پلتفرم اختصاصی

مهندسی کنترل

https://controlengineers.ir

https://t.me/controlengineers

https://www.instagram.com/controlengineers.ir

Subject: استاد بشکاری تی

Year. Month. Date. ( )

جلسه اول :

نظریه گراف

گراف :

$V \neq \emptyset$ رئوس E یال

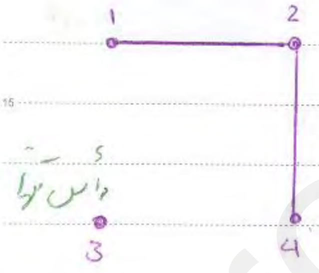
$G:(V,E)$ نماد نمایش گراف

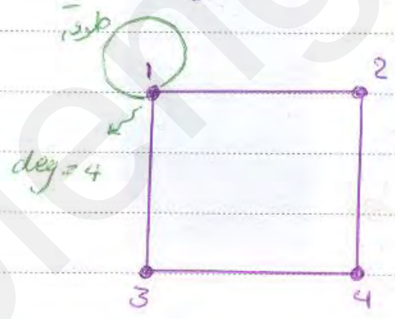
گراف بدون جهت ← $E:\{\underbrace{\{1,2\}}_{\text{مجموعه}},\{2,4\},\dots\}$ یال‌ها

گراف جهت دار ← $E=\{\underbrace{(1,2)}_{\text{زوج مرتب}},(2,4),\dots\}$

درجه یک رأس :

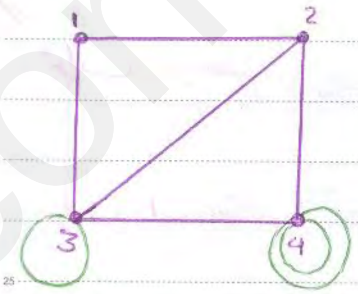
تعداد یال‌های متصل به یک رأس   نمایش ← deg





نکته : برای محاسبه درجه رأس‌ها اگر رأس دارای طوقه بود، آنگاه طوقه دو درجه حساب می‌شود

در این مثال رأس ۱، از درجه ۴ است



deg 1 = 2

deg 2 = 3

deg 3 = 5

deg 4 = 6

جلسه اول :

قضیه :

$$\sum_{i=1}^{n} \deg v_i = 2|E|$$

$V \neq \emptyset$ تعداد رئوس ها ، نمایش ← $n = |V| = v$

E تعداد یال ها ، نمایش ← $m = |E| = e$

نکته : تعداد رئوس از درجه فرد، زوج است.

چون $2E$ زوج است ← زوج $= \sum_{i=1}^{n} \deg v_i$ چون

نکته :

تعداد رئوس		درجه رئوس		
زوج	×	زوج	=	زوج
فرد	×	فرد	≠	زوج

پس حتماً باید زوج باشد

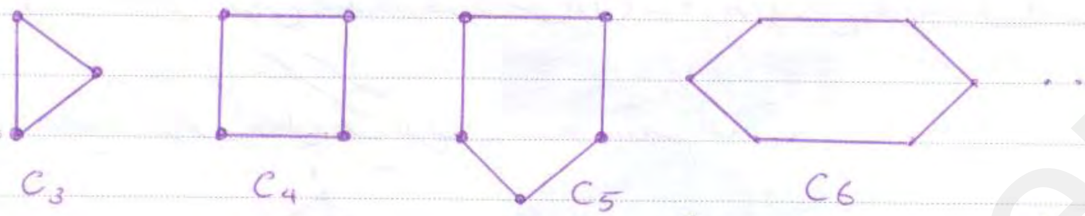
گراف K منتظم : درجه تمامی رئوس آن K باشد

گراف ۱- منتظم : تعداد رئوس این گراف زوج است.

چون درجه هرکدام از رئوس این درجه یک هستند پس یعنی دوتا دوتا رئوس با یک یال به هم متصل شده اند

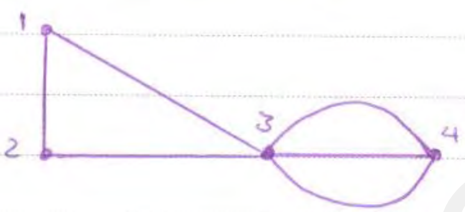
نظریه گراف : جلسه اول :

گراف 2-منتظم : یک چند ضلعی بدون قطر « یا گرافهای دور = C »



نکته : C_{10} یعنی گراف ۱۰ رأسی که به شکل یک دور است.

گراف چندگراف : گرافی است که بین دو رأس بیشتر از یک یال وجود داشته باشد



گراف چندگراف

گراف ساده : گرافی که فاقد طوقه باشد و چندگراف هم نباشد، گراف ساده نامیده می‌شود.

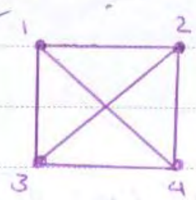
گراف 3-منتظم : « یا همان گراف مکعبی »

باید حتما تعداد رئوس آن زوج باشد، طبق قضیه گفته شده

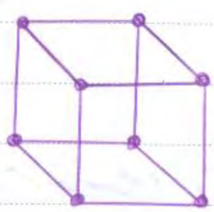
$$\sum_{i=1}^{n} \deg v_i = 2|E|$$

$$\underbrace{3n}_{\text{زوج}} = \underbrace{2|E|}_{\text{زوج}} \rightsquigarrow \text{زوج است}$$

پس n = زوج



K_4

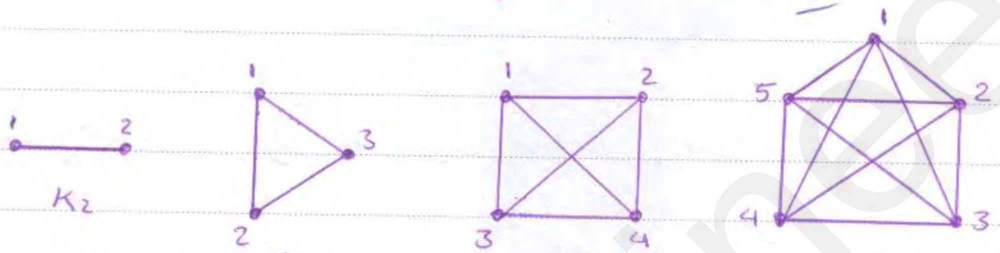


جلسه اول :

نکته: مجاور بودن دو رأس یعنی وجود یال بین آن دو رأس

گراف کامل: گرافی است که هر رأس آن به $n-1$ رأس دیگر متصل است

در نتیجه گراف کامل یک گراف $n-1$ منتظم است.



K_2 K_3 K_4 K_5

در گراف کامل

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2|E|$$

$$n(n-1) = 2|E|$$

$$\frac{n(n-1)}{2} = |E|$$

نکته: بیشترین تعداد یال‌های گراف کامل برابر است با $\frac{n\times(n-1)}{2}$ با تعداد رئوس n در گراف ساده

$\Delta(G) =$ بیشترین درجه

$\delta(G) =$ کمترین درجه

گراف دوبخشی:

گراف G را دوبخشی می‌نامیم هرگاه بتوان رئوس گراف را به دو مجموعه V_1 و V_2

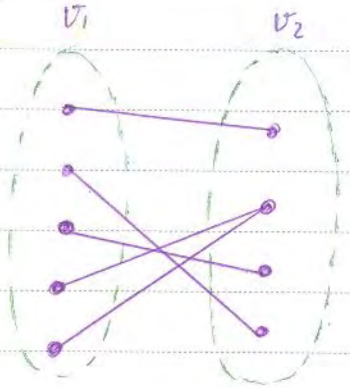
نظریه گراف:

جلسه اول:

افراز کنیم به طوری‌که هر یال دارای یک رأس از V_1 و یک رأس از V_2 است.

«افراز یعنی دو بخشی که تقسیم شده اند هیچ اشتراکی ندارند»

نکته: داخل خود V_1 و V_2 هیچ یالی نباید باشد.

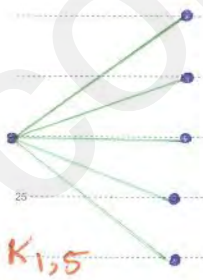


گراف دوبخشی کامل: گراف دوبخشی کامل است که تمامی رئوس بخش V_1 به تمامی رئوس بخش V_2 متصل است. «نمایش $K_{n,m}$»

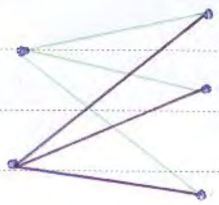
نکته: تعداد رئوس گراف دوبخشی کامل برابر است با $(n+m)$

نکته: تعداد یالهای گراف دوبخشی کامل برابر است با $(n \times m)$.

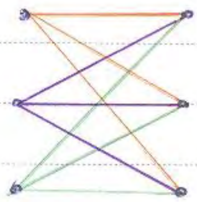
نکته: همچنین n رأس از درجه m داریم و m تا رأس از درجه n داریم.



$K_{1,5}$



$K_{2,3}$

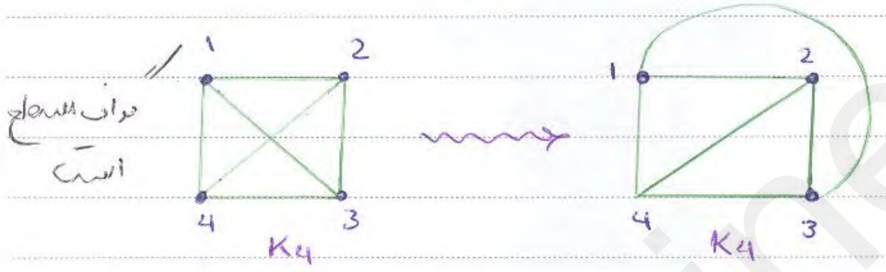


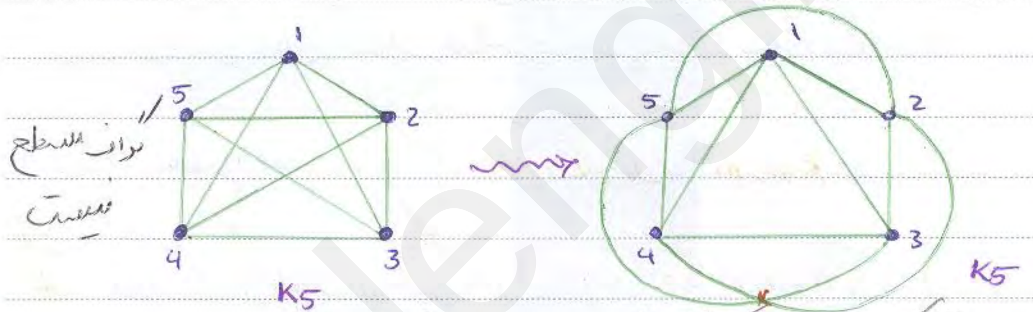
$K_{3,3}$

جلسه اول:

گراف مسطح: گرافی که بتوان شکل گراف را در صفحه R^2 رسم کرد به طوری که یال ها همدیگر را قطع نکنند گراف مسطح می نامیم.

نکته: در گرافهای K_n داریم ← $(n \geq 5)$ غیر مسطح است.





چون روی نقطه همدیگر را قطع کردند پس K_5 یک گراف مسطح نیست.

نکته مهم: گرافهای K_5 و $K_{3,3}$ به طور حتم غیر مسطح هستند به علاوه همه گرافهای غیر مسطح را نیز از این دو گراف می توانیم تشخیص دهیم.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

نظریه گراف :　　　　جلسه دوم :

یکریختی دو گراف :

$G_1=(V_1,E_1)$　　$G_2=(V_2,E_2)$

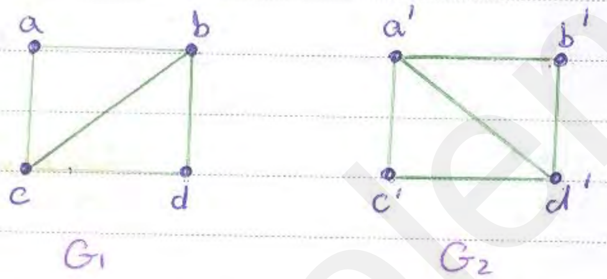
اگر دو رأس در گراف G_2 باهم یال داشته باشند در G_1 هم باهم یال داشته باشند و بالعکس

و اگر دو رأس در گراف G_2 باهم یال نداشته باشند در G_1 نیز باهم یال ندارند.

$$\left.\begin{array}{l} F: V_1 \xrightarrow[\text{پوشا}]{\text{یک به یک}} V_2 \\ \{a,b\}\in E_1 \Longleftrightarrow \{F(a),F(b)\}\in E_2 \end{array}\right\} G_1 \cong G_2$$

اشکال :

مثال :



F: $a \to b'$ یا c'
$b \to a'$ یا d'
$c \to d'$
$d \to c'$

شرایط لازم برای یکریختی :

1- باید تعداد رئوسشان باهم برابر باشند　　$|V_1|=|V_2|$

2- باید تعداد یالها هم باهم برابر باشند　　$|E_1|=|E_2|$

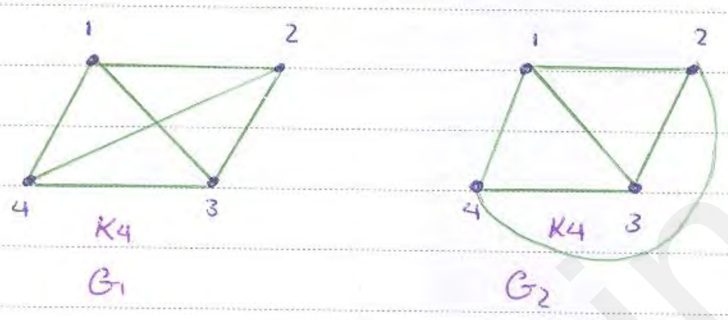
نکته : یکی از شرایط لازم هم خوانی داشتن تعداد درجات در دو گراف است.

جلسه دوم:

3- تعداد رئوس از درجه x در گراف G_1 = تعداد رئوس از درجه x در گراف G_2

در شکل صفحه قبل شاید با هم هم‌ریخت درگ ریخت ۱۱ باشند

گراف مسطح:



گراف کامل:

K_n هر رأسش به $n-1$ رأس متصل است

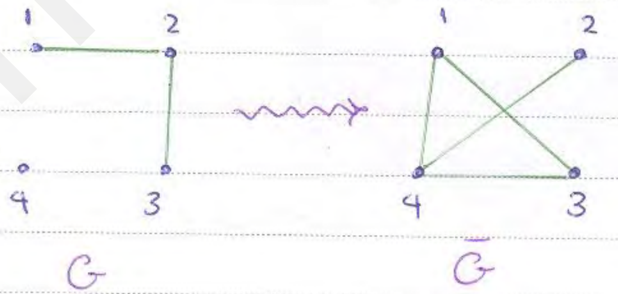
تعداد یال‌ها:

$$\frac{n\times(n-1)}{2}$$

نکته: تا K_4 مسطح هستند از K_5 و خود K_5 به بعد غیرمسطح هستند.

گراف مکمل:

$G \longrightarrow G$ یا $\bar{G}$



$G \cup \bar{G} = K_n$

گراف کامل

③

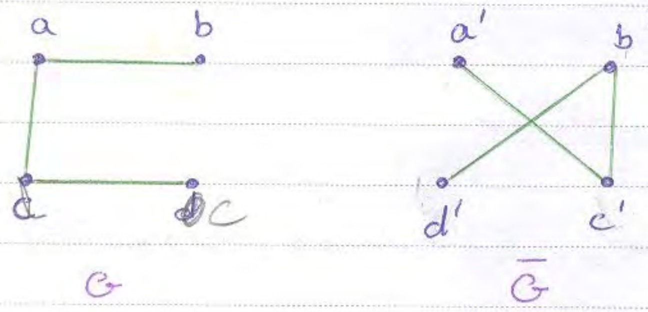
Subject:
Year. Month. Date. ( )

مکمل گراف :

جلسه دوم :

گراف خود مکمل : که خودش مکمل خودش باشد

نکته : خودش یک ریخت باشد با متممش $G \simeq \bar{G}$



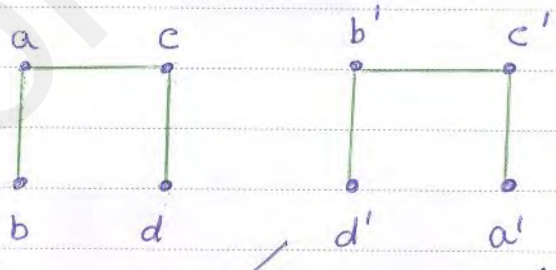
d باید به یالی برود که از درجه یک است

نکته : چون بین a و b یال وجود دارد پس در قسمت $a \to b'$ یا c' و $b \to a'$ یا d'

b' و d' را انتخاب می‌کنیم چون بین a و b یال هست.

$f:\ a \to b'$ یا c'
$b \to a'$ یا d'
$c \to c'$
$d \to a'$

$f:\ a \to c'$
$b \to a'$
$c \to d'$
$d \to b'$



نکته : گراف خودمکمل از نوعی است که هم گراف با مکملش یک ریخت باشد هم شکل باشند و تمام خصوصیاتش به یک صورت باشد

Subject:
Year. Month. Date. ( )

جلسه دوم:

$G \simeq G'$

$|V| = |\bar{V}|$

$|E| = |\bar{E}|$

$G \cup \bar{G} = K_n$ گراف کامل

$|E| + |\bar{E}| = \dfrac{n(n-1)}{2}$ گراف کامل

$2|E| = \dfrac{n(n-1)}{2}$

نکته: $2|E|$ رو می‌خوانیم => دوتا یال در E

$|E| = \dfrac{n(n-1)}{4}$ یال‌های گراف خودمکمل

یکی از شروط گراف خودمکمل

$n \overset{4}{\equiv} 0$ یا $n \overset{4}{\equiv} 1$ ← که تعداد رأس‌های آن این شرط را داشته باشد

نکته: در مورد شرط بالا یعنی مثلاً اگر ۴ رأس داشته باشد باید 3 تا یال داشته باشد

$E = \dfrac{\cancel{4} \times 3}{\cancel{4}} = 3$ $E = \dfrac{n(n-1)}{4}$

زیرگراف:

$G = (V, E)$

۱_ حذف یک یال $G - e$ یال $e \in E$

2_ $G - v$ یک رأس به تعداد $deg(v)$ حذف شده است $v \in V$

جلسه سوم:

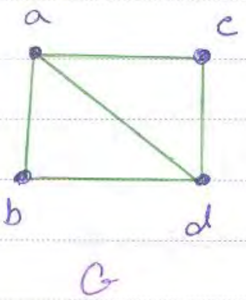
قطعه گراف

نکته: از رأس‌های گراف یک زیرمجموعه تعریف می‌کنیم یک زیرمجموعه غیرتهی $G=(V,E)$

رأس $\emptyset \neq V_1 \subseteq V$

یال $E_1 \subseteq E$

نکته: یال‌هایی را انتخاب کنیم که رأسش انتخاب شده است.



$V_1=\{b,c\}$

مثلاً در این مثال این دو رأس را انتخاب می‌کنیم.

E_1 زیرمجموعه‌ای از E است که قبلاً رئوس آن در V_1 انتخاب شده است.

زیرگراف فراگیر یا زیرگراف پوشا:

$V_1=V$

$E_1 \subseteq E$

با این عبارات که در بالا آورده است داریم:

$V=V_1$ — یعنی در زیرگراف فراگیر تعداد رأس‌ها باید برابر با تعداد رأس‌های گراف اولیه باشد

یعنی نباید تعداد رأس‌ها را تغییر دهیم که کم کنیم و نه زیاد

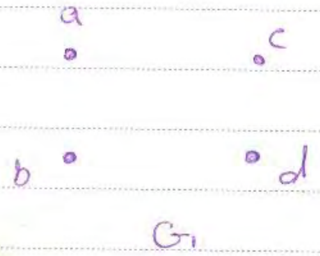
$E_1 \subseteq E$ — یعنی تعداد یال‌های زیرگراف فراگیر زیرمجموعه‌ای از تعداد یال‌های گراف اولیه باشد

در واقع یا باید کمتر یا مساوی تعداد یال‌های گراف اولیه باشد نمی‌تواند تعداد یال‌های آن بیشتر باشد

جلسه دوم

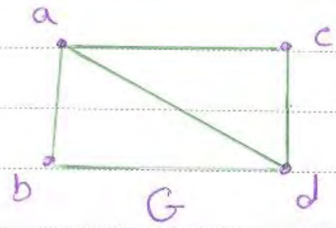
نکته: حتی اگر زیرگراف فراگیر هیچ یالی نداشته باشد باز هم یک زیرگراف فراگیر است

مثال ۱:



G_1 یک زیرگراف فراگیر است.

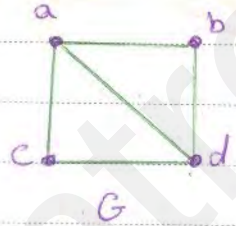
مثال



G_1 زیرگراف فراگیر مشتق G

نکته: تعداد زیرگرافهای فراگیر = تعداد زیرمجموعه هایی که می توان انتخاب کرد = $2^{|E|}$

مثال ۲:



2^5 زیرگراف فراگیر دارد

5 تعداد یالها

زیرگراف القاء شده: (توسط U)

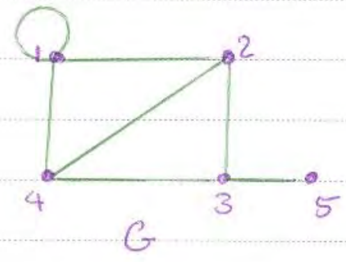
فرض کنیم $\emptyset \neq U \subseteq V$ زیرمجموعه‌ای از رئوس را انتخاب می‌کنیم که البته Fix می‌ماند

در این صورت $G_1=(U,E_1)$ زیرگراف القاء شده G است.

نظریه گراف: جلسه دوم :

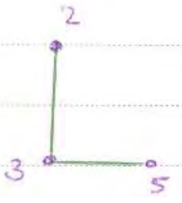
به طوری که E_1 شامل تمامی یال های G است که از رئوس متعلق به U می گذرند.

مثال:

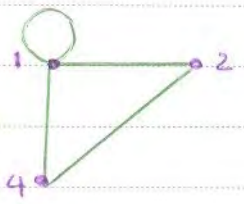


$U=\{2,3,5\}$

اگر $U=\{2,3,5\}$ را انتخاب کنیم



اگر $U=\{1,2,4\}$ را انتخاب کنیم



باید حتماً تمامی یالها رسم شود پس حلقه هم حتماً وجود دارد.

