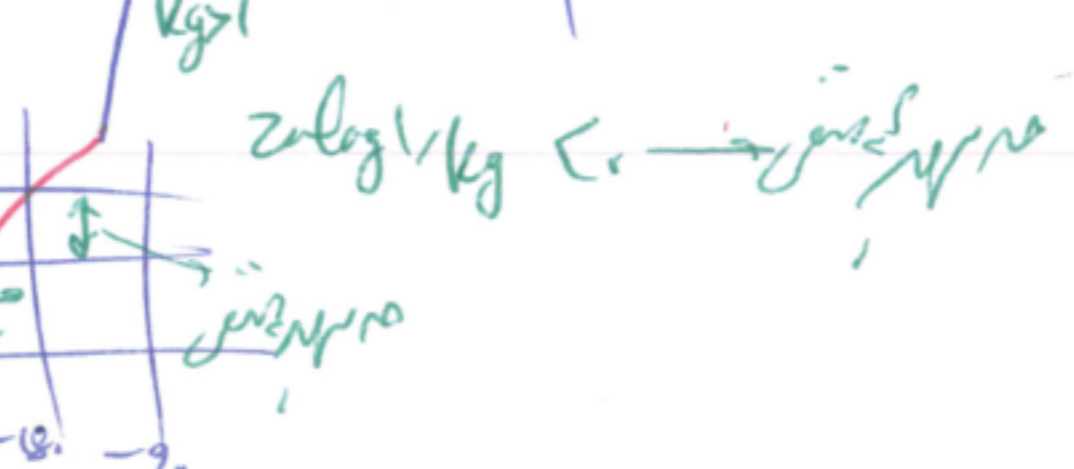
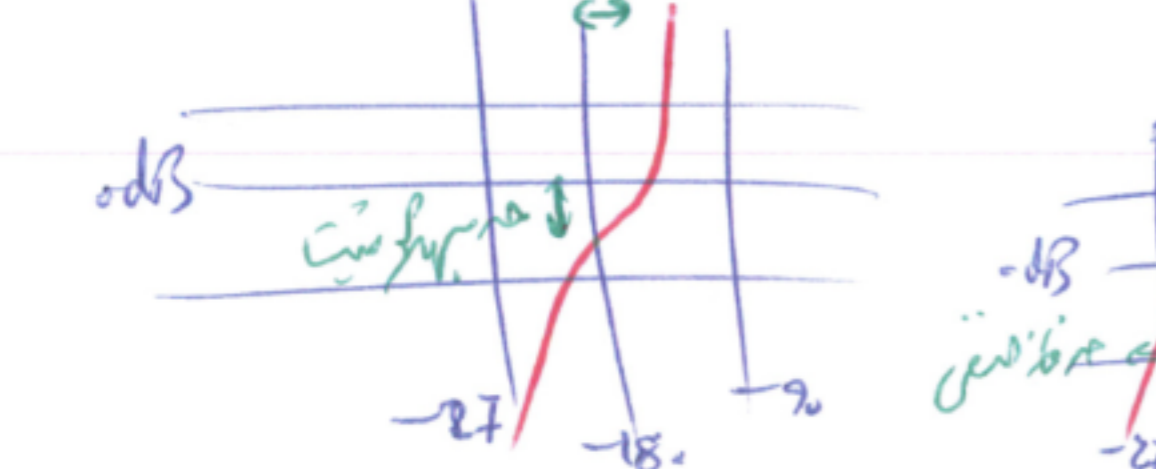
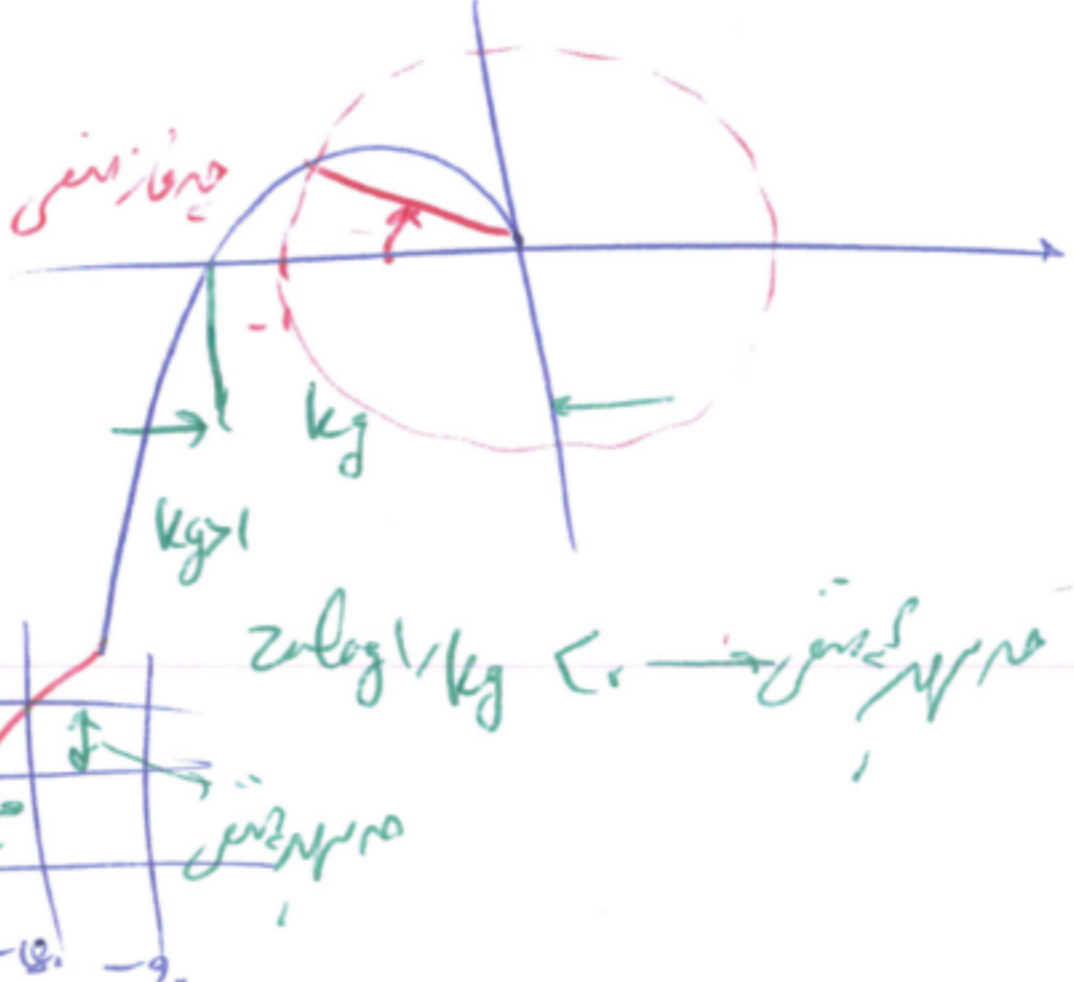
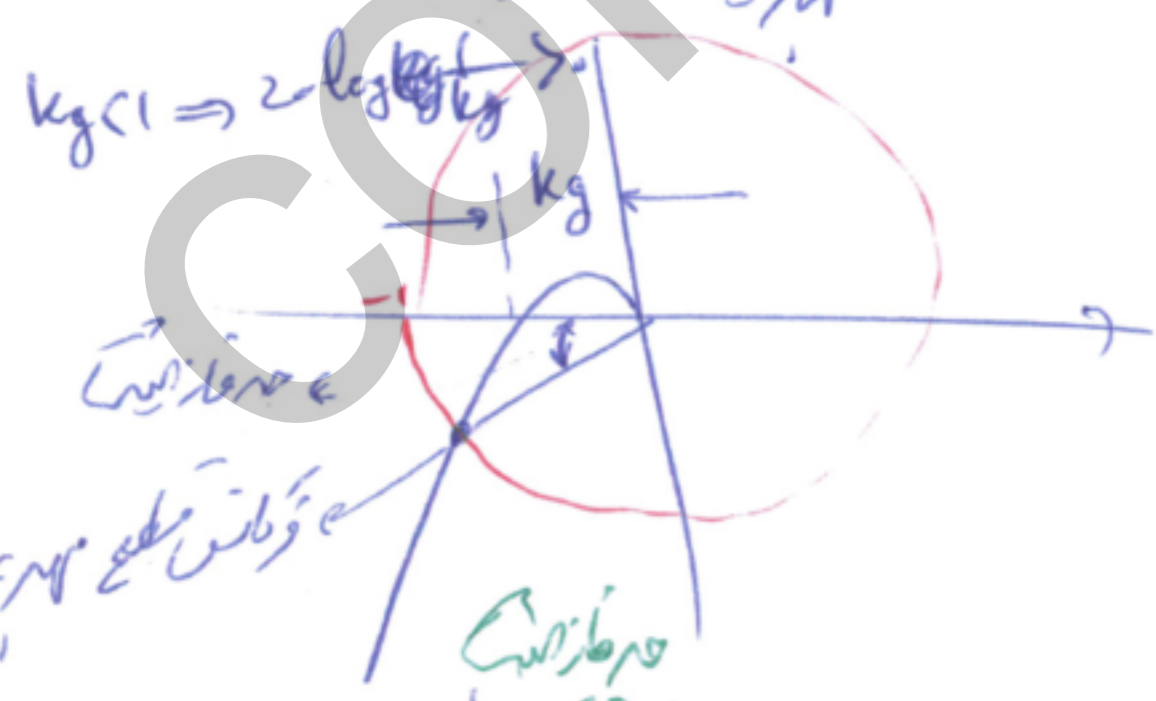
