پلتفرم اختصاصی

مهندسی کنترل

https://controlengineers.ir

https://t.me/controlengineers

https://www.instagram.com/controlengineers.ir

"تجزیه و تحلیل سیستمهای خطی"

"اعوذ بالله من الشیطان الرجیم"
"بسم الله الرحمن الرحیم"

"ان ربک هو الخلاق العلیم - حجر ۸۶"

٧٩,١١,١٦

پیش نیاز ← مدار I و II - معادلات دیفرانسیل.

مراجع ← سیگنال و سیستم - زیمر.
سیگنال و سیستم - اپن هایم.

مباحث این درس در حوزه مدلهاست. یعنی المانها ایده‌آل هستند و محدودیتها را در آن در نظر نمی‌گیریم.
مدل‌ها [illegible] (modeling - [illegible]) است.
تجزیه و تحلیل: پیدا کردن پاسخ از ورودی - و نیز شرایط و محدودیتهای آن.
سیستم: مجموعه‌ای از اجزا که با هم ارتباط دارند و وظایف و هدف خاصی را دنبال می‌کنند.
سیگنال: پارامترهای فیزیکی که از اجزای یک سیستم انتخاب شده‌اند برای کنترل و ....
سیستم خطی: سیستمی که در آن اصل superposition صدق می‌کند.
بیشتر سیستمهایی که با آن سروکار داریم با تقریب خطی پاسخ مورد نظر ما را می‌دهند. مدل تقریب تکه‌ای خطی برای بسیاری از سیستمهای غیرخطی مناسب هستند. درضمن هر سیستم غیرخطی قواعد خاص خود را برای آنالیز دارند. و نمی‌توان روش کلی برای آنها بیان کرد.

سیگنال ← قطعی (deterministic): با مشخص بودن اجزای دامنه تابع مشخص است.
تصادفی: با مشخص بودن دامنه، نتوانیم بردار برد را مشخص کنیم.

سیگنالها ← ۱- زمان پیوسته، دامنه پیوسته ← آنالوگ
۲- زمان گسسته، دامنه پیوسته ← گسسته

۳ـ زمان پیوسته، دامنه گسسته ← پالس

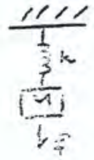
۴ـ زمان گسسته، دامنه گسسته ← دیجیتال

سیگنالها ← متناوب.
← نامتناوب.

تمام حجم قفس را شناختیم بس است / بیا به تجربه در آسمان پری بزنیم
اگر چه تیغ خوبی است زیستن اما / خوشا که دست به تصمیم بهتری بزنیم

۷۹/۱۱/۱۸

اگر T_1 دوره تناوب x_1 و T_2 دوره تناوب x_2 باشد و $\frac{T_2}{T_1}$ گویا باشد، $\alpha x_1+\beta x_2$ نیز ~~گویا~~ متناوب خواهد بود.



۱ـ با توجه به قواعد مربوطه دیاگرام پیکر آزاد را رسم می‌کنیم. (سیستم را مشخص کنیم بر چه نیروی از خارج بر آن وارد می‌شود، مشخص می‌کنیم و ...)

۲ـ دیاگرام را برای جرمهای مستقل رسم می‌کنیم.

۳ـ معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ را حل می‌کنیم.

اگر یک سیستم را با فرکانس ω تحریک شود، خروجی نیز همان فرکانس ω را دارد. ($\exp(j\omega t)$ استدلال ویژه این سیستم‌ها است = (سیستمهای خطی) پس برای یافتن پاسخ پایدار (steady state) سیستمهای خطی می‌توان از "فازور" استفاده کرد.

$$x(t) = A\cos(\omega t+\theta) = \mathrm{Re}(\bar{X} e^{j\omega t})$$
$$\bar{X} = A e^{j\theta}$$

طیف یک طرفه سیگنال: دامنه یا فاز را برمبنای فرکانس یا ω می‌کشیم.

$$x(t) = -20\sin(100\pi t + 30^\circ)$$

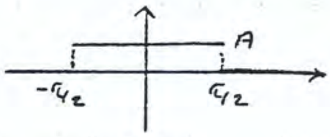
دامنه هیچ وقت منفی نیست. ← $x(t) = 20\sin(100\pi t + 210^\circ)$

قرار داد این است که x را کسینوس تبدیل کنیم. $x(t) = 20\cos(\omega t + 120^\circ)$

اگر سیگنال بصورت کسینوسی و سینوسی نباشد ولی متناوب باشد باید آنرا برحسب سری‌ها کسینوس بسط دهیم. (با سری فوریه)

مثلاً:

$$A\Pi(t/\tau) = \begin{cases} A & |t| < \tau/2 \\ 0 & \text{جای دیگر} \end{cases}$$



پس $A_1\sin(\omega t+\theta_1) + B_1\cos(\omega t+\theta_2) \longrightarrow$ توان سیستم: $\frac{A_1^2}{2} + \frac{B_1^2}{2}$

دامنه برای یافتن توان و انرژی و ... بکار می‌رود.

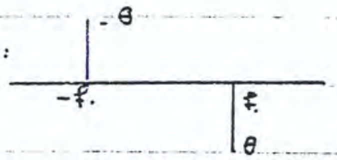
فاز میزان تأخیر را نشان می‌دهد. یعنی مشخص می‌کند که ورودی و خروجی چقدر اختلاف فاز دارند.

طیف دوطرفه:

$$x(t) = A\cos(\omega t+\theta) = Re(\bar{X} e^{j\omega t}) = A/2\, e^{j(\omega t+\theta)} + A/2\, e^{-(j\omega t+\theta)}$$

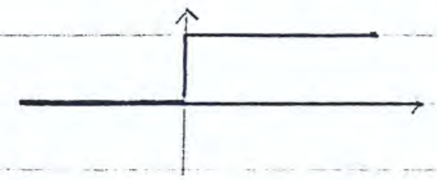
طیف دامنه

طیف فاز:



فرکانس منفی که نداریم. فرکانس فازور، فرکانس واقعی نیست.

$$u_{-1}(t) = \begin{cases} 1 & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$



در صفر هر عددی می‌تواند باشد.

$u_{-1}(t)$ برای این تعریف شده است که به ما نشان می‌دهد که نقطه‌ای وجود دارد که در سیستم که مشتق چپ و راست در آن تفاوت می‌کند.

$$u_{-2}(t) = \int_{-\infty}^{t} u_{-1}(\lambda)\, d\lambda = \begin{cases} t & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

$$u_{i-1}(t) \triangleq \int_{-\infty}^{t} u_i(\lambda)\, d\lambda \Rightarrow u_i(t) = \frac{d\, u_{i-1}(t)}{dt}$$

$$u_{-3}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} t^2 & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

$u_{-3}(t)$ و $u_{-3}(-t)$ برابر هستند، زیرا شرط برابر بودن دو تابع این است که هم مقدار آن و هم دامنه آنها برابر باشد.

نوشتن توابع برحسب توابع منفرد.

مثال: $A\Pi(t/\tau) = A u_{-1}(t+\tau/2) - A u_{-1}(t-\tau/2)$

تیر را قدرت پرهیز نباشد ز نشانه — مرغ مسکین چه کند گر نرود در پی دانه

پای عاشق نتوان بست به افسون و فسانه — ای که گفتی مرو اندر پی خوبان زمانه

ما کجاییم در این بحر تفکر تو کجایی؟

۷۱/۱۱/۲

رسم منحنی $x(\beta t+\alpha)$ از روی $x(t)$ ← $x(\beta t+\alpha)$ ← $x(\beta(t+\alpha/\beta))$

آ. اگر $\frac{\alpha}{\beta}$ مثبت باشد $x(t)$ به اندازه $\frac{\alpha}{\beta}$ به چپ انتقال می‌یابد. اگر $\frac{\alpha}{\beta}$ منفی باشد $x(t)$ به اندازه $\frac{\alpha}{\beta}$ به راست انتقال می‌یابد.

ب. اگر $|\beta|>1$ باشد تابع به اندازه $|\beta|$ فشرده می‌شود، و اگر $|\beta|<1$ تابع به اندازه $\frac{1}{|\beta|}$ کشیده می‌شود.

پ. اگر $\beta<0$، تابع نسبت به محور ها قرینه می‌شود.

$$x(t) \rightarrow x(-t) \rightarrow x(-|\beta| t) \rightarrow x\left(-|\beta|\left(t-\frac{\alpha}{|\beta|}\right)\right)$$

مثال

$$x(t) = \Pi(2t+6) = \begin{cases} 1 & |2t+6|<1/2 \rightarrow -13/4<t<-11/4 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

خواص ضربه واحد :

$1- \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1$ $\qquad x(t)=1 \quad , t_0 = 0$

اثبات : $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1$

2- $\delta(t - t_0)$ در همه جا بجز $t = t_0$ صفر است .

$\int_{-\infty}^{t-\varepsilon} x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = 0 \,,\quad \int_{t+\varepsilon}^{+\infty} x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = 0 \quad \xrightarrow{\text{ثابت کنید}} \quad \delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \text{مقدار} & t = 0 \end{cases}$

$3- \delta(t) = \frac{dU_{-1}(t)}{dt}$

اثبات : $\int_{-\infty}^{t} \delta(t)\, dt = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} = U_{-1}(t) \Rightarrow \delta(t) = \frac{dU_{-1}(t)}{dt}$

در کتاب به روش دیگری گفته

$4- \delta(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(t) \longrightarrow \alpha = -1 \Rightarrow \delta(-t) = \delta(t)$: تابع ضربه زوج است

$5- x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0)$

یک خاصیت مهم : $\int_{t_1}^{t_2} x(t)\,\delta^{(n)}(t-t_0)\,dt = \begin{cases} (-1)^n x^{(n)}(t_0) & t_1 < t_0 < t_2 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$

اثبات : $x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0)$

$\frac{d}{dt}[x(t)\,\delta(t-t_0)] = x'(t)\,\delta(t-t_0) + x(t)\,\delta'(t-t_0)$

$= x'(t_0)\,\delta(t-t_0) + x(t)\,\delta'(t-t_0)$

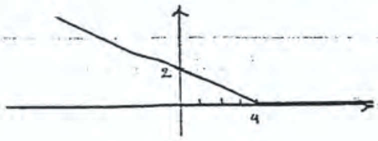
از طرفین انتگرال می گیریم $\int_{t_1}^{t_2} d[x(t)\,\delta(t-t_0)] = \int_{t_1}^{t_2} x'(t)\,\delta(t-t_0)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} x(t)\,\delta'(t-t_0)\,dt$

سمت چپ صفر است .

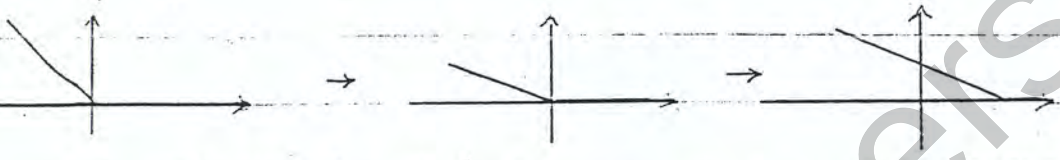
به روش جدید:

$$x_1(t) = \Pi[2(t+3)]$$

$$x_2(t) = r(-0.5t+2) = \begin{cases} -0.5t+2 & -0.5t+2>0 \Rightarrow t<4 \\ 0 & t>4 \end{cases}$$

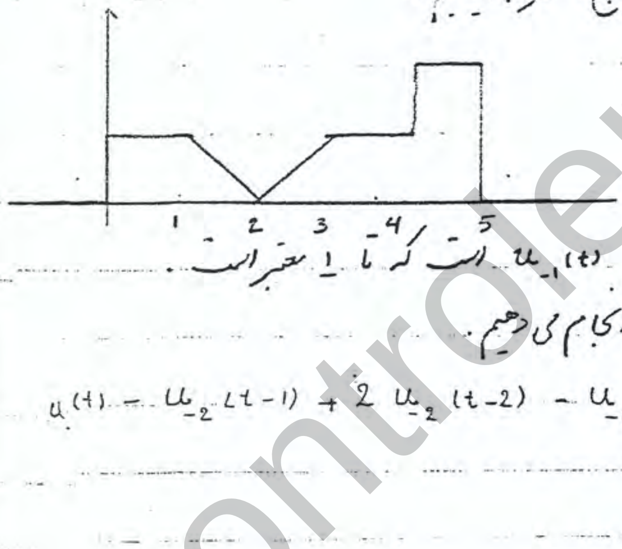


برای بدست آوردن از روی $r(t)$ $\quad r[-0.5(t-4)]$



چک کردن چند نقطه هم از اشتباهات احتمالی جلوگیری می کند!

می خواهیم این تابع را بصورت ترکیب خطی توابع منفرد بنویسیم:



آ. باید اطمینان حاصل کنیم که نمودار از مجموعه ای از خط ها تشکیل شده است.

ب. از $-\infty$ شروع می کنیم اولین تابع $u_{-1}(t)$ است که تا 1 معتبر است.

پ. تغییرهای بعدی تابع را به همین صورت انجام می دهیم.

$$u(t) - u_{-2}(t-1) + 2u_{-2}(t-2) - u_{-2}(t-3) + u_{-1}(t-4) - 2u_{-1}(t-5)$$

تابع ضربه واحد:

هر تابعی که در این رابطه صدق کند، تابع ضربه واحد است:

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = \begin{cases} x(t_0) & t_1<t_0<t_2 \\ 0 : & o.w \end{cases}$$

$x(t)$ در t_0 پیوسته

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t-\lambda)\,dt = x(\lambda)$$

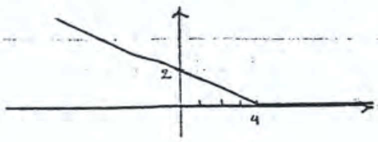
این انتگرال ما را به یاد "کانولوشن" ($\int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\,\delta(t-\lambda)\,d\lambda = x(t) * \delta(t)$) می اندازد.

پس می توان گفت که ضربه واحد عضو خنثی در عمل کانولوشن است.

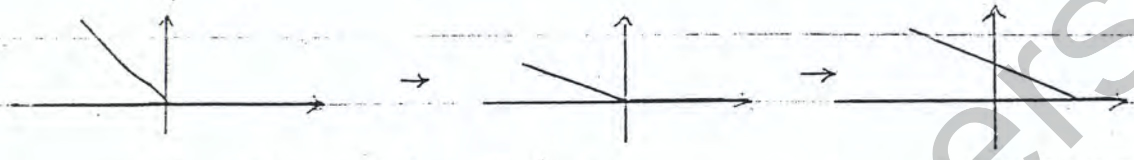
به روش جدید:

$x_1(t) = \Pi[2(t+3)]$

$$x_2(t) = r(-0.5t+2) = \begin{cases} -0.5t+2 & -0.5t+2>0 \Rightarrow t<4 \\ 0 & t>4 \end{cases}$$

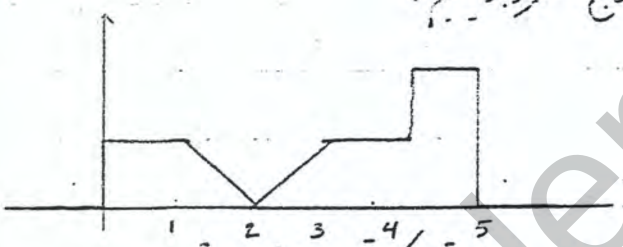


برای بدست آوردن از روی $r(t)$ $r[-0.5(t-4)]$



چک کردن چند نقطه بیشتر از اشتباهات احتمالی جلوگیری می کند!

می خواهیم این تابع را بصورت ترکیب خطی توابع منفرد بنویسیم:



آ. باید اطمینان حاصل کنیم که نمودار از مجموعه ای از خطها تشکیل شده است.

ب. از $-\infty$ شروع می کنیم اولین تابع $u_{-1}(t)$ است که تا 1 معتبر است.

پ. تست های بعدی تابع را به همین صورت انجام می دهیم.

$$u_{-1}(t) - u_{-2}(t-1) + 2u_{-2}(t-2) - u_{-2}(t-3) + u_{-1}(t-4) - 2u_{-1}(t-5)$$

تابع ضربه واحد:

هر تابعی که در این رابطه صدق کند، تابع ضربه واحد است:

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = \begin{cases} x(t_0) & t_1 < t_0 < t_2 \\ 0 : & o.w \end{cases}$$

$x(t)$ در t_0 پیوسته

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t-\lambda)\,dt = x(\lambda)$$

این انتگرال ما را به یاد کانولوشن $\left(x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\,\delta(t-\lambda)\,d\lambda\right)$ می اندازد.

پس می توان گفت که ضربه واحد عضو خنثی در عمل کانولوشن است.

مثال:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2}\delta(t-10)\,dt = e^{-100\alpha}$$

$$\int_{\cdot}^{\infty} e^{-\alpha t^2}\delta(t+10)\,dt = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2}\ddot{\delta}(t-10)\,dt =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[5\,\delta(t) + e^{-(t-1)}\dot{\delta}(t) + \cos(5\pi t)\,\delta(t) + e^{-t^2}\delta(t)\right]dt$$

- نشان دهید که این یک تابع ضربه است: $x(t) = 1/\varepsilon\ \Pi(t/\varepsilon)$

سیگنال ۲ انرژی ← $E \triangleq \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\,dt$ ← $0<E<\infty$ ⇐ سیگنال انرژی

توان ← $P \triangleq \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\,dt$ ← $0<P<\infty$ ⇐ سیگنال توان

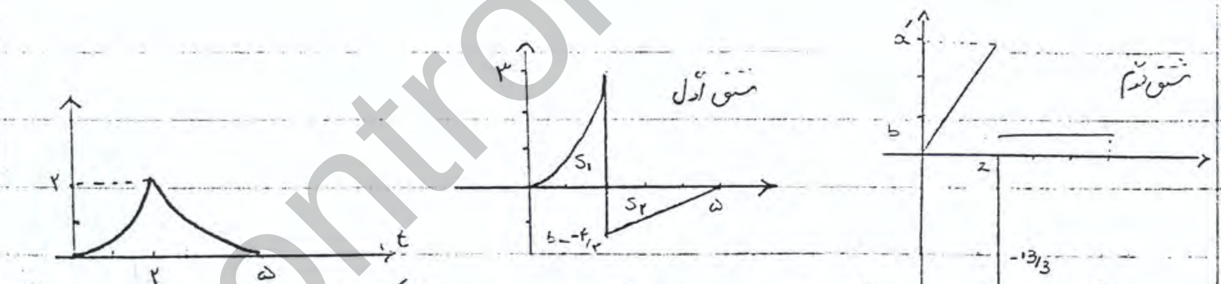
S: چگالی طیف توان $\qquad P=\int_{-\infty}^{+\infty} S(f)\,df$

E: چگالی طیف انرژی $\qquad E=\int_{-\infty}^{+\infty} E(f)\,df$

آسمان بار امانت نتوانست کشید

قرعه فال به نام من دیوانه زدند!

۷۹/۱۱/۲۵:



مشتق اول: می‌دانیم که در نقطه صفر صفر است پس منحنی تکه اول بصورت at^2 است

می‌دانیم که: $\int_0^2 at^2 = 2 \Rightarrow a/3\ t^3\big|_0^2 = 2 \Rightarrow a = 3/4 \Rightarrow$ منحنی $3/4\,t^2$

$S_1 + S_2 = 0 \Rightarrow S_2 = -2 \Rightarrow \frac{3b}{2} = -2 \Rightarrow b = -4/3$

مشتق دوم: * پله با زمان نزود

$2\times a'/2 = 3 \Rightarrow a' = 3$

$3\times 2/2 - 13/3 + 3b = 0 \Rightarrow b = 4/9$

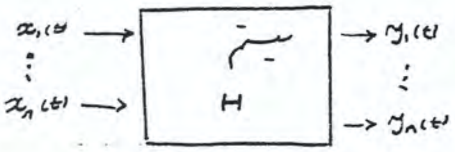
حل: $\ddot{x}(t) = 3/2\,u_{-2}(t) - 3/2\,u_{-2}(t-2) - \frac{23}{9}u_{-1}(t-2) - 13/3\,u_0(t-2) - 4/9\,u_{-1}(t-5)$

۴۲ $\Rightarrow x(t) = 3/2\,u_{-4}(t) - 3/2\,u_{-4}(t-2) - \frac{23}{9}u_{-3}(t-2) - 13/3\,u_{-2}(t-2) - 4/9\,u_{-3}(t-5)$

از روی x باید X را پیدا کنیم. به این صورت که به اندیس توابع منفرد ۲ـ تا اضافه می‌کنیم

آنالیز سیستم در حوزه زمان:

روشهای یافتن پاسخ یک سیستم خطی ← حل معادله دیفرانسیل
← استفاده از رابطه کانولوشن
← حل در فضاهای تبدیل یافته (لاپلاس، فوریه و ...)



$$\vec{y}(t) = H[\vec{X}(t)]$$

اگر ورودی تکی باشد، دیگر x و y بصورت برداری نیستند.

H یک عملگر است. که برابر ضرب نیست که $y = H(x(t))$ زیرا ممکن است مثلاً H یک انتگرال گیر باشد که به $x(t)$ و x در t های قبل از t بستگی خواهد داشت.

اگر $Y(t) = H(X(t_0))$ باشد به سیستم، سیستم بدون حافظه می‌گوییم.

ما دینامیک سیستم را بررسی می‌کنیم. تغییراتی را یعنی ما پاسخ a.c را آنالیز می‌کنیم.
پاسخ کلی بصورت مجموع پاسخ a.c و d.c. است.

معادله کلی

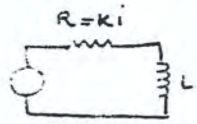
$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + b_{m-1} x^{(m-1)}(t) + \cdots + b_0 x(t)$$

ملاحظه می‌شود که معادله عدد ثابت (مقدار d.c.) ندارد.

در سه حالت این معادله را نخواهیم داشت:

۱ـ المان غیرخطی در مدار باشد.

مثال:



$$V(t) = V_R + V_L = Ri + L\,di/dt = Ki^2 + L\,di/dt$$

۲- عنصری داشته باشیم که متغیری از زمان باشد. (در مثال پیش $R=Kt$)

۳- گسترده باشد (~~طول موج~~ اندازه اجزای سیستم با طول موج قابل مقایسه باشد.)

در این صورت از معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی استفاده می‌کنیم.

در مخابرات با فرکانس بالا و خطوط انتقال بلند، مدارهای گسترده داریم.

آنالیز دینامیک سیستمهای خطی فشرده و غیرمتغیر با زمان:

ورودی $x(t)$ $\rightarrow$ $\boxed{h(t)}$ $\rightarrow$ خروجی $y(t)$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)\, x(t-\lambda)\, d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\, h(t-\lambda)\, d\lambda$$

$h(t)$ را باید پیدا کنیم و از آن $y(t)$ را بیابیم.

تعریف دقیق $h(t)$ (پاسخ ضربه):

پاسخ اعمال ضربه به سیستم به شرط اینکه قبل از اعمال ضربه سیستم در حال آرامش باشد
یعنی شرایط اولیه صفر باشد) (تمام المانهای سیستم، انرژی صفر داشته باشند)

برای یافتن پاسخ ضربه چهار روش وجود دارد:

۱- حل معادله دیفرانسیل و یافتن H از روی آن درحقیقت بصورت انتگرال کانولوشن نوشته شد.

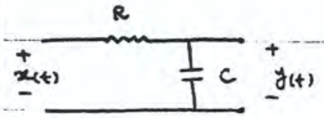
۲- پیدا کردن پاسخ ضربه با استفاده از معادله دیفرانسیل.

۳- استفاده از فضای تبدیل یافته لاپلاس.

۴- استفاده از سایر توابع منفرد و مشتق و انتگرال گرفتن.

رسد آدمی به جایی که به جز خدا نبیند...

* روش اول:



$$x(t) = V_R(t) + y(t) = RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t)$$

$$\Rightarrow RC\dot{y}(t) + y(t) = x(t)$$

$$\Rightarrow RC\dot{y}_h(t) + y_h(t) = 0 \quad \Rightarrow y_h(t) = A\,e^{-t/RC}$$

$$\Rightarrow y(t) = A(t)\,e^{-t/RC}$$

$$A(t_0) = y(t_0)\,e^{t_0/RC}$$

حل می‌کنیم ⟵ $A(t) = \frac{1}{RC}\int_{t_0}^{t} x(\lambda)\,e^{\lambda/RC}\,d\lambda + A(t_0)$

$$\Rightarrow y(t) = y_0\,e^{\frac{t_0-t}{RC}} + \int_{t_0}^{t}\frac{x(\lambda)\,e^{\frac{\lambda-t}{RC}}}{RC}\,d\lambda = \int_{-\infty}^{t}\frac{x(\lambda)\,e^{\frac{\lambda-t}{RC}}}{RC}\,d\lambda$$

انتگرال کانولوشن از $-\infty$ تا $+\infty$ است، باند پایین را درست کردیم، باند بالا را هم درست می‌کنیم

$$\Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x(\lambda)\,e^{\frac{\lambda-t}{RC}}}{RC}\,u(t-\lambda)\,d\lambda$$

$$\Rightarrow h(t-\lambda) = \frac{1}{RC}\,e^{\frac{-(t-\lambda)}{RC}}\,u(t-\lambda)$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{RC}\,e^{-t/RC}\,u(t)$$

□ برای معادله درجه ۲ به این روش حل کنید. (L اضافه کنید به مدار بالا)

* روش دوم:

برای پیدا کردن پاسخ ضربه در حقیقت باید معادله زیر را حل کنیم. با علم به اینکه شرایط اولیه صفر است.

$$RC\,\dot{h}(t) + h(t) = \delta(t)$$

(سیستم غیرعلّی: قبل از اعمال ورودی پاسخ وجود دارد.
برای یک سیستم غیرعلّی آیا باید تعریف پاسخ ضربه را تغییر داد؟)

تفاوت معادله فوق با معادله همگن مثال قبل فقط در یک نقطه است، پس پیش‌بینی می‌کنیم که $h(t)$ و $y_h(t)$ خیلی شبیه هم هستند.

$$y_h(t) = A\,e^{-t/RC} \longrightarrow h(t) = A\,e^{-t/RC}\,u(t)$$

$h(t)$ از معادله دیفرانسیل نمی آید، از اینجا می آید که می خواهیم سیستم علّی باشد یعنی قبل از صفر، مقدار تابع صفر است.

$$RC\,y_h'(t) + y_h(t) = 0$$

$$RC\,h'(t) + h(t) = \delta(t)$$

ناپیوستگی ورودی از نوع ضربه است، $h(t)$ که ما نوشتیم ناپیوستگی از نوع پله است و در $h'(t)$ ناپیوستگی از نوع ضربه است. جمع ناپیوستگی ضربه و پله، ضربه است.

پس الگوریتم بصورت زیر است:

۱- پاسخ همگن را پیدا کنیم.

۲- پاسخ را برای t های منفی صفر می کنیم.

۳- آنالیز ناپیوستگی می کنیم.

۴- با استفاده از معادله دیفرانسیل ضرایب دیفرانسیل را پیدا کنیم.

$$RC\,h'(t) + h(t) = \delta(t)$$

در دیفرانسیل t، dt، ضرب می کنیم و از $-\epsilon$ تا ϵ انتگرال می گیریم.

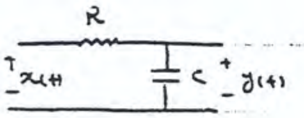
$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} h(t) = 0$، زیرا $h(t)$ ناپیوستگی از نوع ضربه ندارد و انتگرال آن صفر است. (بنا به قضیه میانگین)

$$\Rightarrow RC\,h(0^+) - 0 + 0 = 1 \Rightarrow$$

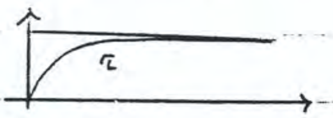
$$\Rightarrow h(0^+) = \frac{1}{RC}$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t)$$

* روش سوم:



پاسخ پله را پیدا کنیم.



شبکه اساسی را رسم می کنیم ، τ را پیدا می کنیم ، شرط اولیه و نهایی را پیدا می کنیم .

پاسخ به صورت زیر است :

$$y_u(t) = [A e^{-t/RC} + B]\, u(t)$$

$$\begin{cases} B = \text{مقدار نهایی} & B = 1 \\ A + B = \text{مقدار اولیه} & \rightarrow A + B = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_u(t) = (1 - e^{-t/RC})\, u(t)$$

پاسخ ضربه مشتق y_u است .

$$y'_u(t) = +\frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t) + 0(1 - e^{0})\, \delta(t)$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t)$$

استدلال زیر برای پیدا کردن A :

خازن در $t = 0$ اتصال کوتاه $\rightarrow$ $i(t) = \frac{\delta(t)}{R} \rightarrow q(t) = \frac{1}{R}$

$$\rightarrow V_c(0^+) = y(0^+) = h(0^+) = \frac{1}{RC}$$

نحوه محاسبه انتگرال کانولوشن :

* تعاریف اساسی :

ا- سیستم تغییرناپذیر با زمان (time invarient)

اگر : $y(t) = H[x(t)]$

$$\Rightarrow y(t-\tau) = H[x(t-\tau)]$$

پاسخ شیفت داده شده سیستم ‌‌ ‌ ‌ ‌ ‌ پاسخ سیستم به ورودی شیفت داده شده

ا- $x_1(t)$ اعمال می کنیم ، پاسخ را $y_1(t)$ می نامیم .