Subject: (1)
Year. Month. Date. ( )

طوقه دار: جلسه سوم:

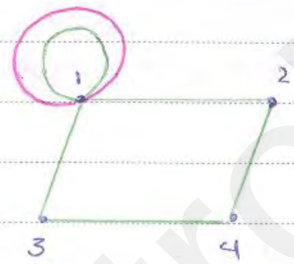
درجه رأس‌ها: deg (20)

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{deg(v_i) = \overbrace{2|E|}^{\text{چون زوج است}}}_{\text{حتماً باید زوج باشد}}$$

چون دو رأس a و b توسط یک یال به هم متصل می‌شوند و هر کدام از رأس‌های a و b هر کدام به چند رأس دیگر متصل هستند یالی که a و b را به هم متصل می‌کند دوبار شمارده می‌شود و برای همین است که در فرمول $2|E|$ داریم.

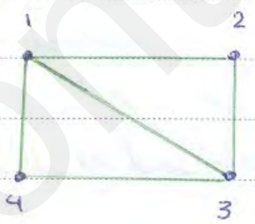
نکته: یال طوقه استثناء است و دوبار حساب می‌شود

مثال:



* درجه رأس 1 برابر 4 است

* درجه رأس 1 برابر 6 است



دنباله درجات: $(d_1, d_2, \dots, d_n)$

$d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$

$d_1\ d_3\ d_2\ d_4$
$(3, 3, 2, 2)$

deg 3 = deg 1 = 3
deg 4 = deg 2 = 2

Subject: 2
Year. Month. Date. ( )

G ← دنباله درجات $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$

معکوس بالایی: دنباله درجات $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ → G ?

1- جمع درجات باید حتما عددی زوج باشد $\sum_{i=1}^{n} deg(v_i) = 2|E|$

2- همیشه باید تعداد رئوس از درجه فرد، زوج باشد

1 و 2 شرایط لازم برای آن است که یک دنباله درجات گرافیکی باشد

گرافیکی: یعنی بتوان گراف ساده G یافت که دنباله درجات آن داده شده باشد

مشخصات گراف ساده: یال چندگانه نداشته باشد
طوقه نداشته باشد

تعریف گراف ساده: بین هر دو راس آن حداکثر یک یال وجود داشته باشد طوقه هم نداشته باشد

سوال ۱: آیا که یک دنباله گرافیکی است؟ $d = (7, 6, 3, 3, 1, 1, 1)$
a b c d e f g

حل: یک گراف 7 رأسی $n = 7$

نکته: جمع این اعداد باید زوج باشد $7+6+3+3+1+1+1 = 22$

P4PCO

نظریه گراف — جلسه ششم :

1 2 3 4 5 6

تعداد اعداد فرد باید زوج باشد (1 و 1 و 1 و 3 و 3 و 7)

چون 7 رأس داریم و بزرگترین درجه عدد 7 است پس یکی از رأسها دارای حلقه است

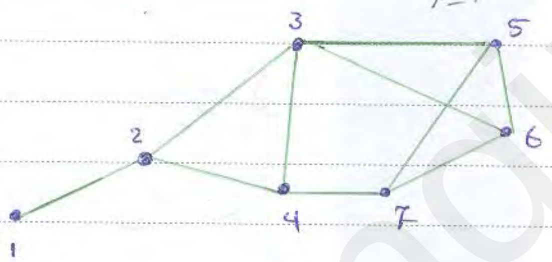
« در ضمن این مثال رسم گراف ساده ممکن نیست »

گشت یا راه ـ پیرو یا گذر ـ مسیر ـ مدار ـ دور

رأس تکراری

نه رأس تکراری نه یال

یال تکراری نداشته باشیم



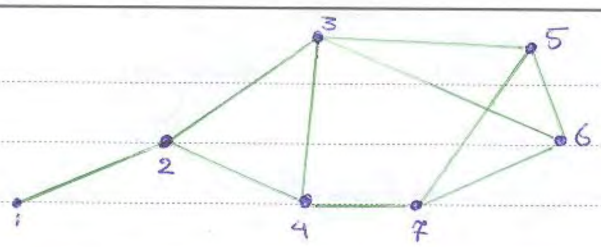
گشت یا راه :

عبور کردن از روی یال‌ها بدون هیچ شرطی یعنی می‌توان از یک رأس یا یال چند بار عبور کرد یعنی می‌توانند تکراری باشند

پیرو ـ گذر : یک تعداد رأس و یال طی می‌شود ولی شرط آن این است که یال تکراری نداشته باشیم اما می‌تواند رأس تکراری داشته باشد (یال نباید تکراری باشد)

مسیر : نباید رأس تکراری داشته باشیم چون رأس تکراری ندارد خود به خود یال تکراری هم ندارد

مثال ۱:



مسیر: 3-2-4-7-5

نکته: یک مسیر خود یک گذر هم هست.

مسیر ⟸ گذر «که البته برعکس آن درست نیست»

مدار: مدار برمی‌گردد به گذر یا پیوند

نقطهٔ شروع و پایان یکی است.

گذری است که نقطهٔ شروع و پایان یکی است.

دور: برمی‌گردد به مسیر

مسیری است که نقطهٔ شروع و پایان یکی است.

نکته: در دور فقط نقاط شروع و پایان تکراری هستند ولی بین راه تکراری وجود ندارد.

گراف همبند:

از نظر شکلی: گرافی همبند است که یکتکه باشد

Subject: (5)
Year. Month. Date. ( )

جلسه ششم: نظریه گراف

از نظر ریاضی: گرافی همبند است که بین هر دو راس آن حتما یک مسیر وجود داشته باشد

چرا مسیر؟ چون هم مسیر تکراری باشد یا نباشد

نکته: در هر گشتی می توانیم تکه های تکراری را حذف کنیم که در آن صورت می شود مسیر

نکته: در واقع در گراف همبند می توان گفت بین هر دو راس آن یک مسیر وجود دارد.

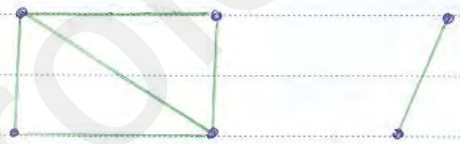
نکته: هر تکه ای از یک گراف را می گوییم ⟵ مؤلفه

نکته مهم: تعداد مؤلفه های همبندی را با اُمگا G نمایش می دهیم.

$\omega(G) =$ تعداد مؤلفه های همبندی

نکته: اگر گراف همبند باشد یک تکه مؤلفه همبندی آن $\omega(G)$ می شود یک 1

مثال:



$\omega(G) = 2$

چون دو تکه است و همبند هم نیست

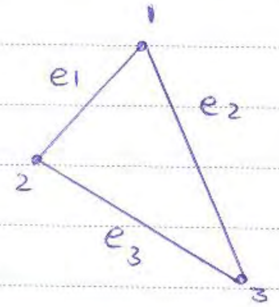
گراف یالی یا خطی: یعنی یک گراف G که به ما می دهند با استفاده از آن یک گراف جدید بسازیم:

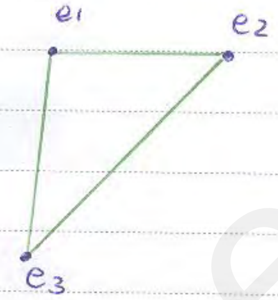
$G \longrightarrow L(G)$

line Graph

نکته: بهتر است یال‌های گراف را نامگذاری کنیم.

مثال ۱:





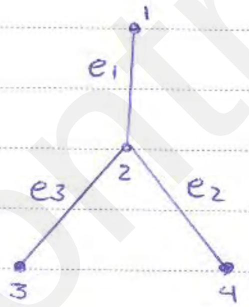
گراف ساده G ⟿ $L(G)$ گراف خطی یالی

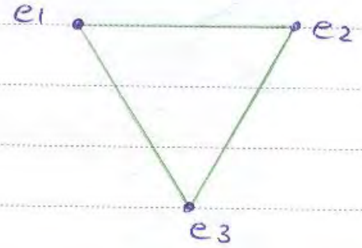
نکته: یال‌های گراف قبلی را به جای رأس‌های گراف جدید قرار می‌دهیم.

نکته: حال برای رسم یال‌های شکل جدید به این صورت عمل می‌کنیم:

اگر ابتدا یال‌های e_1 و e_2 در شکل قدیم دارای رأس مشترک باشند بین در گراف جدید نیز رأس‌های e_1 و e_2 به هم متصل می‌شوند.

مثال ۲:





G گراف ساده

$L(G)$ گراف خطی یالی

جلسه هفتم:

نظریه گراف

نکته: یالهای گراف اصلی را رأس قرار می‌دهیم و اگر یالها همدیگر را در یک رأس قطع کرده باشند آنها را به هم متصل می‌کنیم

نکات مهم:

اگر گراف G همبند باشد ⟸ line Graph آن نیز همبند است.

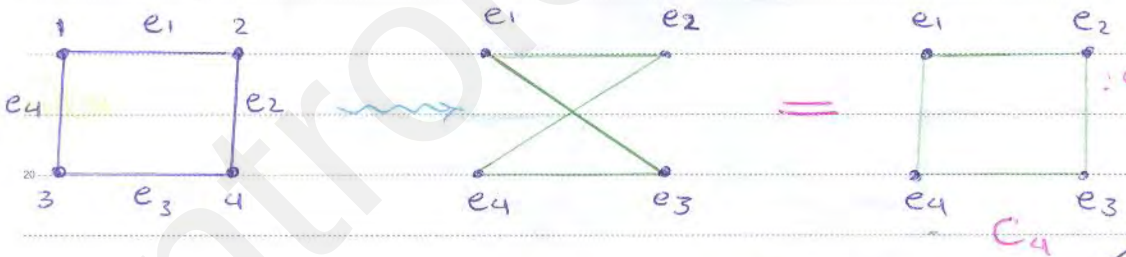
اگر گراف G همبند نباشد ⟸ line Graph آن نیز همبند نمی‌شود

G همبند ⟸ L(G) همبند

G چندتکه ⟸ L(G) چندتکه

مثال:

مثال:



گراف دوری:

نکته: در واقع یک ریختی تعمیمی از تساوی است.

نکته: برای بعضی از شکلها به این صورت است که گراف خطی یالهای آن با خود گراف هم شکل در می‌آید.

Subject: 8
Year. Month. Date. ( )

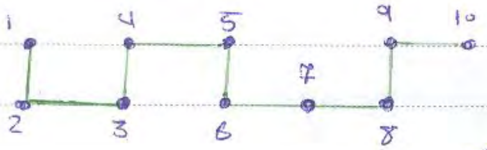
گراف مسیر: P_n

مثال ۱:

۵ رأس و چهار یال دارد

وقتی P می‌آید یعنی گراف مسیر است

مثال 2:



نکته: اگر در مثال 2، دو رأس 3 و 6 را به هم متصل کنیم دیگر گراف مسیر نداریم

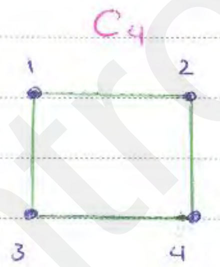
نکته: در گراف مسیر همه رأس‌ها از درجه 2 هستند به جز رأس ابتدا و انتها و هر رأسی فقط با رأس کناری خود مجاور است.

گراف دور: C_n

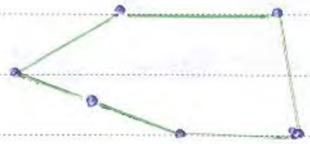
گراف دور را با C_n نمایش می‌دهیم.

شکل مربع می‌شود C_4 و شکل مثلث می‌شود C_3 چون دور هستند

مثال:



مثال: C_6 چون گراف دور است



و 6 رأس دارد.

Subject: (9)
Year. Month. Date. ( )

جلسه سوم :

تعریف گراف

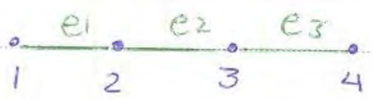
نکته: اگر گراف G ، P_n یعنی گراف مسیر باشد در آن صورت گراف یالی آن نیز یک گراف مسیر است.

$G=P_n \Leftrightarrow L(G)=P_{n-1}$

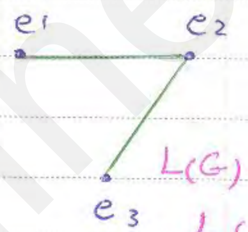
نکته: اگر گراف G ، C_n باشد یعنی گراف دور باشد در آن صورت گراف یالی یا خطی آن نیز گراف دور است.

$G=C_n \Leftrightarrow L(G)=C_n$

مثال:



P_4 گراف مسیر
G



گراف خطی $L(G)$

$L(P_4)=P_3$

طبق فرمول $L(P_n)=P_{n-1}$

گراف ستاره ای: یکی از گراف های خاص است.

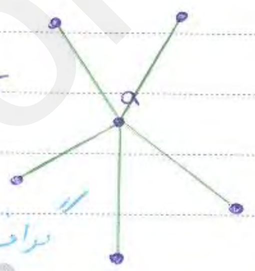
نکته: به صورت کلی گراف ستاره ای به صورت زیر نوشته می شود: $K_{1,n}$

گراف ستاره ای

$K_{1,3}$

مثال:

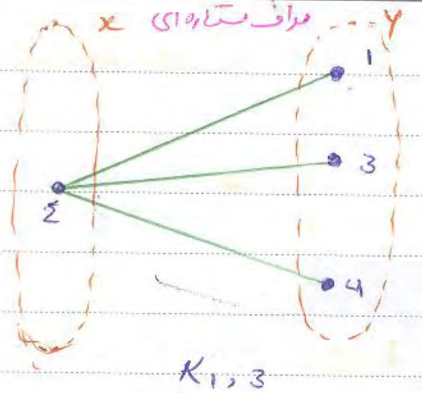
$K_{1,5}$



گراف ستاره ای

PAPCO

گراف ستاره‌ای



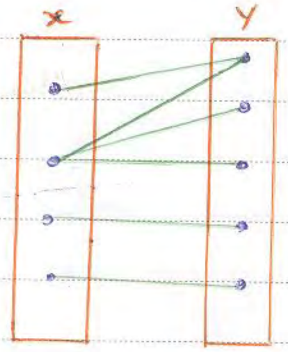
گراف دوبخشی

* گراف دوبخشی کامل:

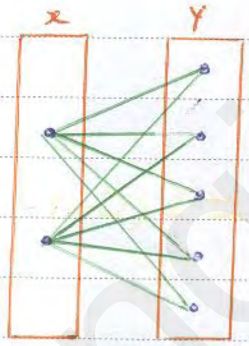
$K_{1,3}$

تعداد رأس‌های بخش x

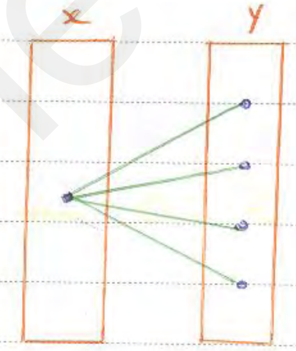
تعداد رأس‌های بخش Y



گراف دوبخشی



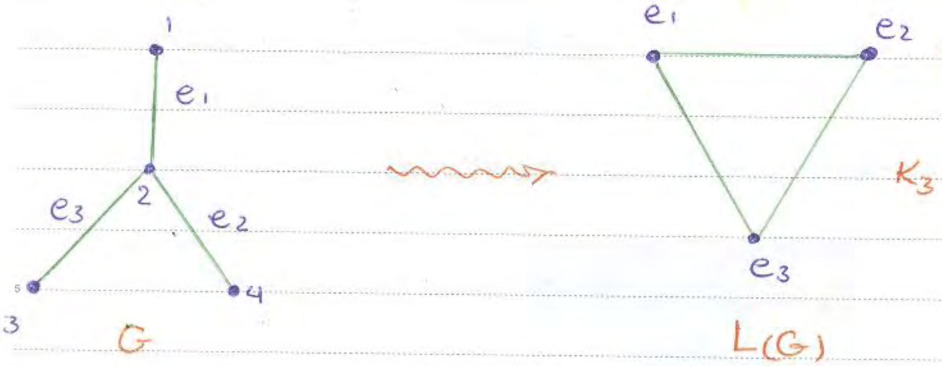
* گراف دوبخشی کامل



گراف ستاره‌ای

جلسه ششم : نظریه گراف

گراف خطی یا یالی



$G = K_{1,n} \Longrightarrow L(G) = K_n$

نکته: ممکن دو گراف اولیه شبیه هم نباشند ولی گراف خطی آنها شبیه هم باشند

$G_1 \simeq G_2 \Longrightarrow L(G_1) \simeq L(G_2)$

نکته: اگر دو گراف با هم یک ریخت باشند حتما گراف خطی آنها نیز با هم یک ریخت است.

تعریف دو گراف یک ریخت و در واقع شرایط لازم برای یک ریختی:

تعریف یک ریختی:

$f: V_1 \xrightarrow[\text{پوشا}]{\text{یک به یک}\ 1-1} V_2$

$\{a,b\} \in E_1 \Longleftrightarrow \{f(a), f(b)\} \in E_2$

شرایط لازم برای یک ریختی:

① $|V_1| = |V_2|$

② $|E_1| = |E_2|$

③ باید از لحاظ دنباله درجه رئوس نیز به هم شبیه باشند

نکته: پس سه شرط لازم برای یک زنجیر داریم.

نکته: نمی توان از روی یک گراف خطی یک گراف را رسم کرد یا حداقل زدن گراف، گراف خطی به صورت مشکل است و این کار بسیار سختی است.

اعمال روی گراف ها:

تعریف اجتماع: در هم ادغام کنیم یا اجتماع بگیریم.

$G_1 = (V_1, E_1)$

$G_2 = (V_2, E_2)$

نکته: پس یک گراف جدید به دست می آید.

① $G_1 \cup G_2 = H$

$V_1 \cup V_2 = V$

$\rightsquigarrow H = (V, E)$

$E_1 \cup E_2 = E$

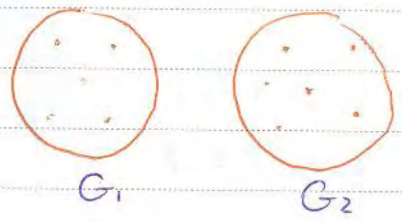
نکته: $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

نکته: اگر دو گرافی که می خواهیم با هم اجتماع کنیم ۲ تکه باشند و هیچ اشتراکی با هم نداشته باشند را با $G_1 + G_2$ نمایش می دهیم و همواره $G_1 + G_2$ یعنی یک گراف دو تکه

$G_1 \cup G_2 = H$

$\rightsquigarrow G_1 + G_2$

و اگر $V_1 \cap V_2 = \emptyset$



جلسه هشتم :

نظریه گراف :

اشتراک بین دو گراف :

(2) $G_1 = (V_1, E_1)$

$G_2 = (V_2, E_2)$

شرط: $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset \Longrightarrow G_1 \cap G_2 = H \Longrightarrow$ $V_1 \cap V_2 = V$

$E_1 \cap E_2 = E$

نکته : اگر دو گراف G_1 و G_2 با هم اشتراک داشته باشند می توانیم برای آن اشتراک تعریف کنیم

اگر اشتراکی نداشته باشند نمی توانیم اشتراکی تعریف کنیم .

پیوند دو گراف :

(3) $G_1 = (V_1, E_1)$

علامت پیوند دو گراف « $\vee$ »

$G_2 = (V_2, E_2)$

نکته : در پیوند دو گراف ، اگر دو گراف رأس مشترک داشته باشند برای آن دو گراف پیوند تعریف نمی کنیم ولی اگر رأس مشترک نداشته باشند برای دو گراف پیوند تعریف می کنیم .

شرط پیوند دو گراف $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ رئوس G_1 و G_2 از هم مجزا باشند

$G_1 \vee G_2 = H$

$V = V_1 \cup V_2$

$E = E_1 \cup E_2 \cup \{$ هر رأس G_1 به رأس G_2 وصل بود $\}$

26 $H = (V, E)$

(14)

Subject: جلسه چهاردهم

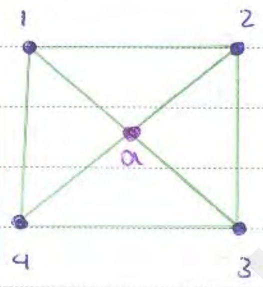
Year. Month. Date. ( )

مثال:

$G_1 = K_1$

$G_2 = C_4$ $\Longrightarrow$ $G_1 \vee G_2 = H$

$V = V_1 \cup V_2$



$G_1 = K_1$ $\quad \bullet a$

$G_2 = C_4$

اشتراک دو گراف:

$G_1 = (V_1, E_1)$

$G_2 = (V_2, E_2)$ $\rightsquigarrow$ $H = (V', E')$

① $G_1 \cap G_2 = H$

$V' = V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$

$E' = E_1 \cap E_2$

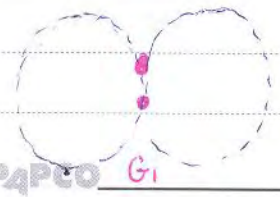
اجتماع دو گراف:

② $G_1 \cup G_2 = H$

$V' = V_1 \cup V_2$

$E' = E_1 \cup E_2$

نشان می‌دهد این دوتا هیچ اشتراکی با هم ندارند



$\left.\begin{array}{l} G_1 \cup G_2 = H \\ G_1 \cap G_2 = \emptyset \end{array}\right\}$ $G_1 \oplus G_2$

$G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$

جلسه چهارم :

نظریه گراف :

③ پیوند $H = G_1 \vee G_2$ «۷» علامت «و» منطقی

در این حالت G_1 و G_2 دو گراف مجزا هستند یعنی :

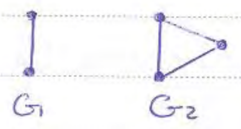
$V_1 \cap V_2 = \varnothing$

رأس

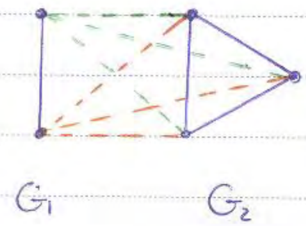
$V' = V_1 \cup V_2$

مثال: هر رأس V_1 را به هر رأس V_2 متصل می کنیم.