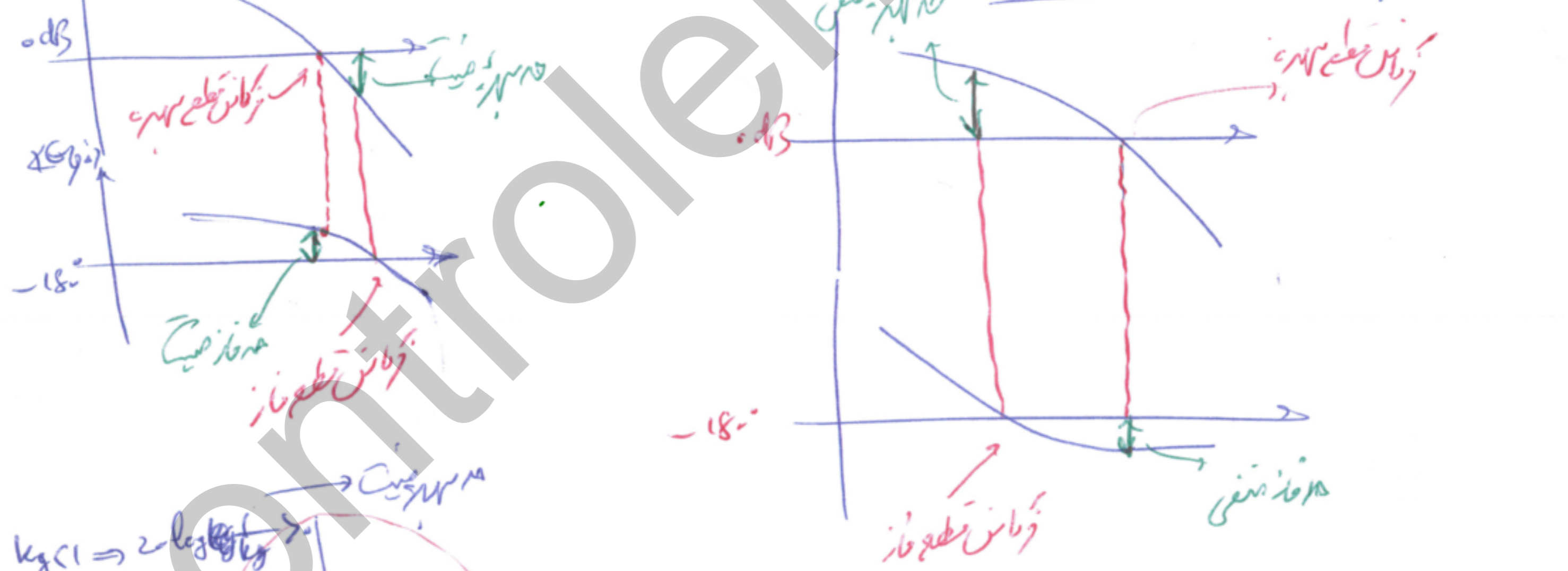
$E_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \times \frac{s(s+1)(s+10)}{s(s+1)(s+10) + k} \times \frac{1}{s^2} = \frac{10}{k+10} = 0.2 \Rightarrow \frac{2}{10} = \frac{10}{k+10} \Rightarrow 2(k+10) = 100 \Rightarrow 2k = 100 - 20 = 80 \Rightarrow k = 40$