مثال :

$$y(t) = t\, x(t)$$

$$y_1(t) = t\, x_1(t)$$

$$y_2(t) = t\, x_2(t)$$

$x_2 = x_1(t-\tau)$

پاسخ سیستم به ورودی شیفت داده شده

$y_2(t) = t\, x_1(t-\tau)$

$y'_2(t) = (t-\tau)\, x_1(t-\tau)$ $\quad y_2 \neq y'_2 \to$ time varying

ثابت کنید معادله ی دیفرانسیل با ضرایب ثابت T.I است.

آنانکه خاک را به نظر کیمیا کنند　　آیا بود که گوشه چشمی به ما کنند؟!

۷۶,۱۲,۲

• خاصیتهای مختلف یک سیستم:

۱- خاصیت سیستمهای T.I :

اگر پاسخ به $x(t)$، $y(t)$ را داشته باشیم، پاسخ به $x_1(t-\tau)$ را نیز داریم.

۲- خاصیت سیستم خطی:

$$\underbrace{H[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)]}_{y} = \alpha_1 \underbrace{H[x_1(t)]}_{y_1} + \alpha_2 \underbrace{H[x_2(t)]}_{y_2}$$

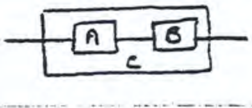
$y(t) = ax^3 + bx$ خطی نیست

$y = t\,x(t)$ خطی است

ترکیب سری دو سیستم خطی آیا لزوما خطی است؟ بله

$$H_C[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = H_B[\alpha_1 \underbrace{y_1(t)}_{H_A(x_1(t))} + \alpha_2 y_2(t)] = \alpha_1 z_1(t) + \alpha_2 z_2(t)$$

$$= \alpha_1 H_B[H_A(x_1(t))] + \alpha_2 H_B[H_A(x_2(t))]$$



اگر C خطی باشد، لزوما A و B خطی نخواهند بود. مثلا A مربع کننده و B جذر گیرنده باشد.

در مورد موازی تحقیق کنید.

می خواهیم ثابت کنیم در سیستم LTI: $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\, h(t-\lambda)\, d\lambda$

داریم: $x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\, \delta(t-\lambda)\, d\lambda$

$$y(t) = \mathcal{H}[x(t)] = \mathcal{H}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\, \delta(t-\lambda)\, d\lambda\right] \xrightarrow{\text{خطی}}$$

$\delta(t-\lambda) = \delta(\lambda - t)$

$$\xrightarrow{\text{خطی}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}[x(\lambda)\, \delta(t-\lambda)]\, d\lambda \overset{\text{خطی}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\, \mathcal{H}[\delta(t-\lambda)]\, d\lambda$$

$h_\lambda(t)\,,\ h(t,\lambda)$

$$\xrightarrow{LTI} y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\, h(t-\lambda)\, d\lambda = x(t) * h(t)$$

ادعا می کنیم که پاسخ به هر ورودی را در یک سیستم LTI، با داشتن پاسخ ضربه می توانیم بدست آوریم. زیرا پاسخ $\alpha x_1 + \beta x_2$ را برای سیستم L و پاسخ $x(t-\tau)$ را برای سیستم TI داریم.

* تمرین: نشان دهید که معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت معرف سیستم LTI است.

۳ـ خاصیت علّی بودن:

درحقیقت باید بگوییم که سیستم ما قابلیت پیشگویی آینده را ندارد.

$$(x_1(t) = x_2(t)\,,\ \forall t < t_0) \Rightarrow (y_1(t) = y_2(t)\,,\ \forall t < t_0)$$

- علّی هست یا نه؟ $ax^3 + bx$ $\quad$ if $x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow$

$$ax_1^3 + bx_1 - ax_2^3 - bx_2 = a(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) + b(x_1 - x_2) = 0$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2 = 0) \Rightarrow (y_1 - y_2 = 0)$$

اگر سیستم LTI باشد، شرط علّی بودن آن است که $h(t) = 0 \quad t < 0$

فرض می کنیم سیستم LTI و علّی $\Leftarrow$ $h(t) = 0 \quad t < 0$.

فرض می کنیم سیستم LTI و $t < 0$ $h(t) = 0$، مقدم قضیه علّی بودن برقرار است ← تالی قضیه علّی بودن را ثابت می کنیم.

آنالیز سیستم در حوزه زمان :

قضایای کانولوشن :

1- $h_1 * h_2 = h_2 * h_1$

—[A]—[B]—   —[B]—[A]—

یعنی در سیستم سری و LTI ترتیب آنها مهم نیست .

$$-\frac{d}{dt}\left(h_1(t) * h_2(t)\right) = h_1'(t) * h_2(t) = h_1(t) * h_2'(t)$$

$$h_1(t) \longrightarrow \boxed{h_2 t} \longrightarrow h_1(t) * h_2(t) \qquad h_1'(t) \longrightarrow \boxed{h_2(t)} \longrightarrow h_1'(t) * h_2(t) = \left[h_1(t) * h_2(t)\right]'$$

$$\Rightarrow x_1(t) * x_2(t) = x_1^{m}(t) \cdot x_2^{-m}(t)$$

پس ،

۱- ورودی را shift بدهیم ، خروجی shift داده می‌شود.

۲- ورودی را α برابر کنیم ، خروجی را α برابر می‌کنیم .

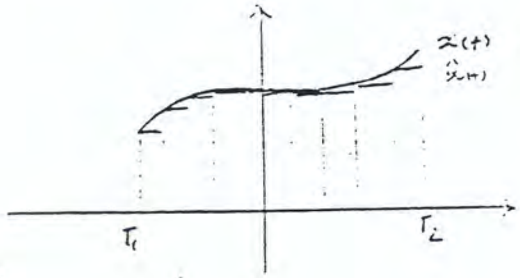
۳- ورودی ها را با هم جمع کنیم ، خروجیها را هم باید با هم جمع کنیم.

۴- از ورودی مشتق بگیریم ، از خروجی نیز باید مشتق بگیریم.

۵- از ورودی انتگرال بگیریم ، از خروجی نیز باید انتگرال بگیریم . انتگرال حتماً باید از $-\infty$ تا t باشد

آسمان بار امانت نتوانست کشید   قرعه فال به نام من دیوانه زدند

۷۴/۱۲/۷



$$T_1 \le t \le T_2$$

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x(n\Delta\lambda)\, \Pi\left(\frac{t-n\Delta\lambda}{\Delta\lambda}\right)$$

$$T_1 = (N_1 - 1/2)\Delta\lambda$$

$$T_2 = (N_2 + 1/2)\Delta\lambda$$

سیستم غیرعلی $\delta(t+1)$ پاسخ ضربه = $h(t)$ $y(t) = x(t+1)$

برای صفرهای منفی $h(t)$ صفر نیست، پس علی نیست.

۴- پایدار بودن:

مثلاً در مکانیک، اگر جسمی متعادل را از نقطه تعادلش دور کنیم، دوباره به مکان تعادلش باز گردد. سیستمی را پایداری گوییم که در پایین ترین سطح انرژی خودش بر باشد (یا حداکثر بی‌نظمی)

در مهندسی برق به سیستمی پایدار می‌گوییم که به ازای ورودی محدود، خروجی محدود بدهد. (BIBO) $|x(t)|<M \Rightarrow |y(t)|<N$

با این تعریف مشتق ناپایدار است. چون به ازای ورودی پله، ضربه می‌دهد.

- پایدار نیست با . $tx(t) =$

زیرا $x(t) = u(t)$ ← $t\,u(t)$ محدود نیست

$t \to \infty \Rightarrow tx(t) \to \infty$

۵- سیستم بدون حافظه:

$$H[x(t)] = f[x(t_0), t_0]$$

$t\,x(t)$ و x و ax^3+bx بدون حافظه هستند. $\int^t x(t)$ حافظه دارد

پس در یک سیستم بدون حافظه y به $x(t)$ و خود t بستگی دارد

- نشان دهید اگر $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|\,dt<N$، سیستم LTI پایدار است. (یعنی اگر سطح زیر منحنی پاسخ ضربه محدود باشد) کافی است لازم بودن را تحقیق کنید.

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x(n\Delta\lambda) \cdot \frac{1}{\Delta\lambda} \Pi\left(\frac{t-n\Delta\lambda}{\Delta\lambda}\right) \Delta\lambda$$

$$\hat{y}(t) = \mathcal{H}[\hat{x}(t)] = \mathcal{H}\left[\sum_{N_1}^{N_2} x(n\Delta\lambda) \cdot \frac{1}{\Delta\lambda} \Pi\left(\frac{t-n\Delta\lambda}{\Delta\lambda}\right) \Delta\lambda\right]$$

$$\overset{\text{خطی}}{=} \sum_{N_1}^{N_2} \mathcal{H}\left[x(n\Delta\lambda) \cdot \frac{1}{\Delta\lambda} \Pi\left(\frac{t-n\Delta\lambda}{\Delta\lambda}\right) \Delta\lambda\right]$$

$$\overset{\text{خطی}}{=} \sum_{N_1}^{N_2} x(n\Delta\lambda)\, \mathcal{H}\left[\frac{1}{\Delta\lambda} \Pi\left(\frac{t-n\Delta\lambda}{\Delta\lambda}\right)\right] \Delta\lambda$$

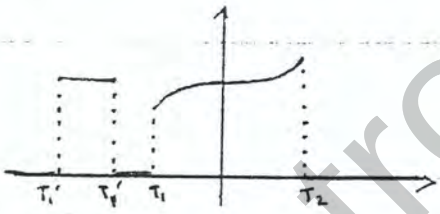
$$\Delta\lambda \to 0 \Rightarrow \lim \hat{y}(t) = y(t) = \int_{T_1}^{T_2} x(\lambda) \underbrace{\mathcal{H}[\delta(t-\lambda)]}_{h_\lambda(t)} d\lambda$$

درمورد تغییرپذیربودن با زمان (اطلاعی نداریم)

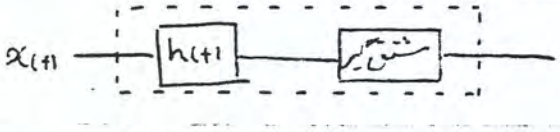
$$\overset{T.I}{\Rightarrow} y(t) = \int_{T_1}^{T_2} x(\lambda) h(t-\lambda) d\lambda$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda) h(t-\lambda) d\lambda \leftarrow$$ قیدی روی T_1 و T_2 نداریم.

این همان است که قبلاً اثبات کردیم. ($LTI \Rightarrow y(t) = x(t) * h(t)$)

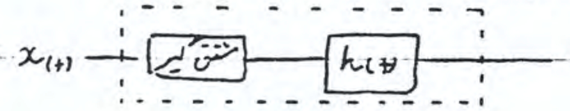


طبق این استدلال پاسخ این ورودی به سیستم که از $\int_{T_1}^{T_2}$ بدست می آید با پاسخ شکل قبلی مساوی می شود! اشکال کار در اینجاست که تعریف پاسخ ضربه در اینجا نقض می شود. چون پیش از T_1 سیستم درحال آرامش نیست. پس دراینجا حد پایین انتگرال را $-\infty$ درنظر می گیریم.



$$y(t) = [x(t) * h(t)]'$$

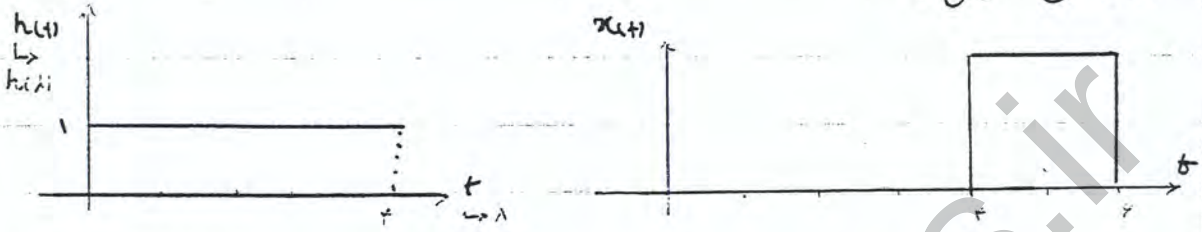
کل بلوک و سیستم مشتق گیر، یک سیستم LTI است. پس:

9, 

$$y(t) = x'(t) * h(t)$$

اگر پاسخ ضربه کل سیستم را نیز بدست بیاوریم، یک رابطه دیگر نیز می توان نوشت (خروجی را بصورت کانولوشن پاسخ ضربه کلی و ورودی بدست می آوریم)

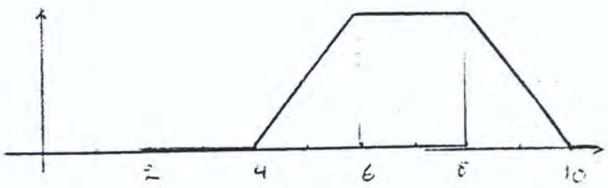
۱- روش گرافیکی :



۱- تصمیم می گیریم که کدام تابع را حرکت دهیم (بهتر است آنکه محدود است، حرکت داده شود)
۲- توابع را برحسب λ رسم می کنیم.

برای ثابت کردن مثلاً ۴ را ۴- درنظر می گیریم و رسم می کنیم $x_1(\lambda)=x(4-\lambda)$ را.
حالا مثلاً چک می کنیم که $x_1(-1)=2=x(4-(-1))$

$$y(t)=\begin{cases} 0 & t<4 \\ 2(t-4) & 4<t<6 \quad t-4>0,\ t-6<0 \\ 4 & 6<t<8 \quad t-4<4,\ t-6>0 \\ 2(10-t) & 8<t<10 \quad t-4>4,\ t-6<4 \\ 0 & t>10 \end{cases}$$



مشاهده می شود که مرتبه تابع هم تغییر کرد، یعنی ناپیوستگی پله به ramp تبدیل شد (طبیعی است زیرا کانولوشن عمل انتگرال گیری دارد.)

و نیز مشاهده می شود که بازه پاسخ مجموع بازه های ورودی و $h(t)$ است .

در روش ترسیمی شکل پاسخ را می بینیم ، فرمول قسمتهای مختلف را نیز خواهیم داشت .

۲_ محاسبه مستقیم :

$$x(t) = 2u_{-1}(t-4) - 2u_{-1}(t-6)$$
$$h(t) = u_{-1}(t) - u_{-1}(t-4)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)\, x(t-\lambda)\, d\lambda = 2\int_0^4 \left[u_{-1}(t-\lambda-4) - u_{-1}(t-\lambda-6)\right] d\lambda$$

$$= 2\left[-u_{-2}(t-\lambda-4) + u_{-2}(t-\lambda-6)\right]_0^4$$

۳_ استفاده از تبدیل لاپلاس و فوریه (در حوزه لاپلاس و فوریه ، کانولوشن ضرب می شود)

۴_ استفاده از قضایای زیر:

$$x(t) * \delta(t-t_1) = x(t-t_1)$$
$$x_1(t) * x_2(t) = x_1^{(+m)}(t) * x_2^{(-m)}(t)$$

$$h(t) = u_{-1}(t) - u_{-1}(t-4) \Rightarrow h'(t) = \delta(t) - \delta(t-4)$$
$$x(t) = 2u_{-1}(t-4) - 2u_{-1}(t-6) \Rightarrow x^{(-1)}(t) = 2u_{-2}(t-4) - 2u_{-2}(t-6)$$

$$h(t) * x(t) = h'(t) * x^{(-1)}(t) = 2u_{-2}(t-4) - 2u_{-2}(t-6) - 2u_{-2}(t-8) + 2u_{-2}(t-10)$$

این روش را با روش ترسیمی می توان ادغام کرد.

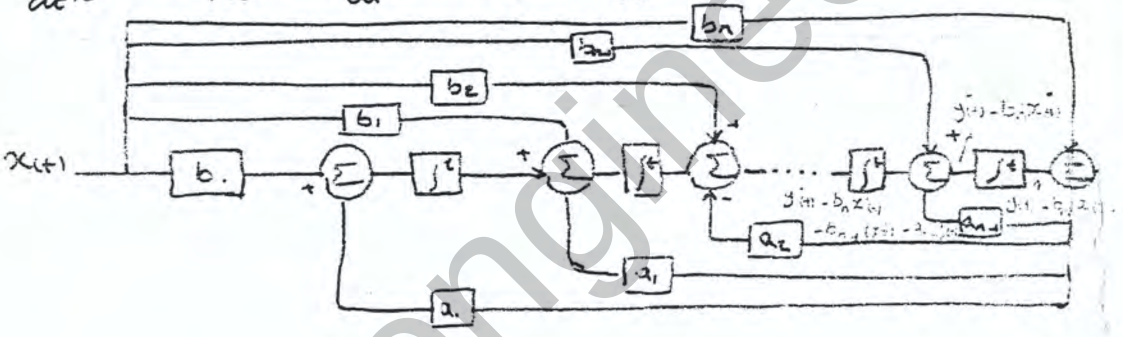
...سن اگر برخیزم

۷۹,۱۲,۱

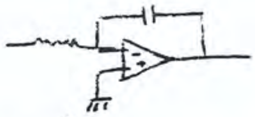
در روش سوم اگر $x(t)=\underbrace{u_{-3}(at+b)}_{x_1(t)} + \underbrace{u_{-2}(t+5)}_{x_2(t)}$ داشته باشیم، از سوپر پوزیشن استفاده می کنیم :

$$h(t) * x(t) = h^{(-2)}(t) * \ddot{x}_2(t) + h^{(-3)}(t) * x_1^{(3)}(t)$$

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{N} b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i}$$

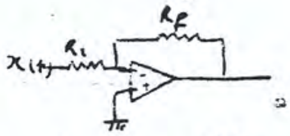


انتگرال گیر : $y(t) = \frac{-1}{RC}\int i(t)\, dt$

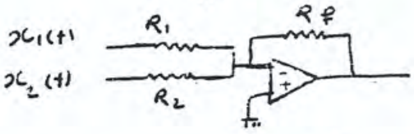


ضرب کننده : gain ثابت.

$\frac{y(t)-0}{R_f} = \frac{0-x(t)}{R_1} \Rightarrow y(t) = -\frac{R_f}{R_1}x(t)$



جمع کننده : $y(t) = -\frac{R_f}{R_1}x_1(t) - \frac{R_f}{R_2}x_2(t)$



چرا از انتگرال گیر استفاده می کنیم؟ چون می خواهیم کامپیوتر آنالوگ ما پایدار باشد. برای مشتق گیر در حوزه لاپلاس داریم : $[y(t)]' = sY(s)$ و هرچه فرکانس بیشتر می شود گین نیز زیاد می شود. مشتق گیر حساسیت بالایی دارد. مشتق گیر تقویت می کند.

- در اولین گام معادله دیفرانسیل سیستم را می‌نویسیم.

- روش کلی در مورد بلوک دیاگرام‌ها - نوشتن روابط برای جمع کننده‌ها و تعداد انتگرال گیرها پیدا کنید؟

روش سیستماتیک برای نوشتن معادلات حاکم بر سیستم خطی فشرده:

۱- تعیین اجزای اساسی مدل یا سیستم و مشخص کردن رابطه هر جزء. مثلاً در مدار مقاومت، سلف ...، خازن ...

۲- رابطه بین اجزا را می‌نویسیم. مثلاً KVL، KCL و ... در مدار

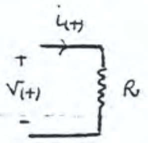
۳- حذف متغیرهای وابسته (که مستقل نیستند)

۴- مدل ساز و آنالیزگر بر روی مدل بحث می‌کند و براساس دقت لازم معادلات بدست آمده ساده‌تر و یا پیچیده‌تر می‌شود.

۵- حل معادلات سیستم با استفاده از روشهای سیستماتیک حل معادلات

مدل سازی مکانیک انتقالی - دورانی:

- تعریف جسم صلب
- چه جسمی در مکانیک انتقالی صدق می‌کند؟ جسمی که همه اجزایش از یک بردار انتقال تبعیت می‌کند



$v(t) = R\,i(t)$

جهت i از سر مثبت v وارد می‌شود. این قرارداد برای این است که "توان مصرف کننده مثبت در بیاید".

- در اولین گام معادله دیفرانسیل سیستم را می‌نویسیم.

- روش کلی در مورد بلوک دیاگرام‌ها - نوشتن روابط برای جمع کننده ها

۵ تعداد انتگرال گیرها را پیدا کنید؟)

روش سیستماتیک برای نوشتن معادلات حاکم بر سیستم خطی فشرده:

۱- تعیین اجزای اساسی مدل یا سیستم و مشخص کردن رابطه هر جزء. مثلاً در مدار مقاومت، سلف ...، خازن ...

۲- رابطه بین اجزا را می‌نویسیم. مثلاً KVL , KCL و ... در مدار

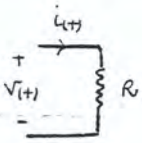
۳- حذف متغیرهای وابسته (که مستقل نیستند)

۴- مدل ساز و آنالیزگر بر روی مدل بحث می‌کنند و براساس دقت لازم معادلات بدست آمده ساده‌تر و یا پیچیده‌تر می‌شود.

۵- حل معادلات سیستم با استفاده از روشهای سیستماتیک حل معادلات

مدل سازی مکانیک انتقالی - دورانی:

- تعریف جسم صلب
- چه جسمی در مکانیک انتقالی تبعیت می‌کند؟ جسمی که همه اجزایش از یک بردار انتقال تبعیت می‌کند



جهت i از سر مثبت v وارد می‌شود. این $v(t) = R\,i(t)$

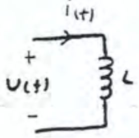
قرارداد برای این است که "توان مصرف کننده مثبت در بیاید"

11

متغیر عرضی: در این مدار ولتاژ یا اختلاف پتانسیل ← وسیله اندازه‌گیری در دو سر جزء قرار گیرد
در مکانیک سرعت، شتاب و ...

متغیر عبوری: در این مدار جریان ← وسیله اندازه‌گیری را در مسیر متغیر قرار می‌دهیم.

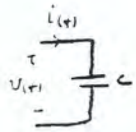
توان لحظه‌ای = متغیر عبوری × متغیر عرضی



$\Phi = Li \rightarrow$ (از تعریف L آمده است $L=\frac{\Phi}{i}$)

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \rightarrow i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(\lambda)\,d\lambda$$

توان متوسط $= \frac{1}{2} L I^2$



رابطه اصلی: $Q = CV$

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\lambda)\,d\lambda$$

توان متوسط $= \frac{1}{2C} q^2 = \frac{1}{2} qv = \frac{1}{2} C v^2$

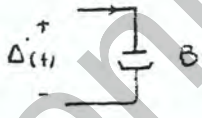
توان تلفاتی در سلف و خازن صفر است.

* در مکانیک انتقالی:

متغیر عرضی: سرعت

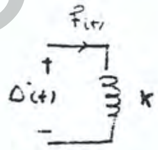
متغیر عبوری: نیرو

کمک فنر:



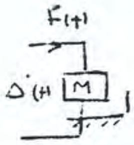
$$f(t) = B\dot{\Delta}$$
$$\dot{\Delta} = \frac{1}{B} f$$

فنر:



$$f = K\Delta = K\int_{-\infty}^{t} \dot{\Delta}(\lambda)\,d\lambda$$
$$\dot{\Delta}(t) = \frac{1}{K}\frac{df(t)}{dt} \qquad \frac{1}{2}K\Delta^2$$

جرم:



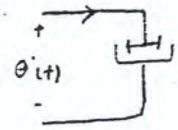
$$f(t) = M\frac{d\dot{\Delta}(t)}{dt}$$
$$\dot{\Delta}(t) = \frac{1}{M}\int_{-\infty}^{t} f(\lambda)\,d\lambda \qquad E_c = \frac{1}{2}M\dot{\Delta}^2$$

معادل ترانسفورماتور در مکانیک انتقالی، اهرم با سر وسط است.

* در مکانیک دورانی :

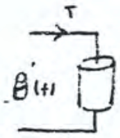
متغیر عرضی : سرعت زاویه ای $\dot{\theta}(t)$ متغیر عبوری : گشتاور $T(t)$

کمک فنر زاویه ای :

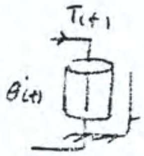


$$T = B\dot{\theta}$$
$$\dot{\theta} = \frac{1}{B}T$$

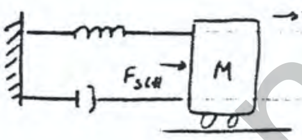
فنر زاویه ای :



$$T(t) = K\theta = K\int^{t}\dot{\theta}(\lambda)\,d\lambda$$
$$\dot{\theta}(t) = \frac{1}{K}\frac{dT(t)}{dt}$$
$$E = \frac{1}{2}K\theta^2$$

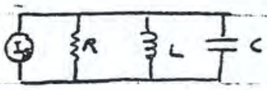


$$T(t) = J\frac{d\dot{\theta}(t)}{dt}$$
$$\dot{\theta}(t) = \frac{1}{J}\int_{-\infty}^{t}T(\lambda)\,d\lambda$$
$$E_C = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$



$$F_s(t) = M\frac{d\dot{\Delta}}{dt} + K\Delta + B\dot{\Delta}$$

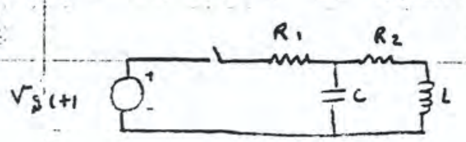
$$I_s = C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int v\,dt$$



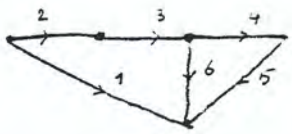
$C \longleftrightarrow M$ $\frac{1}{R} \longleftrightarrow B$ $\frac{1}{L} \longleftrightarrow K$

* گراف: مجموعه‌ای از شاخه‌ها و گره‌ها است که هر جزئی از سیستم را با یک شاخه متناظر کنیم.

گراف جهت دار: جهت متغیر عبوری را در شاخه‌ها (که متناظر با اجزا است) مشخص می‌کنیم، جهت متغیر عرضی خود بخود تحمیل می‌شود (تا توان مصرف کننده مثبت باشد)



این مدار ۶ جزء دارد.



* $v_1(t) = V_s(t)$

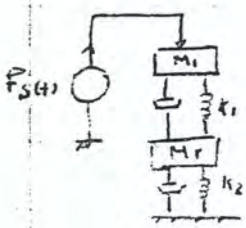
* $\begin{cases} i_2(t)=0 \\ v_2(t)=0 \end{cases}$ اگر سویچ باز باشد. اگر سویچ بسته باشد.

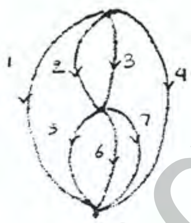
$v_3(t) = R_1 i_3(t)$

$v_4(t) = R_2 i_4(t)$

$v_5(t) = L\dfrac{di_5(t)}{dt}$

$i_6(t) = C\dfrac{dv_6(t)}{dt}$





به ازای اجرام مستقل گره رسم می‌کنیم. یک گره هم گره زمین در نظر می‌گیریم. از تمام اجرام مستقل یک شاخه به گره زمین می‌کشیم. گراف نشان می‌دهد که متغیر عبوری چگونه تقسیم می‌شود. مثلا در اینجا $f(t)$ تقسیم می‌شود، قسمتی به فنر، قسمتی به کمک فنر می‌رود و قسمتی هم صرف شتاب دادن به m_1 می‌شود. می‌توانیم شاخه (شاخه 4) مربوط به m_1 را به گره وسطی هم ببریم (به جای زمین) ولی در آن صورت سرعت و شتاب و ... m_1 را نسبت به m_2 می‌سنجیم.

$f_1(t) = -F_s(t)$

$f_2(t) = B_1 \Delta_2(t)$ $\qquad f_3(t) = K_1 \Delta_3(t)$

$f_4(t) = M_1 \dfrac{d\Delta_4(t)}{dt}$ $\qquad f_5(t) = B_2 \Delta_5(t)$

$f_6(t) = K_2 \Delta_6(t)$ $\qquad f_7(t) = M_2 \dfrac{d\Delta_7(t)}{dt}$

در عید قربان اسماعیلت را با دست خودت نابود کن. اسماعیل ابراهیم پسرش بود. اسماعیل تو شاید ...
شریعتی

۷۹/۱۲/۱۸

اگر یک گراف دارای e شاخه و b گره باشد:

رابطه بین متغیر عرضی و طولی هر شاخه ← N معادله ← 2N متغیر

قانون تعمیم یافته KCL ← b-1 معادله مستقل

قانون تعمیم یافته KVL   N-(b-1)

درخت: گراف متصلی که هیچ دوری (حلقه) ندارد.

هر گرافی که b گره دارد، b-1 شاخه دارد (درخت آن). آنهایی را که حذف کرده‌ایم link می‌گوییم ... (link ← اتصال)

* قانون تعمیم یافته KCL:

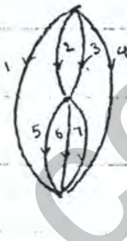
گرافی شامل n شاخه جهت دار، گراف سیستم معرف یک سیستم است.

اگر $v_j(t)$ متغیر عبوری شاخه j ام باشد، داریم:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j v_j(t) = 0$$

$a_j = \begin{cases} 0 & \text{اگر شاخه j ام با گره k ام تلاقی نداشته باشد} \\ +1 & \text{اگر شاخه j ام با گره k ام تلاقی داشته باشد و جهت آن به سمت خارج گره باشد} \\ -1 & \text{اگر شاخه j ام با گره k ام تلاقی داشته باشد و جهت آن به سمت داخل گره باشد} \end{cases}$

مثال:



$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$

$a_5 = a_6 = a_7 = 0$

قانون عام گره ٤: درختی گرافی که b گره دارد، b-1 شاخه دارد.