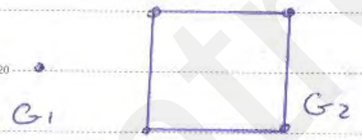
مثال: مثالی برای عمل پیوند

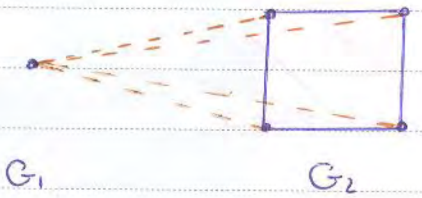


حل:



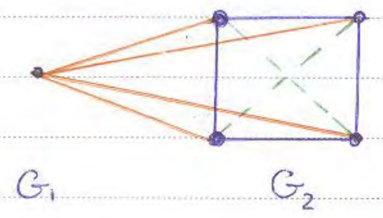
نکته: در این دو گراف بعد از عمل پیوند یک گراف کامل داریم ولی اینگونه مثال ها استثنا هستند و همیشه این اتفاق نمی افتد مثل، مثال زیر که با عمل پیوند بین دو گراف، گراف به دست آمده گراف کامل نیست.





در این شکل عمل پیوند بین دو گراف G_1 و G_2 انجام شده است ولی در آخر حالت گراف کامل نداریم اگر بخواهیم گراف کاملی داشته باشیم باید دو قطر مربع نیز به هم متصل شوند به صورتی که

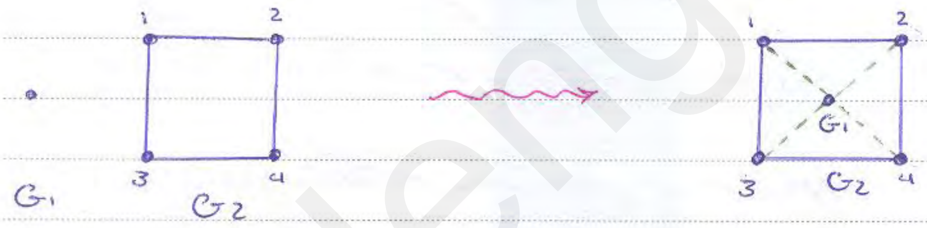
نشان داده شده است.



گراف چرخ:

گراف چرخ که با W نشان می‌دهیم چون ۴ رأس دارد می‌نویسیم W_4

مثال‌ می‌توانند گراف چرخ باشند البته نشانگر دیگر است نه اندیس W با تعداد رأس‌های گراف مشخص می‌شود.



④ ضرب دکارتی دو گراف

علامت ضرب □ همان حاصل ضرب دکارتی است

$H = G_1 \overset{\square}{\times} G_2$

نظریه گراف : جلسه چهارم :

زوج مرتب

مؤلفهٔ اول از گراف اول و مؤلفهٔ دوم از گراف دوم می آید

$V' = V_1 \times V_2$

زوج مرتب

$(u_1, v_1) \in V'$ برای گراف G_1 $\in V_1$

توضیح بالا

$(u_2, v_2) \in V'$ برای گراف G_2 $\in V_2$

$\{(u_1,v_1), (u_2,v_2)\} \in E' \Leftrightarrow$

یعنی در گراف G_2 باهم یال داشته باشند

$u_1 = u_2 , \{v_1, v_2\} \in E_2$

$v_1 = v_2 , \{u_1, u_2\} \in E_1$

یعنی در گراف G_1 باهم یال داشته باشند

«باهم یال دارند»

نکته: ممکن است مؤلفه های اول باهم برابر باشند و مؤلفه های دوم باهم مجاور باشند.

نکته: در این صورت مؤلفه هایی که به صورت زوج مرتب بودند می توانیم درهم ضرب کنیم

مثال:

$G_1 = K_2$

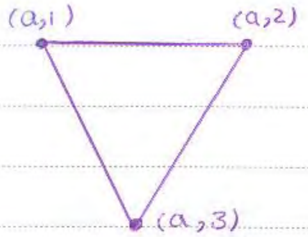
$G_1 \times G_2 = ?$

$G_2 = K_3$

رأسهای گراف که می‌خواهیم:

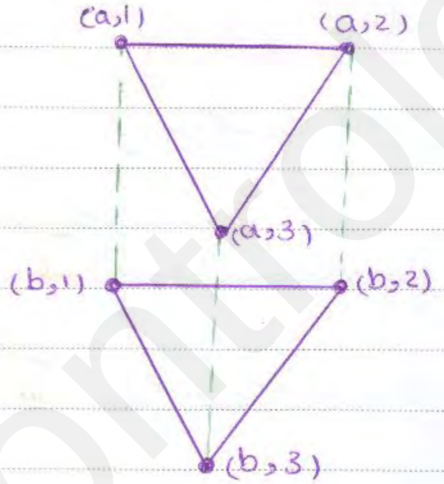
$$V' = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$$

نکته: اولی دو رأس و دومی سه رأس دارد، پس حاصلضرب دکارتی آنها 6 رأس دارد.



مؤلفه‌های اول با هم برابر باشند و مؤلفه‌های دوم آنها با هم متفاوت باشند

نکته: رأسهای 1 و 2 با هم قبلا متصل بودند پس حالا نیز در این شکل جدید به هم متصل می‌شوند رأسهای 2 و 3 نیز به هم متصل بودند پس حالا نیز به هم متصل می‌شوند



نکته: حاصلضرب دکارتی همانند ضرب معمولی خاصیت جابه‌جایی هم دارد.

نکته: می‌تواند بین این دو شکل نیز حالت یک زنجیر به وجود بیاید.

نکته: دو تا مثلث می‌کشیم چون گراف G_1 دو تا رأس دارد و سه خط می‌کشیم چون گراف G_2 دارای 3 رأس است

جلسه چهارم :

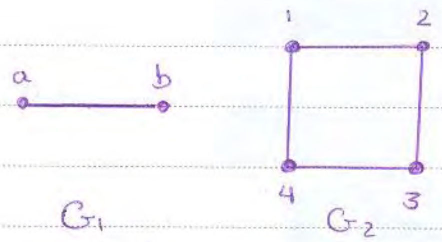
نظریه گراف

نکته : به تعداد رأس‌های گراف G_1 گراف G_2 را قرار می‌دهیم و بعد به تعداد رأس‌های گراف G_2 گراف G_1 را رسم می‌کنیم.

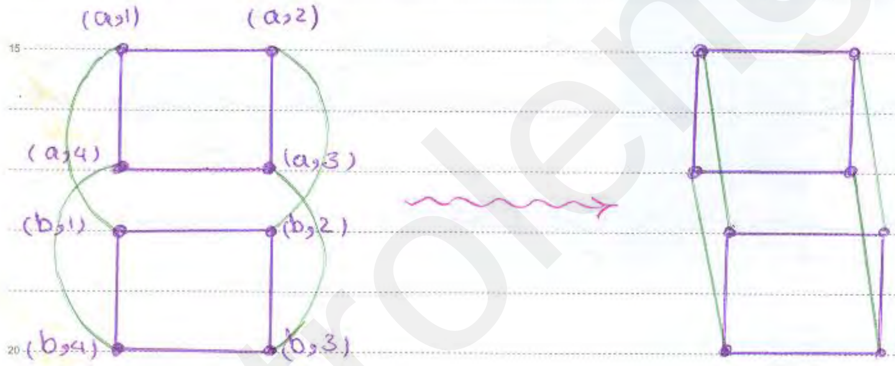
مثال :

$G_1 = K_2$

$G_2 = C_4$



نکته : به تعداد رأس‌های گراف G_1 به عدد از گراف G_2 را رسم می‌کنیم یعنی 2 عدد گراف C_4 و به تعداد رأس‌های گراف G_2 گراف G_1 را رسم می‌کنیم یعنی 4 عدد از گراف K_2 را رسم می‌کنیم.



می‌توانیم به این صورت هم رسمش کنیم

⑤ ترکیب لغت‌نامه‌ای

« حاصلضرب لغت‌نامه‌ای »

$G_1 = (V_1, E_1)$ $\quad$ $G_2 = (V_2, E_2)$

$G_2 = G_1[G_2]$ $\quad$ $H = (V', E')$

حاصلضرب لغت‌نامه‌ای را به این صورت نمایش می‌دهیم

در اینجا نیز v' از حاصلضرب دکارتی v_1 و v_2 به دست می‌آید $v' = v_1 \times v_2$

$$\{(u_1, v_1), (u_2, v_2)\} \in E' \iff \begin{cases} \{u_1, u_2\} \in E_1 \\ u_1 = u_2 \;,\; (v_1, v_2) \in E_2 \end{cases}$$

نکته: در این حالت اگر مؤلفه‌های اول به هم وصل باشند دیگر نیازی به نگاه کردن مؤلفه‌های دوم نیست ولی اگر مؤلفه‌های اول با هم برابر باشند حال مؤلفه‌های دوم را بررسی می‌کنیم که آیا مجاورند یا با هم برابرند و به همین صورت پیش می‌رویم.

نکته: اگر در ترتیب لغت نامه‌ای اگر جای دو گراف G_1 و G_2 با هم عوض شود دیگر جواب قبلی را به ما نمی‌دهد و اشتباه است در این ضرب خاصیت جابه‌جایی وجود ندارد یعنی:

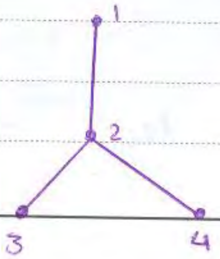
$$G_1[G_2] \neq G_2[G_1]$$

مثال:

$G_1 = K_2$

$G_2 = K_{1,3}$

گراف ستاره‌ای



Subject:
Year. Month. Date. ( )

نظریه گراف: مطالعه جامع:

$G_1[G_2] = ?$ می‌خواهیم: G_1 ترکیب G_2

$G_2[G_1] = ?$ G_2 ترکیب G_1

مثال ۱: $G_1[G_2] = ?$

حل ۱:

(a,1) → (b,1), (b,2), (b,3), (b,4), (a,2)

(a,2) → (b,1), (b,2), (b,3), (b,4), (a,3), (a,4), (a,1)

(a,3) → (b,1), (b,2), (b,3), (b,4), (a,2)

(a,4) → (b,1), (b,2), (b,3), (b,4), (a,2)

(b,1) → (a,1), (a,2), (a,3), (a,4), (b,2)

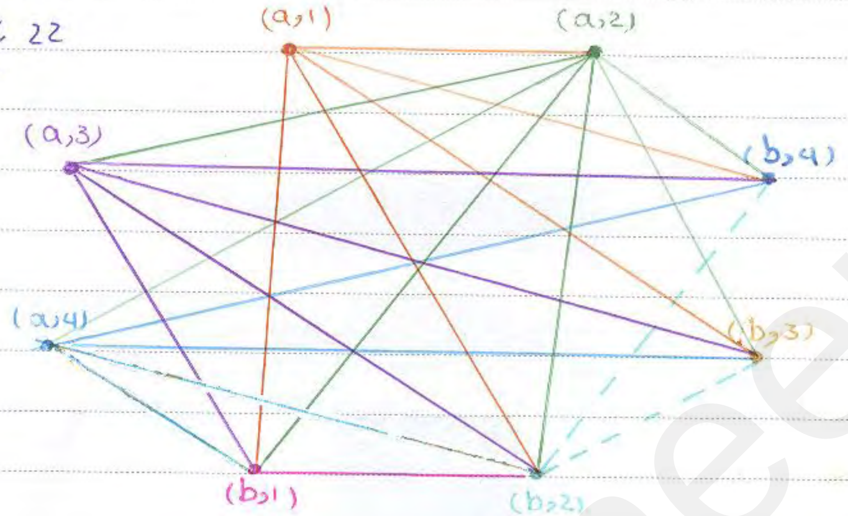
(b,2) → (a,1), (a,2), (a,3), (a,4), (b,1), (b,3), (b,4)

(b,3) → (a,1), (a,2), (a,3), (a,4), (b,2)

(b,4) → (a,1), (a,2), (a,3), (a,4), (b,2)

8 رأس

22 یال



⑥ ضرب تانسوری یا کرونکر

$H = G_1 \otimes G_2$

علامت ضرب تانسوری برابر این صورت است $\otimes$

$V' = V_1 \times V_2$

$\{(u_1, v_1), (u_2, v_2)\} \in E' \iff (u_1, u_2) \in E_1$ "و" $(v_1, v_2) \in E_2$

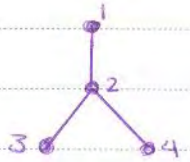
نکته: این شرط به این صورت است که: وقتی بین دو رأس یالی متصل کنیم که دو تا اتفاق رو با هم و هم‌زمان رخ بدهد پس در این حالت تعداد یال‌ها از تعریف قبلی در ترتیب لغت‌نامه‌ای" خیلی کمتر است.

نظریه گراف :

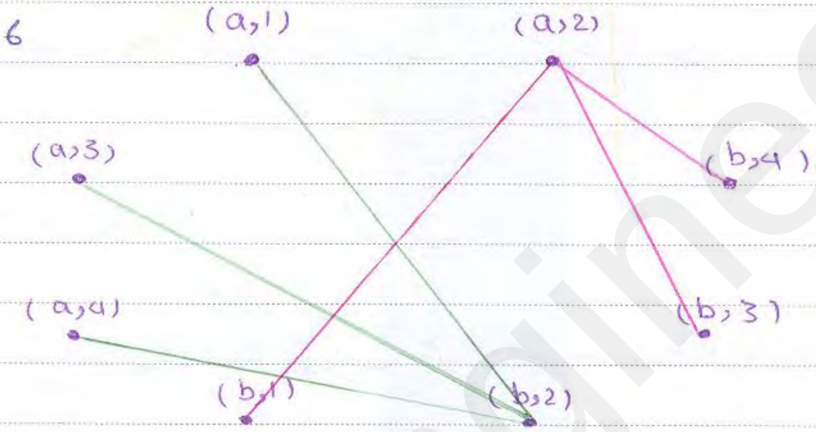
جلسه چهارم :

مثال :

$G_1 = K_2$ 

$G_2 = K_{1,3}$ 

8 راس
6 یال



نکته : در این روش نیز خاصیت جابه‌جایی وجود دارد.

⑦ حاصل‌ضرب نرمال یا قوی :

چون دارد آن را قوی می‌کند بین تعداد یال‌های بیشتری باید اضافه کنیم. $H = G_1 \circ G_2$

نماد حاصلضرب نرمال یا قوی «$\circ$»

$$\{(u_1,v_1),(u_2,v_2)\} \in E' \Longleftrightarrow$$

«الف» $u_1 = u_2$ و $(v_1,v_2) \in E_2$ — $G_1 \times G_2$

یا

«ب» $v_1 = v_2$ و $(u_1,u_2) \in E_1$

یا

«ج» $(u_1,u_2) \in E_1$ و $(v_1,v_2) \in E_2$

مؤلفه‌های اول با هم یال داشته باشند، مؤلفه‌های دوم هم با هم یال داشته باشند.

حاصلضرب تانسوری $G_1 \otimes G_2$

$$G_1 \circ G_2 = (G_1 \times G_2) \cup (G_1 \otimes G_2)$$

نکته: قسمت ج این ضرب از حاصلضرب تانسوری گرفته شده است.

نکته: قسمتهای الف و ب از حاصلضرب دکارتی گرفته شده است.

نکته: در واقع در حالت نرمال یا تری هم از ضرب دکارتی و هم از ضرب تانسوری استفاده می‌شود.

⑧ به توان رساندن: $G \rightsquigarrow G^K$ K به توان G رسیده است

نکته: فاصله بین دو رأس (a,b) در گراف G را به صورت زیر نمایش می‌دهیم $d_G(a,b)$

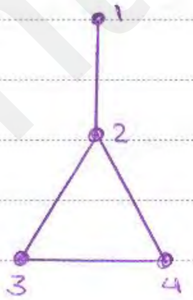
نکته: منظور از فاصله کوتاهترین مسیر است بین a و b

نکته: تمامی رئوس گراف G که دارای فاصله کمتر از K هستند به هم وصل می‌شوند G^K

نکته: به عبارت دیگر رأس a و b به هم وصل می‌شوند اگر و فقط اگر $d_G(a,b) \le K$

مثال:

G

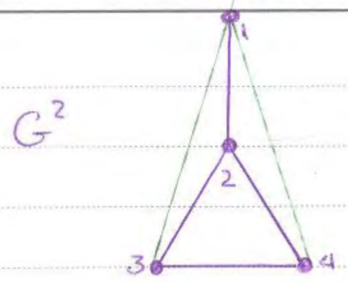


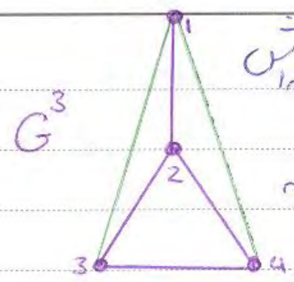
$G^2 = ?$ $G^3 = ?$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

جلسه چهارم:

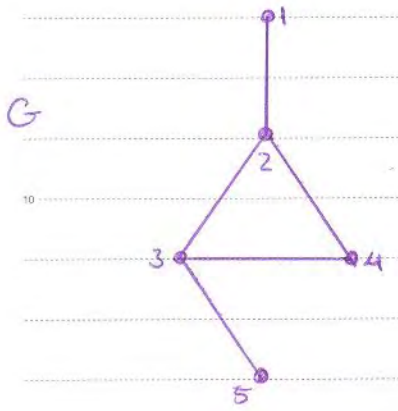
قطر و توان :

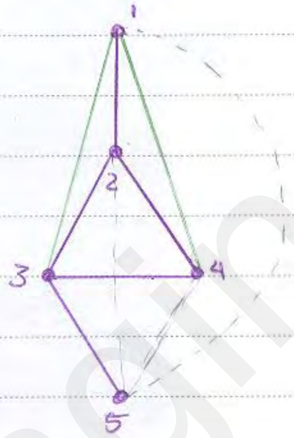




نکته : ۱ اصلاً رأسی وجود ندارد که فاصله‌اش سه باشد پس بالای سه شکل اضافه نمی‌شود.

مثال ۱:





$G_1 \circ G_2 = (G_1 \times G_2) \cup (G_1 \otimes G_2)$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$G_1 \times G_2 \cong G_2 \times G_1$ ضرب دکارتی

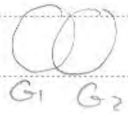
$G_1 \otimes G_2 \cong G_2 \otimes G_1$ ضرب تانسوری

$G_1 \circ G_2 \cong G_2 \circ G_1$ ضرب نرمال یا قوی

$G_1[G_2] \neq G_2[G_1]$ ترکیب لغت نامه ای

$n(G_1 \cup G_2) = n(G_1) + n(G_2) - n(G_1 \cap G_2)$ عملیات اجتماع :

$m(G_1 \cup G_2) = m(G_1) + m(G_2) - m(G_1 \cap G_2)$



$n(G_1 \cup G_2) = n(G_1) + n(G_2)$ عملیات اجتماع

$m(G_1 \cup G_2) = m(G_1) + m(G_2)$

$n(G_1 \vee G_2) = n(G_1) + n(G_2)$ عملیات جوین "V"

$m(G_1 \vee G_2) = m(G_1) + m(G_2) + n(G_1)\, n(G_2)$

$n(G_1 \times G_2) = n(G_1)\, n(G_2)$ حاصلضرب دکارتی :

$m(G_1 \times G_2) = n(G_1)\, m(G_2) + m(G_1)\, n(G_2)$

$n(G_1[G_2]) = n(G_2[G_1]) = n(G_1 \circ G_2) = n(G_1)\, n(G_2)$

$m(G_1[G_2]) = n(G_1)\, m(G_2) + n(G_2)^2\, m(G_1)$

$m(G_1 \circ G_2) = n(G_1)\, m(G_2) + m(G_1)\, n(G_2) + 2m(G_1)\, m(G_2)$

$m(G_1 \otimes G_2) = 2m(G_1)\, m(G_2)$ ضرب تانسوری :

PAPCO

نظریه گراف :

جلسه پنجم :

گرافهای جهت دار :

گراف جهت دار - گراف تورنمنت K_n^* :

گراف تورنمنت دارای مسیرهای همیلتونی جهت دار است.

مسیرهای همیلتونی : یعنی مسیری که از همه رأسها عبور کرده و رأس تکراری نیز نداشته باشیم

رأس ها : $v_1, v_2, \ldots, v_n$

فرض کنید $v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_5 \to v_n$ یک مسیر در گراف جهت دار باشد

در اینجا رأس v_4 وجود ندارد و ما می خواهیم رأس v_4 را در آن بگذاریم.

- حال تمام حالاتی که ممکن است v_4 با بقیه رأس هایعنی v_5 و v_3 یال داشته باشد را

بررسی می کنیم.

$(v_4, v_5) \in E$ یا $(v_5, v_4) \in E$

$(v_3, v_4) \in E$ یا $(v_4, v_3) \in E$

$v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_4 \to v_5 \to v_6 \cdots \to v_n$

$(v_4, v_6) \in E$ یا $(v_6, v_4) \in E$

$v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_5 \to v_4 \to v_6 \cdots \to v_n$

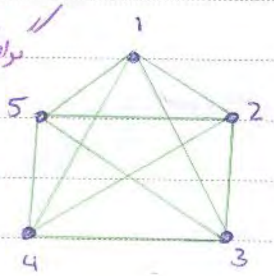
⋮

عدد همبندی:

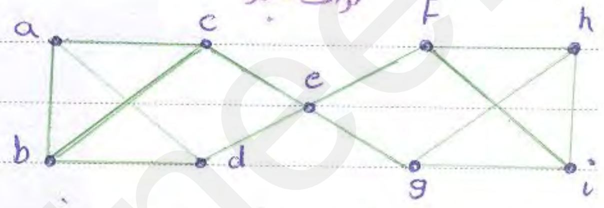
گراف همبند: گرافی است که یک تکه باشد و بتوان بین هر دو رأس آن یک مسیر یافت.

مثال ۱:

گراف همبند



گراف همبند

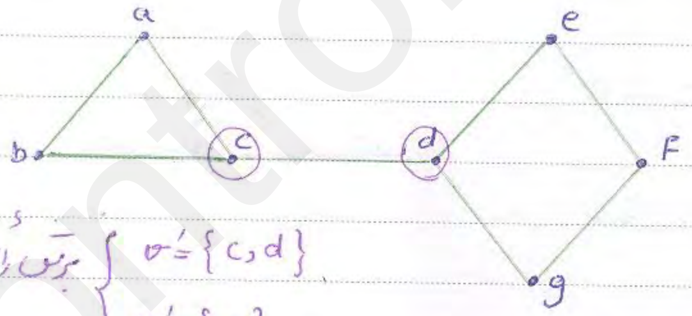


در این گراف هر رأسی را با یالهایش حذف کنیم گراف در همان حالت همبندی باقی می‌ماند.

رأس برشی $v'=\{e\}$

$k=1$

ولی در این گراف رأس e یک رأس حساس است و با حذف آن و یالهایش گراف به یک گراف ناهمبند تبدیل می‌شود.