$\phi_{PM} = ? \Rightarrow$ فرکانس قطع فاز: $\angle j\omega(j\omega+1) \cdot \frac{1}{j\omega+10} = -90^\circ - \tan^{-1}\omega - \tan^{-1}\frac{\omega}{10} = -180^\circ$

$\tan^{-1}\omega + \tan^{-1}\frac{\omega}{10} = 90^\circ \Rightarrow \frac{\omega \frac{\omega}{10}}{1 - \frac{\omega^2}{100}} = \infty \Rightarrow \omega = \sqrt{100} = 10$

$\phi_{PM} = \frac{110}{50} = \frac{11}{5} = 2.2$

در فازدهی هر چه بیشتر، ناپایداری بیشتر و طول تر شدن زمان قطع فاز



طراحی به کمک تحلیل فرکانسی:

مراحل طراحی فرکانسی:

۱- حد فاز سیستم را در فرکانس گفته شده بدست می آوریم. اگر این حد فاز بزرگتر یا مساوی حد فاز مطلوب باشد، نیازی به طراحی جبران حد فاز نداریم. ولی اگر حد فاز سیستم کمتر از مقدار مطلوب باشد، بایستی با استفاده از کنترل کننده lead این حد فاز را جبران کرد.

۲- مقدار فاز مورد نیاز سیستم یعنی تفاوت مقدار حد فاز مطلوب و حد فاز سیستم را بدست می آوریم. هر lead می تواند حداکثر 70 درجه فاز تزریق کند. پس اگر این تفاضل کوچکتر یا مساوی 70 درجه باشد، از یک lead، و اگر بزرگتر از 70 درجه باشد از ۲ یا ۳ یا بیشتر lead استفاده می کنیم.

۳- در کنترل کننده lead مقدار α را $(\alpha = \frac{p}{z})$ را از رابطه $\sin\varphi = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$ بدست می آوریم. φ همان مقدار فاز مورد نیاز سیستم می باشد.

۴- می دانیم که این تزریق فاز در فرکانس قطع بهره باید اتفاق بیافتد. بنابراین $w_c = \sqrt{zp}$ با حل کردن دو رابطه بالا، مکان قطب و صفر lead بدست می آید.

۵- مقدار ثابت k از تعریف فرکانس قطع بهره یعنی $|k(jw)G(jw)|_{w=w_c} = 1$ بدست می آید.

۶- اگر نیاز به کاهش خطای حالت ماندگار (یعنی افزایش ثابت خطا) داشتیم از کنترل کننده lag استفاده می کنیم. طراحی کنترل کننده lag در روش فرکانسی مشابه طرحی lag در روش root locus است، با این تفاوت که صفر lag را در 0.1 فرکانس قطع یعنی $Z_{lag} = 0.1W_c$ در نظر می گیریم. طراحی lead بر lag اولیت دارد.

سوالات سری ۱ طراحی فرکانسی:

۴-۱ کنترل کننده $k(s)$ را برای سیستم زیر با در نظر گرفتن فیدبک واحد به گونه ای طراحی کنید تا حد فاز سیستم ۴۵ درجه شود. در این حالت، پهنای باند سیستم و خطای حالت ماندگار به ورودی شیب چقدر است؟

$$\text{System IV} \quad G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

۴-۲ کنترل کننده $k(s)$ را برای سیستم IV به نحوی طراحی کنید تا پهنای باند سیستم برابر با ۳ و حد فاز سیستم ۴۵ درجه شود. در این حالت، خطای حالت ماندگار به ورودی شیب را بدست آورید. **نایب**

۴-۳ کنترل کننده بخش ۲-۴ را به نحوی تکمیل نمایید که **خطای** حالت ماندگار به ورودی شیب برابر ۴۲ (یا نسبت به قبل ۱۰ برابر کوچکتر) شود.