* قانون تعمیم یافته KVL (قانون عام حلقه ٤)

مش حلقه‌ای است که درون آن حلقه دیگری قرار ندارد. (می‌توان به روشهای دیگری نیز مش را تعریف کرد.) بجای معادله حلقه، معادله مش می‌نویسیم ← مرحله ساده‌سازی خود بخود انجام می‌شود: ۱۳

اگر گراف خطی ما n شاخه جهت دار داشته باشد. برای حلقه k ام داریم:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j V_j = 0$$

$$b_j = \begin{cases} 0 & \text{وقتی شاخه j ام در حلقه k ام وجود ندارد.} \\ +1 & \text{وقتی شاخه j ام در حلقه k ام وجود دارد و جهت آن هم‌جهت جهت گردش است} \\ -1 & \text{وقتی شاخه j ام در حلقه k ام وجود دارد و جهت آن در خلاف جهت گردش است} \end{cases}$$

۵. تمرین: برای سیستم قبلی کلیه اطلاعات را بنویسید. $b_2 = b_4 = b_6 = b_7 = 0$

برای حلقه سمت چپ $b_1 = 1$ $\quad b_3 = b_5 = -1$

سری فوریه: [illegible] هر سیگنال را می‌توانیم به صورت [illegible] = آنالیز [illegible] استفاده [illegible]

چرا از فوریه استفاده می‌کنیم؟

۱. اگر در راستای استدلالهای ذاتی یک سیستم، آن را بررسی کنیم، کار ما ساده‌تر است.

۲. بهترین راه برای یافتن پاسخ steady state (پایدار) (منظور سینوسی) در سیستم خطی استفاده از تبدیلهای فوریه و لاپلاس است. چون به شرط اولیه نیاز ندارد و بررسی از $-\infty$ آغاز می‌شود.

۳. محاسبه کانولوشن و دکانولوشن در حوزه لاپلاس و فوریه آسانتر است (مثلاً زمانی که پاسخ و ورودی را داریم و تابع مربوط به سیستم را می‌خواهیم).

* $\exp(j\omega t)$ ها توابع ویژه سیستمهای خطی هستند.

۴. سری فوریه از تقریبهایی برای بیان یک تابع است که کمترین خطا را دارد.

۵. ثابت کنید که در یک تابع متناوب وقتی روی یک دوره تناوب، انتگرال می‌گیریم نقطه شروع مهم نیست.

داریم:

$$1.\ \int^{T} \sin(n\omega_0 t)\,\sin(m\omega_0 t)\,dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T/2 & m = n \end{cases}$$

$$2.\ \int^{T} \cos(m\omega_0 t)\cdot\cos(n\omega_0 t)\,dt = \begin{cases} T/2 & m=n \\ 0 & m\neq n \end{cases}$$

$$3.\ \int^{T} \sin(n\omega_0 t)\,\cos(n\omega_0 t)\,dt = 0$$

$$4.\ \int^{T} \sin(m\omega_0 t)\,dt = 0$$

$$5.\ \int^{T} \cos(m\omega_0 t) = \begin{cases} 0 & m\neq 0 \\ T_0 & m=0 \end{cases}$$

$$6.\ \int^{T} e^{j\omega_0 m t}\,dt = \begin{cases} 0 & m\neq 0 \\ T_0 & m=0 \end{cases}$$

$x(t)$ یا تابع متناوب با دوره تناوب T_0 :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\right)$$

برای محاسبه a_0 : طرفین را در dt ضرب می کنیم روی T_0 انتگرال می گیریم. a_0 مقدار متوسط یا dc تابع است

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{T_0}\int^{T_0} x(t)\,dt$$

اگر مقدار dc به سیگنال اضافه کنیم فقط a_0 را تغییر می دهد. (اگر بقیه ضرایب را هم تغییر بدهد، دلیل بر غیرخطی بودن سیگنال است ← روش تشخیص سیگنال غیرخطی)

برای محاسبه a_n : طرفین را در $\cos n\omega_0 t\ dt$ ضرب می کنیم. روی T_0 انتگرال می گیریم. انتگرال مجموع برابر مجموع انتگرالهاست (... $m\neq 0$ فراموش نشود)

$$\int^{T} x(t)\cos m\omega_0 t\,dt = \int^{T} a_m \cos m\omega t\cdot\cos n\omega t\,dt = \frac{T_0}{2}a_m$$

$$\Rightarrow a_m = \frac{2}{T_0}\int^{T_0} x(t)\cos m\omega_0 t\,dt$$

14 $$\Rightarrow b_m = \frac{2}{T_0}\int^{T_0} x(t)\sin m\omega_0 t\,dt$$

- اگر $x(t)$ زوج باشد، b_n ها صفر است. به دو دلیل. یکی از تعریف اولیه: چون $x(t)$ زوج است. طرف راست معادله هم باید زوج باشد. پس ضرایب سینوس صفر است. دوم آنکه انتگرال تابع فرد صفر است.

- اگر $x(t)$ فرد باشد، a_n ها صفر است.

۵ تساوی در معادله $x(t) = a_0 + \dots$ به چه معنایی است؟

۱. سری باید همگرا باشد ← برای هر تابع تساوی نمی توان سری فوریه نوشت.

۲. در یک جهت باید به سمت $x(t)$ میل کند.

اگر x در جا پیوسته باشد ← $x(t) = a_0 + \sum a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$

شرایط دیریکله: ۱. تابع بصورت تکه ای خطی قابل نمایش باشد.

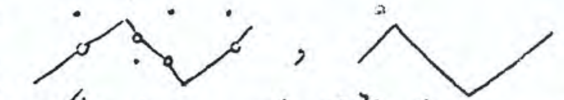
(شرط کافی برای داشتن سری فوریه)

۲. تعداد تکه های خطی محدود باشد.

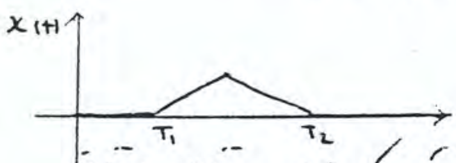
۳. تعداد ماکزیمم و مینیمم ها محدود باشد ($\sin 1/t$ این شرط را ندارد)

اگر $y(t)$ سری فوریه سینوسی $x(t)$ باشد: $\int^{T_0} |y(t) - x(t)|^2 dt \to 0$

← سری باید به سمت $x(t)$ همگرا باشد. انرژی $y(t)$ به انرژی $x(t)$ میل می کند.

سری فوریه  یکسان است. تعداد محدود نقاط ناپیوسته در حاصل انتگرال ضرایب فوریه تاثیری ندارد. (فوریه شکل سمت چپ را اگر بنویسیم، به تابع پیوسته سمت راست می رسیم.) / انرژی در این دو تابع یکسان است. چون نقاط ناپیوستگی عرضی ندارد.

و البته به شرط آنکه در نقاط ناپیوستگی ضربه نباشد فوریه یکسان است.



می خواهیم برای این تابع نامتناوب ضرایب فوریه بنویسیم؟

به روشهای مختلفی این تابع را به صورت متناوب در می آوریم که ضرایب سری های متفاوتی به ما می دهند. ولی همه اینها در $[T_1\ T_2]$ با هم یکی هستند.

زیرا فوریه اثبات کرد اگر $x(t)$ پیوسته باشد، سری فوریه آن به سمت خودش میل می کند. در فاصله $[T_1, T_2]$ (فقط در این فاصله) تابع پیوسته است ـ حاصل انتگرال ضرایب یکتا است. بنابراین ضرایب در این فاصله به صورت یکتا محاسبه می شود.

۵ : برای موارد زیر سری فوریه حساب کنید:

۱ـ یکسو شده نیم موج تک فاز. $\quad 1/\pi + \sum \frac{(-1)^n}{(n-1)\pi} \cos n\omega t$

۲ـ یکسو شده تمام موج تک فاز $\quad 2/\pi + \sum \frac{1+2(-1)^n}{(n+1)\pi} \cos n\omega t$

۳ـ یکسو شده تمام موج سه فاز

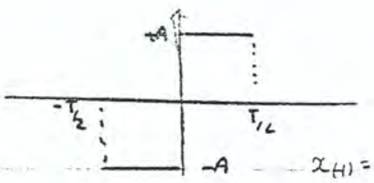
۴ـ یکسو شده نیم موج سه فاز

۵ـ موج مثلثی

۶ـ موج مربعی

۷ـ موج دندانه اره ای

مثال ـ تابع فرد ← $a_n = 0$



$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} A \sin n\omega t \, dt = \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ \frac{4A}{n\pi} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{4A}{\pi}\left(\sin \omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \cdots\right)$$

در این مثال:

دامنه هارمونیک زوج صفر و دامنه هارمونیک فرد، متناسب با شماره آن است. مثلاً دامنه هارمونیک ۹۹ ام، $\frac{1}{99}$ ام دامنه اصلی است

و نیز داریم: (به ازای $t = T/4$)

$$A = \frac{4A}{\pi}\left(1 - 1/3 + 1/5 - \cdots\right)$$

جهان را که آفرید!

ـ جهان را این آفریدیم!

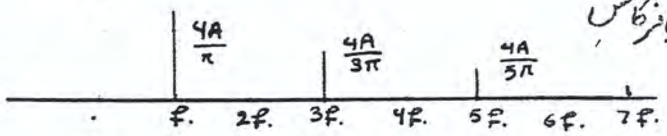
به لطف کودکانه اعجاز...

۷۰۱/۱۲/۲۱

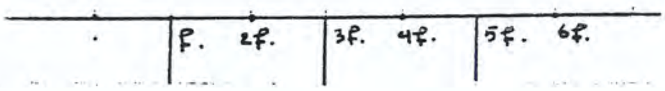
۶ $\quad x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$

اگر
$$A_n = \sqrt{a_n^2+b_n^2}$$
$$\theta_n = -\tan^{-1}\frac{b_n}{a_n}$$

طیف یک طرفه دامنه موج مربعی با فرکانس f_0 و دامنه A:



طیف فاز موج مربعی با فرکانس f_0 و دامنه A.



$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega t}$$

طرفین را در $e^{-jn\omega t}$ ضرب می‌کنیم، و از آن انتگرال می‌گیریم. ←

$$X_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

$$X_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cos n\omega_0 t\, dt - \frac{j}{T_0}\int x(t)\sin n\omega_0 t\, dt$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_n = \frac{1}{2}a_n - \frac{j}{2}b_n & n>0 \\ X_n = \frac{1}{2}a_n + \frac{j}{2}b_n & n<0 \end{cases} \Rightarrow |X_n| = |X_{-n}|$$

روش دیگر:

برای $x(t)$ های حقیقی: $X_n^* = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, e^{jn\omega t} dt = X_{-n} \Rightarrow \begin{cases} |X_n| = |X_{-n}| \\ \angle X_n = -\angle X_{-n} \end{cases}$

⇐ طیف دامنه زوج و طیف فاز فرد است. (اگر $x(t)$ حقیقی باشد)

اگر $x(t)$ حقیقی و زوج باشد، X_n حقیقی و زوج است.
اگر $x(t)$ حقیقی و فرد باشد، X_n تنها موهومی و فرد است (طیف فاز تنها $\pm\pi/2$ است)

سیگنالی "تقارن نیمه موج فرد" دارد که $x(t-T_0/2) = -x(t)$

نتیجه: سیگنالی که تقارن نصف موج فرد دارد، هارمونیک زوج ندارد.

$$X_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int^{T_0/2} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt + \frac{1}{T_0}\int_{T_0/2}^{T_0} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

$t_1 = t - T_0/2$

$$= \frac{1}{T_0}\int^{T_0/2} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt + \frac{1}{T_0}\int_0 -x(t_1)\, e^{-jn\omega_0 t_1}\, e^{-jn\omega_0 T_0/2}\, dt_1$$

$$= (1 - e^{jn\pi})\, \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt = \begin{cases} 0 & \text{زوج } n \\ \frac{2}{T_0}\int^{T_0/2} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt & \text{فرد } n \end{cases}$$

اگر یک سیگنال $x(t)$ دارای تقارن نصف موج زوج است، در حقیقت دوره تناوب را اشتباه در نظر گرفته ایم! دوره تناوب $T_0/2$ بوده است.

۵: ضرایب

۵: داریم $\sum X_n e^{jn\omega_0 t} = A_0 + \sum A_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$. رابطه فاز θ_n ! X_n و دامنه X_n را با A_n بیابید.

$|X_n| = 1/2\, A_n \quad n \neq 0$, $\theta_n = \angle X_n$

$X_0 = A_0 = a_0$

* اگر مشتق $x(t)$ سری فوریه داشته باشد، رابطه ضرایب آن چگونه است؟

$y(t) = x'(t)$

$$x(t) = A_0 + \sum A_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$y(t) = A_0' + \sum^{\infty} A_n' \cos(n\omega_0 t + \theta_n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} Y_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$y(t) = x'(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (jn\omega_0)\, X_n e^{jn\omega_0 t} \rightarrow Y_n = (jn\omega_0)\, X_n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |Y_n| = |n|\,\omega_0\, |X_n| \\ \angle Y_n = \pm \pi/2 + \angle X_n \end{cases}$$

اگر $y(t) = x(t - t_0)$ باشد، $Y_n = X_n e^{-jn\omega_0 t_0}$

* درباره سیگنال متناوب داریم: $P_{av} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2\, dt$

این تعریف همان تعریف قبلی است . $\left(\frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \right)$

برای اثبات از این طرف به آن طرف می رویم $\frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt \Rightarrow$

به استقرا : $T_1 = K T_0 \quad \rightarrow \quad K \to \infty$

(اگر از فرمول قبلی به این فرمول برسیم ، اشکال پیش می آید چون T بزرگی که به بینهایت میل می دهیم مضرب صحیحی از T_0 نیست)

می خواهیم نشان دهیم :

$$P_{av} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} |X_n|^2$$

$$P_{av} = \frac{1}{T_0}\int x(t) \cdot x^*(t)\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} X_n^* e^{-jn\omega_0 t}\right) dt$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} X_n^* \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t} dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} |X_n|^2$$

این همان مسئله ای است که در مدارها گفتیم : $P_{av} = A_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty} A_n^2$

طیف دوطرفه : سری دوطرفه را پیدا کنیم .

۵ تعریف فضای برداری

مجموعه پدیدآورنده . $\vec{\omega} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$

اگر $v_1, \dots, v_4$ مستقل خطی باشند ، مجموعه برداری پایه ای می سازند . اگر این بردارها متعامد خطی باشند ، پایه ها مناسب تر است .

مجموعه پدیدآورنده $\leftarrow \quad \vec{\omega} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 + \alpha_4 \vec{v}_4$

$$\int_T \varphi_m(t)\, \varphi_n^*(t)\, dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

* فرض کنیم $v_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ ، $v_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ ، $v_3=\begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix}$ ، $v_4=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ می خواهیم

بردارهای یکه متعامد از آنها بسازیم: (بسه تا)

$\vec{v}_1 \Rightarrow \vec{u}_1 = \frac{\vec{v}_1}{|\vec{v}_1|} \Rightarrow \vec{u}_1 \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

$v_2' = v_2 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)\, u_1 \qquad \vec{u}_2 = \frac{\vec{v}_2'}{|\vec{v}_2'|} \qquad v_2' = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \rightarrow \vec{u}_2 = \begin{bmatrix}0\\ \sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2\end{bmatrix}$

$v_3' = \vec{v}_3 - \left[(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3)\,\vec{u}_1 + (\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3)\,\vec{u}_2\right] \rightarrow \dots \qquad v_3' = \vec{v}_3 - \left[2\vec{u}_1 + 8\vec{u}_2\right]$

$\Rightarrow v_3' = \begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2\\4\sqrt{2}\\4\sqrt{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\3-4\sqrt{2}\\5-4\sqrt{2}\end{bmatrix} \qquad \hat{u}_3 = \frac{\vec{v}_3'}{|v_3'|}$

$x(t)$ را تصویر گیری کنیم

$$x(t)\ \text{تصویر} = y(t) = \sum_{K=1}^{N} \alpha_n \Phi_n(t)$$

معیار ما این است که انرژی توان خطا مینیمم شود. (معیار ما root mean square error است)

$$\varepsilon_N = \int_T |y(t) - x(t)|^2\, dt$$

$$\varepsilon_N = \int_T \left[x(t) - \sum_1^N \alpha_n \Phi_n(t)\right]\left[x^*(t) - \sum_1^N \alpha_n^* \Phi_n^*(t)\right] dt$$

$$= \int_T |x(t)|^2 dt + \underbrace{\sum_1^N \left|\alpha_n - \int_T x(t)\, \Phi_n^*(t)\, dt\right|^2}_{\text{مینیمم}} - \sum_1^N \left|\int_T x(t)\, \Phi_n^*\, dt\right|^2$$

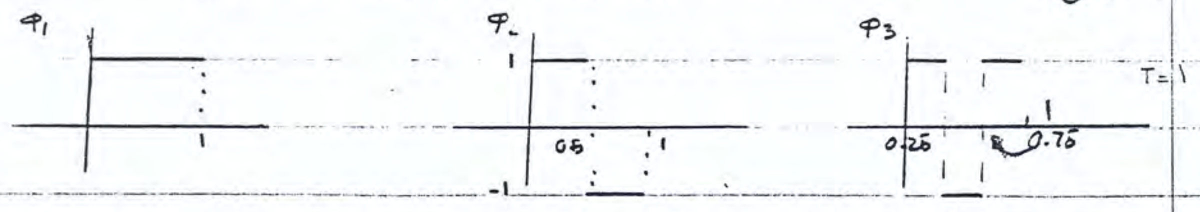
برای مینیمم کردن ε_N فقط قسمت وسط را می توانیم بررسی کنیم (به α_n بستگی دارد)

$$\Rightarrow \alpha_n = \int_T x(t)\, \Phi_n^*(t)\, dt$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{N_{min}} = \int_T |x(t)|^2 dt - \sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|^2$$

$$\varepsilon_N \rightarrow 0 \leftarrow N \rightarrow \infty$$

مثال،



الف ـ نشان دهید φ ها متعامد هستند. $\frac{1}{T}\int \varphi_m(t)\,\varphi_n^*(t)\,dt = \begin{cases} 0 & m\neq n \\ 1 & m=n \end{cases}$

ب ـ برای $x_1=\cos 2\pi t$ و $x_2=\sin 2\pi t$ ، $y(t)$ را طوری بیابید که خطای توان می نیمم شود.

در $m\neq n$:

$\int \varphi_1\varphi_2\,dt = \int \varphi_2\,dt = 0 \rightarrow$ سطح زیر منحنی صفر است

$\int \varphi_1\varphi_3\,dt = \int \varphi_3\,dt = 0$

$\int \varphi_2\varphi_3\,dt = \int_0^{0.5}\varphi_3\,dt - \int_{0.5}^{1}\varphi_3\,dt = 0$

در $m=n$ ، سطح زیر همه منحنی ها یک است.

$x_1(t)=\cos 2\pi t$

$d_3=\frac{2}{\pi}$

$\rightarrow y(t)=\frac{2}{\pi}\varphi_2(t)$ $\quad\quad \varepsilon_n=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}$

$x_2(t)=\sin 2\pi t \quad 0<t<1 \quad d_1=0 \quad d_2=\frac{2}{\pi} \quad d_3=0$

$y(t)=\varphi_1(t)d_1+d_2\varphi_2(t)+d_3\varphi_3(t)=$

تمرین ۵ : آیا اگر سیگنال را شیفت بدهیم ، انرژی سیگنال خطا تغییری نمی کند.

گویند که در خانه دل ، هست چراغی

افروخته...

۷۹،۱۲،۲۴

تبدیل فوریه :

$X(f)$ تبدیل فوریه $x(t)$ است.

$$X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{-j2\pi f t}\,dt$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\,e^{j2\pi f t}\,df$$

۵ : رابطه پایین را به وسیله تعریف بالا اثبات کنید.

شرط کافی برای اینکه انتگرال فوق همگرا باشد :

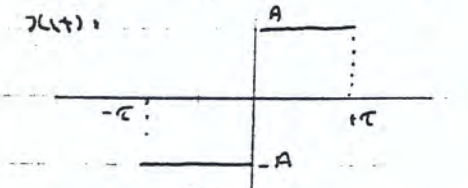
۱ ـ $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|\,dt$ محدود باشد.

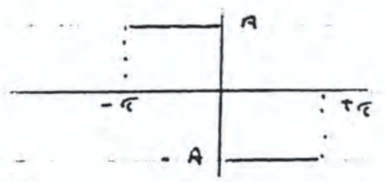
۲ ـ هر ناپیوستگی در $x(t)$ محدود باشد.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A\tau \,\mathrm{Sinc}(f\tau) = x(0) = \Pi(t/\tau)\Big|_{t=0} = A$$

۵: تبدیل فوریه شکل زیر را بیابید.

$$x(t) = A\Pi\left(\frac{t-\tau/2}{\tau}\right) - A\Pi\left(\frac{t+\tau/2}{\tau}\right)$$





$$\Rightarrow X(f) = A\tau e^{-j\pi f\tau}\,\mathrm{Sinc}(f\tau) - A\tau e^{+j\pi f\tau}\,\mathrm{Sinc}(f\tau) = \frac{A}{j\pi f}\left(1-\cos(2\pi f\tau)\right)$$

تبدیل فوریه ضربه واحد 1 است (نتیجه مستقیم از تعریف $\delta(t)$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-j2\pi ft}\,dt = e^{-j2\pi f(0)} = 1$$

$$\Rightarrow \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft}\,df$$

قضیه پارسیوال:

۵: $$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,y^*(t)\,dt \stackrel{?}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\,Y^*(f)\,df$$

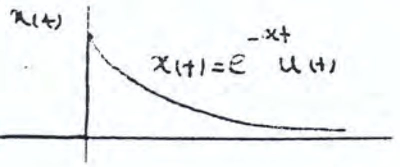
حالت خاصی از عبارت بالا قضیه پارسیوال است.

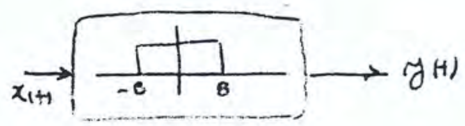
$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\,df$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,x^*(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f)\, e^{-j2\pi ft}\,df\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft}\,dt}_{X(f)}\,df = \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f)\,X(f)\,df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\,df$$

مثال: خروجی انرژی سیگنال فوق را هنگامی که از یک سیستم پایین گذری گذرد حساب کنید. چند درصد از انرژی سیگنال از سیستم عبور کرده.





راه‌حل:

$y(t) = x(t) * h(t) \qquad Y(f) = X(f)\, H(f)$

$$E_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 |X(f)|^2 df$$

با استفاده از تابع

خواص تبدیل فوریه:

۱- خطی بودن

$$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) \longleftrightarrow \alpha_1 X_1(f) + \alpha_2 X_2(f)$$

۲- شیفت زمانی

$$x(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(f)$$

مشاهده می‌شود که فقط طیف فاز را تغییر می‌دهد.

t_0: تأخیر (delay) ⇐ تأخیر مربوط به فاز است.

۳- مقیاس بندی - scaling

$$x(\alpha t) \longleftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} X(f/\alpha)$$

← در حوزه زمان فشرده ← در حوزه فرکانس گسترده.

۴- جابجایی - duality

$$X(t) \longleftrightarrow x(-f)$$

۴- مدولاسیون یا شیفت فرکانسی

$$x(t) e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow X(f-f_0)$$

$$x(t) \cos \omega_0 t \longleftrightarrow \tfrac{1}{2} X(f-f_0) + \tfrac{1}{2} X(f+f_0)$$

۵- مشتق

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow j2\pi f\, X(f)$$

- اثبات ترکیبی

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t} df \Rightarrow \dot{x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, (j2\pi f)\, e^{j2\pi f t} df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{Y}(f)\, e^{j2\pi f t} df \rightarrow \dot{x}(t) \longleftrightarrow j2\pi f\, X(f)$$

اثبات مشتق دوم:

$$F\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-j2\pi ft} dt =$$

$$= x(t) e^{-j2\pi ft} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + j2\pi f \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt}_{X(f)}$$

$|e^{-j2\pi ft}|$ یک است پس در حد $x(t)$ را بررسی می‌کنیم. طبق تعریف $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$!

۵. اگر $x(t)$ تبدیل فوریه داشته باشد، $x(\infty)=0$ چرا؟ در اثبات مشتق یک نیز نکته ای وجود دارد. چیست؟

۵: با استقرا درباره $\frac{d^n x}{dt^n}$ بدست آورید. $F(x^{(n)}(t)) = (j2\pi f)^n X(f)$

۶. $x^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\lambda) d\lambda \longleftrightarrow (j2\pi f)^{-1} X(f) + \frac{1}{2} X(0) \delta(f)$

$y(t) = x^{-1}(t) \Rightarrow x(t) = \frac{dy(t)}{dt}$

$X(f) = (j2\pi f) Y(f) \Rightarrow Y(f) = \frac{1}{j2\pi f} X(f) \to$ غلط $\to$ چرا؟

اثبات:

$y(t) = x^{-1}(t) = u(t) * x(t)$

$Y(f) = F[u(t)] \cdot X(f)$

$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \frac{1}{2}\delta(t)$

$X(0)$ سطح زیر منحنی (انتگرال) $x(t)$ است (مقدار D.C سیگنال) ← سیگنالی که مقدار D.C ندارد، اثبات بالا درمورد آن غلط نیست

۷- $* \; z(t) = x(t) * y(t) \longleftrightarrow Z(f) = X(f) \cdot Y(f)$

اثبات: $Z(f) = \int Z(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int^{+\infty} x(\lambda) y(t-\lambda) e^{-j2\pi ft} d\lambda \, dt$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\lambda)\, e^{-j2\pi f t}\, dt\, d\lambda$$ با تغییر $t-\lambda=u$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} y(u)\, e^{-j2\pi f u}\, e^{-j2\pi f\lambda}\, du\, d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\, e^{-j2\pi f\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} y(u)\, e^{-j2\pi f u}\, du\, d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\, e^{-j2\pi f\lambda}\, Y(f)\, d\lambda = X(f)\cdot Y(f)$$

$\int$ lowpass

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\, y(t-\lambda)\, d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f)\, e^{j2\pi f(t-\lambda)}\, df\, d\lambda$$ $AT\,\mathrm{sinc}\, fT \longrightarrow A\Pi\left(\frac{\pm f}{T}\right)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f\lambda}\, e^{j2\pi f t}\, Y(f)\, df\, d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f) \Big[\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\, e^{-j2\pi f\lambda}\, d\lambda}_{X(f)} \Big] e^{j2\pi f t}\, df$$

و نیز داریم:

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Z(f)\, e^{j2\pi f t}\, df \Rightarrow Z(f) = X(f)\,Y(f)$$

Δ استدلال دیگری پیدا کنید؟

$$z(t) = x(t)\cdot y(t) \longleftrightarrow Z(f) = X(f) * Y(f)$$

Δ : زیبا دهید اثباتش را.

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Z(f)\, e^{j2\pi f t}\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) * Y(f)\, e^{j2\pi f t}\, df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f t} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\lambda)\, Y(f-\lambda)\, d\lambda\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f-\lambda)\, e^{j2\pi f t}\, df\, d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} Y(u)\, e^{j2\pi\lambda t}\, e^{j2\pi u t}\, df\, d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\lambda)\, e^{j2\pi\lambda t}\, y(t)\, d\lambda$$

$$= y(t) \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df = x(t)\, y(t)$$

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, y(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f')\, e^{j2\pi f' t}\, df'\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f')\, e^{j2\pi f' t}\, e^{-j2\pi f t}\, df'\, dt \qquad \lambda = f - f'$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f-\lambda)\, e^{-j2\pi\lambda t}\, d\lambda\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f-\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi\lambda t}\, dt\, d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f-\lambda)\, X(\lambda)\, d\lambda = X(f) * Y(f)$$

دوباره آینه‌ها با تو مهربان شده اند ...