در این گراف نیز دو رأس حساس داریم یعنی c و d که با حذف آنها گراف ناهمبند می‌شود.

برش رأسی:
- $v'=\{c,d\}$
- $v'=\{c\}$
- $v'=\{d\}$

$k=2$

جلسه نهم :

نظریه گراف

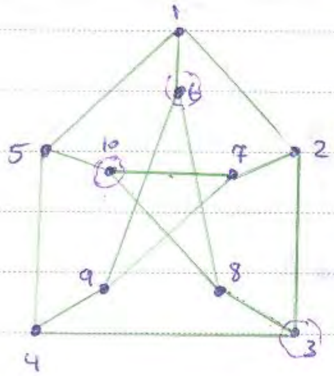
برش رأسی : مجموعه V' را برش رأسی می‌نامیم هرگاه حذف شدن رئوس V' گراف را ناهمبند کند.

$G=(V,E)$

$V' \in V$

مثال ۱: می‌خواهیم ببینیم در گراف پترسن برش رأسی وجود دارد؟

یعنی رأسی وجود دارد که با حذفش گراف ناهمبند شود؟



برش رأسی $V' = \{3, 6, 10\}$

$k = 3$

حذف رئوس $3, 6, 10$

این گراف ناهمبند است.

نکته: هرگاه با حذف فقط یک رأس از گراف، گراف ناهمبند تشکیل شود، آن رأس رأس برشی نامیده می‌شود.

نکته: ولی اگر با حذف چندین رأس از گراف، گراف ناهمبند تشکیل شود برش رأسی نامیده می‌شود.

عدد همبندی رأسی

تعداد اعضای کوچکترین مجموعه برش رأسی را عدد همبندی رأسی می‌نامیم و با $k(G)$ کاپا نمایش می‌دهیم.

نکته: در گرافهای کامل یک قرارداد داریم که کاپای $k(G)$ آنها یکی کمتر از تعداد رئوس است یعنی

$k(K_n) = n-1$

نکته: برای گرافهای ناهمبند $K=0$

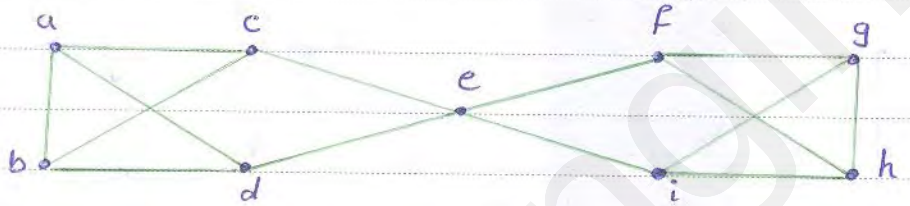
G

$K(G)=0$

نکته: تمام اعمال فوق را می‌توان بر روی یالها انجام داد.

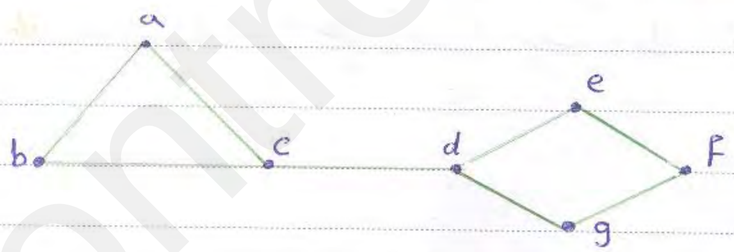
برش یالی:

یال هایی که حذف شدن آنها گراف را ناهمبند می‌کند $E'\subseteq E$



برش یالی $E'=\{\{e,c\},\{e,d\}\}$ $\lambda=2$

$E'=\{\{e,f\},\{e,i\}\}$



$E'=\{\{c,d\}\}$ $\lambda=1$

درخت:

« درخت گراف همبندی است که دور نداشته باشد »

جلسه پنجم :

نظریه گراف :

در گراف پترسن $\longrightarrow E' = \{\{1,6\},\{1,5\},\{1,2\}\}$ $\quad \lambda = 3$

نکته: در گراف های کامل نیز مانند برش رأسی ، برای برش یال آن نیاز به حذف $n-1$ یال داریم (K_n) اگر تعداد یالهای حذفی برای ناهمبندی 1 باشد می شود یال برشی

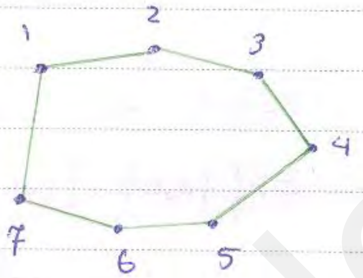
$\lambda = k'(K_n) = n-1$

عدد همبندی یالی : $\lambda(G) = k'(G)$

« تعداد یالهای حذف شده برای ناهمبندی »

مثال ۱:

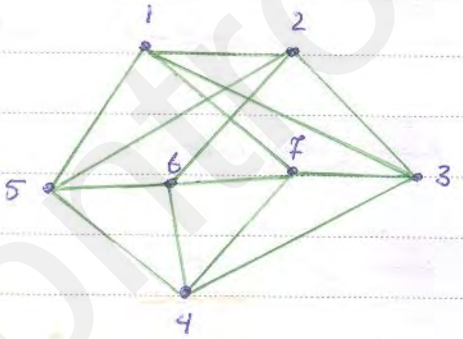
G_1



$V' = \{1,4\}$ $\quad E' = \{\{1,2\},\{4,5\}\}$

$k = 2$ $\quad k' = 2 = \lambda$

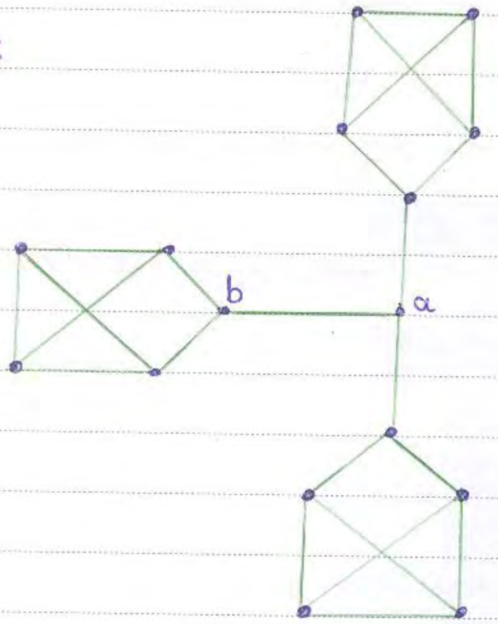
G_2



$k = ?$

$k' = ?$

G_3:



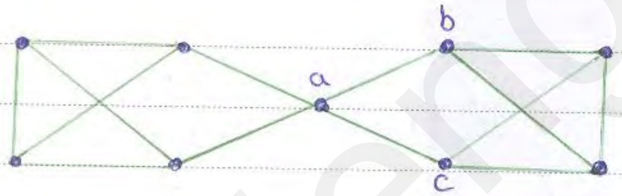
$v' = \{a\}$ رأس برشی

$k=1$

$E' = \{\{a,b\}\}$ یال برشی

$k'=1$

G_4:



$v' = \{a\}$ $k=1$ رأس برشی

$E' = \{\{a,b\},\{a,c\}\}$ $k'=2$

برش یالی

گراف r-همبند رأسی $\xLeftarrow{\text{یعنی}}$ $k(G) \geq r$ {با حذف شدن r-1 رأس، گراف همبند باقی می‌ماند}

1-همبند رأسی $\xLeftarrow{\text{یعنی}}$ $k(G) \geq 1$

2-همبند رأسی $\xLeftarrow{\text{یعنی}}$ $k(G) \geq 2$

{یعنی با حذف شدن 1 رأس، گراف همبند باقی می‌ماند}

گراف r-همبند یالی $\xLeftarrow{\text{یعنی}}$ $\lambda(G) = k'(G) \geq r$ {با حذف شدن r-1 یال گراف همبند باقی می‌ماند}

$k' , k = \lambda$

کاپا و کاپا پریم:

بزرگترین تعداد رأس هایی که گراف را همبند می کند

$k \rightarrow$ عدد همبندی رأسی

$k' \rightarrow$ عدد همبندی یالی

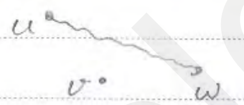
$k(G) \geq K \Longleftrightarrow$ همبند-K

$k(G) \geq 2 \Longleftrightarrow$ همبند-2

$\equiv$ با حذف شدن یک رأس گراف همبند باقی می ماند

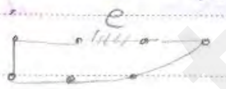
رأس برشی:

1- یک رأس v، رأس برشی است اگر و فقط اگر رأس v روی هر مسیری از رأس u به رأس w دلخواه u و w قرار داشته باشد.



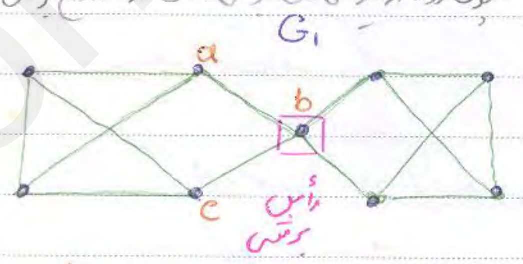
اگر رأس v را حذف کنیم مسیری نمی ماند پس یک رأس برشی است. — بسته

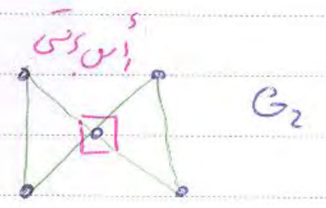
2- یال $e=xy$ یال برشی است اگر و فقط اگر یال e به هیچ دوری تعلق نداشته باشد



اگر یال e را حذف کنیم دوری می شود مسیر یال برشی نیست.

چون دو تا از یال های آن برشی است از اصطلاح برش یالی استفاده می کنیم





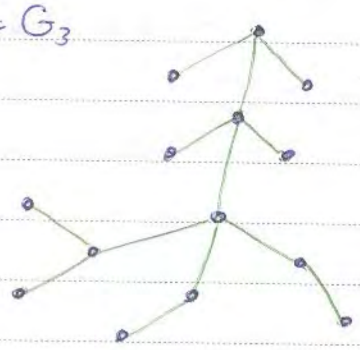
برش یالی دارد (دو تا یال باید حذف شود ab و bc)

یال برشی ندارد

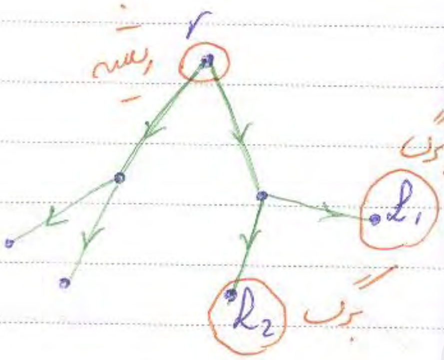
برش یالی دارد (شامل دو تا یال)

(2)
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$T = G_3$



درخت: گراف همبندی که دور نداشته باشد



ریشه:
رأسی که ورودی ندارد و ابتدای درخت است به آن می‌گویند ریشه درخت

برگ:
به آن گره‌ها که درجه خروجی‌شان صفر است برگ گفته می‌شود
به رأسهایی که درجهٔ خروجی‌شان صفر است برگ گفته می‌شود

نکته: در درخت رأسهای درجه یک را می‌توانیم برگ [نامید]

نکته: برگها هیچگاه رأس برشی نمی‌شوند

نکته: رأسهای میانی درخت همیشه رأس برشی هستند

نکته: در درخت هر یالی را انتخاب کنیم، می‌توان آن یال را یال برشی نامید

نکته: گراف درخت، گرافی است که هر یال آن، یال برشی باشد

در گراف درخت، به جز برگها بقیهٔ رأسها می‌توانند برشی باشند

PAPCO

نظریه گراف :

جلسه ششم :

3 - گراف همبند G با حداقل سه رأس دارای حداقل دو رأس غیر برشی است .

4 - گراف ساده ملعبی G دارای رأس برشی است ، اگر و فقط اگر یال برشی داشته باشد

گراف 3 منتظم

در اصل ما در اینجا بیشتر دنبال k , $k'=\lambda$ هستیم .

نکته : همیشه در رجات k و $k'=\lambda$ یک است .

5 - در هر گراف G $\quad k(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$

$\lambda(G) = k'(G)$

نکته : کوچکترین درجه رأس در گراف $\delta(G)$

نکته : ممکن است در حالتهای خاص هر سه با هم مساوی باشند $k(G)=\lambda(G)=\delta(G)$

نکته : در گراف ساده ملعبی $k=k' \leq 3$

3-منتظم

گراف پترسن :

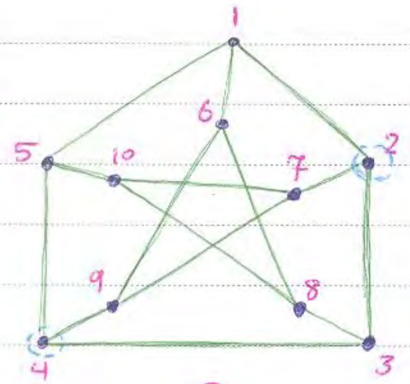
در گراف پترسن ، k , k' ؟

Subject:
Year. Month. Date. ( )

نکته: گراف پترسن یک گراف منتظم است،

پس k' و k با هم مساوی است و کمتر مساوی ۳ است

$$k(P)=k'(P)\le 3$$



«P»

جدایی ناپذیر است
رأس برشی ندارد

نکته: در گراف پترسن $k'=k=3$

k' و k دقیقاً برابر سه هستند

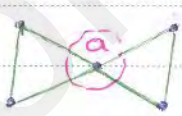
گراف جدایی ناپذیر:

گراف G را جدایی ناپذیر گوییم هرگاه همبند و فاقد رأس برشی باشد

نکته: اگر قرار باشد همبندی با یک رأس از بین نرود باید $k\geq 2$ باشد

نکته: زیرگراف ماکسیمالی از G را که فاقد رأس برشی باشد، بلوک می نامیم.

نکته: اگر در گرافی رأس برشی داشته باشیم نمی توانیم به آن گراف جدایی ناپذیر بگوییم.



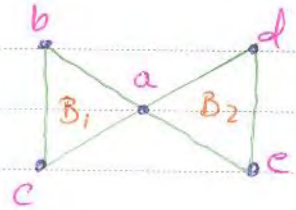
نکته: a رأس برشی است پس این گراف جدایی ناپذیر نیست

نکته: گراف پترسن خودش رأس برشی ندارد پس خودش یک بلوک است.

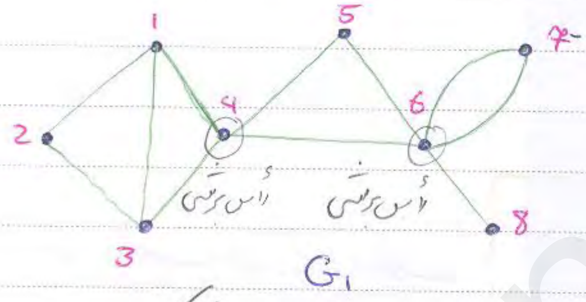
چون جدایی ناپذیر هم هست بنابراین هم دلیلی برای بلوک بودن گراف پترسن است.

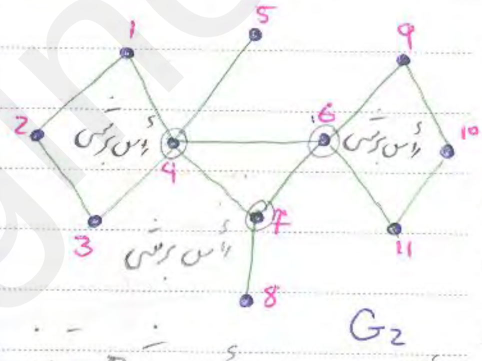
جلسه ششم:

نظریه گراف



دریک مثال اگر یک رأس آن را برداریم تبدیل به یک جدای شود و همبندی آن از بین می رود

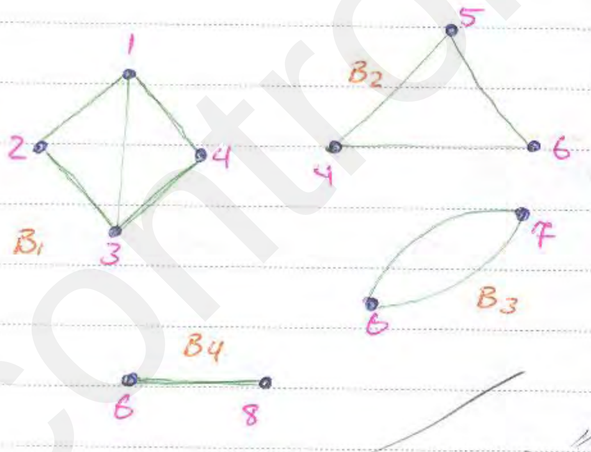


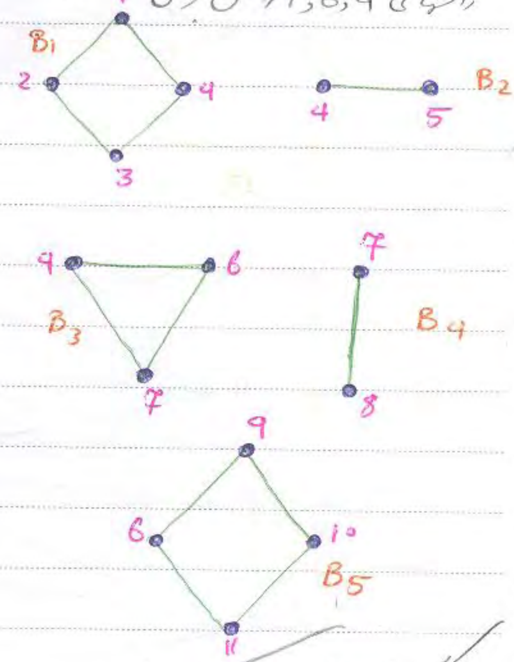


چون دو رأس برشی دارد دو تا بلوک مشخص

پس حالا برداریم تا بلوکهای آن را بدانیم

رأسهای 4، 6، 7 رأس برشی هستند





گراف G1، 4 بلوک دارد.

گراف G2، 5 بلوک دارد.

⑥

Subject:

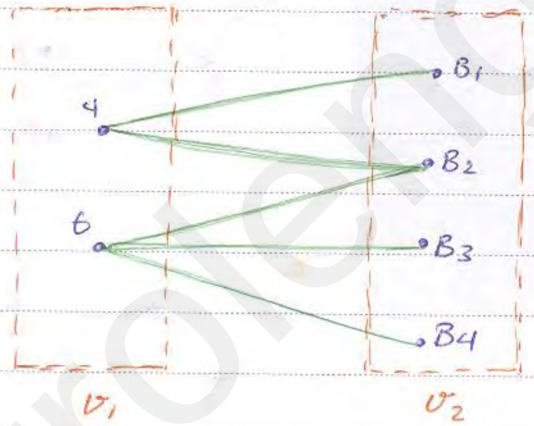
Year. Month. Date. ( )

نکته: رأسهایی که برشی نیستند به یک بلوک تعلق می‌گیرند ولی رأسهای برشی ممکن است به یک یا بیشتر بلوک تعلق بگیرند

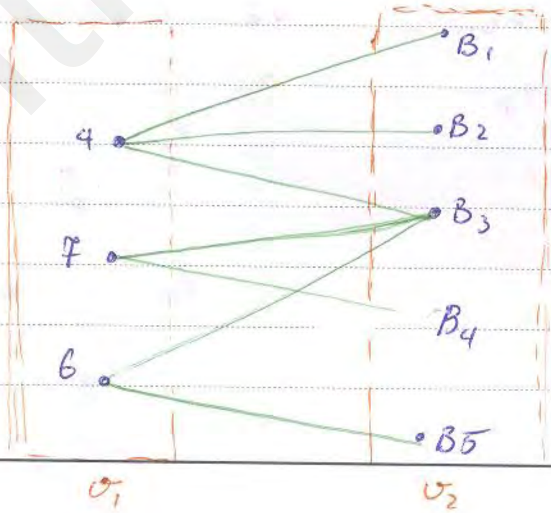
نکته: بعضی اوقات گرافهای دوبخشی خاصی داریم که شبیه به نمایش هستند در واقع ایجاد هستند

در یک گراف دوبخشی یک بخش را اختصاص می‌دهیم به بلوکها و یک بخش دیگر را اختصاص می‌دهیم به رأسهای برشی به صورت زیر:

برای تعریف یال بین این دو بخش به این صورت بررسی می‌کنیم که آیا رأس a به B تعلق دارد یا نه



درخت بلوک برشی برای گراف G_1 به دست آمد



درخت بلوک برشی برای گراف G_2 به دست آمد

گراف بلوک

(7)
Subject: جلسه ششم :
Year. Month. Date. ( )

نظریه گراف :

خاصیت گراف درخت :

1- $|E| = |V| - 1$ تعداد یال‌ها یکی کمتر از تعداد رأس‌ها است

2- بین هر دو رأس درخت یک مسیر یکتا وجود دارد.

چرا مسیر وجود دارد؟ چون درخت همبند است

مسیر یکتا وجود دارد چون اگر مسیر یکتا نبود دور به وجود می‌آمد

3- هر یال دلخواه به گراف درخت اضافه کنیم، دور ایجاد می‌شود.

اگر یک یال دلخواه اضافه کنیم باعث ایجاد دور می‌شود.

4- هر یال گراف درخت، یال برشی است

← حداقل 2 تا برگ داریم

5- در هر گراف درخت، حداقل دو رأس از درجه یک وجود دارد.

← حداقل 2 تا رأس غیر برشی داریم.

نکته: - دو رأس a و b را در نظر می‌گیریم.

- طولانی‌ترین مسیر بین a و b را در نظر می‌گیریم. b_1

اگر اصلاً برگ نداشته باشیم پس حتما در گراف دور خواهیم داشت.