سوالات سری ۲ طراحی فرکانسی:

۵-۱ کنترل کننده $k(s)$ را برای سیستم زیر با در نظر گرفتن فیدبک واحد و $T=0.5$ ثانیه به گونه ای طراحی کنید تا اولاً، حد فاز سیستم برابر ۴۵

شود. دوما پهنای باند سیستم برابر با ۱ باشد. سوما اثر اغتشاش بصورت پله در حالت ماندگار در خروجی از بین برود.

System II:
$$G(s) = \frac{e^{-Ts}}{(s+1)}$$

۵-۲ مسئله ۱-۵ را برای $T=1$ ثانیه و پهنای باند ۲ تکرار کنید.

Controlengineers.ir

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$\varphi = 45^\circ$$

$$\omega = ?$$

$$k(s) = ?$$

حذف زنجیر: $-90 - \tan^{-1} \omega + 180 = 45$

$$\tan^{-1} \omega = 45^\circ \rightarrow \boxed{\omega = 1}$$

$$|k G(j\omega)|_{\omega=1} = 1$$

 \Rightarrow

$$\frac{k}{\omega \sqrt{1+\omega^2}} \Big|_{\omega=1} = 1$$

$$\frac{k}{1 \times \sqrt{2}} = 1 \rightarrow k = \sqrt{2}$$

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s k(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \times \sqrt{2} \times \frac{1}{s(s+1)} = \sqrt{2} \quad e_{ss} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\omega_c = 3 \text{ rad/sec.}$$

$$\varphi = 45^\circ$$

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

حذف زنجیر: $(-90 - \tan^{-1} \omega + 180) \Big|_{\omega=3} = -90 - 71.56^\circ + 180 = 18.43^\circ < 45^\circ$

نیاز به بزرگی فاز در رگمانس $\omega = 3$ داریم.

$$\text{مقدار فاز مورد نیاز} = 45 - 18.43 = 26.56^\circ \rightarrow 30^\circ$$

$$\sin \varphi = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$

$$\sin 30 = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} = 0.5$$

$$\alpha - 1 = 0.5\alpha + 0.5$$

$$0.5\alpha = 1.5$$

$$\alpha = 3 = P/2 \rightarrow \boxed{P = 3Z}$$

$$\omega_c = 3 = \sqrt{z_p} \rightarrow z_p = 9 \quad z \times 3z = 4 \quad z^2 = 3$$