۱۹ فروردین ۸۰

ناپیوستگی از نوع جهش پله است

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & t>0 \\ -1 & t<0 \end{cases} = 2u_{-1}(t) - 1$$

$$u_{-1}(t) = 1/2\, sgn(t) + 1/2$$

$$x(t) = e^{-\varepsilon|t|} sgn(t) \longleftrightarrow F(x(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon|t|} sgn(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} -e^{\varepsilon t - j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\varepsilon t} e^{-j\omega t} dt = \frac{-1}{\varepsilon - j\omega} + \frac{1}{\varepsilon + j\omega}$$

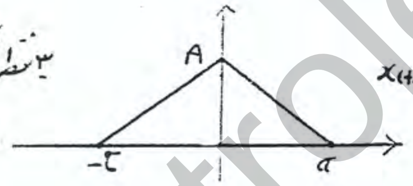
$$F(sgn(t)) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{-1}{\varepsilon - j\omega} + \frac{1}{\varepsilon + j\omega} \right) = \frac{2}{j\omega} = 2(j\omega)^{-1}$$

$$x(t) = u_{-1}(t) = 1/2\, sgn(t) + 1/2$$

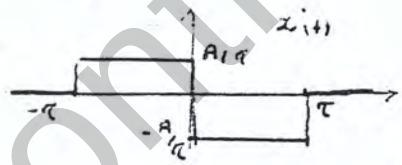
$$\Rightarrow F[u_{-1}(t)] = (j\omega)^{-1} + 1/2\, \delta(f)$$

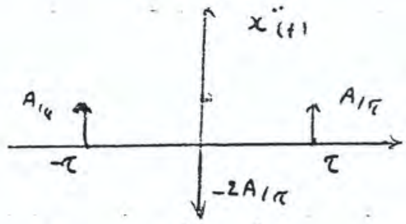
پالس مثلثی : $x(t) = \Lambda(t/\tau)$

۳ نقطه شکست



۳ نقطه ناپیوستگی





با نگاه ساده می توان گفت که چون تابع حقیقی و زوج است ، تبدیل آن حقیقی و زوج است و نیز مقدار آن در نقطه صفر، سطح زیر منحنی (Aτ) است .

$$x''(t) = A/\tau\, \delta(t+\tau) - 2A/\tau\, \delta(t) + A/\tau\, \delta(t-\tau)$$

$$X_2(f) = \tau\, Sinc^2(f\tau)$$

$$X(f) = \frac{X_2(f)}{(j2\pi f)^2} = A\tau\, Sinc^2(f\tau)$$

پالس مثلثی از کانولوشن دو پالس مربعی بدست می‌آید ⇐ فوریه آن از ضرب دو تابع پالس مربعی بدست می‌آید. پس از این راه هم می‌توان فوریه پالس مثلثی را بدست آورد.
(بهتر است A را بگذاریم کنار، با دامنه ۱ حساب کنیم و از قضیه scaling استفاده کنیم.)

۵: فوریه بدست آورید. $x_2(t) = \cos(w_0 t)$ $\quad x(t) = \sin w_0(t)$

تمام اطلاعات موجود در یک موج متناوب در یک دوره تناوب آن موجود است.
پس ضرایب سری فوریه موج را می‌توان از روی تبدیل فوریه primitive آن نوشت.

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} P(t-mT) = P(t) * \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t-mT)$$

برای یافتن ضرایب سری فوریه $x(t)$، فوریه $\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-mT)$ را بدست می‌آوریم. این تابع هیچکدام از شرطهای کافی داشتن فوریه را ندارد.

$$y_s(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-mT_s)$$

$y_s(t)$ یک تابع متناوب است و ضرایب سری فوریه را می‌توان برای آن نوشت.

$$y_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y_n e^{jnw_s t} = f_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jnw_s t}$$

$$\Rightarrow F(y_s(t)) = f_s \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(f-nf_s)$$

تبدیل فوریه $x(t)$ (متناوب) از ضرب $P(f)$ و $F(y_s(t))$ بدست می‌آید.
حالا ضرایب سری فوریه $x(t)$ را بدست می‌آوریم.

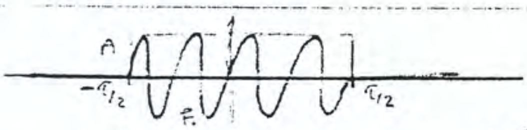
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{jw_s n t} \rightarrow F(x(t)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \delta(f-nf_s)$$

$$x(t) = P(t) * \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t-mT) \Rightarrow F(x(t)) = P(f) \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_s \, \delta(f-mf_s)$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} f_s P(nf_s) \, \delta(f-mf_s)$$

$$\Rightarrow X_n = f_s P(nf_s)$$

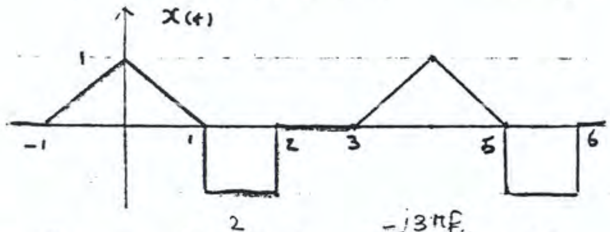
تبدیل فوریه پالس زیر را بدست آورید.



$\rightarrow A\Pi(t/\tau)\cos(2\pi f_0 t) = x(t)$

$X(f) = A\tau\,\mathrm{Sinc}(f\tau) * \left[\frac{1}{2}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}\delta(f+f_0)\right]$

$\quad = \frac{A\tau}{2}\mathrm{Sinc}(f-f_0)\tau + \frac{A\tau}{2}\mathrm{Sinc}(f+f_0)\tau$



$P(t) = \Lambda(t) - \Pi\left(\frac{t-1.5}{1}\right)$

$\Rightarrow P(f) = \mathrm{Sinc}^2(f) - e^{-j3\pi f}\mathrm{Sinc}(f)$

$X_n = f_s P(nf_s) = \frac{1}{4}P\left(\frac{1}{4}n\right)$

$\Rightarrow X_n = 0.25\left[\mathrm{Sinc}^2(0.25n) - e^{-j0.75\pi n}\mathrm{Sinc}(0.25n)\right]$

۸۰/۱/۲۱

$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)\ \text{LTI}} \rightarrow y(t) = x(t) * h(t)$

$X(f) \rightarrow \boxed{H(f)} \rightarrow Y(f) = X(f)\cdot H(f)$

مشخصه فرکانسی سیستم:

$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$ $\qquad H(f) = F[h(t)]$

در سری و انتگرال فوریه صدق می‌کند.

$|Y(f)| = |X(f)|\,|H(f)|$

$\angle Y(f) = \angle X(f) + \angle H(f)$

برای سری می‌توان نوشت:

$|Y(nf_0)| = |X(nf_0)|\cdot|H(nf_0)|$

$$|Y_n| = |X_n|\,|H(nf_0)|$$

$$\angle Y_n = \angle X_n + \angle H(nf_0)$$

پاسخ سیستم به ورودی $x(t)=Ae^{j\omega t}$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int x(t-\lambda)\,h(\lambda)\,d\lambda = Ae^{j\omega t}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\,e^{-j\omega\lambda}\,d\lambda}_{H(f)}$$

روشهای بدست آوردن تبدیل فوریه پاسخ ضربه:

۱ـ تبدیل فوریه پاسخ ضربه را مستقیما محاسبه می‌کنیم.

۲ـ استفاده از $\frac{Y(f)}{X(f)}$ بعنوان پاسخ فرکانسی.

۳ـ نوشتن پاسخ فرکانسی از روی معادله دیفرانسیل.

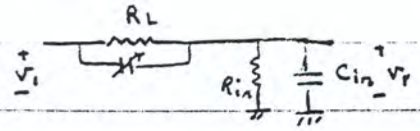
$$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_0\, y(t) = b_m x^{(m)}(t) + \cdots + b_0\, x(t)$$

$$a_n (j\omega)^n Y(f) + \cdots + a_0 Y(f) = b_m (j\omega)^m X(f) + \cdots + b_0 X(f)$$

$$\Rightarrow H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \cdots}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \cdots}$$

۴ـ استفاده در آنالیز فازوری. نسبت خروجی به ورودی را در حوزه فازبردار می‌نویسیم.
(حل مداری)

سیستم بدون اعوجاج (distortionless):

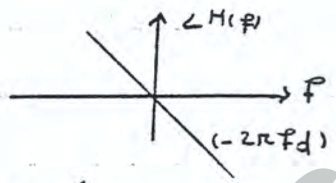


$$\frac{V_2}{V_1} = K$$

سیستم بدون اعوجاج به این صورت است: ورودی $x(t) \longrightarrow Kx(t-t_d)$ ، خروجی

$$\Rightarrow H(f)=\frac{Y(f)}{X(f)}=\frac{Ke^{-j\omega t_d}X(f)}{X(f)}=Ke^{-j\omega t_d}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |H(f)| = K \\ \angle H(f) \longrightarrow \text{خطی} \quad -\omega t \pm \pi \end{cases}$$



پس سیستمی بدون اعوجاج است که فاز آن خطی و دامنهٔ آن ثابت وجود دارد، و چنین سیستمی که از $f=-\infty$ تا $+\infty$ چنین خاصیتی داشته باشد، نداریم. پس برای ما مهم است که این خواص در محدودهٔ فرکانسی پهنای باند $X(f)$ وجود داشته باشند.

پس این سیستم در فاصله $(20-40)$ Hz بدون اعوجاج است.

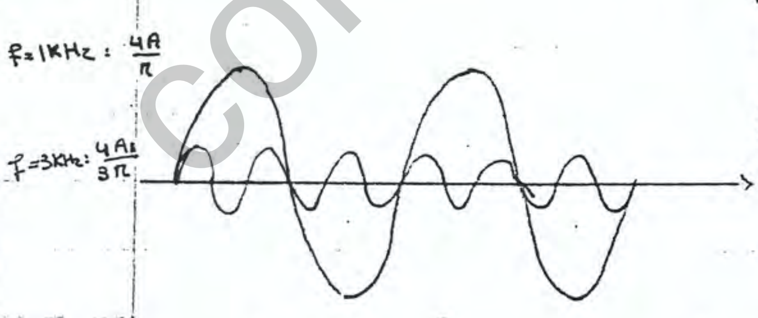
gain این سیستم $\underline{100}$ است.

و تأخیر این $\frac{-\pi/2}{80}/-2\pi=\frac{1}{160}$ $\underline{(ms)}$ است.

$$y(t)=100\,x(t-t_d)=100\,x\left(t-\frac{1}{160}ms\right)$$

در فرکانس محدوده $0-20$ اعوجاج دامنه داریم

ورودی موج مربعی به سیستم می‌دهیم. زمانی که مثلاً $f=1KHz$ است. هارمونیک‌های اول و سوم در شکل کشیده شده است. داریم:



$$f=1KHz \Rightarrow A=5\times\frac{4A}{\pi}=20A/\pi$$

$$f=3KHz \Rightarrow A=5\times3\times\frac{4A}{3\pi}=20A/\pi$$

دامنه خروجی برای هارمونیک‌های ۱ و 3 یک جور می‌شود. و در جمع خروجی مشابه ورودی نخواهد بود. یعنی خروجی موج مربعی نخواهد بود.

در محدوده 50-40 اعوجاج فاز داریم. $f_0 = 11KHz$.

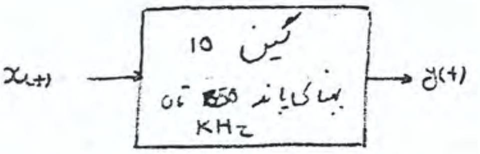
یعنی دامنه تغییر نکند، ولی فاز هارمونیک مثلاً هارمونیک سوم تغییر کند، مجموع حاصل دیگر $x(t)$ سابق نخواهد بود.

اعوجاج دامنه و فاز ← هارمونیکها و دامنه‌ها دستخوش تغییر می‌شوند.

اعوجاج غیرخطی: $y(t) = K x^2(t)$

دهنه بزرگ می‌شوند $\underbrace{Y(f)}_{\text{مثلث}} = K \underbrace{X(f)}_{\text{مربع}} * \underbrace{X(f)}_{\text{مربع}}$

تست تقویت کننده با ورودی موج مربعی:



اگر گین، گین ولتاژ باشد،

در تقویت کننده ایده آل که صد درصد انرژی به خروجی موجود خواهد بود، انرژی 10 وات خواهد بود.

* ممکن است گین، گین توان باشد.

اگر تقویت کننده غیر ایده آل باشد از هارمونیک اول تا 49 دامنه‌ها را حساب می‌کنیم و توان را محاسبه می‌کنیم.

$X(f) \longrightarrow \boxed{\quad} \longrightarrow Y(f)$

در اینجا باید H(f) را باید پیدا کنیم و سپس آنرا سنتز کنیم. در حقیقت در اینجا به دکانولوشن نیاز داریم. برعکس گذشته که ورودی و پاسخ ضربه را داشتیم و تجزیه و تحلیل می کنیم یعنی جواب را می یابیم.

فیلتر ایده آل :

بیشتر فیلترها در حوزه فرکانس بیان و بررسی می شوند.
فیلتر ایده آل ~~هملیم~~ در محدوده گذر باید بدون اعوجاج باشد.

۱ـ فیلتر پایین گذر:

اگر ورودی در محدوده گذر باشد خروجی $Kx(t-t_0)$ خواهد بود و اگر نباشد خروجی صفر باشد. ولی چنین فیلتری نمی توان ساخت.

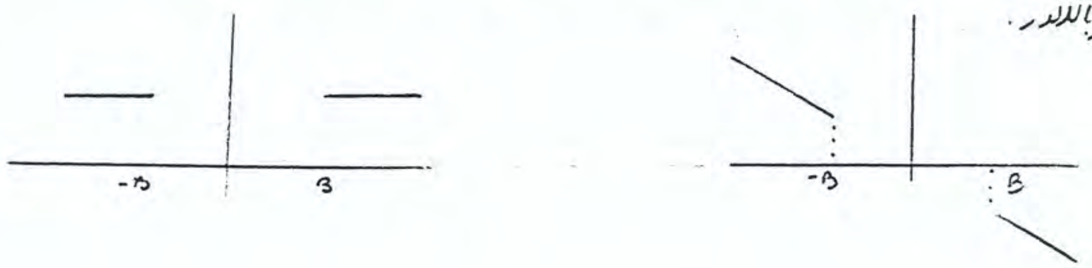
$$h_{lp}(t) = 2BK\,\mathrm{Sinc}[2B(t-t_0)]$$

این علی نیست زیرا $h_{lp}(t) \neq 0$ در زمانهای منفی. پس نمی توان به وسیله المانهای فیزیکی آنرا ساخت. (یعنی در حوزه فرکانسی نمی توان پله فرکانسی داشت)

۲ـ فیلتر میان گذر:

$$h_{BP}(t) = 2KB\,\mathrm{Sinc}[B(t-t_0)]\,\cos(2\pi f_c(t-t_0))$$

۳ـ فیلتر بالاگذر:



$$h_{hp}(t) = \delta(t) - 2BK \,\text{Sinc}\,[2B(t-t_0)]$$

۴_ فیلتر میان نگذر $h(t) = \delta(t) - 2KB \,\text{Sinc}\,[B(t-t_0)] \cos 2\pi f_c (t-t_0)$

* پدیده windowing
از یک پنجره ای یک سری فوریه را نگاه می کنیم. (تعداد جملات محدود) مثل اینکه یک پنجره مربعی در ضرب کنیم. پنجره مربعی sinc دارد در حوزه فرکانس. پس به شکل موج نهایی ما overshoot می دهد. اندازه overshoot ها به تعداد جملات انتخاب شده بستگی ندارد ولی فرکانس آنها به تعداد جملات بستگی دارد.

* درجه همگرایی roll off
نشان دهنده شدت افتادن طیف است. (ایده ای از سرعت رفتن به صفر به ما می دهد به ازای بزرگ شدن فرکانس.)

می توان تبدیل فوریه را پیدا کرد و بعد دید که تابع بدست آمده هم ارز چه $\frac{1}{x^n}$ ای است.
راه ساده تر، از $x(t)$ مشتق می گیریم. اگر مشتق $(k+1)$ ام ضربه شد. مرتبه همگرایی سیستم $(k+1)$ است.

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} X_n e^{jw_0 t}$$

$$\frac{d x^{k+1}(t)}{dt^{k+1}} = \sum (jw_0 n)^{k+1} X_n e^{jnw_0 t}$$

$$\rightarrow |X_n| = \frac{c}{|nw_0|^{k+1}}$$

این برای سری است.
در حالت کلی بدست می آید، $\frac{c'}{f^{k+1}}$

پالس مربعی درجه: ۱ پالس مثلثی درجه: ۲

$$\hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\,\frac{1}{t-\lambda}\,d\lambda$$

$$\updownarrow \qquad \updownarrow \qquad \updownarrow$$

$$\hat{X}(f) = X(f)\cdot(-j\,\mathrm{sgn}(f))$$

$$\mathrm{sgn}(t) \longleftrightarrow (j\pi f)^{-1} \xrightarrow{\text{از خاصیت duality}} : F\left[\frac{1}{\pi t}\right] = -j\,\mathrm{sgn}(f)\,X(f)$$

۵ پس به راحتی اثبات می‌شود :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{x}(t)|^2\,dt$$

و

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\hat{x}(t)\,dt = 0$$

درحقیقت اگر از سیگنالی تبدیل هیلبرت بگیریم، طیف دامنه‌اش تغییر نمی‌کند، فقط فاز تغییر می‌کند. در برای $f>0$، فاز $-\pi/2$ و برای $f<0$، فاز $\pi/2$ تغییر فازی دهد.

مثلاً اگر یک سیگنال متناوب داشته باشیم و بسط فوریه‌اش را بنویسیم:

$$x(t) = A_0 + \sum_{-\infty}^{\infty} A_n\cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

زوایش خواهد شد:

$$\hat{x}(t) = A_0' + \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n\cos(n\omega_0 t + \theta_n - \pi/2)$$

A_0' را پیدا کنید.

تابعی تحلیلی است که در ناحیه تعریفش، در هر نقطه در همسایگی آن مشتق‌پذیر باشد.

شرط کوشی - ریمان :

$x(t) = u(t) + jv(t)$ $\qquad \partial u/\partial\sigma = \dfrac{\partial v}{\partial\omega}$

$t = \sigma + j\omega$ $\qquad \partial u/\partial\omega = -\partial v/\partial\sigma$

به زبان ساده‌تر بخش حقیقی و موهومی تعریف تابع بهم وابسته‌اند.

سیگنالی تحلیلی است که طیفش یک طرفه باشد (مثبت یا منفی) (مبدأ هم نصف ← به نحوه مدولاسیون توجه شود.)

نشان می‌خواهیم که بخش موهومی و حقیقی چنین سیگنالی به هم مرتبط هستند.

$z(t) = x(t) + j\,y(t)$

$Z(f) = 0 \;:\; f<0$

$Z(f) = X(f) + j\,Y(f) \Rightarrow \underset{Z=0}{f<0} \Rightarrow \begin{cases} Y(f) = +j\,X(f) & f<0 \\ Y(f) = -j\,X(f) & f>0 \end{cases}$

$\Rightarrow Y(f) = -j\,\mathrm{sgn}(f)\,X(f)$

$\Rightarrow y(t) = \hat{x}(t)$

اگر برای $f>0$: $Z(f)=0$ حساب کنیم $\quad y(t) = -\hat{x}(t)$

ت: ثابت کنید. $\quad \hat{\hat{x}}(t) = -x(t)$

سیگنالی علّی است که برای $t<0$: $x(t)=0$. پس بخش موهومی و حقیقی مشخصه فرکانسی سیگنال علّی به هم وابسته اند.

در سیستم علّی داریم: $\quad h(t) = h_e(t) + \mathrm{sgn}(t)\,h_e(t)$

$H(f) = H'(f) + \frac{1}{j\pi f} * H'(f) = H'(f) - j\,[\hat{H}'(f)]$

$h_e(t)$ حقیقی و زوج $\Leftarrow$ $H'(f)$ حقیقی و زوج $\Leftarrow$ در بخش موهومی $H(f)$، $\hat{H}'(f)$ صرفاً حقیقی است که نشان می‌دهد بخش حقیقی و موهومی $H(f)$ به هم مربوط هستند.

تبدیل لاپلاس :

آنالیز فوریه به ما بخش steady state پاسخ را می‌دهد. تعریف لاپلاس به ما کمک می‌کند که بخش گذرای پاسخ را هم ببینیم. / در تبدیل لاپلاس نسبت به تبدیل فوریه یک ترم اضافه e^{-st} خواهیم داشت، پس کلاس سیگنالهایی که تبدیل لاپلاس دارند بزرگتر از

کلاس سیگنالهایی است که تبدیل فوریه دارند. لاپلاس شرایط اولیه را به صورت مناسب بر ما می‌دهد.

قطره بودن تا کی؟!

۷۸۰/۱/۲۸

فرض می‌کنیم انتگرال علّی است ... در تبدیل فوریه بجای $j\omega$ می‌گذاریم $\sigma + j\omega$

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{0}^{\infty} x(t)\, e^{-\sigma t}\, e^{-j\omega t}\, dt = F[x(t)\, e^{-\sigma t}]$$

علّی بودن

پس تبدیل لاپلاس یک طرفه (یا دوطرفه برای سیگنال علّی) را تعریف می‌کنیم:

$$L[x(t)] \triangleq X(s) = \int_{0}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt \qquad s = \sigma + j\omega$$

$$x(t)\, e^{-\sigma t} = F^{-1}[X(\sigma + j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma + j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

تغییر متغیر داده شده

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)\, e^{st}\, ds$$

نواحی از صفحه s که در آن این انتگرال (تعریف لاپلاس) همگراست، ناحیه همگرایی نامیده می‌شود. ROC

تبدیل لاپلاس بدست آورید:

$x(t) = 1$ چون لاپلاس یکطرفه است، $x(t)$ همان $u_{-1}(t)$ است.

$$L(1) = \int_{0}^{\infty} e^{-st}\, dt = \frac{e^{-st}}{-s}\Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{s} - 0 = \frac{1}{s}$$

$e^{-(\sigma + j\omega)t}$ فقط تابع $e^{-\sigma}$ است. زیرا $|e^{-st}| = |e^{-\sigma t}| \times 1$

$$\Rightarrow \text{if } Re[-s] < 0 \text{ then } e^{-st} \to 0$$

ناحیه همگرایی $\sigma > 0$

$\sigma = 0$ نیست. اگر بگذاریم $s = j\omega$ یعنی تبدیل فوریه را بخواهیم، این انتگرال تبدیل فوریه را به ما نمی‌دهد.

انتگرال تبدیل لاپلاس $x(t)$ مطلقاً همگراست ، اگر برای $\sigma > c$ داشته باشیم : $\int_0^{L} |x(t)|\, dt \leqslant K \leqslant \infty$ را ماعددی مثبت

و نیز داشته باشیم :

$|x(t)| \leqslant A e^{ct} \qquad t > L$

پس اگر $|x(t)|$ سریع‌تر از نمایی رشد نکند ، $x(t)$ تبدیل لاپلاس دارد .
کمترین مقدار c که رابطه را برقرار کند ، ناحیه همگرایی را مشخص می کند . این رابطه برای ما مشخص می کند که ۱ـ ناحیه همگرایی پیوسته است .
۲ـ ناحیه همگرایی از جایی موازی محور $j\omega$ تا $+\infty$ می رود (همیشه right-sided)
۳ـ

ناحیه همگرایی شامل هیچ قطبی نیست . قطب جایی است که انتگرال همگرا نیست !

در مثال بالا

$|1| \leqslant A e^{\alpha t} = 1 \quad \rightarrow \quad \sigma > 0$

$x(t) = t^{-1/2} \qquad |t^{-1/2}| < 1 \cdot e^{t} \qquad \sigma > 0$

برای این کار قسمتی از ۰ تا ۱ را در نظر می گیریم که ۱ > t (به یاد داریم که اگر از یک سری دنباله تعداد محدودی جمله حذف کنیم به همگرایی آن تغییری ایجاد نمی شود)

$x(t) = e^{-\alpha t} u(t)$

روش ۱ $\quad |e^{-\alpha t}|\, |x| \leqslant 1 \times e^{ct} \rightarrow c = Re(-\alpha) \rightarrow \sigma > -Re(\alpha)$

روش ۲ $\quad \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-st}\, dt = \frac{-1}{s+\alpha} e^{-(s+\alpha)}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+\alpha} \qquad \sigma > -Re(\alpha)$

شرط اینکه سیگنال علّی باشد ، این است که ناحیه همگرایی شامل ∞ باشد .

$x(t) = \delta(t)$

$\int_0^{\infty} \delta(t)\, e^{-st}\, dt = 1$ تمام صفحه که

قضایای اصلی تبدیل لاپلاس :

* خطی بودن :

$1-\ \alpha_1 x_1(t) + \beta_1 x_2(t) \longrightarrow \alpha_1 L(x_1(t)) + \beta L(x_2(t))$

* ناحیه همگرایی : اشتراک دو ناحیه (به مرزها دقت می شود)

* مشتق :

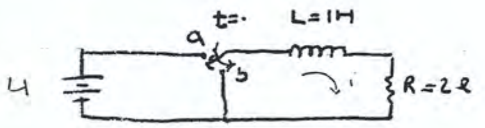
$2.\ \dfrac{d(x(t))}{dt} \longrightarrow sX(s) - x(0^-)$

$$L\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st}\,dt \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} sX(s) - x(0^-)$$

$3.\ \dfrac{d^n(x(t))}{dt^n} \longrightarrow s^n X(s) - s^{n-1} x(0^-) - s^{n-2} \dot{x}(0^-) - \dots - x^{(n-1)}(0^-)$

* ناحیه همگرایی خودش است . (به مرزها دقت شود)

مثال :



$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = 0$$

$$i(t=0^-) = \frac{4}{2} = 2\ A$$

$\rightarrow Ls\,I(s) - L\,i(0^-) + RI(s) = 0 \quad \rightarrow (Ls + R)I_s = L\,x(0^-)$

$\rightarrow I_s = \dfrac{2}{s+2} \quad \rightarrow \quad i(t) = 2e^{-2t} \quad t>0 \quad \rightarrow \begin{cases} 2 & t<0 \\ 2e^{-2t} & t>0 \end{cases}$

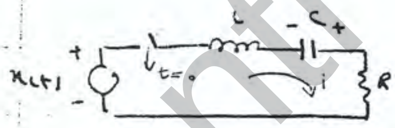
* انتگرال :

$4.\ L\left[\displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\,d\lambda\right] = \dfrac{X(s)}{s} + \dfrac{x^{(-1)}(0^-)}{s}$

* ناحیه همگرایی = ؟

ROC ∩ Re(s) > 0

اگر انتگرال را از 0^- بگیریم و x را در آن نقطه پیوسته در نظر بگیریم ، جمله دوم را نخواهیم داشت .



$V_c(0^-)$ را داریم .

$$i(0^-) = 0$$

$$x(t) = L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\lambda)\,d\lambda + Ri(t)$$

$$Ls\,I(s) - 0 + \frac{1}{Cs}I(s) + \frac{1}{Cs}\int_{-\infty}^{0^-} i(\lambda)\,d\lambda + RI_s = X(s)$$

داریم $q(0^-) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} i(\lambda)\,d\lambda \ \leftarrow \ -V(0^-) = \dfrac{q(0^-)}{C}$ ← با توجه به پلاریته $V_c(0^-)$ که نوشتیم

جهت جریانی که در نظر گرفتیم

* شیفت فرکانسی :

$5.\ x(t)e^{-\alpha t} \longrightarrow X(s+\alpha)$

ناحیه همگرایی ؟

* ناحیه همگرایی : $ROC = R - Re\{\alpha\}$ ← شیفت داده می شود ∴ اگر $\alpha = j\omega$ ← $ROC = R$

۵. تبدیل لاپلاس پیدا کنید:

$$\cos \omega_0 t \rightarrow = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$\sin \omega_0 t \rightarrow = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \rightarrow \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$e^{-\alpha t}\cos \omega_0 t \rightarrow \frac{(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$$

$$e^{-\alpha t}\sin \omega_0 t \rightarrow \frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$$

$$t.\, e^{-\alpha t}\sin \omega_0 t \rightarrow$$

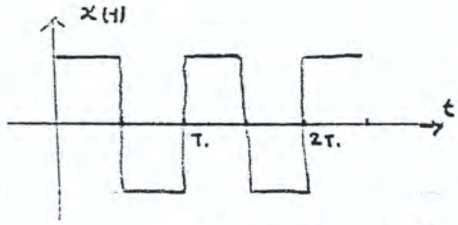
$$t\, e^{-\alpha t}\cos \omega_0 t \rightarrow$$

* شیفت زمانی. 6. $x(t-t_0)u(t-t_0) \longrightarrow e^{-st_0}X(s)$, $ROC = R$

تند ورق می خورد دفتر سبز بهار ...

۷-۱، ۲، ۲

- پیدا کردن تبدیل لاپلاس موج مربعی :



$$x(t) = u(t) - 2u(t - T_0/2) + 2u(t-T_0) + \cdots$$

$$X(s) = \frac{1}{s}\left(1 - 2e^{-sT_0/2} + 2e^{-sT_0} - \cdots\right)$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{2}{1+e^{-sT_0/2}} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{s}\,\frac{1-e^{-sT_0/2}}{1+e^{-sT_0/2}}$$

ناحیه همگرایی $|e^{-sT_0/2}| < 1 \Rightarrow \sigma > 0$

* کانولوشن : 7. $y(t) \triangleq x_1(t) * x_2(t) \longleftrightarrow Y(s) = X_1(s) . X_2(s)$

ناحیه همگرایی : اشتراک نواحی همگرایی x_1 و x_2

$$Y(s) = \int_0^\infty y(t)\, e^{-st}\, dt = \int \left(\int^\infty x_1(\lambda)\, x_2(t-\lambda)\, d\lambda \right) e^{-st}\, dt$$

$$t - \lambda = \eta$$

$$= \int^\infty \int^\infty x_1(\lambda)\, x_2(\eta)\, d\lambda\; e^{-s(\eta+\lambda)}\, d\eta$$

$$= \int_0^\infty x_1(\lambda) e^{-s\lambda} d\lambda \int_{-\lambda}^{\infty} x_2(\eta) e^{-s\eta} d\eta$$

حدود تغییرات η از $(-\lambda)$ تا ∞ است . λ عدد مثبتی است (از ۰ تا ∞)
چون سیستم علی است حدود از ۰ تا ∞ می شود.