زیرگراف فراگیر:

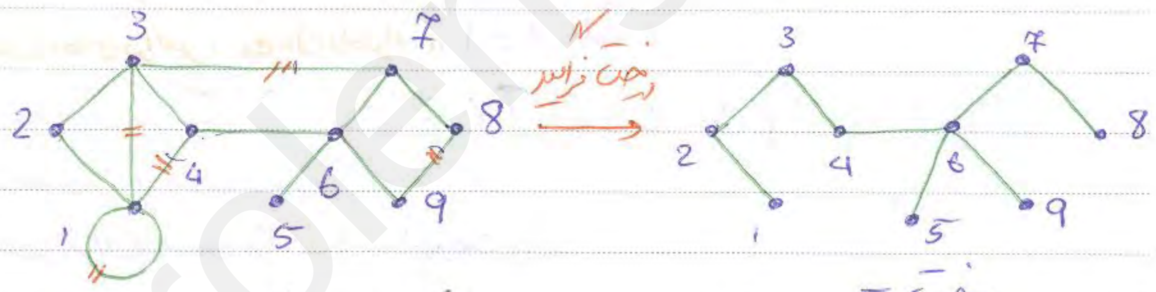
رأس‌ها دست نمی‌خورند یعنی تعداد رأس‌ها نباید زیاد یا کم بشود ولی تعداد یال‌ها لزوماً نباید بدون تغییر باشد یعنی تعداد یال‌ها می‌توانند کم یا زیاد بشود

$G=(V,E)$ $|E|=m$

$G_1=(V,E_1)$ $E_1 \subseteq E$ 2^m زیرگراف فراگیر

G ⟶ درخت فراگیر

نکته: در درخت فراگیر باید یال‌هایی که تشکیل دور می‌دهند را باید حذف کنیم چون درخت است.



درخت T

نکته مهم این است که اگر شکل دیگری هم در بیاوریم آن هم یک درخت فراگیر است البته به شرط اینکه آن درخت هم مثلاً راس مثال 5 یا ... حذف نشود مثل درختی که ما در ابتدا به دست آورده‌ایم

و در آن صورت می‌توانیم درخت‌های هم‌ریخت داریم

تعداد درخت‌های فراگیر یک گراف برحسب دار:

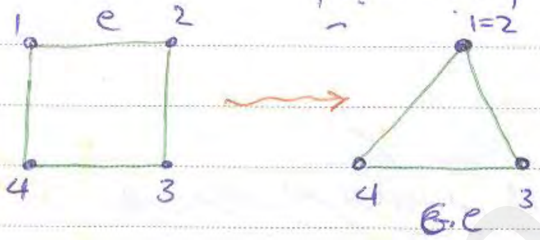
انقباض گراف: انقباض یک گراف نسبت به یک یال: $G.e$

گراف G نسبت به یال e منقبض شود: در واقع یال e را حذف کرده و دو رأس

«e یال دلخواه»

را به هم می‌چسبانیم که قبلاً بعد از این کار به جای دو رأس یک رأس داریم: و اسم آن

را مثلاً در این مثال می‌گذاریم $1=2$ یعنی هر دو اسم را به کار می‌بریم:



تعداد درخت‌های فراگیر: «e یال دلخواه» ($e \neq$ حلقه)

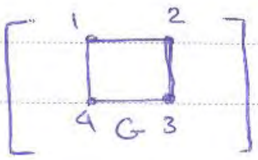
$\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G.e)$ در این فرمول به صورت بازگشتی تعداد درخت‌های فراگیر را حساب می‌کنیم

عمل منقبض کردن مسئله گراف را بسیار کوچک می‌کند

در عمل انقباض یال را که حذف می‌کنیم باید آن دو رأس متصل به یال حذف شده

دوباره باید به رأس‌های قبلی متصل شوند

سؤال: برای رسم درخت فراگیر و تعداد درخت‌های فراگیر به چه شکل برسیده می‌شود؟



$= ?$ 4

هر بار باید یک یال حذف شود

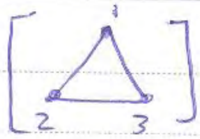
$\tau(G) = ?$

(3)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

جلسه هفتم:

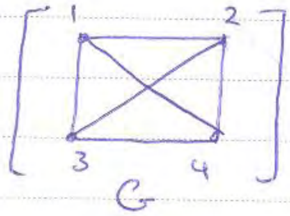
نظریه گراف:

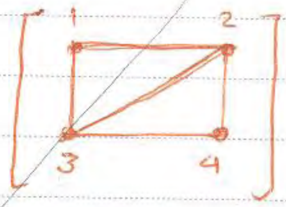


$= 3$

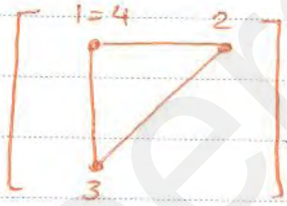
در این قسمت انقباض ایجاد شده

$[G] = ?$





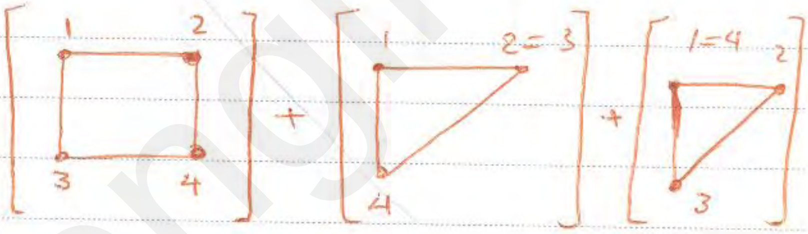
$+$



$e=\{1,4\}$

$\tau(G-e)$ $\tau(G.e)$

$e\{2,3\}$ $=$

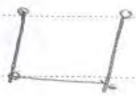


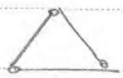
غلط

مهم

$= 4+3+3=10$

طوقه هیچ تأثیری در تعداد درخت‌های فراگیر ندارد و اگر گراف ما طوقه داشته باشد می‌توانیم از اول آن را حذف کنیم

چون خودش یک دور است پس ساری باطل می‌شود



چون در سه حالت مختلف می‌تواند درخت باشد پس برابر 3 قرار می‌دهیم یعنی هر بار اگر یک یال را حذف کنیم مثلاً به این صورت

3 تا درخت می‌توانیم داشته باشیم.

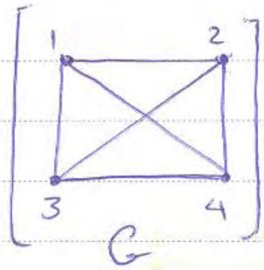
55

سه درخت داریم

(4)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

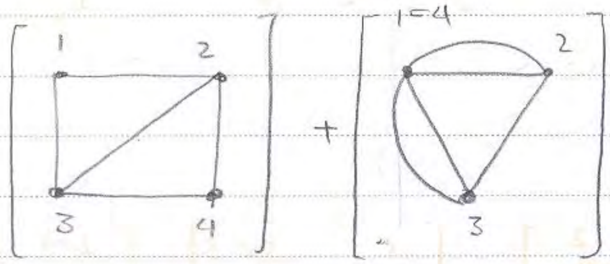
این مدل دارای روش به صورت بازگشتی است



$= 16$

G

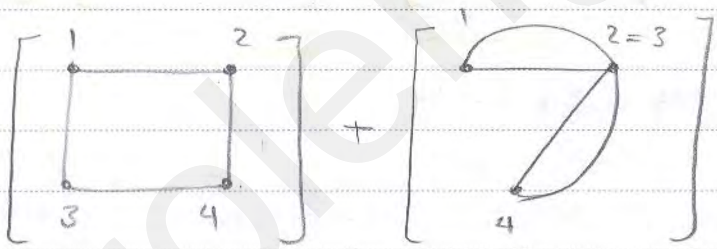
$e = \{1,4\}$



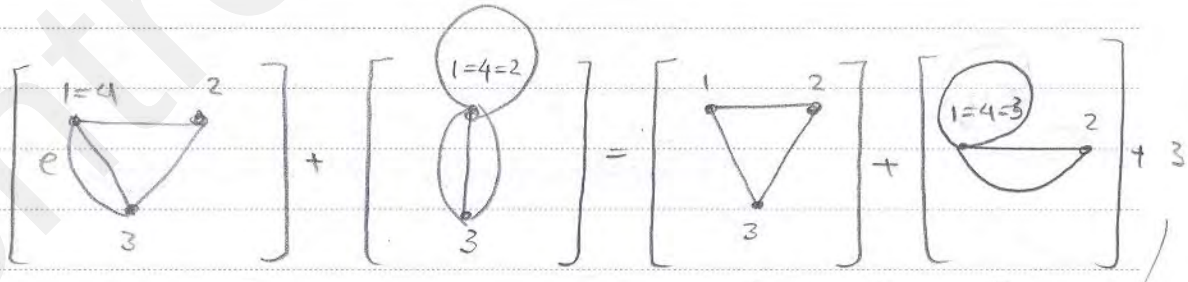
$G - e$ $G . e$

الف ب

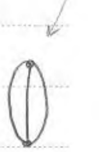
الف =



ب =



3 + 2



الف + ب = 8 + 8 = 16

هر دفعه دو یال حذف می شود و هر دفعه فقط یک نقطه داریم و در کل سه نقطه داریم.

PAPCO

جلسه هفتم :

نظریه گراف :

فرمول کیلی : $J(K_n)=n^{n-2}$

نکته : فرمول کیلی فقط برای گراف کامل کاربرد دارد و به دست می آید اگر گراف کامل نباشد نمی توانیم از این فرمول استفاده کنیم.

نکته : به هر درخت نشاندار می توان یک دنباله $(n-2)$ تایی نسبت داد و برعکس به هر دنباله $(n-2)$ تایی می توان یک درخت نشاندار n رأسی نسبت داد.

دنباله رشته ای از اعداد که می توانند تکرار هم داشته باشند

$X=\{1,2,3,\dots,n\}$

موقعی از جمع استفاده می کنیم که «یا» باشد

موقعی از ضرب استفاده می کنیم که «و» باشد.

$(a_1,a_2,a_3,\dots,a_{n-2})$ n^{n-2} : تعداد دنباله ها

مثال ۱:

درخت نشانه دار معمولا با اعداد نمایش می دهد

نکته: دنباله همواره از تعداد رأس های درخت 2 تا کمتر است مثلا در این مثال که 7 رأس داریم دنباله ما 5 تایی می شود

نکته : در مرحله اول در دنباله دنبال کوچکترین شماره می گردیم که دارای برگ شماره 2 است رأس همسایه آن را می نویسیم

$b_1=2$ در مثال مربوط به برگ 2 را حذف می کنیم پس داریم $a_1=3$ در واقع رأس متصل به برگ حذف شده را می نویسیم که همان رأس با node 3 است

حال برای به دست آوردن b_2 به این صورت عمل می‌کنیم که کوچکترین شماره برگ را دوباره انتخاب می‌کنیم

یعنی عدد ۹ یا برگ شماره چهار است یال مربوط با آن را حذف می‌کنیم رأس متصل به آن رأس با

Node شماره 3 است پس $a_2=3$ است و به همین صورت پیش می‌رویم تا درخت به صورت زیر

در بیاید  به این صورت دنباله ما 5 عضو خواهد داشت

b ها در دنباله ما ظاهر نمی‌شوند چون b ها همان برگ‌های درخت ما هستند که در دنباله

a ها را استفاده می‌کنیم.

$b_1=2$
$a_1=3$

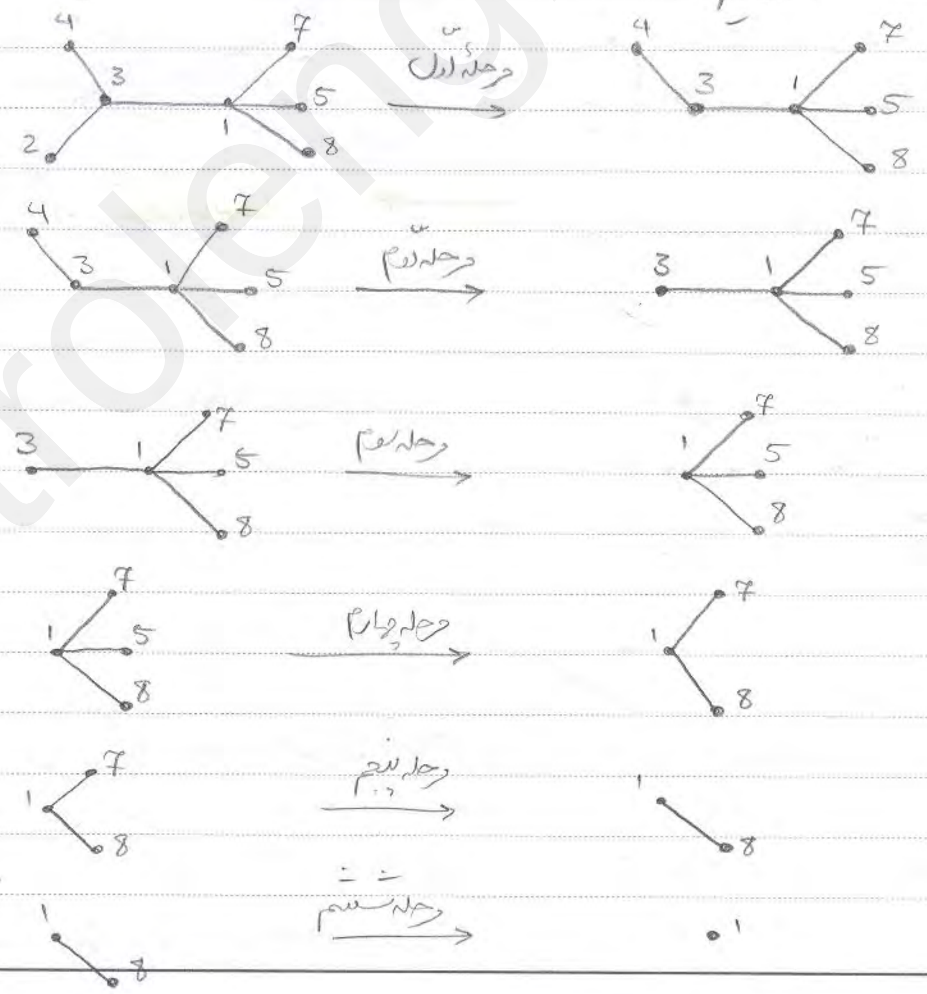
$b_2=4$
$a_2=3$

$b_3=3$
$a_3=1$

$b_4=5$
$a_4=1$

$b_5=7$
$a_5=1$

$b_6=8$
$a_6=1$



(7)
Subject:
Year. Month. Date. ( )

جلسه هفتم : نظریه گراف

$a_1 \; a_2 \; a_3 \; a_4 \; a_5$
$(3, 3, 1, 1, 1)$

درخت نشانه دار 7 رأسی را رسم کنید.

کوچکترین عددی که در دنباله ظاهر نشده است اولین برگ ما است

در این مثال $b_1 = 2$ است برگ درخت (البته کوچکترین برگ درخت)

درخت ما باید همبند باشد و در حقیقت پوشاننده باشد

از کوچکترین رأسی که در دنباله نداریم اولین برگ را انتخاب می کنیم

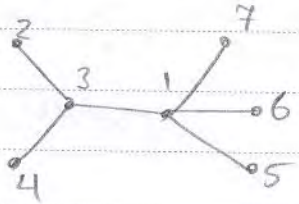
مثلاً در این دنباله یک را داریم پس کوچکترین رأس یا همان برگ از

2 شروع می شود پس $b_1=2$, $a_1=3$ است پس a_1 را به b_1 وصل

می کنیم

نکته تعداد ظاهر شدن رأسها در دنباله یعنی تعداد درجه آن رأس است

$b_1 = 2$
$a_1 = 3$
$b_2 = 4$
$a_2 = 3$
$b_3 = 3$
$a_3 = 1$
$b_4 = 5$
$a_4 = 1$
$b_5 = 6$ $b_6 = 7$
$a_5 = 1$ $a_6 = 1$



مثلاً در این مثال عدد 3 ← 2 بار در دنباله آمده است پس از درجه 3 است یا برعکس از شکل داریم

ما در هر حالتی می توانیم ببینیم هر رأس چند بار در دنباله می آید

رأس آخر را مانند یک بار در انتهای به دنباله در شکل رسم می کنیم چون در آن صورت 6 رأس خواهیم داشت

PAPCO

ولی درخت ما 7 رأسی است.

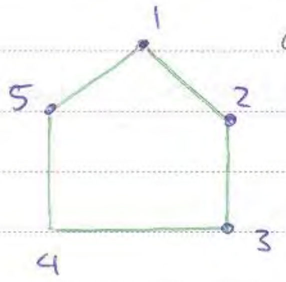
فصل پنجم :

مجموعه مستقل :

$S \subseteq V$ را مستقل گوییم هرگاه رئوس که باهم مجاور نباشند

« مجاور نباشند یعنی باهم یال نداشته باشند »

نکته : اندازه بزرگترین مجموعه مستقل گراف را عدد استقلال گراف می‌نامیم و با $\alpha(G)$ نمایش می‌دهیم.

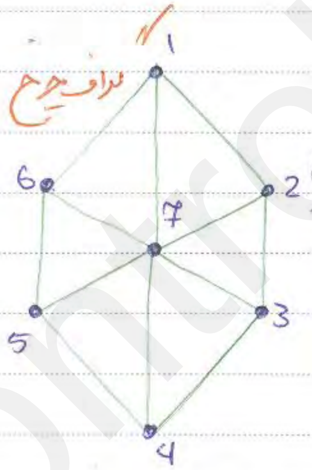


$\alpha = 2$ مستقل $S=\{1,3\}$

راس یک را انتخاب می‌کنیم حال باید ببینیم با کدام

از راس‌های دیگر ارتباط نیست راس‌های 3 و 4 از راس 3 را انتخاب می‌کنیم

دیگر راس 4 را نمی‌توانیم انتخاب کنیم چون راس 3 با 4 مجاور هستند



$S_1=\{7\}$ مستقل هست ولی با این انتخاب α را نمی‌توانیم به دست بیاوریم

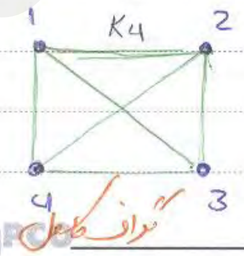
پس راس‌های دیگر را بررسی می‌کنیم و راس 7 را در نظر نباید بگیریم

مستقل $S_2=\{1,3,5\}$

$\alpha = 3$

یا

مستقل $S_2=\{2,4,6\}$



$S=\{1\}$ مجموعه مستقل

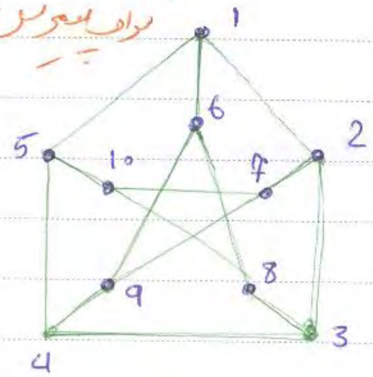
نکته : $\alpha(K_n)=1$

$\alpha(K_4)=1$

جلسه هفتم :

نظریه گراف :

گراف پترسن



$\alpha = 4$

مستقل $S_1 = \{1,3,7\}$

$S_2 = \{1,7,8,9\}$

$S_3 = \{6,7,3,5\}$

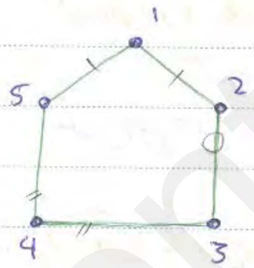
نکته: برای بدست آوردن α باید بیشترین تعداد راسهای مستقل را در نظر بگیریم

پوشش راسی: $G=(V,E)$

$K \subseteq V$ را پوشش راسی گراف G می‌نامیم هرگاه هر یال گراف دارای حداقل یک راس در K باشد.

نکته: پوشش راسی مینیمم را بیابید

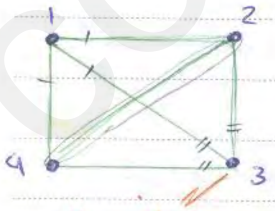
اندازه کوچکترین مجموعه پوشش راسی را عدد پوشش راسی می‌گوییم و با $\beta(G)$ نمایش می‌دهیم.



$K = \{1,4,2\}$

$\beta = 3$

از آن کوچکتر امکان پذیر نیست.



$K = \{1,3,2\}$

$K = \{1,3,4\}$

$\beta = 3$

در گراف K_4 کمتر از 3 راس امکان پذیر نیست

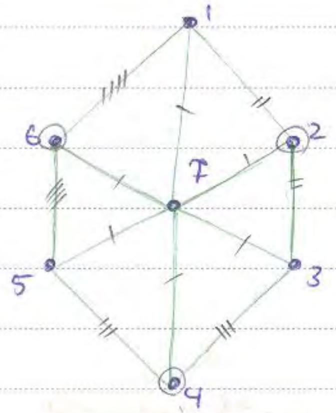
گراف K_4

گراف کامل

(۱۰)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

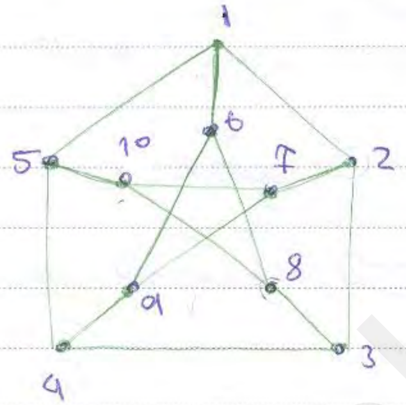
گراف چرخ



$K=\{7,2,4,6\}$ حتماً در این گراف باید 7 را انتخاب کنیم

$\beta=4$

تمرین گراف پترسن



$K=\{8,7,2,5,6,4\}$

$\beta=6$

$S=\{6,7,3,5\}$

$\bar{S}=\{1,2,4,8,9,10\}$

ارتباط بین α و β:

مکمل هم هستند

پوشش رأسی: زیرمجموعه‌ای از رأس‌ها که هر یال دارای حداقل یک رأس آن در مجموعه باشد.

$\alpha(G)$ عدد استقلال

$\beta(G)$ عدد پوشش رأسی

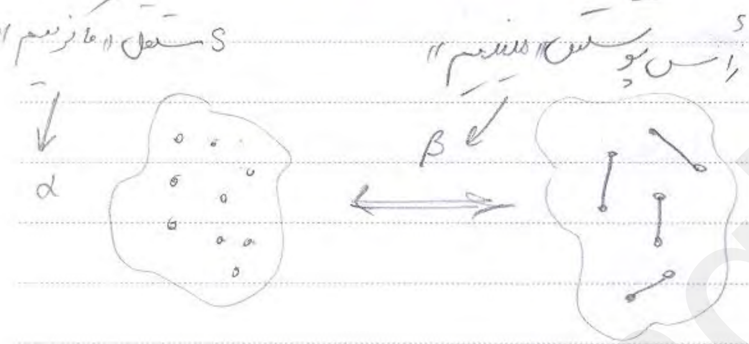
جلسه هشتم — نظریه گراف

اگر S یک مجموعه مستقل باشد متمم آن می‌شود پوشش رأسی و برعکس آن نیز برقرار است.