$$z = \sqrt{3} \rightarrow p = 3z = 3\sqrt{3}$$

$$k(s) = \frac{k(s + \sqrt{3})}{s + 3\sqrt{3}}$$

$$\left| \frac{k(j\omega) G(j\omega)}{1} \right|_{\omega=3} = 1$$

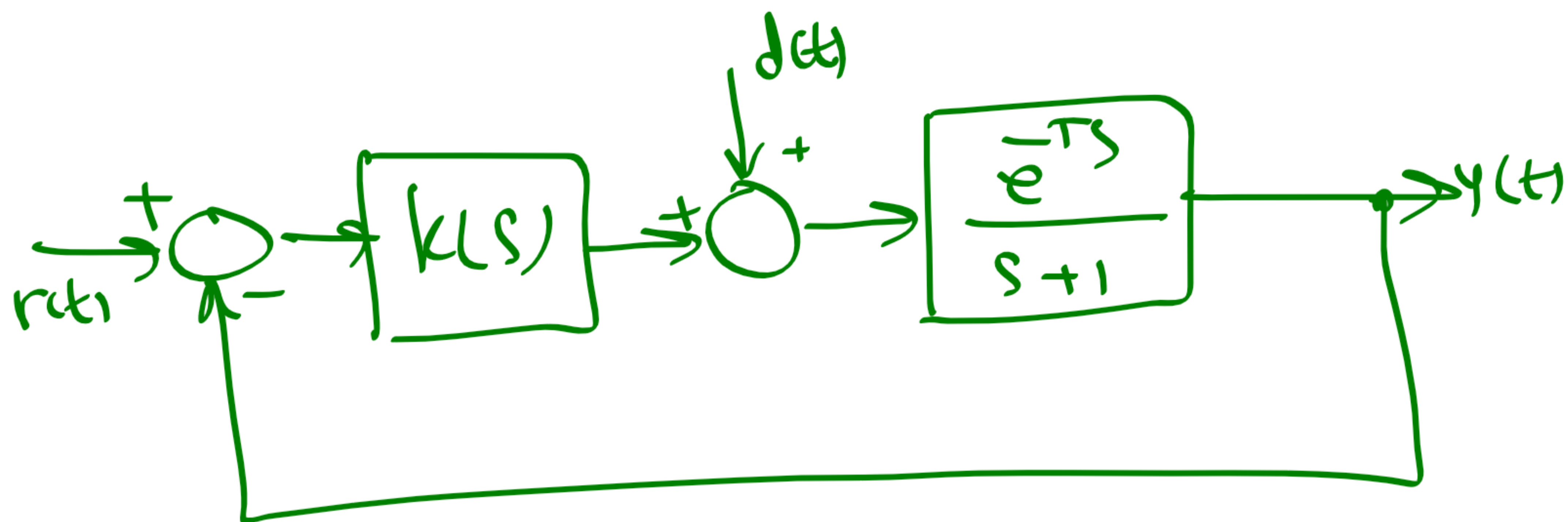
$$\frac{k \sqrt{\omega^2 + \sqrt{3}^2}}{\sqrt{\omega^2 + (3\sqrt{3})^2}} \times \frac{1}{\omega \sqrt{\omega^2 + 1}} \Big|_{\omega=3} = 1$$

$$\frac{k \sqrt{12}}{\sqrt{36}} \times \frac{1}{3 \sqrt{10}} = 1 \rightarrow k = \frac{3 \sqrt{10} \sqrt{36}}{\sqrt{12}} = 3 \sqrt{30}$$

$$k(s) = \frac{3\sqrt{30}(s + \sqrt{3})}{s + 3\sqrt{3}}$$

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s k(s) G(s) = \frac{3\sqrt{30} \times \sqrt{3}}{3\sqrt{3}} \times \frac{1}{1} = \sqrt{30} = 5,4772$$

$$e_{ss} = \frac{1}{\sqrt{30}} = 0,1826$$



$d(t) = u(t) \rightarrow T(s) = \frac{1}{s}$

$k(s) = \frac{0}{s \cdot 0}$

$\omega_c = 1 \text{ rad/sec}$

$\phi = 45^\circ$

$T = 0.5 \text{ sec}$

مقدار لیسیم: $(-90^\circ - \tan^{-1} \frac{\omega}{T} - T\omega \times 57.3 + 180) = 16.35^\circ < 45^\circ$
 $\omega = 1$