** پس : $y(t) \triangleq x_1(t) * x_2(t) \longrightarrow Y(s) = X_1(s) . X_2(s)$

8. $t\,x(t) \longleftrightarrow -\dfrac{dX(s)}{ds}$

$$X(s) = \int_0^\infty e^{-st} x(t)\, dt \rightarrow -\frac{dX(s)}{ds} = \int_0^\infty e^{-st}\, t\, x(t)\, dt$$

• ناحیه همگرایی :

* 9. $\dfrac{x(t)}{t} \longleftrightarrow \int_s^\infty X(\tilde{s})\, d\tilde{s}$

* تابع متناوب :

10. $f(t) = f(t+T) \longleftrightarrow \dfrac{\int_0^T f(t) e^{-st} dt}{1 - e^{-sT}}$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt + \int_T^{2T} e^{-st} f(t)\, dt + \dots$$

$$t_1 = t - T$$

$$= \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt + e^{-sT} \int_0^T e^{-st_1} f(t_1)\, dt_1 + \dots$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = (1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \dots) \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt$$

این جمله تبدیل لاپلاس primitive است که با انتگرال از ۰ تا T می شود
چون بقیه جمله ها جابجا صفری شود

$$\Rightarrow \mathcal{L}[f(t)] = \frac{\int_0^T f(t) e^{-st} dt}{1 - e^{-sT}}$$

* ناحیه همگرایی : $s > 0$

در حقیقت ناحیه همگرایی اشتراک $s > 0$ و جاهایی است که $\int_0^T f(t) e^{-st} dt$ همگرا است .

۵ : تبدیل لاپلاس موج مربعی را بدست آورید و بوسیله آن تبدیل لاپلاس موج مثلثی را پیدا کنید.

$$\text{موج مربعی} = \frac{1}{s}\frac{(1-e^{-sT/2})^2}{1-e^{-sT}} = \frac{1}{s}\frac{1-e^{-sT/2}}{1+e^{-sT/2}}$$

$$\text{موج مثلثی} = \frac{1}{s^2}\frac{1-e^{-sT/2}}{1+e^{-sT/2}} + 0$$

12. $x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$

اینجا یعنی $|s|\to\infty$ ولی این روش نوشتن هم درست است.

زیرا برای تابع موهومی $F(s)$ وقتی که حد یا مشتق دارد، مستقل از مسیری که ما انتخاب می کنیم داریم:

وقتی $s\to s_0$ می رود، $F(s)$ به سمت $F(s_0)$ می رود. پس اگر s را فقط حقیقی در نظر بگیریم هم $F(s)$ به سمت $F(s_0)$ میل خواهد کرد.

حالت اول برای اثبات: $x(t)$ تابع پیوسته در نقطه $t=0$ است.

فرض: 1. ناپیوستگی $\frac{dx(t)}{dt}$ حداکثر از نوع پله است.

2. $x(0^-) = x(0^+)$

و نیز داریم $\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow sX(s) - x(0^-)$

$$\lim_{s\to\infty}\left[\int_{0^-}^{\infty}\frac{dx(t)}{dt}e^{-st}dt\right] = \lim_{s\to\infty}\left[sX(s) - x(0^-)\right]$$

به شرطی که ∞ در ناحیه همگرایی باشد

هر عدد محدودی هم باشد برای ما مهم نیست

$$\lim_{s\to\infty}\int_{0^-}^{\infty}\frac{dx(t)}{dt}e^{-st}dt = \lim_{s\to\infty}\int_{0^-}^{0^+}\frac{dx(t)}{dt}(1)\,dt + \int_{0^+}^{\infty}\frac{dx(t)}{dt}e^{-\infty}dt = 0$$

حالت دوم: وقتی $x(t)$ تابعی ناپیوسته در نقطه $t=0$ است.

$$\lim_{s\to\infty}\int_{0^-}^{0^+}\frac{dx(t)}{dt}e^{-st}dt = x(t)\Big|_{0^-}^{0^+} = x(0^+) - x(0^-)$$

اگر Δ را ثابت کنیم:

$$\lim_{\substack{s\to\infty\\ t\to 0}} e^{-st} = 1$$

قضیه مقدار نهایی: 12. $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$

از این قضیه می فهمیم که ناحیه همگرایی نیم صفحه راست است و قطبی در آن نداریم.

$$\lim_{s\to 0}\int_{0^-}^{\infty}\frac{dx(t)}{dt}\,\cancel{e^{-st}}^{\,1}\,dt=\lim_{s\to 0}\left[sX(s)-x(0^-)\right]$$

$$\hookrightarrow \lim_{t\to\infty}x(t)-\cancel{x(0^-)}=\lim_{s\to 0}sX(s)-\cancel{x(0^-)}$$

* قضیه scaling یا مقیاس‌بندی

13. $x(\alpha t)\longleftrightarrow \frac{1}{\alpha}X\left(\frac{s}{\alpha}\right)\quad \alpha>0$

$\alpha>0$ است زیرا ما لاپلاس یکطرفه می‌گیریم و فقط قسمت مثبت محور زمان را در نظر می‌گیریم.

ناحیه همگرایی $ROC=\frac{R}{\alpha}$

△ تبدیل لاپلاس حاصلضرب را پیدا کنید.

14. $x_1(t)\cdot x_2(t)\leftrightarrow$

عکس تبدیل لاپلاس :

بیشتر توابعی که از آنها عکس لاپلاس می‌گیریم، بصورت $\frac{P(s)}{Q(s)}$ است. زیرا تابع تبدیل $H(s)$ (که از معادله دیفرانسیل بدست آمده) بصورت کسری است. و ورودی‌های ما هم که بصورت $\sin(t)$ یا $e^{-\alpha t}$ یا $u(t)$ است. که لاپلاس کسری دارند $\Rightarrow$ تبدیل لاپلاس $y(t)$ بصورت حاصلضرب دو کسر یعنی کسری می‌باشد.

آ. ریشه ساده.

$$X(s)=\frac{10}{s^2+10s+16}=\frac{10}{(s+2)(s+8)}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s+8}$$

راههای بدست آوردن A و B :

۱- مخرج مشترک می‌گیریم یا نقطه‌گذاری می‌کنیم.

۲- روش "هیوی ساید"

$$\lim_{s\to -2}X(s)(s+2)=A$$

. یک نقطه هم تست کنید.

$$\Rightarrow A=5/3\ ,\ B=-5/3\ \rightarrow x(t)=\left[5/3\,e^{-2t}-5/3\,e^{-8t}\right]u(t)$$

ب. ریشه موهومی ساده:

روش قبلی قابل استفاده است. ولی باعث محاسبه (۴ تا که یکی مزدوج است) که نهایتا
باز هم باید در هم ترکیب شود.

$$X(s)=\frac{15s^2+25s+20}{(s^2+1)(s+2)(s+8)}=\frac{B_1s+B_2}{s^2+1}+\frac{1}{s+2}+\frac{-2}{s+8}$$

برای محاسبه $As+B$: در (s^2+1) دوطرف راضرب می‌کنیم و $s^2=-1$:

$$\Rightarrow X(s)=\frac{25s+5}{10s+15}=B_1s+B_2$$

در $(10s-15)$ ضرب می‌کنیم.

$$\Rightarrow X(s)=\frac{(5s+1)(2s-3)}{(2s+3)(2s-3)}=\frac{-13s-13}{-13}=B_1s+B_2$$

$$\Rightarrow B_1=B_2=1$$

ب* ریشه تکراری (ساده)

$$X(s)=\frac{10s}{(s+2)^2(s+8)}=\underbrace{\frac{A_1}{(s+2)^2}+\frac{A_2}{s+2}}_{=\frac{As+B}{(s+2)^2}}+\frac{A_3}{s+8}\rightarrow A_3=\frac{-20}{9}$$

A_1 از روش هوی ساید : $A_1=-10/3$

$$X(s)=\frac{P(s)}{(s+\alpha)^n\varphi(s)}=\frac{A_1}{s+\alpha}+\frac{A_2}{(s+\alpha)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(s+\alpha)^n}+\frac{B}{\varphi(s)}$$

$$A_m=\frac{1}{(n-m)!}\frac{d^{(n-m)}}{ds^{(n-m)}}\left[(s+\alpha)^nX(s)\right]_{s=-\alpha}$$

یک دست جام باده و یک دست زلف یار

رقصی چنین میانه میدانم آرزوست

۸۰/۲/۹ :

* ج: ریشه موهومی تکراری.

$$X(s) = \frac{s^4 + 5s^3 + 12s^2 + 7s + 15}{(s+2)(s^2+1)^2}$$

۵ : از روش عملی حساب کنید (محاسبه طولانی)

$$X(s) = \frac{A_1}{s+2} + \frac{B_1 s + C_1}{s^2+1} + \frac{B_2 s + C_2}{(s^2+1)^2}$$

A_1 : مشخص

B_2 , C_2 : در $(s^2+1)^2$ ضرب ← $s^2 = -1$ ،

← به کسری می‌رسیم که آن را (صورت و مخرجش را) در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

B_1 , C_1 ← بهتر است مقدار دهی کنیم.

برای گرفتن عکس تبدیل لاپلاس:

۱- روش کانولوشن:

$$\frac{B_2 s + C_2}{(s^2+1)^2} \rightarrow \frac{B_2}{(s^2+1)} \times \frac{s + C_2/B_2}{(s^2+1)}$$

۲- روش مشتق گیری در حوزه فرکانس

$$\frac{dX(s)}{ds} \longrightarrow -t\, x(t)$$

$$\frac{1}{(s+\alpha)^n} \rightarrow \text{روش مشتق گیری در حوزه } s \rightarrow \frac{-t}{-(n-1)} \times \frac{-t}{-(n-2)} \times \cdots \times \frac{-t}{-(n-(n-1))}\, e^{-\alpha t}$$

روش کانولوشن

$$\frac{1}{s^n} \;,\; \text{تغییر شیفت} \;\star \rightarrow \frac{1}{(n-1)!}\, t^{(n-1)}\, e^{-\alpha t}$$

تبدیل لاپلاس دوطرفه:

گاهی توالی کلید زنی ها (که با هم آسنکرون هستند) باعث می‌شود از لاپلاس دوطرفه استفاده کنیم.

$$X_d(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt = \mathcal{L}_d[x(t)]$$

→ double side

شرط کافی برای این که این انتگرال مطلق بگرا باشد، این است که

$$|x(t)| \leq \begin{cases} A e^{ct} & t>0 \\ A e^{bt} & t<0 \end{cases} \Rightarrow \forall s:\; c<s<b \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)\, e^{-st}|\, dt < \infty$$

اگر $x(t)$ در زمانهای منفی صفر باشد، لاپلاس دوطرفه خود بخود یکطرفه می شود.

- $\mathcal{L}_d$ پیدا کنید.

$$x_1(t) = e^{\alpha t}u(t) \qquad \mathcal{L}_d(x_1(t)) = \mathcal{L}_s(x_1(t)) = \frac{1}{s-\alpha} \qquad \overset{\text{یعنی}}{s>\alpha}$$

$$x_2(t) = -e^{\alpha t}u(-t) \qquad \mathcal{L}_d(x_2(t)) = \frac{1}{s-\alpha} \qquad s<\alpha$$

در لاپلاس دوطرفه مشخص کردن ناحیه همگرایی الزامی است. مثلاً برای $\frac{1}{s-\alpha}$ اگر ناحیه همگرایی مشخص نشده باشد، دو تابع علی و غیرعلی فوق را به ما می دهد.

* پیدا کردن تابع لاپلاس دوطرفه از روی لاپلاس یکطرفه:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow \begin{cases} x_1(t) = x(t)\,u(t) \\ x_2(t) = x(t)\,u(-t) \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{-st}\,dt = \int_{-\infty}^{0} x_2(t)\,e^{-st}\,dt + \underbrace{\int_{0}^{+\infty} x_1(t)\,e^{-st}\,dt}_{X_1(s)}$$

$X_1(s) \rightarrow$ با ناحیه همگرایی مشخص شده

$$\int_{-\infty}^{0} x_2(t)\,e^{-st}\,dt = \int_{0}^{+\infty} x_2(-t_1)\,e^{+st_1}\,dt_1 = Y(-s) \xrightarrow{\text{یعنی}} y(t) = x_2(-t)$$

مثال.

$$x(t) = \underbrace{e^{-3t}u(t)}_{x_1(t)} + \underbrace{e^{2t}u(-t)}_{x_2(t)} \qquad X_d(s) = X_1(s) + X_2(-s)$$

$$X_2(+s) = \mathcal{L}_s[x_2(-t)]$$

$$x_1(t) = e^{-3t}u(t) \longrightarrow X_1(s) = \frac{1}{s+3} \qquad s>-3$$

$$y(t) = x_2(-t) = e^{-2t}u(t) \longrightarrow Y(s) = \frac{1}{s+2} \quad s>-2 \longrightarrow Y(-s) = \frac{1}{-s+2} \quad s<2$$

$$\hookrightarrow X_d(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{1}{-s+2} \qquad -3<s<2$$

بازهم ناحیه همگرایی پیوسته است و شامل هیچ قطبی نیست.

۵ رابطه لاپلاس دوطرفه و تبدیل فوریه را پیدا کنید.

$$X(s)=\frac{2s}{(s+3)(s+1)} \qquad -3<\sigma<-1$$

$$X(s)=\frac{3}{s+3}-\frac{1}{s+1}$$

تمام قطب‌هایی که ناحیه همگرایی دست راست آنهاست متناظر با $X_1(s)$ هستند.

" " " " " " چپ " " " $X_2(s)$ " .

$$\Rightarrow X_1(s)=\frac{3}{s+3} \rightarrow x_1(t)=3e^{-3t}u(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{-s+1}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)\rightarrow e^{t}u(t) \Rightarrow x_2(-t) \Rightarrow x_2(t)=e^{-t}u(-t)$$

$$\hookrightarrow x(t)=-3e^{-3t}u(t)+e^{-t}u(-t)$$

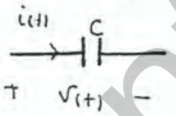
آب حیات عشق از جرعه شما زنین !

۸۰/۲/۱۱ :

کاربرد تبدیل لاپلاس :

ترسیم مدار در حوزه لاپلاس :

چون تبدیل لاپلاس تبدیل خطی است ، ترکیب مدار در این حوزه دستخوش تغییر نمی‌شود . مثلاً فرم موازی و سری تغییر نمی‌کند . چون اگر $v_1(t)=v_2(t)$ و $i(t)=i_1(t)+i_2(t)$ باشد خواهیم داشت $I(s)=I_1(s)+I_2(s)$, $V_1(s)=V_2(s)$

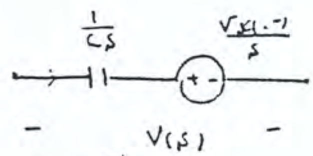


$$v(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\lambda)\,d\lambda$$

$$V(s)=\frac{1}{C}\left[\frac{I(s)}{s}+\frac{i^{(-1)}(0^-)}{s}\right]$$

برابر با شارژ در 0^- صفر است (ولی قرارداد.) $i^{(-1)}(0^-)=\int_{-\infty}^{0^-} i(\lambda)\,d\lambda=q(0^-)-q(-\infty)=q(0^-)$

$$\Rightarrow V(s)=\frac{1}{Cs}I(s)+\frac{V_c(0^-)}{s}$$



جهت منبع : با توجه به اینکه در $t=0^+$ ، $V(0^-)$ با $V(0^+)$ مساوی است ، جهت مشخص می‌شود.

$x(t) \xrightarrow{\text{فیلتر}} x(1)\ \mathrm{Sinc}\, f_s(t-T_s)$

$\vdots$

$$\sum x(n)\,\delta(t-nT_s) \xrightarrow{\text{فیلتر}} \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n)\,\mathrm{Sinc} f_s(t-nT_s) = x(t)$$

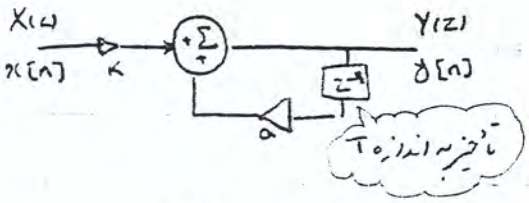
$$\rightarrow \varphi_n(t) = \mathrm{Sinc}\, f_s(t-nT_s)$$

← $\varphi_n(t)$ تابعی که $x_s(t)$ را به $x(t)$ تبدیل می‌کند.

$t=0 \rightarrow x(0)$ بدست می‌آوریم ... $t=\infty$

۸۰/۳/۱۴

مثال:



رابطه ورودی و خروجی؟ تابع تبدیل؟ پاسخ فرکانسی؟

رابطه بین K و a تا گین dc یک شود؟ شرط پایداری؟

رابطه ورودی خروجی = معادله دیفرانس

$\boxed{z^{-3}}$: $\boxed{z^{-1}}\,\boxed{z^{-1}}\,\boxed{z^{-1}}$

تأخیر به اندازه $3T_0$ یعنی ۳ تا تأخیر به اندازه T_0.

۱- سیگنالها را در Z رسم می‌کنیم ۲- اول تابع تبدیل را می‌نویسیم

ب- $KX(z) + a z^{-1} Y(z) = Y(z) \rightarrow Y(z) = \dfrac{KX(z)}{1-az^{-1}} \Rightarrow H(z) = \dfrac{K}{1-az^{-1}}$

الف- $Kx[n] + a\,y[n-1] = y[n]$ $\quad |z| > |a|$ ناحیه همگرایی

ث- $|a| < 1$ شرط پایداری

$$H(e^{j\omega}) = \frac{K}{1-ae^{-j\omega}} = \frac{|K|}{\sqrt{(1-a\cos\omega)^2 + a^2\sin^2\omega}} \angle H(e^{j\omega})$$

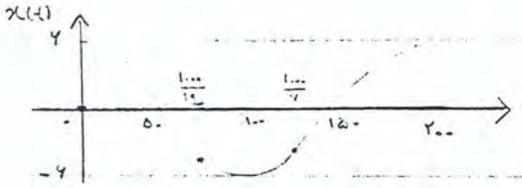
پ-

$$\angle H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0 - \tan^{-1}\dfrac{a\sin\omega}{1-a\cos\omega} & K>0 \\ \pi - \tan^{-1}\dfrac{a\sin\omega}{1-a\cos\omega} & K<0 \end{cases}$$

ت- گین dc $= H(z)\Big|_{z=1} = \left|\dfrac{K}{1-a}\right| = 1 \qquad a+K=1$ گ

۶۳

مثال، فرض می کنیم که سیگنال ورودی $x(t) = 6\cos 10\pi t$ را با دو فرکانس $f_1 = 7\,Hz$ ، $f_2 = 14\,Hz$ نمونه برداری می کنیم.



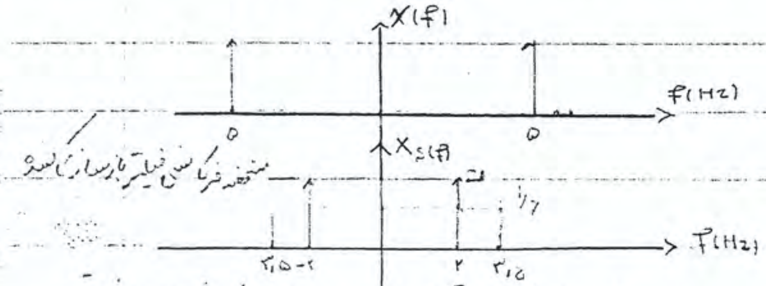
$$X(f) = 3\delta(f-5) + 3\delta(f+5)$$

$$X_s(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_s X(f - k f_s)$$

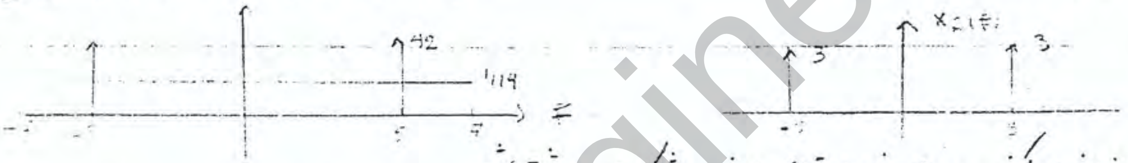
$$X_s(f) = 7\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - 7k)$$

$$= \dots + 7X(f+7) + 7X(f) + 7X(f-7) + \dots$$

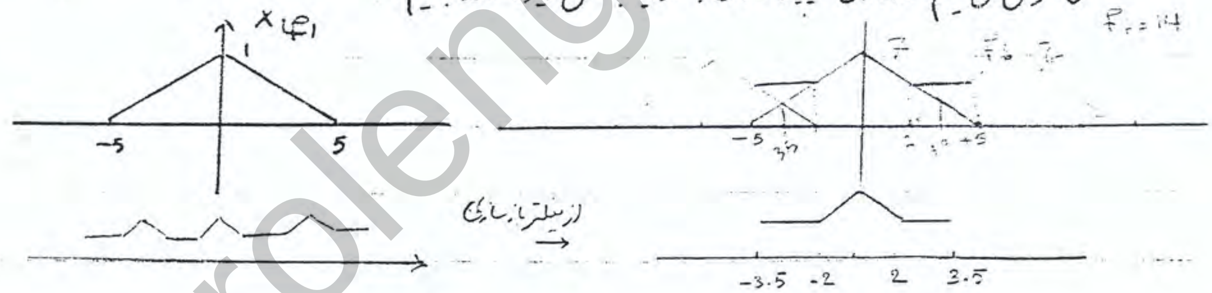
$$X_s(f) = \sum 21\,\delta(f-5-7k) + 21\,\delta(f+5-7k)$$



← دامنه درست را نشان می‌دهد ولی فرکانس صحیح نیست.



حال فرض می کنیم ورودی ناپیوسته‌ای با فوریه به شکل زیر داشته باشیم:



در این حالت زمانی هم شامل sinc و هم شامل شانت است. ما این دامنه هم درست نیست به دلیل اینکه شرایط نایکوئیست برقرار نیست.

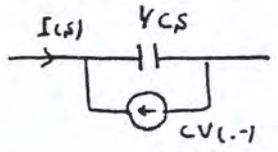
* مسئله را با $f_s = 14$ حل کنید.

ساخت فیلتر دیجیتال:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{r} L_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^{M} K_j z^{-j}}$$

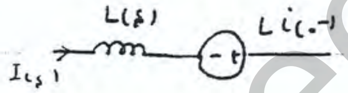
اگر فرم منبع با متغیری که آنرا بررسی می‌کنیم یکی باشد. این متغیر از نوع پله است.
« « « « « « « متفاوت « « « « ضربه « و ... به صورت
عدد ظاهر می‌شود.

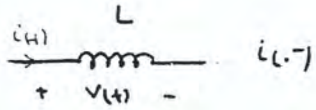
$$I(s) = CS \cdot V(s) - C V_c(0^-)$$

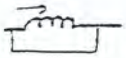
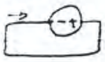


در t=0 جهت ضربه داده باید درجهتی باشد که جریان هم جهت $I(s)$ باشد.

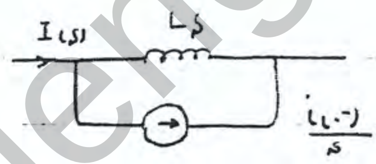
* سلف:



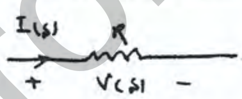


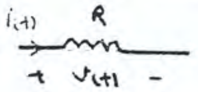
اگر دو سر سلف را در صفر اتصال کوتاه کنیم جهت جریان → خواهد بود  پس منبع
باید در جهتی باشد که اتصال جهت جریان بدهد .

فرم دیگر (نورتن):

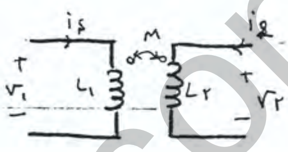


* مقاومت:





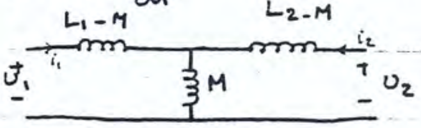
* ترانسفورماتور:



$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$v_2(t) = M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1(t) = (L_1 - M) \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{d(i_1+i_2)}{dt} \\ v_2(t) = M \dfrac{d(i_1+i_2)}{dt} + (L_2 - M) \dfrac{di_2}{dt} \end{cases}$$



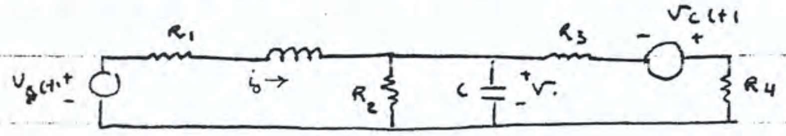
۵ چرا می‌توانیم تونن بگیریم؟
هر المان خطی که گفتیم را از دو سر آن تونن گرفت. وقتی که سایر اجزای مدار خطی ۳۱/
دارای توان

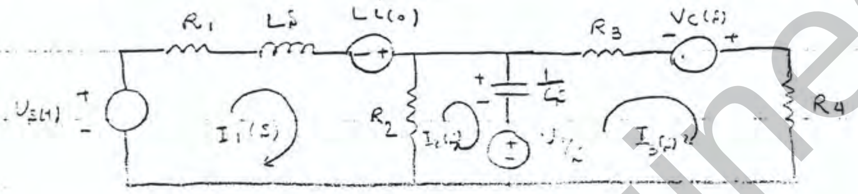
هستند . وقتی المان خطی نباشد، ولی بقیه اجزا خطی باشند هم می توان تونن گرفت .

چطور معادل تونن را بدست می آوریم؟ دو سر المان را اتصال کوتاه می کنیم، جریان را می خوانیم . ، اتصال باز می کنیم ولتاژ را می خوانیم V_{Th} . ← $Z_{th} = \frac{V_{op}}{i_{cs}}$

وقتی منابع وابسته در مدار داریم ، صفر کردن منابع مستقل کافی نیست ← V_T ~~...~~ می گذاریم.

- ماتریس امپدانس و ادمیتانس بنویسید؟





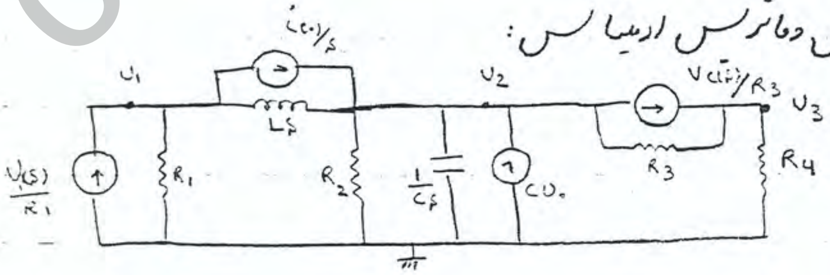
* ماتریس امپدانس حلقه ها:

$$\begin{pmatrix} R_1 + Ls + R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2 + \frac{1}{Cs} & \frac{-1}{Cs} \\ 0 & \frac{-1}{Cs} & \frac{1}{Cs} + R_3 + R_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L i(0^-) + V_S(s) \\ -\frac{v_0}{s} \\ V_C(s) + \frac{v_0}{s} \end{pmatrix}$$

فرض کنیم $v_c(t) = K i_1(t)$ $\qquad V_C(s) = K I_1(s)$

$$\begin{pmatrix} R_1 + Ls + R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2 + \frac{1}{Cs} & \frac{-1}{Cs} \\ -K & \frac{-1}{Cs} & \frac{1}{Cs} + R_3 + R_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L i(0^-) + V_S(s) \\ -\frac{v_0}{s} \\ \frac{v_0}{s} \end{pmatrix}$$

رابطه بین ماتریس امپدانس و ماتریس ادمیتانس:



$$
\begin{pmatrix}
\frac{1}{R_1}+\frac{1}{Ls} & \frac{-1}{Ls} & 0 \\
\frac{-1}{Ls} & \frac{1}{Ls}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{Cs}+\frac{1}{R_3} & \frac{-1}{R_3} \\
0 & \frac{-1}{R_3} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ U_3(s) \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
-\frac{i(0)}{s}+\frac{V_s(s)}{R_1} \\
-\frac{V_C(s)}{R_3}+\frac{i_0}{s}+CV_0 \\
\frac{V_C(s)}{R_3}
\end{pmatrix}
$$

آب حیات عشق را در رگ ما روانه کن

آینهٔ صبوح را ترجمهٔ شبانه کن !

۸۰،۲،۱۸

$X(s)$, $x(t)$ → $H(s)$ → $Y(s) = H(s)\,X(s)$, $y(t) = h(t) * x(t)$

$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \Big|$ تمام شرایط اولیه صفر یا $H(s) = L(h(t))$

معادله دیفرانسیل ارتباط دهندهٔ x و y باعث می‌شود که $H(s)$ تابع کسری باشد.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0}$$

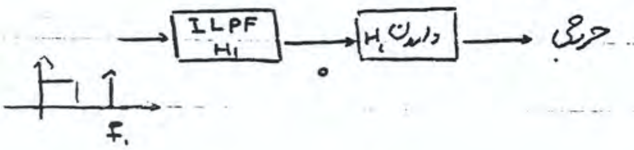
در دو بلوک سری، تابع تبدیلها ضرب می‌شوند.

" " " موازی، " " جمع "

اگر $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ باشد وارون آن خواهد بود: $G(s) = \frac{D(s)}{N(s)}$

به شرطی که ناحیه همگرایی $H(s)$ و $G(s)$ هم پوشانی داشته باشند.

هر سیستمی وارون ندارد.



تابع تبدیل مستقل از ورودی است.

تابع تبدیل با بدست آوردن قرارداد اینکه همه شرایط اولیه مساوی صفر بدست می‌آید.

$H(s)$ را می‌توان
با داشتن معادله دیفرانسیل را نوشت. و بالعکس.