$V - S \Rightarrow V \setminus S$

علامت $\bar{S} = V \setminus S$

$V - B = V \setminus S = V \cap S'$



نکته: اگر S ماکزیمم بشود به ما α را می‌دهد پس $\bar{S}$ به ما مینیمم را می‌دهد پس به ما β را می‌دهد.

نکته: اگر $|V| = n$ باشد آنگاه

$|\bar{S}| = n - \alpha$

$\beta = n - \alpha$

$\alpha + \beta = n$ *

اگر در مسئله ای از ما α و β را از ما خواهند اگر یکی را به دست بیاوریم از آن می‌توانیم دیگری را به دست بیاوریم.

جلسه هشتم ؛

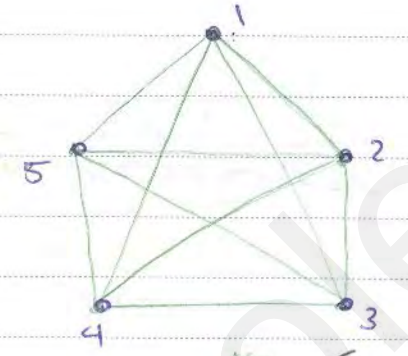
maching «جورسازی»

$G=(V,E)$

$L \subseteq E$ را مجموعه یالی گوییم هرگاه از بین یال‌های داخل L رأس مشترک نداشته باشند. تطابق یا جورسازی maching

«یک سری یال که رأس مشترک نداشته باشند»

نکته: به بیشترین مجموعه ماکزیمم می‌گوییم بیشترین یالی را انتخاب می‌کنیم که رأس مشترک ندارند



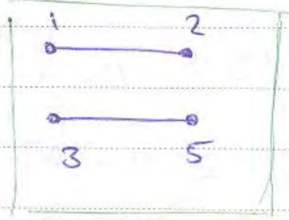
K5

$\alpha(K5)=1$

$\beta(K5)=4$

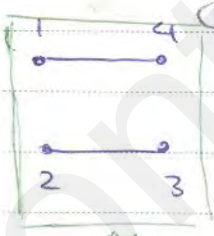
$\alpha'(K_5)=2$

یال‌های مستقل «جورسازی»



M_1

چون هیچ عضوی اضافه نمی‌شود ماکسیمال



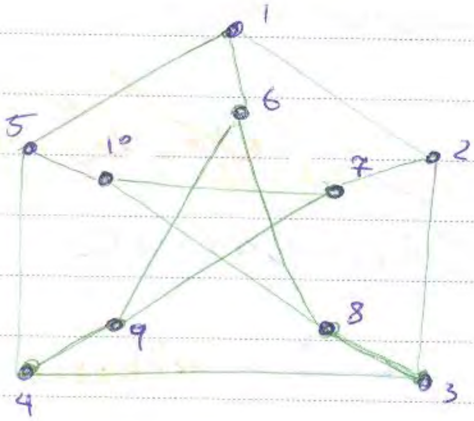
M_2

ماکسیمال: به آن مجموعه‌ای که در اشتمالش نمی‌توان عضو دیگری اضافه کرد یعنی توی آن مقطع بزرگ است نه کل

مجلسه هشتم:

تطوبه یوات

ماکسیمم: وقتی در ماکسیمم داریم بزرگترین عضو است یا بزرگترین مجموعه داریم



$S_1 = \{1, 7, 3\}$ مستقل — هیچ عضوی نتوانیم اضافه کنیم پس ماکسیمال است.

$S_2 = \{1, 3, 10\} \rightarrow S_2' = \{1, 3, 10, 9\}$ مستقل

مستقل ماکسیمال

توی مجموعه ماکسیمال این است که همه بزرگتر باشد

می‌شود ماکسیمم ست ۹ عضوی می‌شود ماکسیمم ست بزرگترین ۴ عضوی می‌شود

می‌توانیم چند مجموعه ماکزیمم داشته باشیم

ماکزیمم جورسازی ← تعداد اعضای ماکزیمم جورسازی $\alpha'(G)$

ماکسیمال M_1

1	2
3	4
5	10
6	9

ماکسیمال M_2

اعضای جورسازی از تعداف میتوان

1	6
2	7
3	8
4	9
5	10

$\alpha'(P) = 5$

$\alpha'(G) = 5$ بیشترین

→ پس ماکسیمال هست

بلکه ماکزیمم است.

پس حداکثر می‌شود 5 عضوی

چون تمام یال‌های ... در این maching وجود دارد پس بزرگتر از 5 امکان پذیر نیست

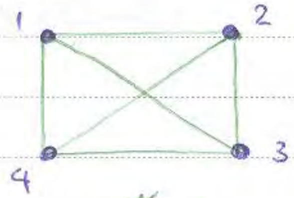
جلسه هفتم :

اتصال

جورسازی کامل یا تطابق کامل: زیرمجموعه‌ای از یالهای گراف که تمامی رأسها در آن وجود داشته باشد مثل مثال قبل «گراف پیترسن»

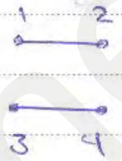
مثال برای گراف کامل :

۴ رأس داریم پس ۴ را تقسیم بر 2 می‌کنیم پس برای matching آن دو عضوی بیشتر نمی‌توانیم



«K_4»

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{4\times 3}{2} = 6$$



$\alpha'(K_4) = 2$ (جورسازی کامل)

نکته :

$$\alpha'(K_n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ زوج (جورسازی کامل)} \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor & n \text{ فرد} \end{cases}$$

« کف همان براکت است »

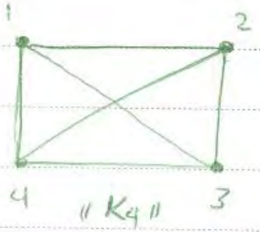
$[2,3] = 2$

$\lfloor 2,3 \rfloor = 2$ کف

$\lceil 2,3 \rceil = 3$ سقف

جلسه هشتم:

پوشش یالی: $L \subseteq E$ را پوشش یالی گراف گوییم هرگاه هر رأس گراف حداقل روی یک یال L واقع باشد.



1 —— 2

3 —— 4

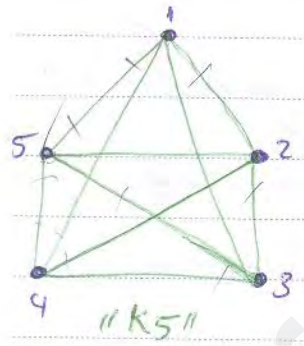
پوشش یالی مینیمم

$\alpha'(K_4) = 2$

جورسازی ماکسیمم
کامل

نکته: اگر جورسازی کامل باشد یک پوشش یالی هم می‌شود

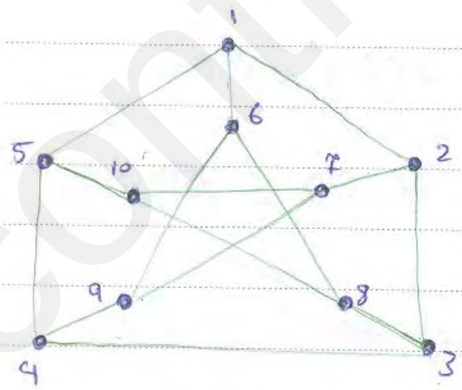
نکته: بهتر است پوشش یالی مینیمم باشد و با $\beta'(G)$ نمایش می‌دهیم.



$\alpha'(K_5) = 2$ $\beta'(K_5) = 3$

1 —— 2
3 —— 5
3 —— 4

پوشش یالی



پوشش یالی مینیمال

1 —— 2
3 —— 4
5 —— 10
6 —— 9
7 —— 2
8 —— 3

گراف پترسن:

1 —— 6
7 —— 2
8 —— 3
9 —— 4
10 —— 5

پوشش یالی مینیمم

$\beta'(P) = 5$

6

Subject:
Year. Month. Date.

جلسه هفتم :

نکته: $\alpha'(G)+\beta'(G)=n$ $\beta'(G)=n-\alpha'(G)$

نکته: $\underbrace{\alpha(G)+\beta(G)=n}$ در این حالت β' و α می توانیم

S و $\bar{S}$ را بدرست بیاوریم ولی در حالت بالا این امکان پذیر نیست .

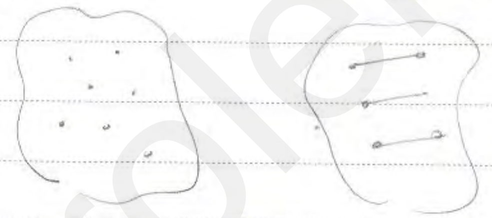
$\alpha'+\beta'=n$

$$\beta'(K_n)=\begin{cases}\frac{n}{2} & n \text{ زوج}\\ n-\lfloor\frac{n}{2}\rfloor=\lceil\frac{n}{2}\rceil & n \text{ فرد}\end{cases}$$

کف سقف

نکته: در هر گراف G ، $\alpha(G)\leq\beta'(G)$

ماکزیمم



چون سمت چپ راس های ماکزیمم در سمت راست یال های پوششی است پس یال ها از سمت چپ بیشتر دارد

$\alpha+\beta\leq\beta'+\beta$

$n\leq\beta'+\beta$

$\cancel{n}\leq\cancel{n}-\alpha'+\beta$

$\alpha'\leq\beta$

① $\alpha(G)\leq\beta'(G)$

② $\alpha'(G)\leq\beta(G)$

این قسمت پس از اثبات هایی دارد که نمی شود

صفحه 87 کتاب .

(۴)

Subject:

Year. Month. Date. ( )

جلسه هشتم :

قطر:

طول بزرگترین مسیر در یک گراف   طولانی‌ترین مسیر بین دو راس یک گراف

d(u,v)   , page 87

فاصله هر راس اگر به راس‌های دیگر می‌سنجیم بیشترین فاصله یک راس با راس دیگر

خروج از مرکز   مثلا اگر ۱۰ راس داشته باشیم در گراف ما ۱۰ خروج از مرکز داریم

شعاع: کمترین خروج از مرکز می‌شود ~~خروج~~ شعاع مثلا اگر ۱۰ راس داشته باشیم

قطر از همه مهمتر است

الگوریتم‌های پریم و دایکسترا

فصل ۱۰ کتاب

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

α عدد استقلال

β عدد پوشش رأسی

α' یال های مستقل (جورسازی یا تطابق)

β' زیر مجموعه ای از یال ها که هر رأس گراف اول حداقل یک یال این مجموعه قرار گرفته باشد

$\alpha+\beta=n$

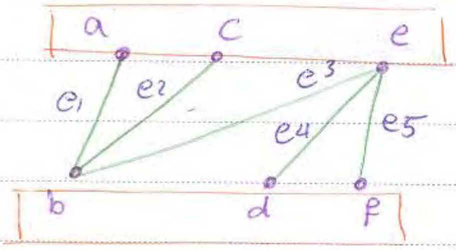
$\alpha'+\beta'=n$

S یک مجموعه مستقل $\Longleftrightarrow$ $\bar{S}=V\setminus S$ پوشش رأسی

$\alpha' \leq \beta$

$\alpha \leq \beta'$

جلسه دهم :



این گراف گراف دوبخشی .

$\alpha = ?$

بیشترین تعداد رأس‌های مستقل

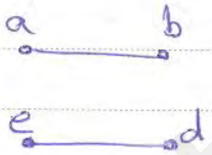
همیشه یا بیشتر اوقات در گراف دوبخشی تعداد رأس‌های مستقل می‌تواند برابر تعداد

تعداد رأس‌های یک بخش گراف باشد

روی رأس پیدا می‌شود که منتهی رأس‌های زیر هستند

$\alpha = 4$ $\quad I=\{a,c,d,f\}$ مستقل ماکزیمم

$\beta = 2$ $\quad \{b,e\}$ پوشش می‌نیمم



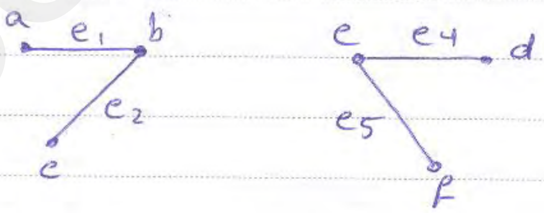
M_1 $\quad \underline{\alpha' = 2}$ دو تا یال مستقل بیشترین تعداد تطابق

یعنی چهار یال وجود دارد که از هر رأس $\beta' = 4$

$\alpha+\beta=n$ $\quad \alpha' \leq \beta$ طبق ترمیک

$\alpha'+\beta'=n$ $\quad \alpha \leq \beta'$

گراف را بپوشانیم یال‌ها هستند .



β' پوشش یالی

Subject:
Year. Month. Date. ( )

در گراف دوبخشی بدون رأس تنها، $\alpha' = \beta$ $\alpha = \beta'$

این اتفاق مشهور در گراف‌های دوبخشی اتفاق می‌افتد یعنی ممکن است در گراف‌های دیگر هم این اتفاق بیفتد ولی در گراف‌های دوبخشی حتماً این اتفاق می‌افتد.

جورسازی (تطابق)

تطابق کامل ← تطابقی است که شامل تمامی رأس‌های گراف است.

مثلاً K_6 $\frac{6}{2} = 3$ 3 یال باید بنویسیم تطابق کامل است

مثلاً K_7 $\frac{7}{2} = 3.5$ 3 یال باید بنویسیم که رأس می‌ماند

تطابق کامل نیست.

K-عامل: زیرگراف فراگیر K منتظم، را K-عامل گوییم.

K می‌تواند از یک تا بی‌نهایت باشد

1-عامل: زیرگراف فراگیر 1-منتظم = تطابق کامل

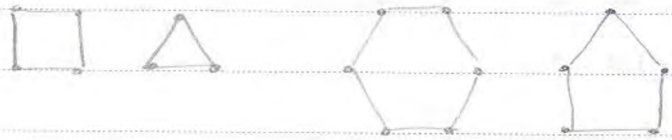
تمام رأس‌های این گراف از درجه یک هستند پس همان تطابق کامل می‌شود چون

چندین یال موازی با هم داریم که البته در تطابق کامل شد به همین صورت بود

2 - عامل : زیرگراف فراگیر 2 - منتظم

بالا هر رأس ها را داشته باشد و بالا درجه همه رأس ها از درجه 2 باشد پس حتماً شامل 2 عامل ها

چند ضلعی های ما هستند



K تجزیه پذیر

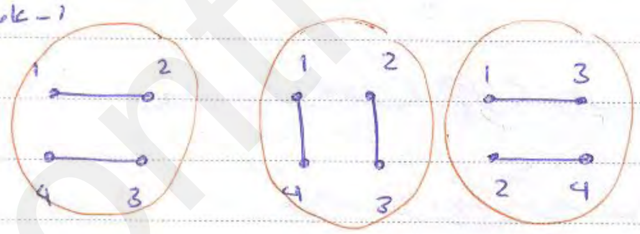
مثلاً : گراف G را تجزیه پذیر گوییم هرگاه بتوان G را به K - عامل های

یال - مجزا تجزیه کرد

به عبارت دیگر گراف G را به صورت اجتماع K - عامل های یال - مجزا نوشت.

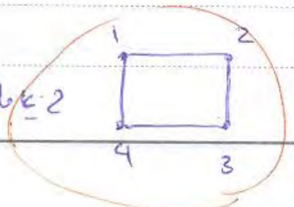
مثال :

1 - عامل



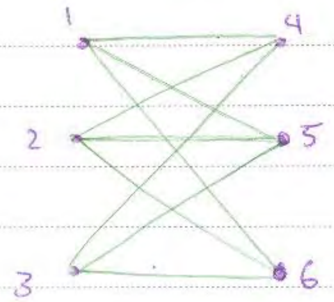
1 - تجزیه پذیر

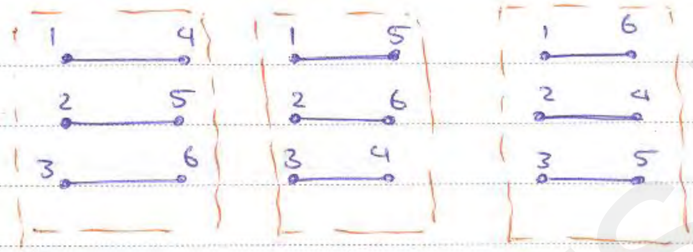
چون نقطه ها درجه K_4 یک 2 - عامل داریم پس K_4 2 - تجزیه پذیر نیست



2 - عامل

در گراف‌های دو بخشی بدون راس تک $\beta'=\alpha$ $\alpha'=\beta$

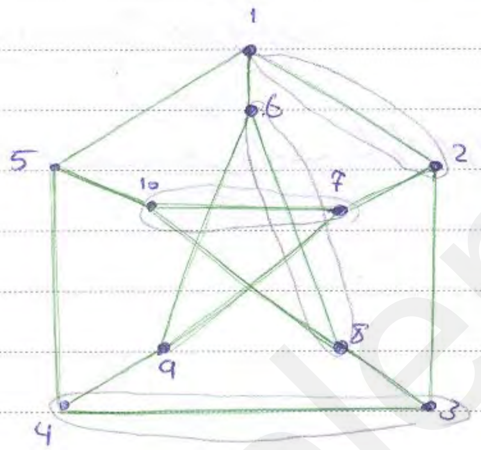


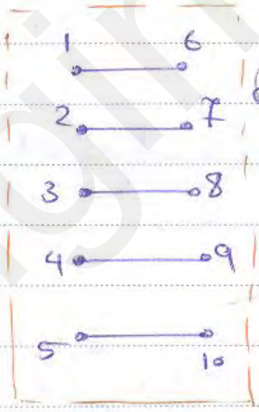


۱- عامل

پس ۱- تجزیه پذیر هم هست.

قضیه: ۱- تجزیه پذیر / ۱- عامل $K_{n,n}$





تطابق کامل = ۱- عامل

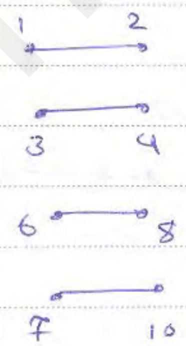
گراف پیترسن ۱- تجزیه پذیر نیست ولی ۱- عامل هست.

برای این که تجزیه پذیر نیست چون گراف پیترسن 15 یال دارد پس باید ۱۰ تا یال

دیگر را که بررسی نکردیم باید بررسی شوند بعد از بررسی به این

نتیجه می‌رسیم نه ۱- تجزیه پذیر نیست چون نمی‌توانیم هر 15

یال را پوشند



جلسه نهم:

نکته :

Q_n گراف n مکعب

- رأس 2^n
- دنباله n-تایی باینری
- درجه هر رأس n است
- $|E| = n \times 2^{n-1}$

$$\sum_{i=1}^{m} \deg v_i = 2|E|$$

$$n \times 2^n = 2|E| \longrightarrow |E| = n \times 2^{n-1}$$

اگر n از 4 بزرگتر باشد شکل منطقی به دست نمی آید

گراف Q_n را همیشه به صورت یک گراف دوبخشی می توانیم رسم کنیم

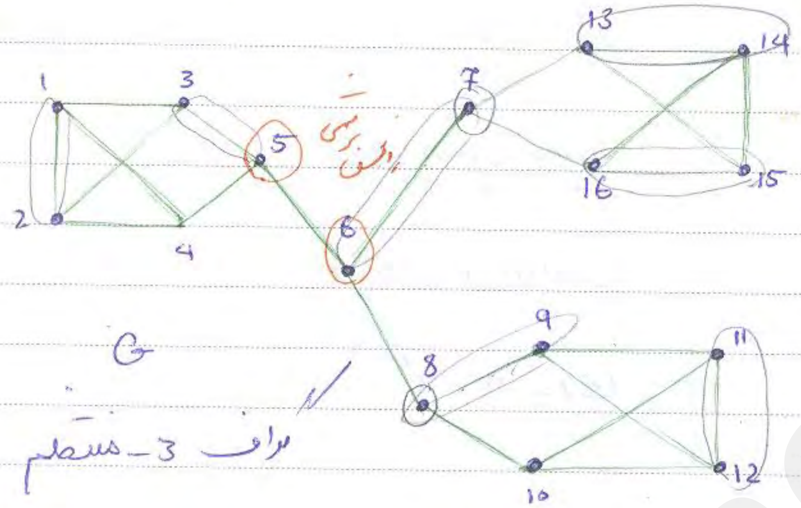
آنهایی که 2 اختلاف دارند مثلاً b (011) (000) a را در یک بخش قرار می دهیم و بقیه را ها را در یک بخش دیگر قرار می دهیم

گراف های دوبخشی همواره دارای تطابق کامل یا 1-عامل هستند

البته برای های Q_n که به صورت 2 بخشی رسم کردیم همچنان گراف دوبخشی ما کامل نخواهد بود

(6)

Subject:
Year. Month. Date. ( )



گراف 3-منتظم

نکته: این گراف چندین
تا یال برشی پیدا
برشی داریم.

5	3
6	7
1	2
13	14
15	16
8	9
11	12

چون همه رأس‌های گراف ظاهر شدند پس این تطابق، تطابق کامل است.

تطابق داریم ولی تطابق کامل نیست.

نکته: هر گراف 3-منتظم که یال برشی نداشته باشد 1-عامل دارد یا تطابق کامل دارد

البته برعکس آن درست نیست یعنی ممکن است گراف یال برشی داشته

اشکال

باشد و 1-عامل هم داشته باشد یا برعکس یعنی یال برشی نداشته باشد ولی

1-عامل داشته باشد

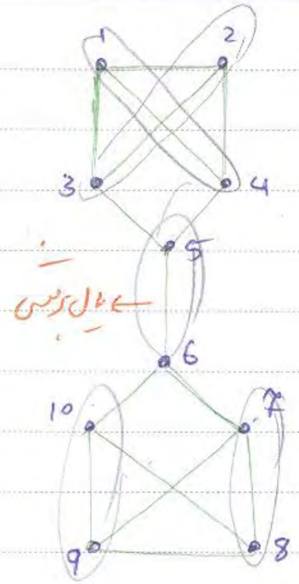
اگر یال برشی داشته ⟵ ممکن است 1-عامل داشته باشد ممکن است 1-عامل ندا(شته) با(شد)

Subject:

Year. Month. Date. ( )

جلسه ۲۳م

صفحه ۱۱۶



1 — 4

2 — 3

5 — 6

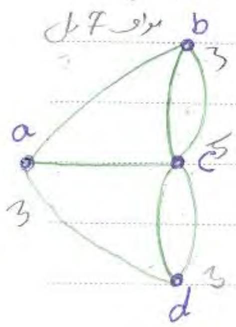
7 — 8

9 — 10

۱- عامل دارد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

جلسه دهم



اویلری - هامیلتونی :

مدار: نقطه شروع و پایان یکی است و یال تکراری هم نداشته باشد

نکته: اویلری یک شرط بیشتر از مدار دارد و می شود مدار اویلری

مدار اویلری:

« نقطه شروع و پایان یکی است »

مدار زمانی که از تمامی یال های گراف عبور کند = از تمامی یال های گراف دقیقا یک بار عبور می شود

مدار اویلری = مسیر اویلری « در حالت [illegible] شده مسیر اویلری »

گراف اویلری: گرافی است که دارای مدار اویلری یا مسیر اویلری باشد

مسیر «گذر» اویلری:

از تمامی یال های گراف دقیقا یکبار عبور می کنیم.