$e^{-Ts} \Big|_{s=j\omega} = e^{-jT\omega}$ $\angle e^{-jT\omega} = -T\omega$

مقدار فاز در ابتدا: $45 - 16.35 = 28.65 + 6.35 = 35^\circ = \phi_m$

$\phi_m = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$

$\sin 35 = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$

$0.5736 = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$

$0.5736\alpha + 0.5736 = \alpha - 1 \rightarrow 0.4264\alpha = 1.5736$

$\alpha = 3.69 = P/z$

$\omega_c = 1 = \sqrt{z_p} \Rightarrow z_p = 1$

$z \times 3.69z = 1$

$z = 0.52$

$p = 1.93$

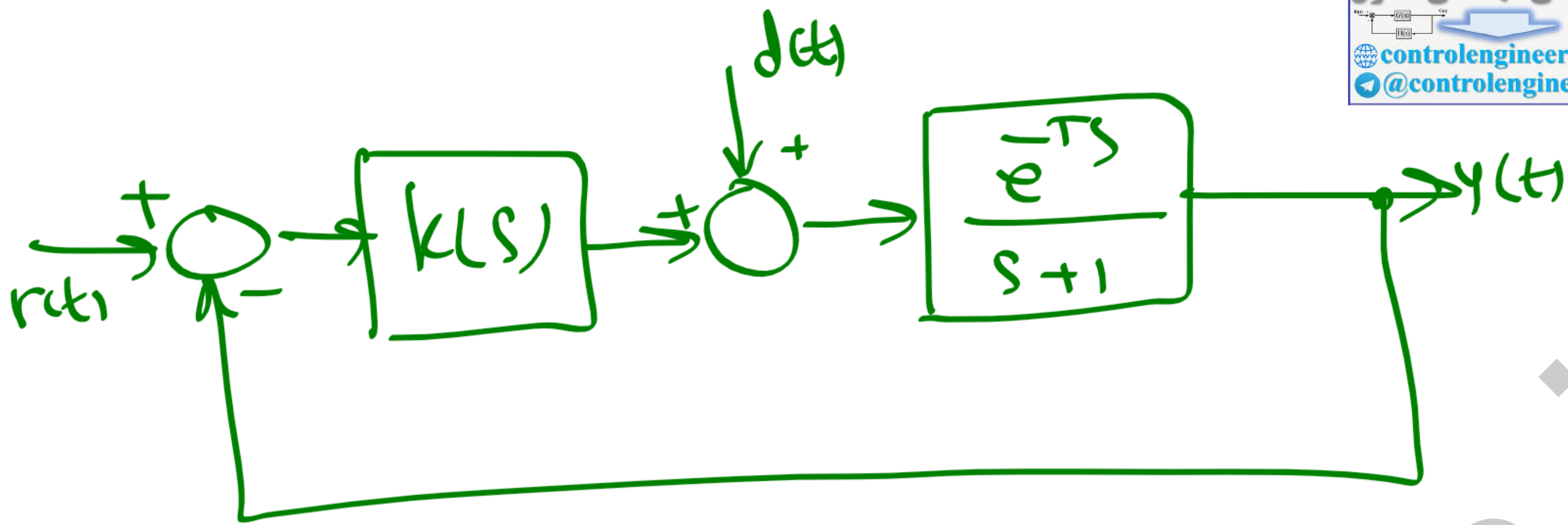
$$z = 0.152$$

$$p = 1.43$$

$$\|k(j\omega)G(j\omega)\|_{\omega=1} = 1 \rightarrow \frac{k \sqrt{1 + 0.152^2}}{1 \times \sqrt{1 + 1.43^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1 + 1}} = 1$$

$$k = 217274 \rightarrow K(s) = \frac{217274 (s + 0.152)}{s + 1.43}$$

Controlengineers.ir



$$d(t) = u(t) \rightarrow T(s) = \frac{1}{s}$$

$$k(s) = \frac{0}{s \cdot 0}$$

$$\omega_c = 2 \text{ rad/sec}$$

$$\phi = 45^\circ$$

$$T = 1 \text{ sec}$$

مقدار لیسیم: $-90^\circ - \tan^{-1} 2 - 1 \times 2 \times 57,3 + 180 \approx -88^\circ < 45$

مقدار فاز مورد نیاز = $45 - (-88) = 133^\circ + 7 = 140$

صورت میران فاز مورد نیاز بیشتر از 70 درجه کمتر از 140 درجه است از lead استفاده نکنیم.

از فیلتر lead و منفرجه lead را در کسب در نظر بگیریم

همان lead از زمین فاز برابر $\frac{140}{2} = 70^\circ$ در نظر گرفته می شود

$$\sin 70 = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \rightarrow 0,94 = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \quad \alpha - 1 = 0,94 \alpha + 0,94$$

$$0,06 \alpha = 1,94 \quad \alpha = 32,33 = 1/2$$

$$P/z = 32,33 \quad , \quad \omega_c = 2 = \sqrt{z\rho}$$

$$z\rho = 4 \quad z \times 32,33z = 4$$

$$z = 0,3517 \quad \rho = 11,372$$

$$k(s) = \frac{k(s + 0,3517)^2}{s(s - 0,3517)^2}$$

$$|k(s)G(s)|_{\omega=2} = 1$$

$$\frac{k(z^2 + 0,3517^2)}{2 \times (z^2 + 11,372^2)} \times \frac{1}{\sqrt{z^2 + 1}} = 1$$

$$k = 144,5878$$

Controlengineers.ir