- علّی بودن، چگونه از $H(s)$ می فهمیم که تابع علّی است یا نه؟ $h(t)$ و $H(s)$ باید right-sided باشد.

- پایداری ← مکانیک، گرانیگاه پایین نقطه اتکا باشد. رسیدن به حداقل انرژی و حداکثری نظمی

y_{zir} = zero input response : پاسخ ورودی صفر

$$\begin{cases} \lim_{t\to\infty} |y_{zir}(t)| \to 0 \\ \lim_{t\to\infty} |y_{zir}(t)| \to \infty \\ \lim_{t\to\infty} |y_{zir}(t)| = L<\infty \end{cases}$$

دو نوع ناپایداری

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (ROC)$$

ناحیه

ریشه‌های $N(s)$ صفرهای تابع تبدیل.
ریشه‌های $D(s)$ قطبهای تابع تبدیل.

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_0}$$

* درجه $N(s)$ > درجه $D(s)$ سیستم ناپایدار است
زیرا با ورودی پله خروجی ضربه یا مشتقاتش را برمای دهد.

$$H(s) = K_m s^m + P(s) \qquad m > 0$$

$$K_m s^m \times \frac{1}{s} = K_m s^{m-1} \rightarrow$$ ضربه یا مشتقاتش

* اگر یکی از ضرایب در $D(s)$ صفر یا منفی باشد، سیستم ناپایدار است. زیرا باعث می‌شود قطبی در قسمت مثبت محور بوجود بیاید.

صفر خودش یک ورودی محدود است! اگر $H(s)$ قطب مثبتی داشته باشد، در حوزه زمان یک نمائی افزایشی می دهد ⇐ BIBO نیست.

$$D(s) = (s+P_1)(s+P_2)\cdots(s+P_n) = s^n + (P_1+P_2+\cdots+P_n)s^{n-1} + (P_1P_2+\cdots+)s^{n-2}+\cdots$$

همه وقتی a_i ها مثبت داریم

اگر یکی از ضرایب s^n ها مثبت باشند ، ضرایب s^x ها مثبت خواهند بود . پس وقتی یکی از ضرایب منفی بوده بنا به برهان خلف حداقل یک ~~نقطه~~ قطب در قسمت مثبت محور وجود دارد .

چندجمله‌ای با ضرایب مثبت هم داریم که ریشه‌هایشان منفی است . پس وقتی که $D(s)$ ضرایب مثبت هم دارند ، باید از روشهای دیگری برای تشخیص پایداری استفاده کنیم .

روش Routh-Hurwitz

در سه زمان از این روش استفاده می‌کنیم .

۱- درجه صورت بزرگتر از مخرج باشد .

۲- مخرج ضریبی منفی یا صفر دارد .

۳- وقتی که مخرج تجزیه شده است . (یا بخشی از مخرج)

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0$$

$s^n \quad a_n \;;\; a_{n-2} \;;\; a_{n-4} \ldots$

$s^{n-1} \quad a_{n-1} \;;\; a_{n-3} \;;\; a_{n-5} \ldots$

$s^{n-2} \quad b_1 = \dfrac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \;;\; b_2 = \dfrac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} \;;\; \ldots$

$s^{n-3} \quad c_1 = \dfrac{b_1 a_{n-3} - b_2 a_{n-1}}{b_1} \;;\; \ldots \;;$

$s^1 \quad \vdots$

$s^0 \quad \vdots$

تعداد ریشه های مثبت برابر تعداد تغییر علامتها در ستون اوّل است .

$$D(s) = s^4 + 5s^3 + s^2 + 10s + 1$$

$s^4 \quad 1 \quad 1 \quad 1$

$s^3 \quad 5 \quad 10$

$s^2 \quad -1 \quad 1$ ← همان a_{n-4} است

$s^1 \quad 15$

در ستون اوّل به اولین منفی که رسیدیم می فهمیم ناپایدار است .

قطب روی محور $j\omega$ هم ناپایدار است. زیرا $\int |h(t)| \to \infty$ زیرا وقتی قدر مطلق می‌گیریم طاقهای منفی کسینوس هم بالا می‌آیند ← سطح زیرش بینهایت می‌شود.

مثال: $D(s) = s^4 + s^3 + s^2 + s + 3$

s^4	1	1	3
s^3	1	1	0
s^2	$0 \to \varepsilon$	3	
s	$\frac{\varepsilon - 3}{\varepsilon}$		
s^0	3		

۲ تغییر علامت

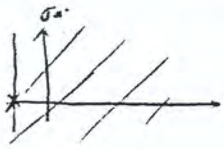
مثال: $L(s) = s^7 + 3s^6 + 3s^5 + s^4 + s^3 + 3s^2 + 3s + 1$

s^7	1	3	1	3
s^6	3	1	3	1
s^5	$\frac{8}{3}$	0	$\frac{8}{3}$	0
s^4	1	0	1	0
s^3	$0 \to 4$	0	0	0
s^2	$0 \to \varepsilon$	1		
s^1	$\frac{-4}{\varepsilon}$			
s^0	1			

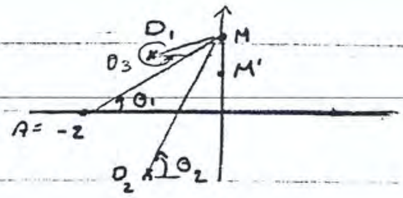
سطر مربوط به s^3 صفر است. خط بالای آن بیانگر $s^4 + 1$ است. از آن مشتق می‌گیریم، ضرایبش را در جلوی s^3 قرار می‌دهیم. s^4+1 خود یکی از عاملهای مخرج است.

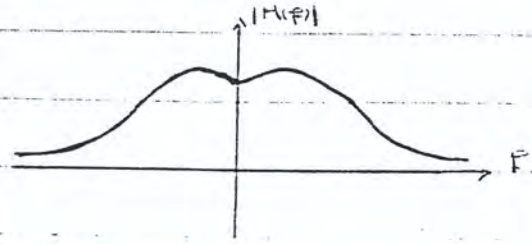
پیدا کردن $H(s)$ از روی $H(f)$

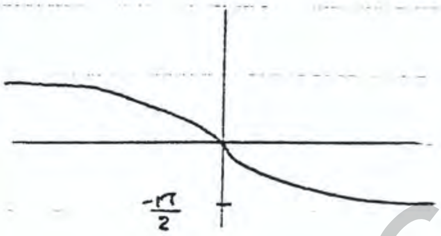
اگر ناحیه همگرایی محور $j\omega$ را دربرگیرد. سیستم پایدار است و می‌توان در $\sigma + j\omega$ ، σ را صفر قرار داد و بجای s ، $j\omega$ گذاشت. (تبدیل فوریه همان تبدیل لاپلاس است)



$$H(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2+1} = \frac{s+2}{(s+1+j)(s+1-j)}$$







$$|H(f)| = \frac{MA}{MD_1 \cdot MD_2}$$

$$Z = \frac{|Z_1|}{|Z_2||Z_3|} e^{j(\theta_1 - \theta_2 - \theta_3)}$$ زیرا اگر $Z = \frac{Z_1}{Z_2 Z_3}$

یافتن پاسخ:

پاسخ حالت مدار وقتی که شرایط اولیه صفر باشد.

شرایط اولیه را صفر نمی گذاریم.

$$a_n\left[s^n Y(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \cdots - s\,y^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0)\right]$$
$$+ a_{n-1}\left[s^{n-1}Y(s) - s^{n-2}y(0) - \cdots - y^{(n-2)}(0)\right] + \cdots + a_1\left[sY(s) - y(0)\right] + a_0 Y(s)$$
$$= \left[b_m s^m + \cdots + b_0\right] X(s)$$

شرایط اولیه ورودی را براساس اصل برهم نهی اعمال می کنیم ابتدا! پس نیازی به آوردن آنها در اینجا نداریم.

$$\Rightarrow D(s)Y(s) - C(s) = N(s)X(s)$$

$$C(s) = \sum_{i=1}^{n} a_i s^{i-1} y(0) + \sum_{i=2}^{n} a_i s^{i-2} y'(0) + \cdots + (a_n s + a_{n-1}) y^{(n-2)}(0) + a_n y^{(n-1)}(0)$$

۳۴ $$\Rightarrow Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} X(s) + \frac{C(s)}{D(s)}$$

$$y(t) = y_{zst}(t) + y_{zir}(t)$$

یافتن پاسخ کلی از روی معادله دیفرانسیل با داشتن شرایط اولیه ؟

شرایط اولیه ساری

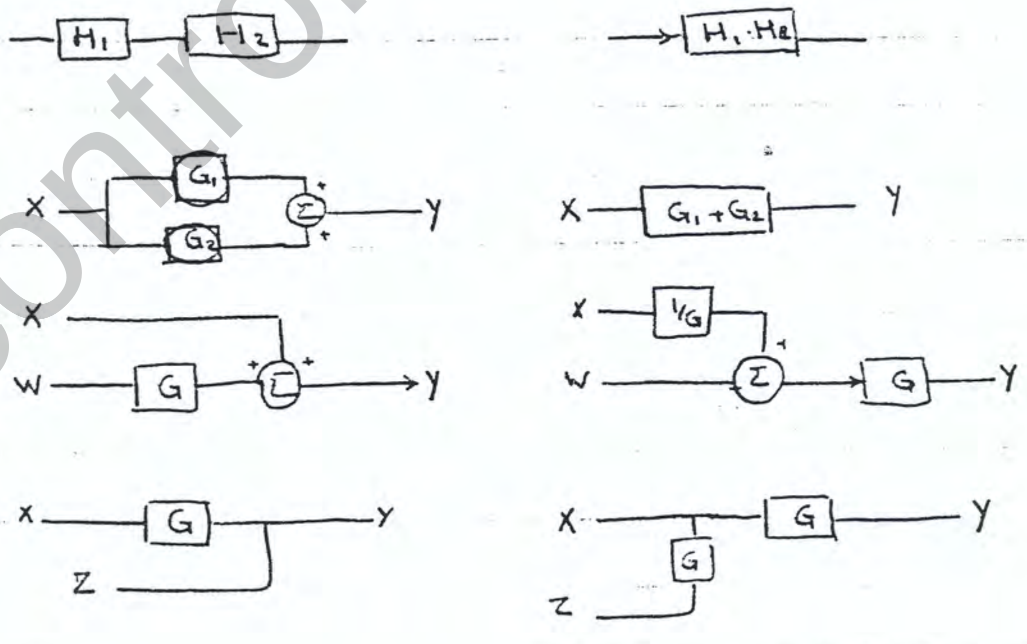
$x_1(t) \rightarrow y_1(t) \qquad x_2(t) \rightarrow y_2(t)$

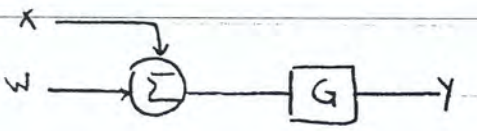
$$H(s) = \frac{L[y_2(t) - y_1(t)]}{L[x_2(t) - x_1(t)]}$$

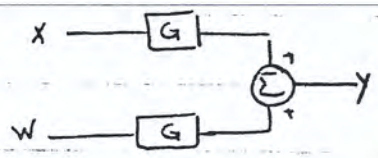
۸۰/۲/۲۵:

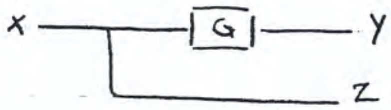
$X(s) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow Y(s) = H(s)X(s)$

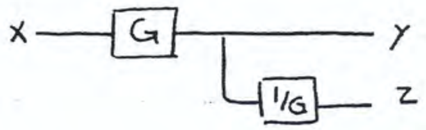
$X_1(s), X_2(s), \ldots, X_n(s) \longrightarrow \Sigma \longrightarrow Y(s) = X_1(s) + X_2(s) + \ldots + X_n(s)$

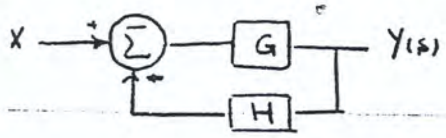


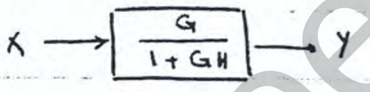








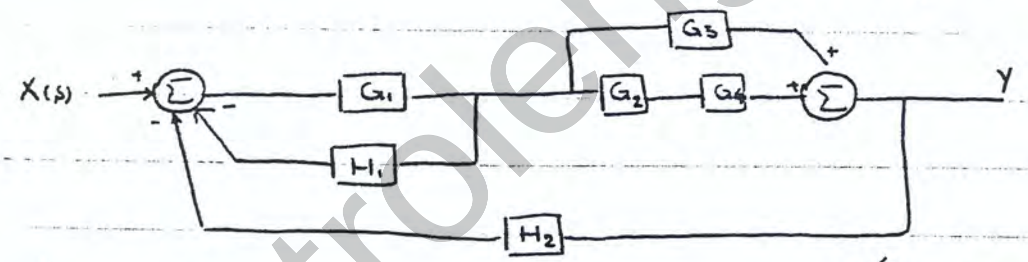




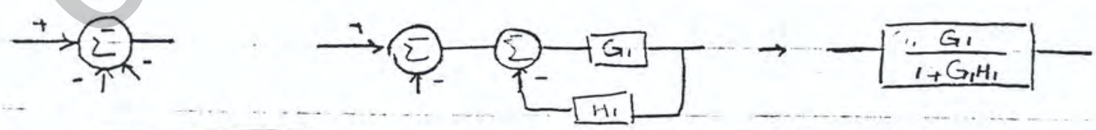
$$[X(s) - H(s)Y(s)]\,G(s) = Y(s)$$

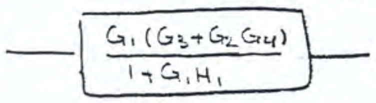
$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1+GH}$$

مثال : هدف : پیدا کردن تابع تبدیل



یک روش این است که





۳۵

$$T(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{A}{1+AH_2} = \frac{G_1(G_3+G_2G_4)}{1+G_1H_1+G_1H_2(G_3+G_2G_4)}$$

آنالیز سیستم در فضای حالت :

بردار حالت ، شامل می نیمم اطلاعات از یک سیستم است برای مشخص کردن سیستم به شرط اینکه اگر ورودی را در t بشناسیم ، خروجی را در $t > t_0$ بشناسیم.

سیستمهای چند ورودی و چند خروجی با این روش قابل حل هستند.

نکته مهم در فضای حالت این است که معادله دیفرانسیل مرتبه n به n معادله دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل می شود.

۱- سهولت بکارگیری روش واحد برای سیستمهای تک ورودی ، تک خروجی و چند ورودی ، چند خروجی .

۲- امکان مطالعه رفتار درونی سیستم .

۳- روش مناسب و الگوریتمی برای شبیه سازی کامپیوتری .

تعداد متغیرهای حالت به تعداد متغیرهای ذخیره کننده مستقل مربوط است .

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \cdots + b_{1m}u_m \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \cdots + b_{2m}u_m \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \cdots + b_{nm}u_m \end{cases}$$

$$\dot{X}_{n\times1} = A_{n\times n}X_{n\times1} + B_{n\times m}U_{m\times1}$$ (معادله حالت)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

$$y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n + d_{11}U_1 + \dots + d_{1m}U_m$$

$$\vdots$$

$$y_p = c_{p1}x_1 + \dots + c_{pn}x_n + d_{p1}U_1 + \dots + d_{pm}U_m$$

$$\underset{p\times 1}{Y} = \underset{p\times n}{C}\,X + \underset{p\times m}{D}\,U \qquad \text{(معادله خروجی)}$$

A از حالت درونی سیستم خبری می‌دهد. نشان می‌دهد حتی در نبود خروجی چگونه حالت خروجی به تغییرات ورودی بستگی دارد. [illegible]

D : تأثیر مستقیم خروجی از ورودی.

C : چگونه خروجی تابع state هاست.

B : چگونه ورودی مستقیماً روی تغییر state ها تأثیر می‌گذارد.

حل معادلات حالت.

* روش ۱ :

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX + DU \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

$$\dot{X}(t_0 + K\Delta t) = \frac{x(t_0 + (K+1)\Delta t) - x(t_0 + K\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow X(t_0 + (K+1)\Delta t) = X(t_0 + K\Delta t) + \Delta t \times \left[A\,X(t_0 + K\Delta t) + B\,U(t_0 + K\Delta t)\right]$$

$$K = 0 \rightarrow X(t_0 + \Delta t) \rightarrow X(t_0 + 2\Delta t) \dots$$

حالا تنها کار این است که معادله حالت را بنویسیم. مثلاً

۳۶، $y'' + 3y' + 10y = \underbrace{\lg \sin x}_{\text{ورودی}}$

این روش برای برنامه‌نویسی کامپیوتر مناسب است.

* روش ۲:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ Y = CX + Du \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{X}_h = A X_h \quad \text{پاسخ همگن} \\ \dot{X}_p = A X_p + Bu \end{array}\right\} \rightarrow X_p + \lambda X_h$$

نشان دهید

$$X_h(t) = e^{A(t-t_0)} X_0$$

$$\varphi_{(t)} = e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \cdots \quad (\text{تعریف})$$

$$\frac{d e^{At}}{dt} = A . e^{At} = e^{At} . A$$

$$\int e^{At} dt = A^{-1} e^{At} = e^{At} A^{-1}$$

$$\varphi(t_1 + t_2) = \varphi(t_1) . \varphi(t_2)$$

$$[\varphi(t)^{-1}] = \varphi(-t)$$

پاسخ معادله:

$$X(t) = e^{A(t-t_0)} X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\lambda)} B\, u(\lambda)\, d\lambda$$

$$\varphi(t) = e^{At} \rightarrow \text{state transition matrix}$$

$$\Rightarrow Y(t) = C(\varphi(t-t_0)) X_0 + \int_{t_0}^{t} C\varphi(t-\lambda) B\, u(\lambda)\, d\lambda + D\, u(t)$$

بعد از نوشتن معادله حالت اولین قدم محاسبه ماتریس e^{At} است.

* روش ۳ (لاپلاس):

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ X(t_0) = X_0 \\ Y = CX + DU \end{cases}$$

$$\Rightarrow SX(s) - X_0 = AX(s) + BU(s)$$

$$\to (SI - A)X(s) = X_0 + BU(s)$$

$$\to X(s) = (SI-A)^{-1}X_0 + (SI-A)^{-1}BU(s)$$

$$\to Y(s) = C(SI-A)^{-1}X_0 + [C(SI-A)^{-1}B + D]U(s)$$

$\Phi(t) \leftrightarrow \Phi(s)$ روابط بالا نتیجه می‌دهد که $\Phi(s) = (SI-A)^{-1}$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}\Big|_{X_0=0} \Rightarrow H(s) = C(SI-A)^{-1}B + D$$

$$\to H(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$$

در رابطه بالا تعریف می‌کنیم: $h_{ij}(t) = \mathcal{L}^{-1}[H_{ij}(s)]$

h_{ij} : خروجی iام است به شرط آنکه ورودی jام ضربه باشد (بقیه ورودی‌ها اتصال کوتاه یا مدار باز هستند)

محاسبه e^{At}

هر توانی از ماتریس را بصورت ترکیب خطی n ماتریس می‌توان نوشت.

- اگر ماتریس قطری باشد:

مثال: $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$$\Phi(t) = e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} (-1)^2 & 0 \\ 0 & (-2)^2 \end{pmatrix} t^2/2!$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$\leftarrow e^{At} = \Phi$ ماتریسی که در آن $\Phi_{ii} = e^{A_{ii}}$ است.

پس اگر عناصر قطر در A مثبت باشند سیستم ناپایدار است.

بهتر است state ها را طوری انتخاب کنیم که A قطری باشد.

ماتریس قطری، یعنی state ها از هم دکوپله هستند. از هم مستقلند و بر هم تأثیر نمی گذارند.

* درحالت کلی:

مثال:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 6 & s+5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{s(s+5)+6}\begin{pmatrix} s+5 & 1 \\ -6 & s \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s+2)(s+3)}\begin{pmatrix} s+5 & 1 \\ -6 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s+5}{(s+2)(s+3)} & \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\ \frac{-6}{(s+2)(s+3)} & \frac{s}{(s+2)(s+3)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+3} & \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} \\ \frac{-6}{s+2} + \frac{6}{s+3} & \frac{-2}{s+2} + \frac{3}{s+3} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \begin{pmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ -6e^{-2t} + 6e^{-3t} & -2e^{-2t} + 3e^{-3t} \end{pmatrix}$$

عبور باید کرد با

وهم نورد افقهای دور باید شد...

۸۰،۴،۸

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det(A - A) = 0 \rightarrow$$ قضیه کایلی ـ همیلتون، هر ماتریسی در معادله مشخصه خودش صدق می کند

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} + \cdots - a_1 A + a_0 I$$

$$A^{n+1} = -a_{n-1}A^n - a_{n-2}A^{n-1} \cdots - a_1 A^2 + a_0 A$$

$A^{n+1} = C_{n-1}A^{n-1} + \dots + C_1 A + C_0 I$ → هر توانی از A را می‌توان بصورت مجموع جملاتی نوشت که توان آنها از n-1 بیشتر نیست.

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots$$

$$\Phi(t) = e^{At} = \alpha_0(t) I + \alpha_1(t) A + \dots + \alpha_{n-1}(t) A^{n-1}$$

$$\left.\begin{aligned} e^{\lambda_1 t} &= \alpha_0(t) + \lambda_1 \alpha_1(t) + \dots + \lambda_1^{n-1}\alpha_{n-1}(t) \\ e^{\lambda_2 t} &= \alpha_0(t) + \lambda_2 \alpha_1(t) + \dots + \lambda_2^{n-1}\alpha_{n-1}(t) \end{aligned}\right\}$$ n معادله n مجهول

ریشه های تکراری چه حالتی پیش می آید ← اگر تا ریشه تکراری ← هم ریشه خودش هم ریشه مشتقش است.

مثال:
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$ $\qquad e^{At} = \alpha_0(t) I + \alpha_1(t) A$

$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \qquad \lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = -3$

$$\Rightarrow \begin{aligned} e^{-2t} &= \alpha_0(t) - 2\alpha_1(t) \\ e^{-3t} &= \alpha_0(t) - 3\alpha_1(t) \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0(t) = 3e^{-2t} - 2e^{-3t} \\ \alpha_1(t) = e^{-2t} - e^{-3t} \end{cases}$$

$$\Phi(t) = e^{At} = (3e^{-2t} - 2e^{-3t})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (e^{-2t} - e^{-3t})\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

$A^{500} = \alpha_1 I + \alpha_2 A$ — برای پیدا کردن α_1 و α_2 ریشه های معادله مشخصه را لازم داریم.

$$\to (-2)^{500} = \alpha_1 - 2\alpha_2$$
$$(-3)^{500} = \alpha_1 - 3\alpha_2$$

مثال: پاسخ کامل سیستم زیر را بیابید.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad u = u_{-1}(t) \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Y(s) = C(sI-A)^{-1}\overset{\text{ورودی صفر}}{X_0} + \overset{\text{حالت صفر}}{C(sI-A)^{-1}BU(s)}$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{s^2+3s+2}\begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$C(sI-A)^{-1} = \frac{1}{s^2+3s+2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2+3s+2}\begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ s+1 & s+1 \end{pmatrix}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}\begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ s+1 & s+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{s(s^2+3s+2)}\begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ s+1 & s+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{pmatrix} s+2 \\ 2(s+1) \end{pmatrix} + \frac{1}{s(s+1)(s+2)}\begin{pmatrix} 1 \\ s+1 \end{pmatrix}$$

تمرین ۵

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \qquad u_1 = u_{-1}(t) \qquad u_2 = e^{-3t}U(t)$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

[illegible] را محاسبه کنید

*چرا قادریم برحسب جریان سلفها و ولتاژ گره‌ها، متغیرهای حالت و مشتقاتشان را بنویسیم؟
هر متغیر عرضی و عبوری در مدار برحسب جریان سلفها و ولتاژ گره‌ها قابل بیان است و V_c و V_c' و I_R و I_c هم متغیرهای عرضی و عبوری هستند.
متغیرهای عرضی و عبوری سلفها و خازنها معادلات حالت را به ما می‌دهند (می‌بینیم متغیرهای لازم) که براساس آن سایر متغیرهای مدار را می‌توان نوشت. جریان سلفها و ولتاژ گره‌ها هم از متغیرهای مدار هستند.

۳. روشی برای سیستم تک ورودی تک خروجی (با استفاده از $H(s)$)

معادلات حالت را به فرم قطبی می‌نویسیم.

$$H(s) = \frac{\overset{\text{لاپلاس خروجی}}{Y(s)}}{\underset{\text{لاپلاس ورودی}}{X(s)}} = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{B_1}{s-p_1} + \frac{B_2}{s-p_2} + \dots + \frac{B_n}{s-p_n}$$

مثال:

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{4}{(s+1)(s+2)}=\frac{4}{s+1}-\frac{4}{s+2}$$

$$Y(s)=\underbrace{\frac{4\,U(s)}{s+1}}_{x_1(s)}+\underbrace{\frac{-4\,U(s)}{s+2}}_{x_2(s)} \rightarrow y(t)=\begin{bmatrix}4 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

$$U(s)=(s+1)\,x_1(s) \Rightarrow s x_1(s)=-x_1(s)+U(s)$$
$$U(s)=(s+2)\,x_2(s) \Rightarrow s x_2(s)=-2x_2(s)+U(s)$$
$$\Rightarrow \begin{cases}\dot{x}_1(t)=-x_1(t)+U(t)\\ \dot{x}_2(t)=-2x_2(t)+U(t)\end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}u(t)$$

پس درحالت کلی داریم (ریشه تکراری نداریم)

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \vdots\\ \dot{x}_n(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_1 & & 0\\ & p_2 & \\ 0 & \ddots & p_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}u(t)$$

$$y(t)=(B_1\ \ B_2\ \ \cdots\ \ B_n)\begin{pmatrix}x_1(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix}$$

۵ : اگر درجه صورت و مخرج یکی باشد چه؟

* وقتی ریشه تکراری داشته باشیم :

بخشی از $Y(s)$ که تکراری است درنظر می‌گیریم :

$$Y_i(s)=\underbrace{\frac{A\,U(s)}{(s-p_i)^2}}_{X_{i1}(s)}+\overbrace{\frac{B\,U(s)}{(s-p_i)}}^{X_{i2}(s)}$$

$$X_{i1}(s)=\frac{U(s)}{(s-p_i)^2}=\frac{X_{i2}(s)}{(s-p_i)}$$
$$X_{i2}(s)=\frac{U(s)}{s-p_i}$$
$$\Rightarrow \begin{cases}sX_{i1}(s)=p_i X_{i1}(s)+x_{i2}(s)\\ s\,X_{i2}(s)=p_i x_{i2}(s)+U(s)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dot{x}_{i1}(t)=p_i x_{i1}(t)+x_{i2}(t)\\ \dot{x}_{i2}(t)=p_i x_{i2}(t)+U(t)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_{i_1}(t) \\ x_{i_2}(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} P_i & 1 \\ 0 & P_i \end{pmatrix}}_{\text{بلوک جردن مرتبه ۲}} \begin{pmatrix} x_{i_1}(t) \\ x_{i_2}(t) \end{pmatrix} +$$

بلوک جردن مرتبه ٤ : $\begin{pmatrix} P_1 & 1 & & \\ & P_2 & 1 & \\ & & P_3 & 1 \\ 0 & & & P_4 \end{pmatrix}$

پس، بعد از حالت قطری راحت‌ترین که به فرم بالامثلثی (یا پایین مثلثی) باشد.

۵ یک ماتریس ۵×۵ (در حالت کلی) برای معادلات حالت داریم، پایداری سیستم را چطوری بررسی می‌کنیم؟ $H(s)$ را از فرمول بدست می‌آوریم، از روش.