نکته: گراف G اویلری (مدار اویلری) است اگر و فقط اگر درجه تمامی رئوس آن زوج باشد.
قضیه ۱

گراف ۷ پل درجه تمامی رئوس آن زوج نیست پس نمی توانیم از همه پل ها عبور کنیم.

نکته: گراف G دارای مسیر «گذر» اویلری است اگر و فقط اگر دقیقا دو راس آن فرد باشد
قضیه ۲

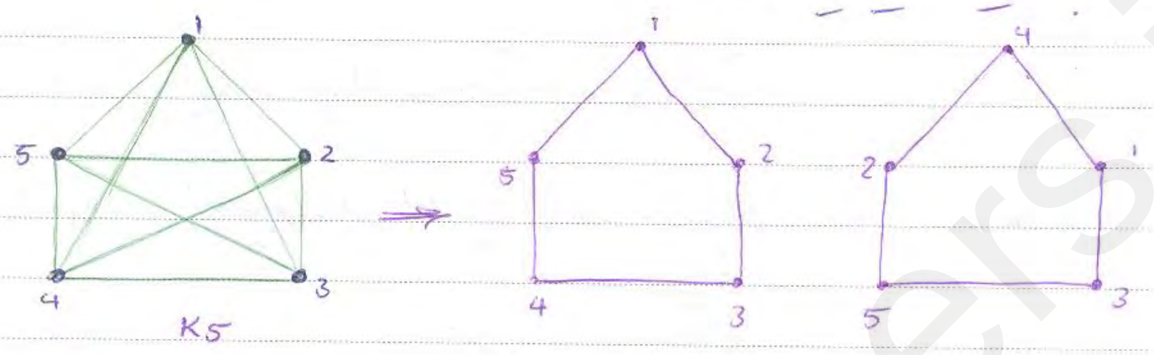
PAPCO

(2)

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مجزا یال: یعنی یال تکراری ندارند



مدار اویلری است.

نکته: گراف K_n به ازای n های فرد اویلری است.

نکته: وقتی ما گرافی مثل K_5 داریم که درجه هر راس آن 4 و زوج است می توانیم درجه هر راس را

بر 2 تقسیم کنیم یعنی ما دوتا مدار مجزا یال اویلری داریم. این نکته فقط برای گرافهای K_n است

مثل مثال بالا که دوتا دور که درجه هر راس آن 2 است داریم اگر گراف K_7 داشته باشیم درجه هر

راس آن می شود 3 سیکل که دور داریم پس شکل می توانیم گراف را تقسیم کنیم که درجه 2 باشد

هر راس آن

③
Subject:
Year. Month. Date. ( )

جلسه دهم:

گراف هامیلتونی: هر وقت گفتیم هامیلتونی منظور رأس‌های گراف است

مسیر هامیلتونی: مسیری است که از تمامی رئوس گراف عبور می‌کند

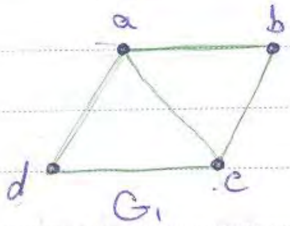
از تمامی رئوس گراف دقیقاً یکبار عبور می‌کند.

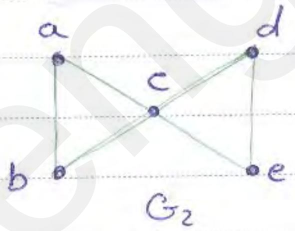
لزومی ندارد نقطه شروع و پایان آن یکی باشد

دور: مسیر بسته، یعنی نقطه شروع و پایان آن یکی باشد.

دور هامیلتونی: دوری که از تمامی رئوس گراف عبور کند. نقطه شروع و پایان یکی باشد

« گراف هامیلتونی »





گراف G_2 اویلری هست چون همه رأس‌ها زوج است.

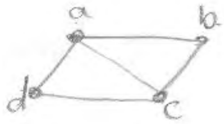
مدار اویلری نیست

ولی مسیر اویلری است

نکته: مسیر و مدار اویلری حتماً باید از راسی شروع کنیم که درجه آن فرد است به راسی برسیم که درجه آن فرد است. مثلاً در گراف G داریم:

a - b - c - a - d - c

البته در این حالت می‌توانیم راس تکراری داشته باشیم



دور هامیلتونی برای گراف G_1 به صورت زیر است:

a _ b _ c _ d

محیط بیرونی

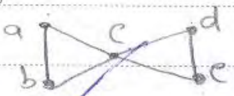
نکته: در دور هامیلتونی دوره‌ی بیرونی مهم است یعنی به صورت محیطی بررسی می‌کنیم مثلاً در گراف G_1 یال داخلی را در نظر نمی‌گیریم. در دور هامیلتونی نمی‌توانیم راس تکراری داشته باشیم

مسیر هامیلتونی برای گراف G_2 به صورت زیر است:

a _ b _ c _ d _ e

دور هامیلتونی ندارد گراف G_2 ولی مسیر هامیلتونی دارد.

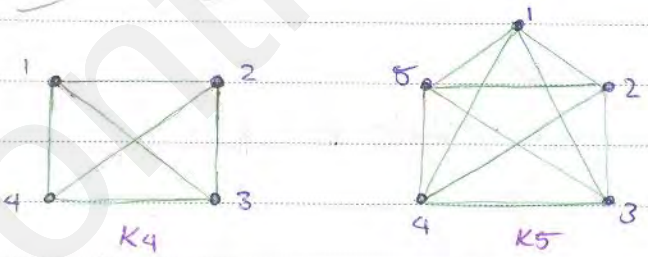
مسیر هامیلتونی



نکته مهم: اگر گرافی دارای دور هامیلتونی باشد می‌توان یال آخر را حذف کرد و مسیر هامیلتونی داشت.

آیا گراف Kn دور هامیلتونی دارد؟

گراف Kn همیشه دور هامیلتونی دارد. با حذف یال آخر آن مسیر هامیلتونی هم می‌شود



جلسه دهم:

نکته ①: اگر در گراف G به ازای هر دو رأس غیرمجاور x و y داشته باشیم

$deg\,x + deg\,y \geq n$ ← تعداد رأس‌های G

آنگاه G دارای دور هامیلتونی است.

G هامیلتونی است

نکته ②: اگر در گراف G به ازای هر رأس v داشته باشیم $deg\,v \geq \frac{n}{2}$ آنگاه G دارای

دور هامیلتونی است.

G هامیلتونی است.

$\Delta \geq n/2$ غلط

$\delta \geq n/2$

در نکته ①: اگر جمع ما $deg\,x + deg\,y \geq n$ بزرگ‌تر مساوی n نشد هیچ نتیجه‌ای نمی‌توانیم

بگیریم.

نکته: هیچ قضیه‌ی هامیلتونی را به صورت اگر و فقط اگر نمی‌دهند

نکته: page 131

تعداد مولفه‌های همبندی

G هامیلتونی $\Rightarrow \forall S \subset V \quad \omega(G-S) \leq |S|$

$S=\{v\} \quad \omega(G-\{v\}) \leq 1 \Rightarrow$ G همبند است

کاردینال: تعداد اعضای مجموعه مثل $|S|$ کاردینال S

نکته: تعداد اعضای مجموعه بیشتر برای مجموعه‌های متناهی است

نکته: کاردینال یک کلمه بالاتر از تعداد اعضای مجموعه است چون این اصطلاح را برای مجموعه‌های

نامتناهی ولی شمارش‌پذیر استفاده می‌کنیم.

(6)

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$\mathcal{K}$ مینیمم تعداد رأس‌هایی که حذف منجر به گراف ناهمبند شود

$\mathcal{K}'$ " " یال‌هایی " " "

همبند $-K \Longleftrightarrow \mathcal{K}(G) \geq K$

همبند $-1 \Longleftrightarrow \mathcal{K}(G) \geq 1$

همبند $-3 \Longleftrightarrow \mathcal{K}(G) \geq 3$

یعنی با حذف هر دو 2 رأس گراف همبند باقی می‌ماند

page 132 ب

نکته: هر گراف هامیلتونی 2-همبند است

یعنی با حذف یک رأس گراف همبند باقی می‌ماند $\longrightarrow \mathcal{K}(G) \geq 2$

نکته: G همبند است و با حذف هر یک رأس همبند باقی می‌ماند

$S = \{v\}$, $\omega(G - \{v\}) \geq 1$

یعنی اگر تعداد رأس‌ها هم به تعداد رأس‌های گراف باشد باز هم ناهمبند شود یعنی مثلاً اگر 2 رأس هم بماند

درست یال باز هم همبند هستند.

نکته 2: اینها ثابت همبند — هم می‌توانیم بنویسیم: اگر گراف G، $\delta \geq n/2$ باشد آنگاه G هامیلتونی است.

P4PCO

جلسه دهم:

نکته: گراف پیترسن هیچ وقت هامیلتونی نیست

نکته: گراف پیترسن اویلری هم نیست.

گراف خطی یا یالی ، یالها را تبدیل به راس کن گراف جدید می‌سازیم   page 142

نکته مهم:

$G \longrightarrow L(G)$

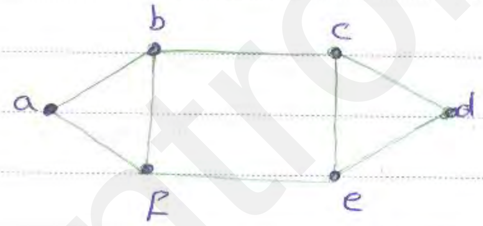
اگر G اویلری باشد   گراف خطی آن هم اویلری هم هامیلتونی می‌شود.

page 142 $G \longrightarrow L(G)$

اگر گراف G هامیلتونی باشد   گراف خطی آن فقط یک گراف هامیلتونی است

اگر گراف G یک گراف هامیلتونی باشد آنگاه گراف خطی G $L(G)$ فقط یک گراف هامیلتونی است

صفحه 6.2.9 . page 135



راسهای غیر مجاور a هستند c, d, e

$\deg a + \deg c = 5 \ngeq 6$

$\deg a + \deg d = 4 \ngeq 6$

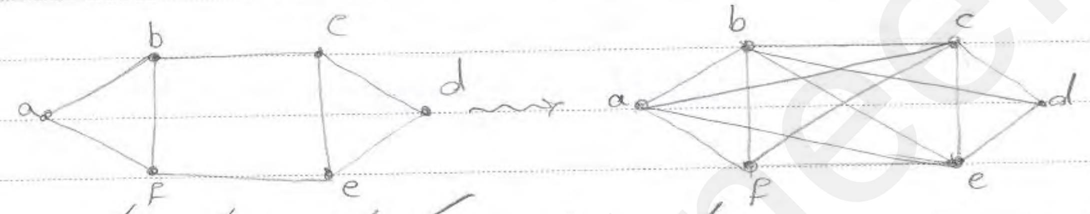
$\deg a + \deg e = 5 \ngeq 6$

a - b - c - d - e - f

دور هامیلتونی

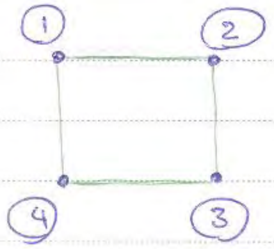
تعریف بستار: زوج رأس‌های غیرمجاوری که جمعشان بزرگتر مساوی n باشد $\deg x+\deg y \geq n$

مثلاً در مثال حل: البته باید شکل را بزرگتر کنیم یعنی آنقدر به آن یال اضافه کنیم که به دور همیلتونی برسیم اگر گراف بزرگتر دور همیلتونی داشته باشد گراف اولیه هم دور همیلتونی دارد



چون این کار هم مستلزم به حدود ... باز منفی به شکل یال اضافه کنیم گراف ما به گراف کامل نزدیکتر می‌شود پس احتمالاً به دور همیلتونی می‌رسیم.

(۱)
Subject: جلسه یازدهم
Year. Month. Date. ( )

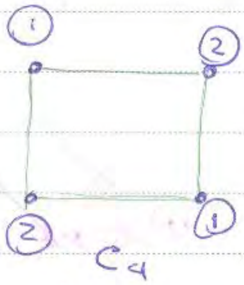


رنگ آمیزی ← رأسی
← یالی

[illegible] چون با چهار رأس ۴ رنگ داریم این بهینه نیست

نکته: اگر فقط بگوییم رنگ آمیزی ← منظور رنگ آمیزی رأسی است.

پیدا کردن کمترین رنگ گراف



C_4

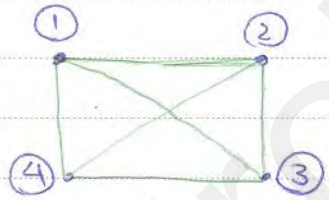
بهینه است چون به ازای ۴ رأس ۲ رنگ داریم

$\chi(C_4)=2$

رأسهایی که با هم یال دارند هم رنگ نباید باشند

عدد رنگی گراف $\chi(G)$

مینیمم تعداد رنگ‌ها برای رنگ آمیزی مجاز رأس‌های گراف است

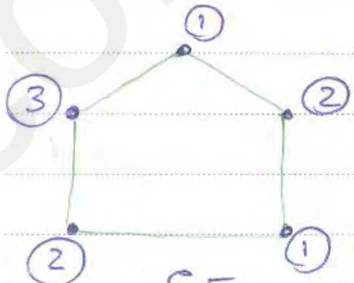


K_4

$\chi(K_4)=4$

نکته: در گراف کامل K_n ها تعداد رنگها برابر n است

$\chi(K_n)=n$



C_5

$\chi(C_5)=3$

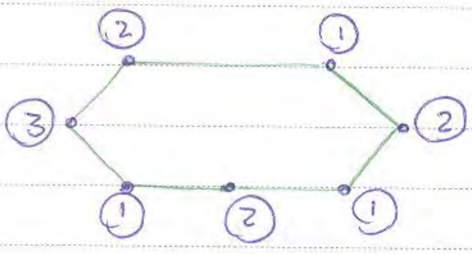
②

Subject:
Year. Month. Date. ( )

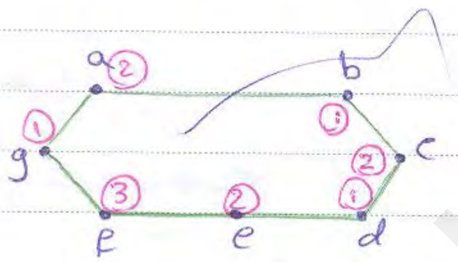
نکته مهم:

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & n \text{ زوج} \\ 3 & n \text{ فرد} \end{cases}$$

مثال/



$n = 7$ فرد است پس $\chi(C_7)=3$ می‌شود



کلاس رنگ ①: رنگ ① $\{b, d, g\}$

کلاس رنگ ②: رنگ ② $\{a, c, e\}$

کلاس رنگ ③: رنگ ③ $\{f\}$

اولاً:

مجموعه رئوس را اگر به مجموعه‌های رنگی تقسیم کنیم به هیچ عنوان اشتراکی با هم نخواهند داشت و

اجتماع آنها هم به اندازه کل مجموعه رئوس است یعنی نداریم هیچ کم و کاستی

نکته: کلاس‌های رنگی‌ای که به دست می‌آیند هر کدام یک مجموعه مستقل هستند

«کلاس رنگ یک مجموعه مستقل است»

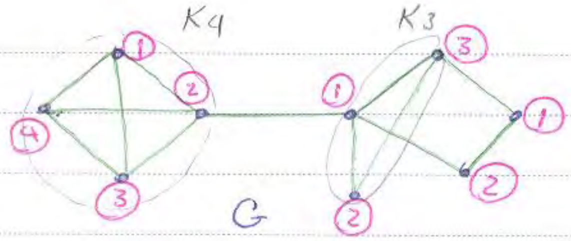
نکته مهم: این کران که برای χ به دست آوردیم:

$$\chi \geq \left[\frac{n}{\alpha}\right]$$

α عدد استقلال

P4PCO

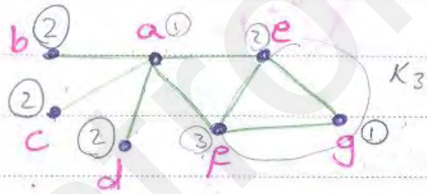
جلسه یازدهم:



چون می‌خواهیم χ گراف را به دست بیاوریم
باید بیشترین تعداد رنگ را برای گراف به دست
بیاوریم. باید مطمئن باشیم کمتر از آن
به دست نمی‌آوریم

$\chi(G) = 4$ در این شکل ۲ گراف کامل داریم
$\left.\begin{matrix} K_3 \\ K_4 \end{matrix}\right\}$

ممکن است بتوانیم یک گراف مثلاً یک گراف کامل ببینیم البته ممکن است گراف اصلی نباشد
که ما نشان بدهیم مثلاً در گراف بالا چون یک گراف کامل K_4 داریم پس مطمئن هستیم نمی‌توانیم
با کمتر از ۴ رنگ این گراف را رنگ‌آمیزی کنیم چون گراف کامل K_4 به ۴ رنگ نیاز دارد
البته در این گراف ما یک گراف کامل دیگر یعنی K_3 را نیز داریم یعنی مثلث که البته آن با 3 رنگ
رنگ‌آمیزی می‌شود.



چون در این گراف مثلث داریم پس می‌توانیم بگوییم
عدد رنگی این گراف کمتر از 3 نمی‌تواند باشد
البته ممکن است بیشتر از 3 باشد ولی با حالت رنگ‌ها
عدد رنگی آن به عدد 3 می‌رسیم.

$\chi(G) = 3$

نکته 2: $\chi(G) \le \underbrace{\Delta(G)}_{\text{بزرگترین درجه راس}}+1$

در این فرمول به ما می گوید عدد رنگی گراف از چه عددی باید کوچکتر باشد

ولی در نکته 1: به ما می گوید عدد رنگی χ باید از چه عددی بزرگتر باشد.

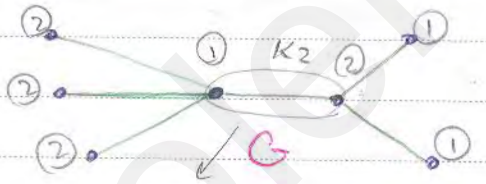
مثلا در گراف شکل مثل داریم $\Delta(G)=5$ $\quad \chi(G)\le 5+1$

یعنی عدد رنگی گراف χ از 6 بزرگتر نیست و اگر در فرمول قرار دهیم می بینیم که درست حساب کردیم چون عدد رنگی $\chi(G)=3$ به دست آوردیم. باید عدد رنگی کوچکتر از 6 به دست بیاید

نکته 3:
عدد خوشه ای: $\chi(G) \ge \omega(G)$

↓ عدد خوشه ای

بزرگترین زیرگراف کاملی که در یک گراف وجود داشته باشد



$\omega(G)=2$

$\omega(G)=K_2$

$\chi \le 5 \;,\; \chi \ge 2$

$\chi(G)=2$

نکته: گراف G، K-رنگ پذیر است. $\chi(G) \le K$

یعنی می توانیم به K حالت رنگ کنیم. تنها اطلاعاتی که به ما می دهد این است که min از عدد K کمتر است مثلا در گراف بالا 7 رنگ پذیر است که البته این عدد حداکثر تعداد رنگهای آن گراف نیست منظور این است که ما می توانیم به این تعداد رنگ این گراف را رنگ آمیزی کنیم

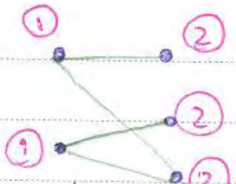
(5)

Subject: جلسه یازدهم:

Year. Month. Date. ( )

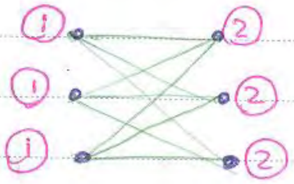
فقط یک راس داریم.

K_1 $\chi = 1$



$K_{2,3}$

K_2 $\chi = 2$



چون $\Delta = 3$ است پس عدد رنگی آن باید کمتر از 4 باشد.

$\chi(G) < 3+1$

$K_{3,3}$

نکته: در گرافهای دوبخشی چه گراف دوبخشی ما کامل باشد چه کامل نباشد عدد رنگی آن 2 است

برعکس این حرف نیز درست است یعنی اگر عدد رنگی گرافی عدد 2 باشد آن گراف یا گراف K_2 است یا یک گراف دوبخشی است.

نکته: تنها گرافی که عدد رنگی آن یک (1) است K_1 است. هیچ گراف دیگری با عدد رنگی یک نداریم.

گراف K - بحرانی:

گراف G را K - بحرانی می نامیم هرگاه G، K - رنگ پذیر باشد و به ازای هر زیرگراف H از G، $\chi(H) < \chi(G)$

(6)

Subject:

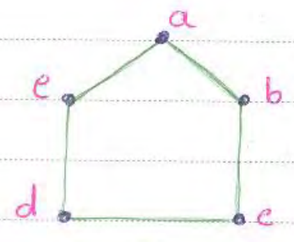
Year. Month. Date. ( )

هر عضوی را برداریم عدد رنگی را کم کند

هر عضوی که از گراف بزنیم زیرگراف بدست می‌آید که همان H است همواره زیرگراف محض از خود گراف باشد

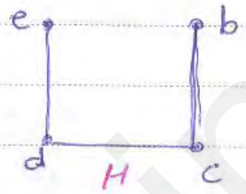
این تغییرات باعث کوچکتر شدن عدد رنگی بشود به ازای هر زیرگراف این اتفاق بیفتد

که در این صورت به آن K - بحرانی می‌نویسیم



C_5

$\chi = 3 \Rightarrow \chi(G) = 3$



اگر رأس حذف شود زیرگراف

ما به این صورت بدست می‌آید

$\chi(H) = 2$

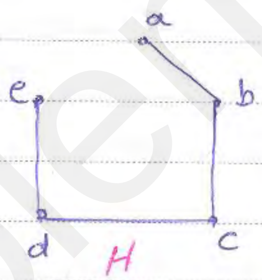
$\chi(G) > \chi(H)$

$3 > 2$

نکته: گراف C_5

3 بحرانی است

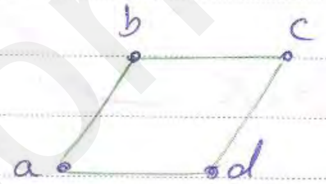
اگر یال را حذف کنیم →



$\chi(H) = 2$

نکته: همواره دورهای فرد 3 - بحرانی هستند

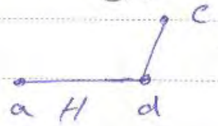
نکته: دورهای زوج بحرانی نیستند ولی دورهای فرد بحرانی هستند



$G = C_4$

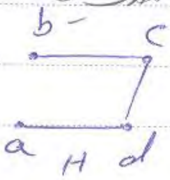
$\chi = 2$

حذف رأس



$\chi = 2$

حذف یال



این مثال بحرانی نیست چون با حذف یال یا رأس χ آن تغییر نکرد

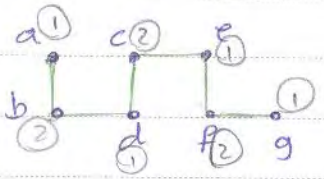
$\chi = 2$

جلسه یازدهم:

نکته: گرافهای کامل بحرانی هستند.

نکته: هر گراف بحرانی همبند است. هر گراف بحرانی بالا حتما همبند باشد

نکته: همواره $X(P_n) = 2$ است



(P_n) ها گرافهای مسیر هستند مانند این شکل

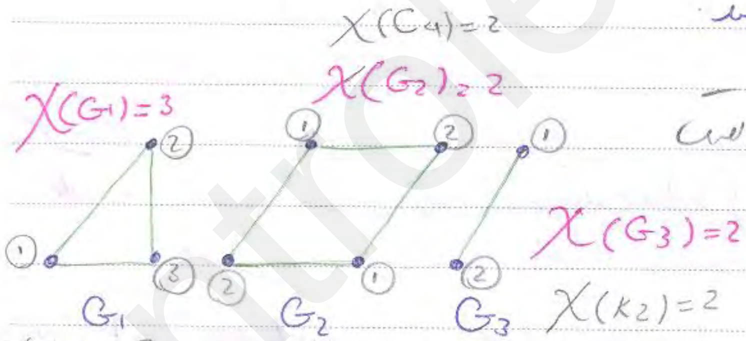
نکته: گرافهای مسیر بحرانی نیستند

نکته: اگر G ناهمبند باشد داریم همواره

$$X(G) = \max\{X(C_1), X(C_2), \dots, X(C_K)\}$$

C_i: مؤلفه‌های همبندی هستند

عدد همبندی این گراف سه یا 3 است



$X(K_2)=2$ این گراف چون همبند نیست

$X(K_3)=3$

پس بحرانی هم نیست البته بعد به این نکته باید توجه کرد که اگر مثلاً راس G را برداریم

عدد رنگی آن از $X=3$ به $X=2$ تغییر پیدا کرد ولی چون 2 زیر گراف دیگر به این صورت

نیست و X آنها تغییر نمی‌کند پس این گراف و گرافهای ناهمبند بحرانی نیستند

نکته: اگر گراف G، K ـ گرافی باشد، داریم: $\delta \geq K-1$

$$\chi(G) \leq \Delta(G)+1$$

$$\chi(G) \geq \omega(G)$$

بزرگترین بستار کروماتیک گرافهای K_n برابر $n-1$ است.

قضیه بروکس:

$$K_n \rightarrow \Delta = n-1, \quad \chi = n$$

$G \neq K_n$ و دور فرد $\Rightarrow \chi(G) \leq \Delta(G)$

دور فرد $C_n \rightarrow \Delta = 2, \quad \chi = 3$

نکته: گراف مثلث آزاد ← مثلث ندارد (فاقد K_3 است).

ساختار میسلسکی:

به ازای هر K، گرافی فاقد مثلث با عدد رنگی K وجود دارد.

در این ساختار K باید به ازای مساوی و بزرگتر از 3 در نظر بگیریم.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

جلسه یازدهم:

عدد رنگی

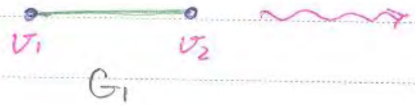
$K_1=1$ K_1

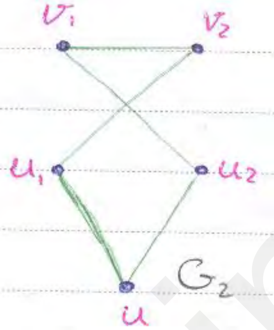
$\chi=1$

$K_2=2$ K_2

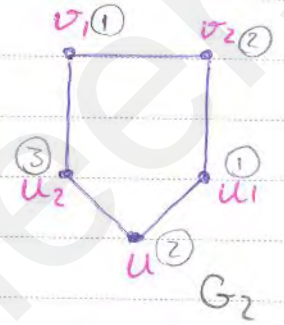
عدد رنگی

$\chi=2$





$\equiv$



نکته: همواره فقط یک راس را جدیداً اضافه می‌کنیم

u_1 را به همسایه‌ی v_1 ها متصل می‌کنیم مثلاً v_2 وصل می‌کنیم u_2 را نیز به همسایه‌ی v_2 یعنی v_1 متصل می‌کنیم حتی به

v_1 متصل می‌کنیم و در آخر راس u را جدیداً اضافه می‌کنیم راس u را به تمام u ها اضافه می‌کنیم

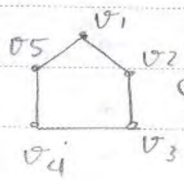
حالا برای داریم با عدد رنگی 3 و $\chi=3$ و به مثلث هم ندارد

نکته: در ساختار میسلسکی از روی گراف G_1، گراف G_2 می‌سازیم که $\chi(G_1)=K$

$\chi(G_2)=K+1$ است و G_2 فاقد مثلث است $|V(G_2)|=2|V(G_1)|+1$

مثلاً برای به دست آوردن یک گراف که عدد رنگی آن ۴ است بالا به آن صورت عمل کنیم

شکل



را ابتدا قرار دهیم به ازای هرکدام از v ها یک راس u قرار می‌دهیم و مثلاً اگر

(۱۰)

Subject:

Year. Month. Date. ( )

رأس v_6 داریم باید رأس ها را به رأسهای همسایه اش متصل کنیم یعنی مثلا به رأسهای v_2 و v_5 متصل می شود

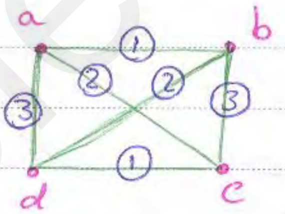
و به همین صورت مثلا ها را به رأسهای همسایه متصل می کنیم چون تا v_5 داریم پس مثلا های مانند تا مثلا است و بعد از هر دو یک رأس اضافه می کنیم این رأس را چون ان اضافه می کنیم page166 یک یال آخری که چون اضافه می کنیم ها در وسط قرار داده است

رنگ آمیزی یالی :

به یال های گراف رنگ نسبت دهیم به طوری که یال هایی که رأس مشترک دارند هم رنگ نباشند.

$\chi'(G) =$ عدد رنگی یالی

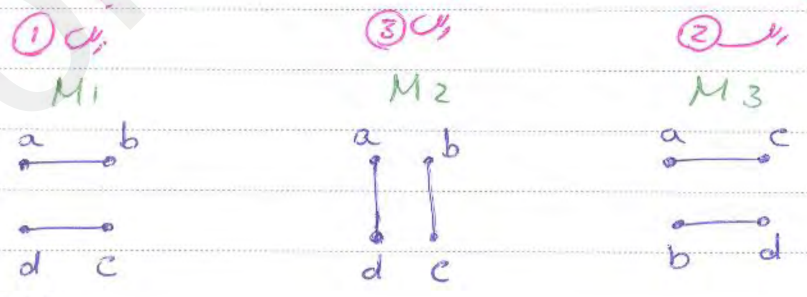
$\chi' = 2$



$\chi'(K_4) = 3$

دو یالی که با هم موازی هستند می توانند رنگهای برابر داشته باشند چون رأس مشترک ندارند

تطابق ها :

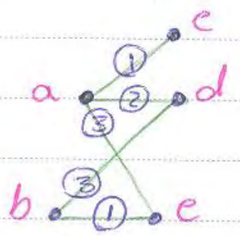


جلسه یازدهم :

نکته: $\chi'(K_n) = \begin{cases} n-1 & n \text{ زوج} \\ n & n \text{ فرد} \end{cases}$

برای گرافهای ساده $\Delta \leqslant \chi'(G) \leqslant \Delta+1$

بهتر است از یالهایی که به پرتوان‌ترین راس متصل هستند شروع به رنگ کردن بکنیم.



پرتوان‌ترین راس a است $\Delta = 3$

پس اول یالهای متصل به راس a را رنگ میکنیم

چون راس a از همه راس‌ها بیشتر است

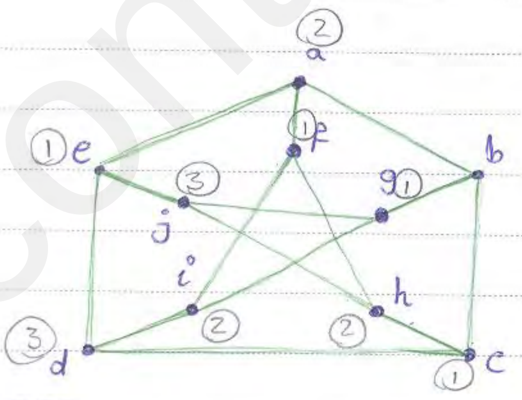
$\chi'(G) = 3$

این نوع گراف، گراف دوبخشی است پس χ' آن 2 است

برای گرافهای دوبخشی χ' مساوی با Δ است

نکته: گراف دوبخشی $\chi' = \Delta$

مثال: عدد رنگی راسی گراف زیر را به دست بیاورید؟



حل: $\chi \geqslant 2$

براساس قضیه بروکس $\chi \leqslant 3$

اگر گراف دور فرد نداشته باشد و گراف کامل هم نباشد می‌شود $\chi \geqslant \Delta$

۲ رأس از داخل و ۲ رأس از خارج انتخاب می کنیم یعنی همان رئوس مستقل هستند یعنی

عدد استقلال

یال مشترک بین این رئوس وجود ندارد. در گراف پترسن $\alpha=4$ است

مثلاً رأس های $\{f, g, c, e\}$ بهتر است رأسهای داخلی را اول رنگ دهیم

پس این چهار رأس را با یک رنگ می توانیم رنگ بگیریم مثلاً رنگ ①

① رنگ $\{f, g, c, e\}$

② رنگ $\{h, i, a\}$

③ رنگ $\{b, d, j\}$

برای رنگ آمیزی رئوس فرد یا در مورد گراف پترسن C_5 است پس حداقل به 3 رنگ

احتیاج داریم $\chi=3$ پس کمتر از 3 امکان پذیر نیست

نکته: χ گراف پترسن همواره 3 است.

برای به دست آوردن χ' گراف پترسن از فرمول $\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta+1$ استفاده می کنیم

$\Delta=3 \quad 3 \leq \chi' \leq 4$

$\chi'(\text{پترسن}) = 4$

$\chi(\text{پترسن}) = 3$

جلسه یازدهم:

تطابقی که تمام رأس‌ها را شامل می‌شد تطابق کامل می‌گویند در گراف پترسن برچسب‌ها با هم تطابق کامل دارند.

تطابق کامل

رنگ ①
- a — f
- b — g
- c — h
- d — i
- e — j

تمام این یال‌ها را می‌توانیم با یک رنگ، رنگ آمیزی کنیم

نکته: پس با بررسی یک به یک یال‌ها به این نتیجه می‌رسیم که $\chi = 4$ است و $\chi = 3$ است.

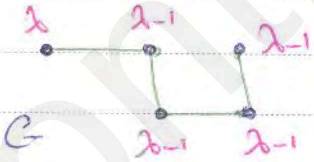
رنگ ②
- a — b
- c — d
- f — h
- g — j

رنگ ③
- b — c
- a — e
- f — i
- h — j

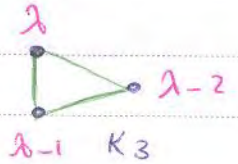
رنگ ④
- d — e
- i — g

چند جمله‌ای رنگی: «مربوط به رنگ آمیزی رأس‌ها است»

فرض می‌کنیم تعداد رنگ‌هایی که در اختیار داریم λ تا رنگ داریم پس برای رأس اول هیچ محدودیتی نداریم برای (λ همواره تعداد رنگ‌هایی است که در اختیار داریم) رأس اول λ تا رنگ می‌توانیم انتخاب می‌کنیم. برای رأس بعدی دیگر λ تا انتخاب نداریم پس $\lambda-1$ انتخاب داریم چون رنگ رأس اول را نمی‌توانیم انتخاب کنیم



چند جمله‌ای رنگی $P(G,\lambda) = \lambda(\lambda-1)^4$ چند جمله‌ای وابسته به شکل بالا



$$F(K_3, \lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$$

چند جمله ای رنگ برای هر گراف کامل:

$$F(K_n, \lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-(n-1))$$

$$= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-n+1)$$

چند جمله ای رنگ برای هر گراف مسیر: "P_n"

گراف مسیر

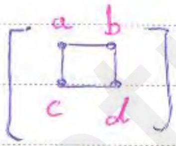
$$F(P_n, \lambda) = \lambda(\lambda-1)^{n-1}$$

به طور کلی:

$$F(T, \lambda) = \lambda(\lambda-1)^{n-1}$$

نوع گراف درخت

نکته:



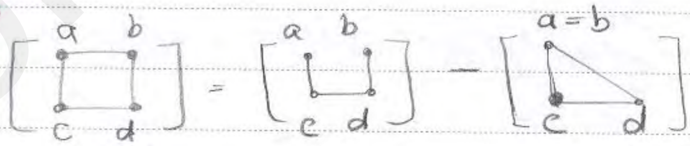
$= ?$

چند جمله ای رنگ گراف زیر را بدست بیاورید؟

منقبض بکن

$$F(G, \lambda) = F(G-e, \lambda) - F(G.e, \lambda)$$

حل:



یال $e=\{a,b\}$ را حذف

می کنیم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

جلسه یازدهم:

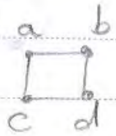
$$= \lambda(\lambda-1)^3 - \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) =$$

از یک λ فاکتور می‌گیریم:

$$= \lambda(\lambda-1)\left((\lambda-1)^2 - (\lambda-2)\right)$$

$$= \lambda(\lambda-1)(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - \lambda + 2)$$

$$= \lambda(\lambda-1)(\lambda^2 - 3\lambda + 3)$$



چندجمله‌ای رنگ در مربع

اگر چندجمله‌ای رنگ را داشته باشیم می‌توانیم χ را به دست بیاوریم

کوچکترین عددی که چندجمله‌ای رنگ را غیر صفر کند χ می‌شود

اگر به جای $\lambda = 2$ قرار دهیم چندجمله‌ای رنگ غیر صفر می‌کند پس χ برابر 2 است

در چندجمله‌ای گراف کامل اگر به جای λ قرار دهیم n «$\lambda = n$» چندجمله‌ای رنگ را غیر صفر می‌کند

پس عدد رنگی ما «χ» گراف کامل n است.

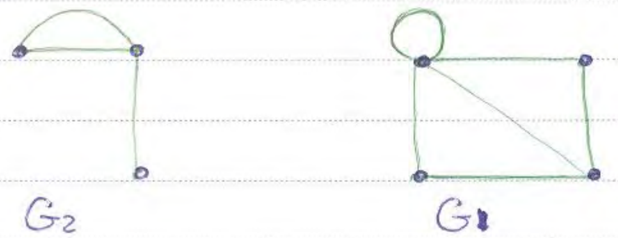
P4PCO

جلسه یازدهم:

فصل هشتم:

گراف مسطح:

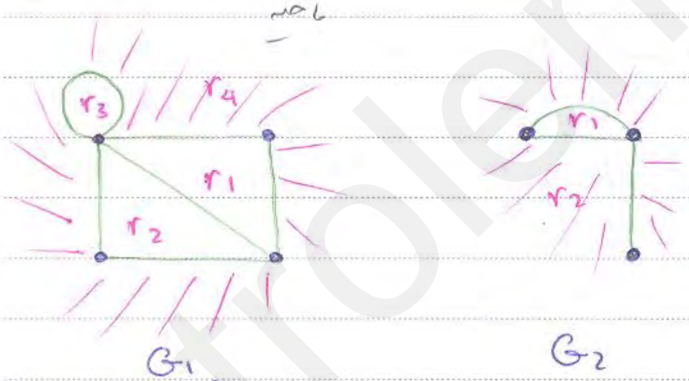
گرافی گراف مسطح است که بتوانیم آن را در صفحه به صورتی رسم کنیم که یالها همدیگر را قطع نکنند



ناحیه وجه

قسمتی از شکل است که توسط تعدادی از یالها بسته یا محصور شده است را ناحیه می‌نامیم

استثنائاً یک ناحیه بیرونی هم داریم.



تعداد ناحیه‌ها را با ℓ نمایش می‌دهیم

تعداد ناحیه‌ها وجوه $\ell = 4$ تعداد ناحیه‌ها وجوه $\ell = 2$

نکته: برای گرافهای مسطح می‌توانیم ناحیه یا وجوه از بسته دار را بررسی و مسئله را حل کنیم

درجه ناحیه: تعداد یالهایی که آن ناحیه را می‌سازد   تعداد یالهایی است که به یک بسته دور یا دوران ناحیه وجود دارد

درجه ناحیه r_3 از گراف G_1 برابر یک است $\deg r_3 = 1$

درجه ناحیه r_1 و r_2 در گراف G_1 برابر 3 است. $\deg r_1 = \deg r_2 = 3$

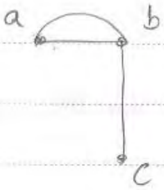
(17)
Subject:
Year. Month. Date. ( )

جلسه یازدهم :

گفتیم لیست بسته دور یا مرز این ناحیه می‌چرخیم مثلا در گراف G_1 در مثال قبل درجه این 5 است

$\deg r_4 = 5$

در گراف G_2 درجه r_2 برابر 4 است

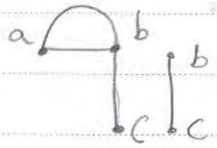


$\deg r_2 = 4$

$\deg r_1 = 2$

چون یال $\{b,c\}$ یال معلق است باید دوبار از آن باید عبور کنیم

اگر از b شروع می‌کنیم باید به b نیز خاتمه بیابد



$\{b,c\}$ را دوبار می‌شماریم

$\deg r_1 + \deg r_2 = 6$

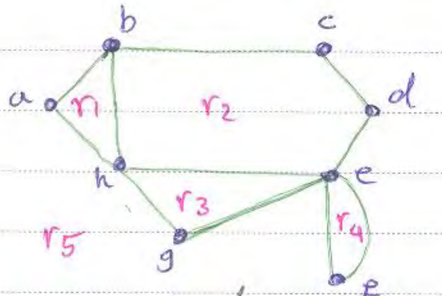
2 برابر تعداد یالها است « ما در اینجا 3 یال داریم »

تعداد وجوه l

$$\sum_{i=1}^{l} \deg r_i = 2|E|$$

نکته : یعنی مثلا در گراف G_1 برای پیدا کردن درجه ناحیه r_1 به این صورت کار می‌کنیم

از a به b می‌رویم یک یال از b به c یک یال از c به a یک یال پس درجه 3 است



$\deg r_1 = 3$ $\deg r_4 = 2$

$\deg r_2 = 5$

$\deg r_5 = 9$

$\deg r_3 = 3$ با دور زدن هر ناحیه به یالهای مشترک کار داریم

یعنی می‌گوییم a به h / h به g / g به e / e به f / f به e / e به d / d به c / c به b / b به a همبند

قضیه معروف اویلر ① در گراف مسطح G

$n - m + \ell = 2$

تعداد رئوس ← n، تعداد یالها ← m، تعداد ناحیه‌ها (وجوه) ← ℓ

② در گراف ساده و مسطح و همبند G $(n \geq 3)$ داریم:

$m \leq 3n - 6$

* یعنی از گراف K_1 و یا K_2 استفاده نباید بکنیم چون در آنها قضیه صدق نمی‌کند

نکته: اگر گراف G ساده و $m > 3n - 6$ باشد در آن صورت G نامسطح است

در آن قضیه نیز $n \geq 3$ است.

اگر نامساوی برقرار باشد نمی‌توان گفت مسطح است ولی اگر برقرار نبود هیچ شکی در نامسطح بودن نداریم

مثال ۱: نشان دهید که گراف K_5 غیرمسطح است؟ K_5 یک گراف ساده است

$n = 5$

$m = 10$

$m \overset{?}{>} 3n - 6$

$10 > 3 \times 5 - 6 = 9$

بنابراین K_5 غیرمسطح است.

جلسه نوزدهم :

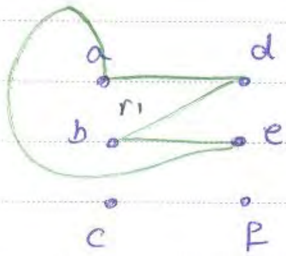
سوال ۱۱: نشان دهید که گراف $K_{3,3}$ غیرمسطح است ؟ $K_{3,3}$ ساده است

$m \overset{?}{>} 3n-6$ $n=6$ $m=9$

$9 > 3\times6-6=12$ ✗

نمی‌توان هیچ نتیجه‌ای گرفت

فرض خلف: فرض می‌کنیم $K_{3,3}$ مسطح باشد



$\deg r_1 = 4$ a به e / e به b / b به d / d به a

درجه هر ناحیه در این گراف حداقل ۴ است.

$\deg r_i \geq 4$

$$2m = \sum_{i=1}^{l} \deg r_i \geq 4l$$

$$2m \geq 4l \rightsquigarrow m \geq 2l \overset{m=9}{\rightsquigarrow} 9 \geq 2l$$

به تناقض رسیدیم ← $K_{3,3}$ غیرمسطح است

$n-m+l=2$

$6-9+l=2 \Rightarrow l=5$

$9 \geq 10$ ✗

کمر گراف: طول کوتاه‌ترین دور در یک گراف را کمر گراف می‌گویند

نکته: گراف پترسن یک گراف مسطح است.