مثال:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2+3s+9}{(s+2)(s+3)(s+1)^3} = \frac{\overset{3.5}{B_1}}{(s+1)^3} + \frac{\overset{-4.75}{B_2}}{(s+1)^2} + \frac{\overset{5.375}{B_3}}{(s+1)} + \frac{\overset{-7}{B_4}}{s+2} + \frac{\overset{1.125}{B_5}}{s+3}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} U$$

$$Y = \begin{bmatrix} 3.5 & -4.75 & 5.375 & -7 & 1.125 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

معادلات حالت در یک سیستم گسسته

$$X[k+1] = F X[k] + G U[k]$$
$$Y[k] = H X[k] + J U[k]$$

بردار حالت سیستم گسسته. می‌تیم ← اطلاعاتی که اگر در لحظه (sample) K بدانیم و ورودی را از آن sample به بعد بشناسیم می‌توانیم

$$X[1] = F X[0] + G U[0]$$
$$X[2] = F X[1] + G U[1] = F^2 X[0] + F G U[0] + G U[1]$$
$$X[3] = F X[2] + G U[2] = F^3 X[0] + F^2 G U[0] + F G U[1] + G U[2]$$
$$\vdots$$

[illegible] $$X[k] = \underbrace{F^{k} X[0]}_{\text{پاسخ ورودی صفر}} + \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} F^{k-j-1} G\, U(j)}_{\text{پاسخ حالت صفر}}$$

$\dot{x} = Ax + BU \qquad y = Cx + DU \qquad x_0 = x_0(t)$

$$\left.\begin{array}{l} y(kT) = C\,x(kT) + D\,U(kT) \\ y(t) = C\,x(t) + D\,U(t) \end{array}\right\} \to \qquad \begin{array}{l} H = C \\ J = D \end{array}$$

$t_0 = kT \qquad kT \le t \le (k+1)T \qquad x(t) = e^{A(t-kT)} x_{kT} + \int_{kT}^{t} e^{A(t-\lambda)} B\, U[kT]\, d\lambda$

$$x(k+1) = e^{AT} x[k] + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\lambda)} d\lambda \; B\, U[k]$$

$$X[k+1] = F\, X[k] + G\, U[k]$$

$F = e^{AT} \qquad F = \Phi(T)$

$\int e^{At} dt = A^{-1} e^{At} = e^{At} e^{-1}$

$$G = (e^{AT} - I) A^{-1} B \Rightarrow G = (F - I) A^{-1} B$$

مثال:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \end{pmatrix}$$

$f = 10\ Hz$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$T = 0.1\ sec \qquad F = e^{AT} = \begin{pmatrix} 0.375 & 0.078 \\ -0.467 & 0.585 \end{pmatrix}$

$$G = (F - I)F^{-1}E = \begin{pmatrix} 0.193 & 0.193 \\ 0.021 & 0.052 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2[k+1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.575 & 0.078 \\ -0.467 & 0.585 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.193 & 0.193 \\ 0.052 & 0.052 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1[k] \\ u_2[k] \end{pmatrix}$$

$$y[k] = [1 \quad 2] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2[k] \end{bmatrix}$$

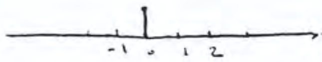
کودکی می بینی،
رفته از کاج بلندی بالا،
جوجه بردارد از لانه نور
و از او می پرسی
خانه دوست کجاست ؟

۸۰/۲/۹ :

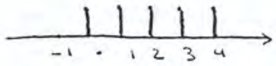
تجزیه و تحلیل سیستمهای خطی گسسته :

روابط در اینجا ساده‌ترند چون در آنها با حد برخوردی نداریم ./ در فرمولها تشابه پیدا می‌کنیم .

مثلاً $\delta[n] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases}$

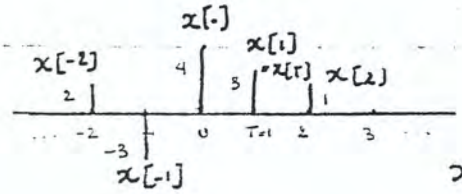


$u[n] = \begin{cases} 1 & n\geq 0 \\ 0 & o.w \end{cases} \rightarrow \delta[n] = u[n] - u[n-1]$



۸۰/۲/۱۱

سیگنال منفصل = مجموعه نمونه‌هایش .



$x[n] = \{\dots, 2, -3, \underset{\uparrow}{4}, 3, 1, \dots\}$

بیانگر زمان صفر

$x[n_0]$ مقدار x در زمان n_0 را نشان می‌دهد . $x[n]$ کل سیگنال را .

روش دیگر نشان دادن $X[z] = \dots\ 2z^{2} - 3z^{1} + 4 + 3z^{-1} + 1z^{-2} + \dots$

روشی دیگر: $\delta[n] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases} \longrightarrow \delta[n-n_0] = \begin{cases} 1 & n=n_0 \\ 0 & n\neq n_0 \end{cases}$

$\dots + 2\delta[n+2] - 3\delta[n+1] + 4\delta[n] + 3\delta[n-1] + 1\delta[n-2] + \dots$

$\hookrightarrow x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k]$

$x_1[n] * x_2[n] \triangleq \sum_{-\infty}^{+\infty} x_1[k]\, x_2[n-k]$

$\Leftarrow \quad x[n] = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x[k]\,\delta[n-k] = x[n] * \delta[n]$

نشان دهید $\quad x[n-n_0] = \delta[n-n_0] * x[n]$

خواص کانولوشن در حالت پیوسته را در حالت گسسته تحقیق کنید؟

۸۰/۲/۱۷:

* سیگنال متناوب : $\quad x[n+N] = x[n] \quad \exists\, N \in \mathbb{N}$

$x[n] = A\cos[n\omega_0 + \phi)$ $\qquad$ فرکانس sampling

$\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{N}{K}$ عدد صحیح $\qquad$ $\frac{F_0}{F_s} =$ عدد گویا

فرکانس تابع پیوسته

وقتی از تابع پیوسته نمونه برداری می کنیم ، سیگنال گسسته بدست آمده به شرطی متناوب خواهد بود که نسبت فرکانس نمونه برداری و فرکانس تابع گویا باشد

* انرژی سیگنال $\quad E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 < M \quad \leftarrow$ energy signal

توان سیگنال $\quad P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} |x[k]|^2 < M \quad \leftarrow$ power signal

(تعریف) می توانیم داشته باشیم :

$x[n] + y[n] = z[n]$

$x[n] \cdot y[n] = z[n]$

$y[n] = \alpha\, x[n]$

$y[n] = x[n-n_0]$

$$\begin{cases} \delta[n] = u[n] - u[n-1] \\ u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] \end{cases} \qquad \leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

$x[n] \rightarrow \boxed{\nabla} \rightarrow y[n] = x[n] - x[n-1]$ $\qquad$ backward difference

معکوس هم هستند

ترکیب سه جانبی

$x[n] \rightarrow \boxed{S} \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

برای اینکه ثابت کنیم بجایی است . پشت هم می بندیم . پاسخ ضربه ترکیب باید ضربه باشد $h_1(t) * h_2(t) = \delta(t)$

ترکیب دو سیستم

سیستم گسسته: سیستمی که ورودی و خروجی اش سیگنال گسسته باشد.

$$\xrightarrow{x[n]} \boxed{T} \longrightarrow y[n] = T(x[n])$$

* تعریف سیستم گسسته خطی:

$$T[\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]) = \alpha_1 T(x_1[n]) + \alpha_2 T(x_2[n])$$

مثال: سیستم backward difference خطی است.

* سیستم T.I

$$y[n] = T(x[n]) \Rightarrow y[n-n_0] = T(x[n-n_0])$$

shift invariant . n_0 مضرب صحیحی از T است. برای ما این دو (S.I و T.I) یک معنی دارد.

مثال: T.I نیست

$$y[n] = nx[n]$$

$$x_1[n] \rightarrow y_1[n] = nx_1[n] \qquad x_2[n] \rightarrow y_2[n] = nx_2[n]$$

$$x_2[n] = x_1[n-N] \rightarrow y_2[n] = n x_1[n-n_0] \neq y_1[n-n_0] = (n-N)x_1[n-N]$$

* سیستم علّی:

$$\forall\, x_1[n] = x_2[n] \quad \forall\, n < n_0 \rightarrow y_1[n] = y_2[n]$$

* سیستم پایدار:

$$\forall x \; \forall n \quad |x[n]| < M \rightarrow |y[n]| < N$$

$$LTI \rightarrow n = 0 \;\; h[n] = 0$$

* سیستم بدون حافظه

$$y[n_0] = f(n_0, x[n_0])$$

$$\delta[n] \rightarrow \boxed{T} \longrightarrow h[n]$$

می خواهیم ثابت کنیم که در یک سیستم LTI ،

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$y[n] = T(x[n]) = T\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k]\right) \overset{L}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T(x[k]\,\delta[n-k])$$

نشان دهید $x[n-n_0] = \delta[n-n_0] * x[n]$

خواص کانولوشن در حالت پیوسته را در حالت گسسته تحقیق کنید؟

۸۰/۲/۱۷:

* سیگنال متناوب : $x[n+N] = x[n] \quad \exists N \in \mathbb{N}$

$x[n] = A \cos[n\omega_0 + \phi]$

$\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{N}{K}$ عدد صحیح

$\frac{F_0}{F_s}$ = عدد گویا

فرکانس sampling

فرکانس تابع متناوب

وقتی از تابع پیوسته نمونه برداری می کنیم ، سیگنال گسسته بدست آمده به شرطی متناوب خواهد بود که نسبت فرکانس نمونه برداری و فرکانس تابع گویا باشد

* انرژی سیگنال $E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 < M \leftarrow$ energy signal

توان سیگنال $P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} |x[k]|^2 < M \leftarrow$ power signal

(تعریف) می توانیم داشته باشیم :

$x[n] + y[n] = z[n]$

$x[n] \cdot y[n] = z[n]$

$y[n] = \alpha\, x[n]$

$y[n] = x[n-n_0]$

$$\begin{cases} \delta[n] = u[n] - u[n-1] \\ u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] \end{cases} \leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

$x[n] \rightarrow \boxed{\nabla} \rightarrow y[n] = x[n] - x[n-1]$ backward difference

معکوس هم هستند

ترکیب سری یعنی

$x[n] \rightarrow \boxed{S} \rightarrow y[n] = \sum_{-\infty}^{n} x[k]$

برای اینکه ثابت کنیم معکوس هم هستند پشت هم می بندیم . پاسخ ضربه ترکیب باید ضربه باشد $h_1(t) * h_2(t) = \delta(t)$

ترکیب دو سیستم

$y[n] - \alpha y[n-1] = x[n]$ $\qquad h[n]=0 \quad n<0$

$h[n] = \alpha h[n-1] + \delta[n]$ $\qquad h[0]=1$

$h[n]=?$ $\qquad h[1]=\alpha \quad \Rightarrow \quad h[n]=\alpha^n U[n]$

$h[2]=\alpha^2$

$\vdots$

$h[n]=\alpha^n$

$h[n-1] = \alpha^{-1} h[n] - \alpha^{-1}\delta[n]$ $\qquad h[n]=0 \quad n\geq 0$

$h[0]=0$

$h[-1]=-\alpha^{-1}$

$h[-2]=-\alpha^{-2}$

$\vdots$

$h[-n]=-\alpha^{-n}$

$\rightarrow \quad h[n] = -\alpha^{n} U[-n-1]$

۸۰/۲/۲۳:

$|x[n]|<M \Rightarrow |y[n]|<N$

۵- نشان دهید شرط پایداری (لازم و کافی) برای سیستم علی LTI این است که: $\sum_{-\infty}^{+\infty} |h[k]| < M_1$

$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = x[n]*h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[n-k]\,x[k]$

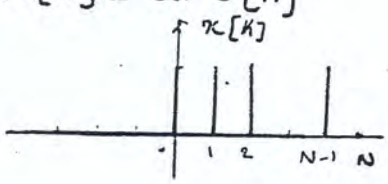
Final impulse response : fir — تعداد جملات پاسخ ضربه محدود

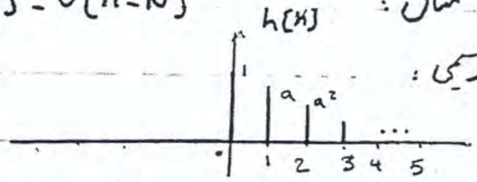
infinal impulse response iir — تعداد جملات پاسخ ضربه نامحدود

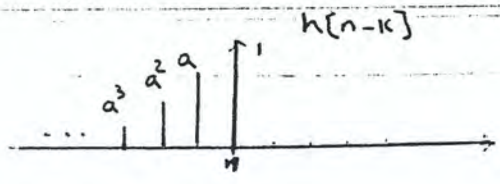
روشهای محاسبه کانولوشن گسسته مانند روشهای محاسبه در حالت پیوسته است.

مثال: $h[n]=\alpha^n U[n]$ $\qquad x[n]=U[n]-U[n-N]$

۱- روش ترسیمی:







برای امتحان کردن به پارامتر (n) مقداری دهیم.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k] \quad \begin{cases} 0 & n<0 \\ \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} = a^n \dfrac{(1-a^{-(n+1)})}{1-a^{-1}} & 0 \leq n < N \\ \sum_{k=0}^{N-1} a^{n-k} = a^n \dfrac{1-a^{-N}}{1-a^{-1}} & N \leq n \end{cases}$$

۲ـ روش مستقیم:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[n-k]\, x[k]$$
$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} (U[k] - U[k-N])\, a^{n-k} U[n-k]$$
$$= \sum_{k=0}^{\min\{N-1,n\}} a^{n-k} = \begin{cases} 0 & n<0 \\ \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} = a^n \dfrac{1-a^{-(n+1)}}{1-a^{-1}} & 0 \leq n < N \\ \sum_{k=0}^{N-1} a^{n-k} = a^n \dfrac{1-a^{-N}}{1-a^{-1}} & N \leq n \end{cases}$$

۳ـ

$$x[n] = U[n] - U[n-N] = \delta[n] + \delta[n-1] + \cdots + \delta[n-(N-1)]$$
$$x[n] * \delta[n-n_0] = x[n-n_0]$$

$$x[n] * h[n] = h[n] + h[n-1] + \cdots h[n-(N-1)]$$
$$= a^n U[n] + a^{n-1} U[n-1] + \cdots a^{n-(N-1)} U[n-(N-1)]$$

همان بالایی است ها

$$a_N y[n-N] + a_{N-1} y[n-(N-1)] + \cdots + a_0 y[n] = b_M x[n-M] + \cdots + b_0 x[n]$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r] \qquad \text{LCCDE}$$

۵- نشان دهید هر سیستم معادله LCCDE معرف سیستم LTI است.

معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه خطی ثابت.

▲ در حالت پیوسته initial rest condition یعنی آنکه
در مورد گسسته تحقیق کنید. علّی بودن سیستم خطی معادل سکون اولیه است یعنی ... $n<n_0$.

* شرط لازم و کافی برای آنکه سیستم FIR باشد آن است که $N=0$
به شرط آنکه pole zero cancellation نباشد یعنی صورت و مخرج ریشه مساوی نداشته باشند.

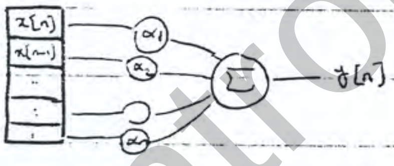
اثبات:

$$N=0 \rightarrow a_0 y[n] = \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r] \rightarrow h[n] = \sum_{r=0}^{M} \frac{b_r}{a_0} \delta[n-r]$$

← تعداد نمونه‌ها محدود ← FIR

$$FIR \rightarrow h[n] = \sum_{r=0}^{M} b_r \delta[n-r]$$

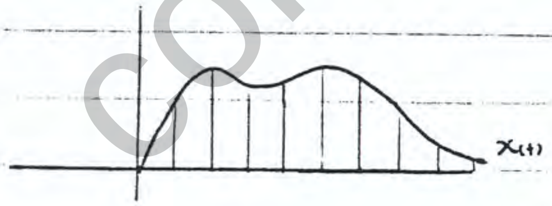
$$y[n] = x[n] * h[n] = x[n] * \sum_{r=0}^{M} b_r \delta[n-r] = \sum_{r=0}^{M} b_r (x[n] * \delta[n-r])$$



فیدبک ندارد

اگر فیدبک داشته باشد IIR است.

تبدیل Z



$$x_s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\, \delta(t-nT)$$

$$X_s(s) = \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\, \delta(t-nT) \right) e^{-st}\, dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \int_0^{\infty} \delta(t-nT)\, e^{-st}\, dt$$

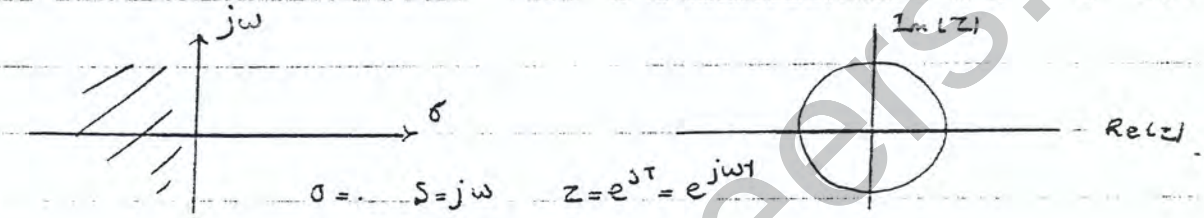
$$z = e^{+Ts}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

تعریف می‌کنیم تبدیل Z را:

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{تبدیل } z} X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} = x[0] + x[1] z^{-1} + x[2] z^{-2} + \cdots$$

مثال: $X(z) = 1 + 2z^{-100} \longleftrightarrow x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-100]$



$\sigma = 0 \quad s = j\omega \quad z = e^{sT} = e^{j\omega T}$

* شرط پایداری:

ناحیه همگرایی دایره واحد را در بر گیرد.

مثال تبدیل z پیدا کنید: $\delta[n] \longleftrightarrow 1$ ROC = تمام z

$u[n] \longleftrightarrow X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$ $|z|>1$

بزرگترین قطب را در نظر می‌گیریم ROC ناحیه بزرگتر از دایره‌ای به شعاع آن است.

۱. ناحیه همگرایی به شکل ◎ ـ قطبی را در بر نمی‌گیرد.

۲. right-sided ← خارج دایره تا بینهایت

۳. پیوسته.

خواص تبدیل Z:

1- $\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n] \longrightarrow \alpha_1 X_1(z) + \alpha_2 X_2(z)$

ROC: اشتراک ROC_1, ROC_2

2- $y[n] = x[n-n_0]\,u[n-n_0] \longleftrightarrow z^{-n_0} X(z)$

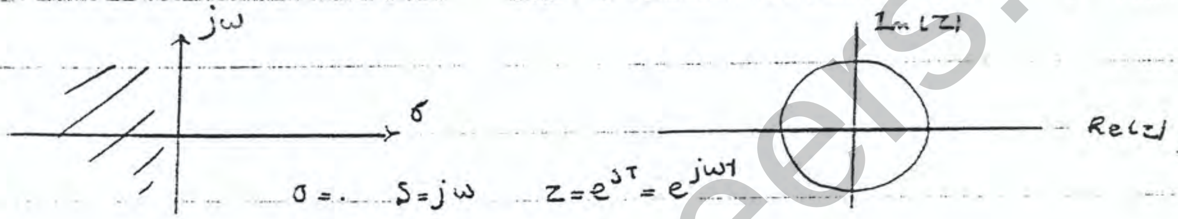
$n_0 \geq 0$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

تعریف می‌کنیم تبدیل Z را:

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{تبدیل } z} X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} = x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \dots$$

مثال: $X(z) = 1 + 2z^{-100} \longleftrightarrow x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-100]$



* شرط پایداری:

ناحیه همگرایی دایره واحد را دربرگیرد.

مثال تبدیل Z پیدا کنید:

$\delta[n] \longleftrightarrow 1$ ROC = تمام صفحه z

$U[n] \longleftrightarrow X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$ $|z| > 1$

بزرگترین قطب را در نظر می‌گیریم ناحیه ROC بزرگتر از دایره‌ای به شعاع آن است.

۱. ناحیه همگرایی به شکل ◎ - قطبی را دربر نمی‌گیرد.

۲. right-sided ← خارج دایره تا بینهایت

۳. پیوسته.

خواص تبدیل Z:

1- $\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n] \longrightarrow \alpha_1 X_1(z) + \alpha_2 X_2(z)$

ROC: اشتراک ROC_1 , ROC_2

2- $y[n] = x[n-n_0]U[n-n_0] \longleftrightarrow z^{-n_0} X(z)$

$n_0 > 0$

3. $x[0] = \lim_{|z| \to \infty} X(z)$

4. $\lim_{n \to \infty} x[n] = \lim_{|z| \to 1} (1 - z^{-1}) X(z)$

Δ : نشان دهید اگر همه قطبها خارج دایره واحد بودند، $x[n]$ ناپایدار است و $x[\infty] = \infty$

و اگر همه قطبها داخل دایره واحد بودند، $x[n]$ پایدار است و $x[\infty] = 0$.

Δ : نشان دهید اگر روی دایره واحد هم قطب بود، $x[n]$ محدود است ولی پایدار نیست. (یعنی حالت پایدار غیرصفر قاعدتاً از قطب ساده $|z| = 1$ ناشی شده است و می توان نوشت $X(z) = \frac{K}{1 - z^{-1}} + G(z)$

← با قضیه ~~...~~ مقدار نهایی بدست می آید ← $x[\infty] = K$.)

Δ مثال:

1- $e^{\alpha n}$ $\quad \sum_{0}^{\infty} e^{\alpha n} z^{-n} = \sum_{0}^{\infty} (e^{\alpha} z^{-1})^{n} = \frac{1}{1 - e^{\alpha} z^{-1}}$ $\quad \frac{e^{\alpha}}{|z|} < 1 \quad |z| > e^{\alpha}$

2- $\sin bn = \frac{z \sin b}{z^2 - 2z \cos b z + 1}$

3- $\cos bn$

4- $n e^{an} \sin bn$

5- $e^{\alpha n} \sin bn = \frac{e^{a} z^{-1} \sin b}{1 - 2 z^{-1} e^{a} \cos b + (e^{a} z^{-1})^2}$

6- $e^{\alpha n} \cos bn = \frac{1 - e^{a} z^{-1} \cos b}{1 - 2 z^{-1} e^{a} \cos b + (e^{a} z^{-1})^2}$

$$\sin bn = \frac{e^{jbn} - e^{-jbn}}{2j} \Rightarrow X(z) = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{1 - e^{jb} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-jb} z^{-1}} \right)$$

$$= \frac{1}{2j} \left(\frac{1 - e^{-jb} z^{-1} - 1 + e^{jb} z^{-1}}{1 - e^{-jb} z^{-1} - e^{jb} z^{-1} + z^{-2}} \right) = \frac{z^{-1} \sin b}{1 - 2 z^{-1} \cos b + z^{-2}}$$

۸۰، ۲، ۳ :

5. $y[n] = x_1[n] * x_2[n] \longleftrightarrow Y(z) = X_1(z) \cdot X_2(z)$

ناحیه همگرایی : اشتراک نواحی همگرایی X_1 و X_2 . (صفر و قطبها دقت شود.)

$$Y(z)=\sum_{n=0}^{\infty} y[n]\, z^{-n},\quad y[n]=\sum_{k=0}^{\infty} x_1[k]\, x_2[n-k]$$ علی $x_2[n]$ ، $x_1[n]$

$$\Rightarrow Y(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} x_1[k]\, x_2[n-k]\, z^{-n}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} x_1[k]\sum_{n=0}^{\infty} x_2[n-k]\, z^{-n} \rightarrow \begin{matrix} n_1=n-k \\ n=n_1+k \end{matrix} \rightarrow$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} x_1[k]\, z^{-k}\sum_{n_1=-k}^{\infty} x_2[n_1]\, z^{-n_1}$$

$\hookrightarrow n_1=0 \Leftarrow$ صفر است $n_1<0$ برای $x_2[n]$ و $-k<0$

$$=X_1(z)\, X_2(z)$$

$$\underset{x[n]}{\xrightarrow{X(z)}} \underset{h[n]}{\boxed{H(z)}} \longrightarrow \begin{matrix} Y(z)=H(z)X(z) \\ y[n]=h[n]*x[n] \end{matrix}$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}\bigg|_{\text{تمام شرایط اولیه صفر}} \longleftrightarrow H(z)=\mathcal{Z}\left[h[n]\right]$$

6. $y[n]=\alpha^{n} x[n] \longleftrightarrow Y(z)=X(\alpha^{-1} z)$

$$Y(z)=\sum_{n=0}^{\infty} y[n]\, z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty} x[n]\,\alpha^{n} z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty} x[n]\,(\alpha^{-1} z)^{-n}=$$

7. $y[n]=n\, x[n] \longleftrightarrow Y(z)=-z\dfrac{dX(z)}{dz}$

ناحیه همگرایی ، ناحیه همگرایی $X(z)$ (به صفر و بینهایت دقت شود)

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, z^{-n} \rightarrow \frac{dX(z)}{dz}=-\sum_{n=0}^{\infty} n\, x[n]\, z^{-n-1}$$

$$\rightarrow -z\frac{dX(z)}{dz}=\sum_{n=0}^{\infty} n\, x[n]\, z^{-n}$$

مثال $z[n]=n\, x[n]$ $\quad y[n]=n\, z[n]$ $\quad y[n]=n^2 x[n]$

$$Z(z)=-z\frac{dX(z)}{dz} \qquad Y(z)=-z\frac{dZ(z)}{dz} \rightarrow Y(z)=z^2\frac{d^2X(z)}{dz^2}+z\frac{dX(z)}{dz}$$

$$* \sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{r=0}^{M} b_r\, x[n-r] \quad \to H(z)=?$$

$$Y(z)\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z)\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}$$

$$\to H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

پس تابع تبدیل سیستمی که با معادله LCCDE بیان می‌شود rational function است.

محاسبه عکس تبدیل z :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} = x[0] + x[1] z^{-1} + \dots$$

محاسبه عکس تبدیل z ← روش تقسیم یا بسط سری ← اگر rational function نبود هم قابل استفاده است

↙ روش تجزیه به کسرهای ساده ← جمله عمومی را بدست می‌دهد.

مثال:

$$- X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots \Rightarrow x[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} = u[n]$$

$$|z^{-1}| < 1 \to |z| > 1$$

$$- X(z) = \sin(z^{-1}) = z^{-1} - \frac{z^{-3}}{3!} + \frac{z^{-5}}{5!} - \dots$$

$$x[n] = \begin{cases} 0 & \text{زوج } n \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n!} & \text{فرد } n \end{cases}$$

مثال به روش تجزیه به کسرهای ساده

$$- X(z) = \frac{1}{1 - 1.2 z^{-1} + 0.2 z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 1.2 z + 0.2} = \frac{z^2}{(z-1)(z-0.2)}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-0.2)} = \frac{1.25}{z-1} + \frac{-0.25}{z-0.2}$$

$$\hookrightarrow X(z) = \frac{X(z)}{z^{-1} \times z} = \frac{1.25}{1-z^{-1}} - \frac{0.25}{1-0.2 z^{-1}}$$

$$* \; K^n U[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1-KZ^{-1}} \qquad |z|>K \; *$$

$$\Rightarrow x[n] = 1.25\, U[n] - 0.25\,(0.2)^n U[n] \quad \Rightarrow \quad \underset{n\to\infty}{x[n]} = 1.25$$

مثال قبل به روش ۱:

$$\begin{array}{l|l} 1 & 1-1.2Z^{-1}+0.2Z^{-2} \\ \hline 1.2Z^{-1}-0.2Z^{-2} & 1+1.2Z^{-1}+1.24Z^{-2}+1.248Z^{-3} \\ 1.24Z^{-2}-0.24Z^{-3} & \end{array}$$

$$\lim_{n\to\infty} x[n] = 1.25$$

مثال:

$$X_1(Z) = \frac{Z^{-2}}{1-1.2Z^{-1}+0.2Z^{-2}}$$

روش ۱) شیفت $\rightarrow x_1[n] = x[n-2]$

روش ۲)

$$X_1(Z) \times \frac{Z^2}{Z^2} = \frac{1}{Z^2-1.2Z+0.2Z} = \frac{1}{(Z-1)(Z-0.2)}$$

$$\frac{X_1(Z)}{Z} = \frac{1}{Z(Z-1)(Z-0.2)} = \frac{5}{Z} + \frac{1.25}{Z-1} - \frac{6.25}{Z-0.2}$$

$$\Rightarrow X_1[Z] = 5 + \frac{1.25}{1-Z^{-1}} - \frac{6.25}{1-0.2Z^{-1}} \Rightarrow x[n] = 5\,\delta[n] + 1.25\,U[n] - 6.25\times(0.2)^n U[n]$$

$$x_1[0] = 0 \qquad x_1[1] = 0 \qquad x_1[2] = 1 \qquad x_1[3] = 1.2 \qquad \dots$$

پاسخ ضربه:

$$y[n] = x[n] + x[n-2] \xrightarrow{FIR} h[n] = \delta[n] + \delta[n-2]$$

$$Y(Z) = X(Z) + Z^{-2}X(Z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H[Z] = \frac{Y[Z]}{X[Z]} = 1 + Z^{-2} \rightarrow h[n] = \delta[n] + \delta[n-2]$$

$$y[n] - \alpha y[n-1] = x[n] \xrightarrow[\text{حل معادله دیفرانس}]{IIR} h[n] = \alpha^n U[n] \qquad |\alpha|<1$$

تبدیل Z

$$Y(Z) - \alpha Z^{-1} Y(Z) = X(Z)$$

$$\Rightarrow H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{1}{1-\alpha Z^{-1}} \Rightarrow h[n] = \alpha^n U[n]$$

$$H(z) = \frac{z}{z-\alpha} \qquad |z| = |\alpha| \qquad |\alpha| < 1$$

$$x[n] = A e^{j(\omega n + \theta)} \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, x[n-k]$$

$$\Rightarrow y[n] = \sum_{-\infty}^{\infty} h[k]\, A\, e^{j\omega(n-k) + j\theta} = A e^{j(\omega n + \theta)} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{-j\omega k}}_{\text{مشخصه فرکانسی سیستم}}$$

مشخصه فرکانسی سیستم DTFT ؟

⇐ دامنه خروجی = دامنه ورودی × دامنه مشخصه و فاز خروجی = فاز ورودی + فاز مشخصه

$$H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = H(e^{j\omega})$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] z^{-n} \qquad H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n}$$

پس مشخصه فرکانسی همان پاسخ ضربه است اگر $z = e^{j\omega}$ (← تبدیل z) (← تبدیل فوریه)

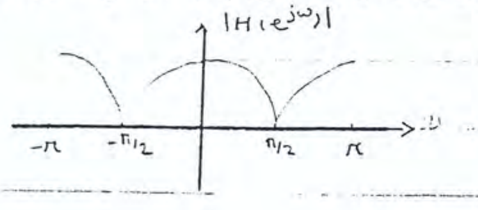
$H(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega+2\pi)})$ مشخصه فرکانسی چون متناوب است در بازه $(-\pi, \pi)$ رسم می‌کنیم. $\omega = \frac{2\pi}{T_s}$

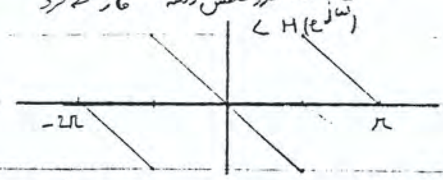
$|H(e^{j\omega})|$ تابعی زوج و $\angle H(e^{j\omega})$ تابعی فرد

$$y[n] = x[n] + x[n-2] \qquad Y(z) = X(z) + X(z) z^{-2}$$

$$\rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 + z^{-2}$$

$$H(e^{j\omega}) = 1 + e^{-2j\omega} = e^{-j\omega}(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) = \underbrace{e^{-j\omega}}_{\text{فاز ← فرد}} \times \underbrace{2\cos\omega}_{\text{قدر مطلقش دامنه ← زوج}}$$





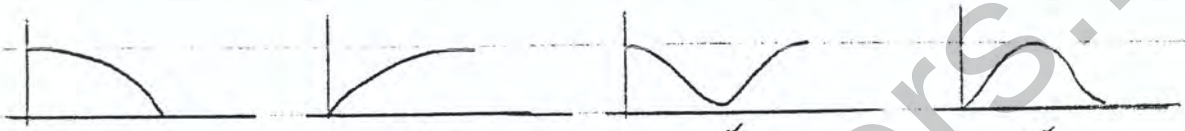
$f=0 \to \omega=0 \to e^{j\omega} \to z=1$ ← dc گین $= H(z=1)$ — این فیلتر میان نگذر است.

$\frac{f_s}{2}$ ← گین در $H(z=-1)$

$x[n] = A \cos \omega n$

$\omega=0 \to x[0]=A \quad x[1]=A \quad x[2]=A$

$\omega=\pi \to x[0]=A \quad x[1]=-A \quad x[2]=A$ — ماکزیمم تغییرات به ازای $\omega=\pi$



۸۰/۳/۸

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$ DTFT: Descrete Time Fourier Transf

همه خواص تبدیل z را دارد چون اینجا همان تبدیل z را داریم که

به جای z ، $e^{j\omega}$ گذاشته ایم.

یافتن معکوس رابطه بالا:

$$\to \int_0^{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega m} d\omega = \int_0^{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega(n-m)} d\omega$$

$$\to \int_0^{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega m} d\omega = \sum x[n] \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-j\omega(n-m)} d\omega}_{2\pi \delta_{mn}} = 2\pi x[m]$$

$$\begin{cases} m=n & 1 \\ m\neq n & 0 \end{cases}$$

$$\to x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

شرط کافی برای وجود فوریه این است که سیگنال، انرژی سیگنال باشد. $\sum_{-\infty}^{+\infty} |x[k]|^2 < \infty$

Δ DTFT ، را برای $u[n]$ بدست آورید.

- مثال: پاسخ پله سیستم $\delta[n]$ است. $u[n] \to \delta[n]$

ورودی را بصورت ترکیب توابع خطی می‌نویسیم ← بصورت ترکیب ضربه های واحد.

$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$

$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$

$y[n] = h[n] * x[n] = \underbrace{\delta[n] * x[n]}_{y_s[n]} - \delta[n-1] * x[n]$

$y[n] = y_s[n] - y_s[n-1]$

- مثال: اثبات کنید:

$x_1[n-n_1] * x_2[n-n_2] = y[n-n_1-n_2] = x_1[n-n_3] * x_2[n-n_4]$

به شرط آنکه $n_1 + n_2 = n_3 + n_4$

- مثال: $x[n]$، سیستم علی فرض می شود $y[n] - \alpha y[n-1] = x[n]$

$y[-1] \to$ مقدار داده شده $\;\; \Rightarrow y[n] = \alpha y[n-1] + x[n]$

$n=0 \quad y[0] = \alpha y[-1] + x[0]$

$n=1 \quad y[1] = \alpha y[0] + x[1] = \alpha^2 y[-1] + \alpha x[0] + x[1]$

$n=2 \quad y[2] = \alpha y[1] + x[2] = \alpha^3 y[-1] + \alpha^2 x[0] + \alpha x[1] + x[2]$

$\vdots \Rightarrow \quad y[n] = \underbrace{\alpha^{n+1} y[-1]}_{\text{پاسخ ورودی صفر سیستم}} + \underbrace{\sum_{K=0}^{n} \alpha^K x[n-K]}_{h[n] * x[n]} \qquad |\alpha| > 1$

پاسخ حالت صفر سیستم

* روشهای حل معادله دیفرانس ← تبدیل Z
← روش حل زمانی

$y[n] - \alpha y[n-1] = x[n]$

پاسخ همگن $\quad y_h[n] - \alpha y_h[n-1] = 0$

بدنبال تابعی هستیم که خودش منهای شیفت داده هایش ضریبی از خودش باشد.

$x[n]=\lambda^n \rightarrow x[n-n_0]=\lambda^{n-n_0}=\frac{1}{\lambda^{n_0}}\lambda^n$

$\rightarrow \lambda^n-\alpha\lambda^{n-1}=0 \rightarrow \lambda^{n-1}(\lambda-\alpha)=0 \quad \lambda=\alpha$

$y_h[n]=c_1(\alpha)^n \rightarrow y[-1]=c_1\alpha^{-1}$

مثال: $y[n]-3y[n-1]-4y[n-2]=x[n]$

$y_h[n]-3y_h[n-1]-4y_h[n-2]=0$

$y_h[n]=\lambda^n \rightarrow$ پاسخ پیشنهادی

دو تا شرط اولیه دارد که باید متوالی باشند. مثلاً $y[-1]$ و $y[-2]$

$\lambda^n-3\lambda^{n-1}-4\lambda^{n-2}=0 \rightarrow \lambda^2-3\lambda-4=0 \rightarrow \lambda_1=4,\ \lambda_2=-1$

$\rightarrow y_h[n]=c_1(-1)^n+c_2(4)^n$

نتیجه: سیستم ناپایدار است. (-1) روی دایره واحد و 4 خارج آن.

$y_h[n]=c_1(2)^n+c_2(1/3)^n$ وقتی ناپایدار است که $c_1\neq 0$

یعنی اگر c_1 طوری باشد که قطب بیرون دایره واحد را حذف کند، پایدار می‌شود.

۵ بخش همگن پاسخ را چگونه از تبدیل z بدست می‌آوریم.

ما شرایط اولیه را در بخش همگن می‌آوریم.

سیستم خطی: برای x_p و y_p معنی دارد.

اگر شرط اولیه برای پاسخ خصوصی صدق کند، سیستم از خطی بودن می‌افتد.

روشهای حل برای پاسخ خصوصی $\rightarrow$ روش تغییر پارامتر $\rightarrow$ استفاده نمی‌کنیم در اینجا.

یا بر مبنای جنس ورودی، یک پاسخ در نظر می‌گرفتیم.

روش اپراتوری $\rightarrow$ که همان روش z است.

ورودی	پاسخ پیشنهادی
A	K
$A m^n$	$K m^n$
معادل با x^m در پیوسته $A n^m$	$K_0 n^m + K_1 n^{m-1} + \dots + K_m$
$A^n n^m$	$A^n (K_0 n^m + \dots + K_m)$
$A \cos \omega_0 n \ \underline{\vee}\ A \sin \omega_0 n$	$K_1 \cos \omega_0 n + K_2 \sin \omega_0 n$

مثال : $y[n] - \alpha y[n-1] = u[n]$

پاسخ پیشنهادی K برای $n \geq 0$ تا $y[n-1]$ را هم دربرگیرد

$$K - \alpha K = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{1-\alpha} \rightarrow y_f[n] = \frac{1}{1-\alpha} \quad n \geq 0$$

پاسخ همگن و پاسخ خصوصی توسط نقطه شروع و شرط اولیه با هم ادغام می‌شوند. اگر سیستم شرایط اولیه نداشت پاسخ همگن هم نداریم.

مثال : $y[n] - \frac{5}{6} y[n-1] + \frac{1}{6} y[n-2] = 2^n u[n]$

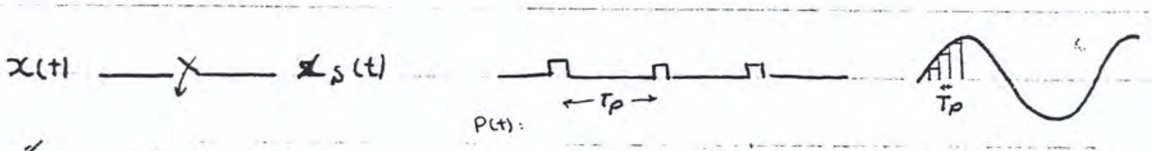
$y_p[n] = K 2^n \quad n \geq 2$

$K 2^n - \frac{5}{6} K 2^{n-1} + \frac{1}{6} K 2^{n-2} = 2^n$

$2^2 K - \frac{5}{6} 2K + \frac{1}{6} K = 2^2 \qquad K = 8/5$

$\rightarrow y_p[n] = 8/5 \, (2)^K$

شرایط اولیه $y[0]$ و $y[1]$



* به چه صورت $x(t)$ را از روی $x_s(t)$ بدست بیاوریم. (بدست آوردن سیگنال آنالوگ از روی سیگنال گسسته)

گ

الف

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,\varphi_n(t) = x(t)$$

می توانیم بجای کلید یک سیگنال متناوب $p(t)$ (به صورت کشیده شده) را در $x(t)$ ضرب کنیم. $p(t)$ متناوب ← فوریه دارد ← یعنی می توان نوشت:

$$(*)\ p(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{j2\pi n f_s t}$$

$$x_s(t) = x(t).p(t)$$

$$X_s(f) = \mathcal{F}[x_s(t)] = X(f) * P(f)$$

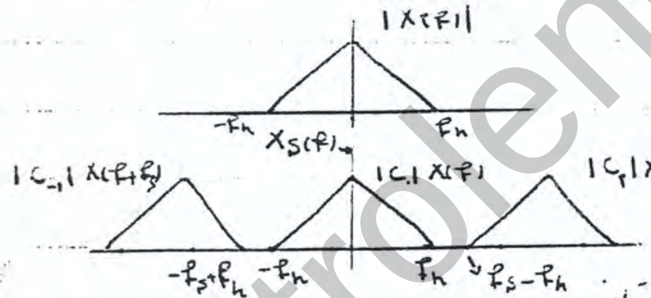
$X_s(f)$ اینجا به معنای تبدیل فوریه $x_s(t)$ است نه به معنی X_s های sample.

$$(*) \Rightarrow P(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\,\delta(f-nf_s)$$

$$\Rightarrow *\ X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n X(f-nf_s)\ *$$

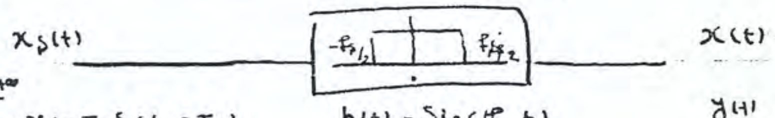
اگر ایده آل باشد $C_n \leftarrow f_s$ (یعنی اگر $p(t)$ قطار ضربه باشد $C_n = f_s$)

$$\hookrightarrow X_s(f) = \dots + C_{-1}X(f+f_s) + C_0X(f) + C_1X(f-f_s) + \dots$$



اگر این نواحی هم پوشانی نداشته باشند به وسیله یک فیلتر lowpass با بهره $\frac{1}{|C_0|}$ می توان $X(f)$ نمونه بالایی را بدست آورد.

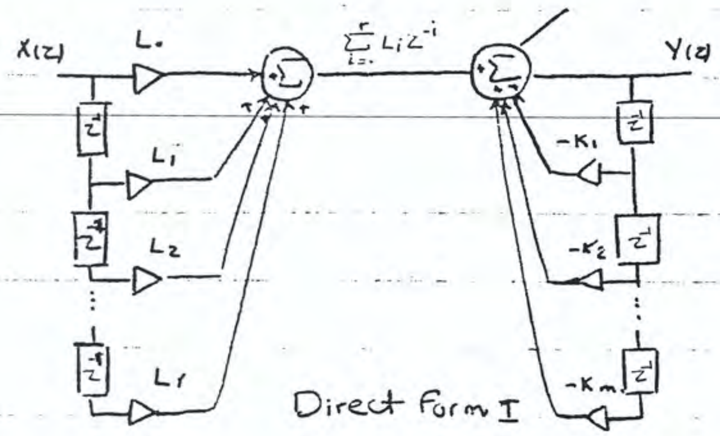
$$\left.\begin{array}{l} f_h < f_s - f_h \\ -f_h > -f_s + f_h \end{array}\right\} \rightarrow f_s > 2f_h \qquad \text{شرط نایکوییست}$$



$$x_s(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\,\delta(t-nT_s) \qquad h(t) = \mathrm{Sinc}(f_s t)$$

$$x(0)\ \delta(t) \xrightarrow{\text{فیلتر}} x(0)\ \mathrm{Sin}f_s t$$

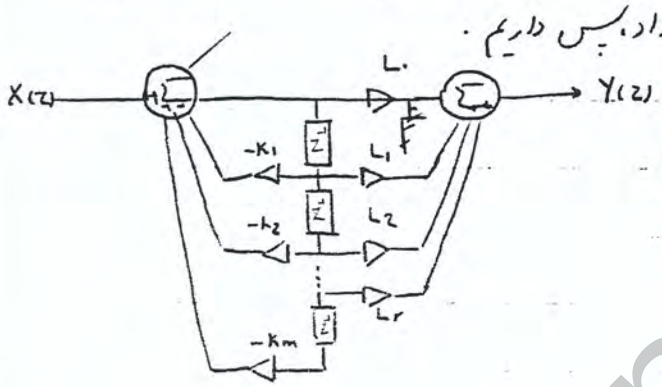
۱)



Direct Form I

$$\sum_{i=0}^{r} L_i z^{-i} X(z) - \sum_{j=1}^{M} k_j z^{-j} Y(z) = Y(z)$$

ـ در سیستم خطی جای دو عملگر را می توان تغییر داد، پس داریم.



۲) Direct Form II

فرم کانونی : می نیمم تاخیر را دارد.

۳)

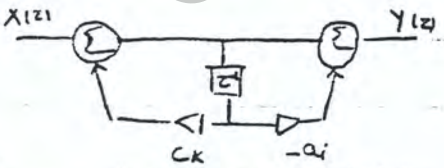
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{r} L_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^{M} k_j z^{-j}} = K z^{-m} \frac{\prod_{i=1}^{N_1} (1-a_i z^{-1}) \prod_{j=1}^{N_2} (1-b_j^* z^{-1})(1-b_j z^{-1})}{\prod_{k=1}^{D_1} (1-c_k z^{-1}) \prod_{l=1}^{D_2} (1-d_l^* z^{-1})(1-d_l z^{-1})}$$

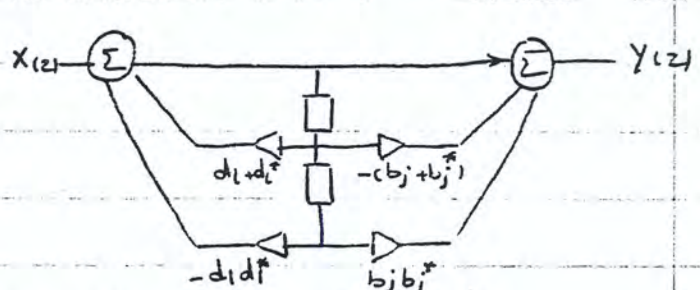
$$H_1(z) = \frac{1-a_i z^{-1}}{1-c_k z^{-1}} \qquad H_2(z) = \frac{(1-b_j z^{-1})(1-b_j^* z^{-1})}{(1-d_l z^{-1})(1-d_l^* z^{-1})}$$

حقیقی ← اندازه

حقیقی

$$= \frac{1-(b_j+b_j^*) z^{-1} + b_j b_j^* z^{-2}}{1-(d_l+d_l^*) z^{-1} + d_l d_l z^{-2}}$$



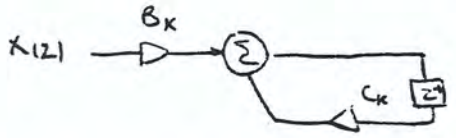


تمام جملات H(z) یا به صورت $H_1(z)$ است

روش ساخت سری cascade ، یا به صورت $H_2(z)$. بنابراین با داشتن اینها کل

به صورت پشت سرهم cascade می بندیم

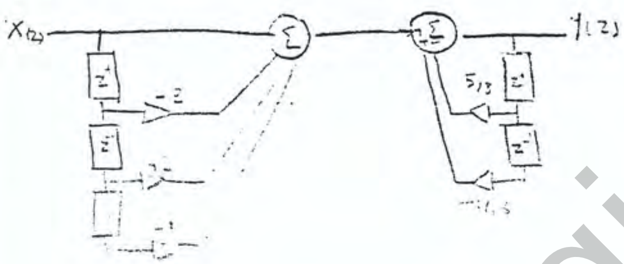
$$H(z) = \sum_{i=0}^{M} A_i z^{-i} + \sum_{k=1}^{D_1} \frac{B_k}{1-C_k z^{-1}} + \sum_{l=1}^{D_2} \frac{1-e_l z^{-1}}{(1-d_l z^{-1})(1-d_l^* z^{-1})}$$



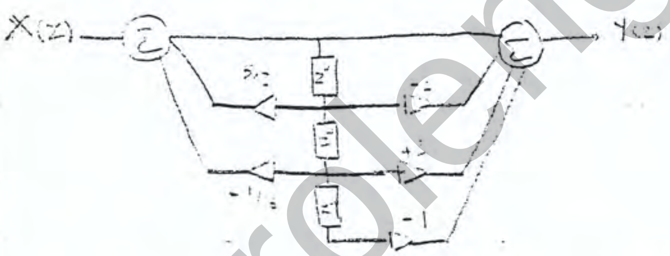
$$\frac{B_k}{1-C_k z^{-1}}$$

مثال :

$$H(z) = \frac{(1-z^{-1})^3}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{8}z^{-1})} = \frac{1-3z^{-1}+3z^{-2}-z^{-3}}{1-\frac{5}{8}z^{-1}+\frac{1}{16}z^{-2}}$$



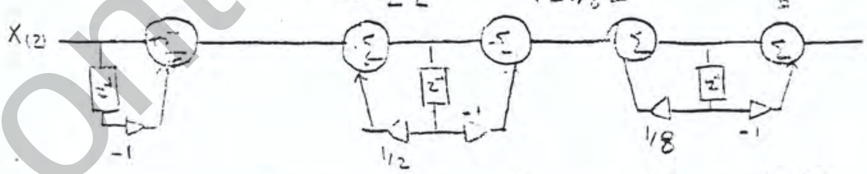
: Direct Form I



: Direct Form II

$$H(z) = (1-z^{-1}) \times \frac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \times \frac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{8}z^{-1}}$$

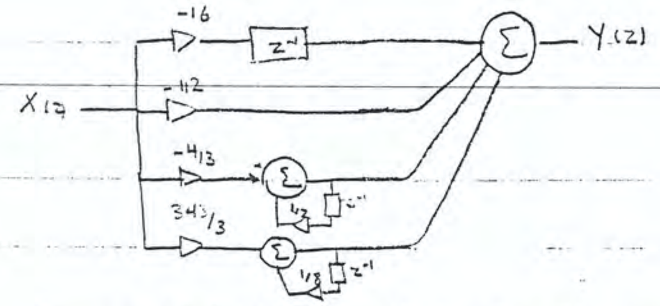
سری



$$\frac{H(z)}{z} = \frac{(z-1)^3}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{8})z^2} = \frac{A}{z^2} + \frac{B}{z} + \frac{C}{z-\frac{1}{2}} + \frac{D}{z-\frac{1}{8}}$$

$A = -16,\quad B = -112,\quad C = -4/3,\quad D = 343/3$

$$\Rightarrow H(z) = -16z^{-1} - 112 - \frac{4}{3}\,\frac{1}{1-z^{-1}/2} + \frac{343}{3} \times \frac{1}{1-z^{-1}/8}$$



موازی

مزیت موازی: تأخیر ماکزیمم برابر با تأخیر یکی از این ساخته‌ها.

قضیه تلگان:

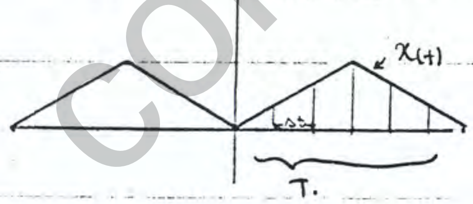
دیگر گراف اگر [V,I] صدق کند، [-V,-I] و [V,-I] و [-V,I] هم صدق می‌کند، پس جهت در گراف مهم نیست. تعداد شاخه‌ها هم مهم نیست (اگر یکی از گره‌ها شاخه‌های بیشتری داشته باشد، برای بقیه همان شاخه‌ها را با گین صفری گذاریم)

⇐

نتیجه قضیه تلگان این است که می‌توان در ۴ حالت بالا جهت‌ها را تغییر داد و ۴ حالت جدید به دست آورد.

۸۰/۳/۱۹:

تبدیل فوریه گسسته:



در پیوسته: $x(t) = \sum X_K e^{j2\pi k f_0 t}$

$$X_K = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

$$X_k = \frac{1}{T}\sum_{n=0}^{N-1} x_s(n\Delta t)\, e^{-j2\pi k \frac{n\Delta t}{T_0}} \times \frac{T_0}{N}$$

در پیوسته داشتیم: t

در گسسته داریم: $n\Delta t$

$T_0 = N\Delta t$ دوره تناوب سیگنال پیوسته

دوره تناوب سیگنال گسسته

گ ۲

$$\Rightarrow X_K = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j2\pi K \frac{n \Delta t}{T_0}}$$

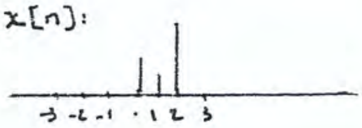
$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right) K n}$$

حالا تعریف می‌کنیم DFT را به این صورت :

فرمول سنتز $\quad X[K] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right) K n} \qquad K = 0, 1, \dots, N-1$

DFT نیز متناوب است . نشان دهید : $\quad X[K+N] = X[K]$

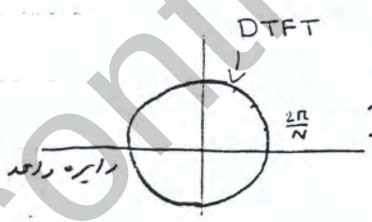
$K = 0 \Rightarrow X[K] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \rightarrow$ جمع سیگنال .



$$X_1(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, z^{-n}$$

$$z = e^{-j\frac{2\pi}{N} K}$$

$$\Rightarrow X_1(z) \xrightarrow{\text{تبدیل شده}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, z^{-n}$$



DFT همان sample های DTFT است .

یعنی اگر از روی DTFT نمونه برداری کنیم و فاصله‌ها $\frac{2\pi}{N}$ باشد، DFT به دست می‌آید .

برای یک سیگنال . DFT تعریف می‌کنیم .

هر سیگنال انرژی را می‌توانیم DFT

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-1} X[K]\, e^{j\frac{2\pi}{N} K n}$$

گاهی $e^{-j\frac{2\pi}{N}} = W_N$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{l=0}^{k-1} x[l]\, e^{-j(\frac{2\pi}{N})kl}\right) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{k-1} x[k] \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j(\frac{2\pi}{N})kl}\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = x[n]$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(n-l)k} = \begin{cases} 0 & n \neq l \text{ یا } n \neq N+l \\ N & n \overset{k}{=} l \end{cases} = N\,\delta_{n,l}$$

تمام خواص DTFT در DFT هم صدق می‌کند.

DFT خطی است.

△ فرض کنید $N_1 = 3$ و $N_2 = 6$، در مجموع، DFT کدام یک را لحاظ می‌کنیم، N_1 یا N_2؟

اگر $x[n]$ حقیقی باشد

△ امکان داشتن که با آن $X[k]$ را بدست می‌آوریم (DFT)، IDFT نیز بدست می‌آوریم.
به این صورت که $x^*[n]$ را می‌دهیم

مثال

$x[n] = 4 + 3\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \rightarrow N' = 4 \qquad N = 8$

$x[n] = 4 + \frac{3}{2j}\left(e^{jn\pi/2} - e^{-jn\pi/2}\right) = 4 - \frac{3}{2}j\left(e^{jn\pi/2} - e^{-jn\pi/2}\right)$

$X_K = \sum_{n=0}^{7}\left(4 - 3/2j\, e^{jn\pi/2} + 3/2j\, e^{-jn\pi/2}\right) e^{-j\frac{2\pi}{8}kn}$

$= 4\sum_{n=0}^{7} e^{-j2\pi/8\, kn} - 3/2j\sum_{n=0}^{7} e^{j\frac{n\pi}{2}} e^{-j\frac{2\pi}{8}kn} + 3/2j\sum_{n=0}^{7} e^{-j\frac{n\pi}{2}} e^{-j\frac{2\pi}{8}kn}$

$= 4\times 8\,\delta_{k,0} - 3/2j\times 8\,\delta_{k,2} + 8\times 3/2j\,\delta_{k,6}$

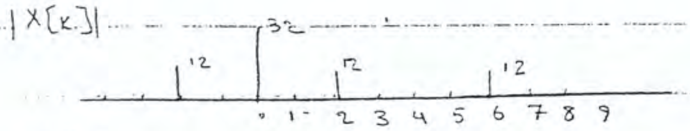
چون متناوب است بجای -2، 6 گذاشتیم

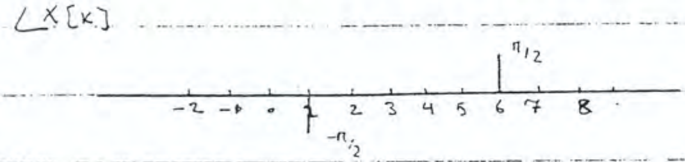
$e^{j\frac{n\pi}{2}} = e^{j\frac{2\pi}{8}\times 2}$

$X[0] = 32 \rightarrow$ 8 بار، 4 با خودش جمع شده است

$X[1] = 0 \qquad X[2] = -12j \qquad X[3] = X[4] = X[5] = 0$

$X[6] = 12j \qquad X[7] = 0$





خواص DFT :

1) متناوب

2) $\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n] \longrightarrow \alpha_1 X_1[k] + \alpha_2 X_2[k]$

3) $x[n-m] \longleftrightarrow e^{-\frac{2\pi}{N}km} X[k]$

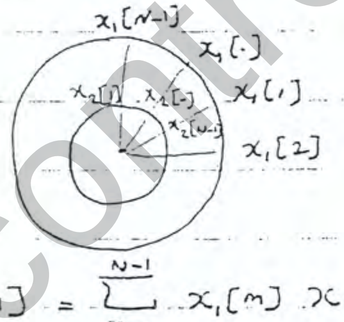
$4)\ x[n]$

4) $x[n] e^{j\frac{2\pi}{N}nm} \longleftrightarrow X[k-m]$

5) $\frac{1}{N} X[n] \longleftrightarrow x[-k]$ (duality قضیه دوگانی)

6) $x_1[N] \ \textcircled{N}\ x_2[N] \longleftrightarrow X_1[k]\, X_2[k]$ کانولوشن حلقوی

$$y[n] = x_1[n] \ \textcircled{N}\ x_2[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]\, x_2[n-m]$$



$$y[0] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]\, x_2[-m]$$
$$= x_1[0]\, x_2[0] + x_1[1]\, x_2[N-1] + \cdots$$

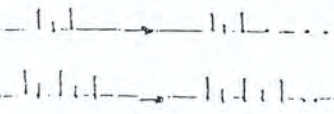
$$y[1] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]\, x_2[1-m] = x_1[0]\, x_2[1] + x_1[1]\, x_2[0] + x_1[2]\, x_2[N-1] + \cdots$$

یعنی دایره بیرونی ثابت و دایره داخلی را یک واحد می‌چرخانیم ...

به همین دلیل می‌گوییم کانولوشن حلقوی

کانولوشن حلقوی و خطی یک جواب را نمی‌دهند چون تعدادشان یکی نیست لزوما

کانولوشن خطی ← تعداد $N_1 + N_2 - 1$



$$y[n] = x_1[n] \circledast x_2[n]$$

$$Y[k] = \sum_{n=0}^{N-1} y[n]\, W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]\, x_2[n-m]\, W_N^{kn}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] \sum_{n=0}^{N-1} x_2[n-m]\, W_N^{kn} = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] \Big(\sum_{n_1=0}^{N-1} x_2[n_1]\, W_N^{kn_1} \Big) \times W_N^{km}$$

جمع روی یک دوره سیگنال متناوب به نقطه شروع ربطی ندارد.

$$= X_1[k]\; X_2[k]$$

7) $x_1[-n] \longleftrightarrow X_1^*[k]$

8) $\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$

$y[n] = x_1[n] \circledast x_2[n] \qquad x_2[n] = x_1[-n]$

$y[n] = x_1[n] \circledast x_1[-n]$

$y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]\, x_2[n-m] \rightarrow y[0] = \sum_{m=0}^{N-1} |x_1[m]|^2$

$Y[k] = X_1[k]\, X_2[k] = X_1[k]\, X_1^*[k]$

$y[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y[k]\, W_N^{-kn}$

$y[0] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y[k] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1[k]\, X_1^*[k] \rightarrow \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X_1[k]|^2$

9) DFT یک تابع حقیقی و زوج، حقیقی و زوج است.

10) " " " فرد، موهومی خالص و فرد " .

گ ۱۴